



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
“КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ”  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

**Нефедьев Алексей Владимирович**

ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ И  
ЭКЗОТИЧЕСКИЕ АДРОНЫ  
В НЕПЕРТУРБАТИВНОЙ КХД

Специальность: 01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

2017

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Феноменология околопороговых состояний</b> . . . . .	11
1.1. Введение . . . . .	11
1.2. Распределение Флатте . . . . .	11
1.3. Подход Вайнберга . . . . .	13
1.4. Спектральная плотность . . . . .	16
1.5. Система связанных каналов и полюса матрицы рассеяния . . . . .	18
1.6. Механизмы и вероятности рождения околопорогового резонанса . . . . .	21
1.7. Взаимное влияние кварковых и адронных степеней свободы в околопороговом резонансе. Одноканальный случай . . . . .	24
1.8. Обобщение на многоканальный случай . . . . .	37
1.9. Выводы ко второй главе . . . . .	49
<b>Глава 2. Параметризация формы линии околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков</b> . . . . .	50
2.1. Введение . . . . .	50
2.2. Модель связанных каналов и система уравнений Липпмана-Швингера . . . . .	51
2.3. Унитарная параметризация формы линии околопорогового резонанса . . . . .	62
2.4. Состояния $Z_b(10610)$ и $Z_b(10650)$ в спектре боттомония . . . . .	66
2.5. Природа состояний $Z_b(10610)$ и $Z_b(10650)$ из данных . . . . .	77
2.6. Замечание о спиновых партнёрах $Z_b$ . . . . .	82
2.7. Замечание об однопионном обмене . . . . .	83
2.8. Выводы к третьей главе . . . . .	84
<b>Глава 3. Трёхчастичная динамика в околопороговом резонансе</b> . . . . .	87
3.1. Введение . . . . .	87
3.2. Феноменологический учёт конечной ширины конstituента . . . . .	88
3.3. Проблема трёхчастичной унитарности . . . . .	105
3.4. Константа связи пиона с адронами . . . . .	109
3.5. Выводы к третьей главе . . . . .	123

<b>Глава 4. Свойства состояния <math>X(3872)</math> в спектре чармония</b>	125
4.1. Введение	125
4.2. Проблема квантовых чисел $X(3872)$	128
4.3. Природа состояния $X(3872)$ из данных	132
4.4. Радиационные распады $X(3872)$	143
4.5. Прямое рождение $X(3872)$ в $e^+e^-$ соударениях	150
4.6. Непертурбативный учёт трёхчастичной динамики в $X(3872)$	158
4.7. Однопионный обмен в $X(3872)$	167
4.8. Учёт короткодействующих сил и перенормировка модели	175
4.9. Форма линии $X(3872)$ в упругом канале с учётом трёхчастичной динамики	180
4.10. Выводы к четвёртой главе	187
<b>Глава 5. Киральная экстраполяция энергии связи <math>X(3872)</math></b>	189
5.1. Введение	189
5.2. Свойства состояния $X(3872)$ при нефизической массе пиона	191
5.3. Выводы к пятой главе	200
<b>Заключение</b>	201
<b>Словарь терминов</b>	205
<b>Список литературы</b>	207
<b>Приложение А. Структура полюсов в двухканальной задаче</b>	224
<b>Приложение Б. Вычисление неупругой матрицы <math>G_{\alpha\beta}</math></b>	225
<b>Приложение В. Вывод трёхчастичного уравнения (4.165)</b>	227
<b>Приложение Г. Парциальные ширины распадов <math>D^{*0}</math> мезона</b>	228

# Введение

## Актуальность темы исследования

Основной задачей теории сильных взаимодействия является описание различных свойств адронов, в частности, их спектра масс и взаимодействий. Неабелев характер квантовой хромодинамики делает возможным существование адронных состояний, имеющих более сложную структуру, чем кварк-антикварковые мезоны и трёхкварковые барионы. К числу таких состояний можно отнести гибридные мезоны и барионы, глоболы, тетракварки, адронные молекулы и т.п., причём далеко не все из них описываются простыми кварковыми моделями. Описание и однозначное отождествление таких экзотических адронов является вызовом как для теоретиков, работающих в области феноменологии сильных взаимодействий, так и для специалистов по компьютерным расчётам на решётках, а также для экспериментаторов. Начиная с 2003 года, когда коллаборацией Belle, работающей на  $B$ -фабрике в Цукубе (Япония), было обнаружено чармонийподобное состояние  $X(3872)$ , количество экзотических состояний в спектре чармония и боттомония, не укладывающихся в стандартную схему потенциальных кварковых моделей, стремительно растёт, а вместе с ним растёт и количество вопросов и загадок, требующих разрешения. Планируемая светимость  $B$ -фабрики нового поколения Belle-II при энергии резонанса  $\Upsilon(4S)$  примерно на два порядка превосходит параметры  $B$ -фабрик предыдущего поколения. Такой рост светимости даёт основания ожидать не только существенного улучшения статистики и, как результат, точности описания ранее обнаруженных и измеренных состояний и реакций, но также обнаружения принципиально новых эффектов, ранее недоступных для изучения, в том числе и в области физики адронов. Другим важным источником информации о сильных взаимодействиях является Большой Адронный Коллайдер, расположенный в Европейской лаборатории CERN, а в будущем — эксперимент PANDA (часть программы FAIR) в институте GSI (Дармштадт, Германия).

Описание и объяснение уже имеющихся экспериментальных данных по экзотическим состояниям в спектре адронов, а также более точных данных, получение которых ожидается в будущих высокоточных экспериментах с высокой статистикой как для уже известных состояний, так и для новых, требуют построения и использования адекватных феноменологических подходов. Особое значение имеют подходы к описанию околороговых состояний, поскольку, с одной стороны, количество уже обнаруженных таких состояний быстро растёт ввиду наличия большого числа порогов, а с другой стороны, именно околороговые состояния обладают наиболее интересными свойствами, позволяющими рассчитывать на извлечение из них ценной информации о сильных взаимодействиях. Важно отметить, что описание экспериментальных данных для экзотических состояний требует построения реалистичных, однако при этом достаточно простых и наглядных пара-

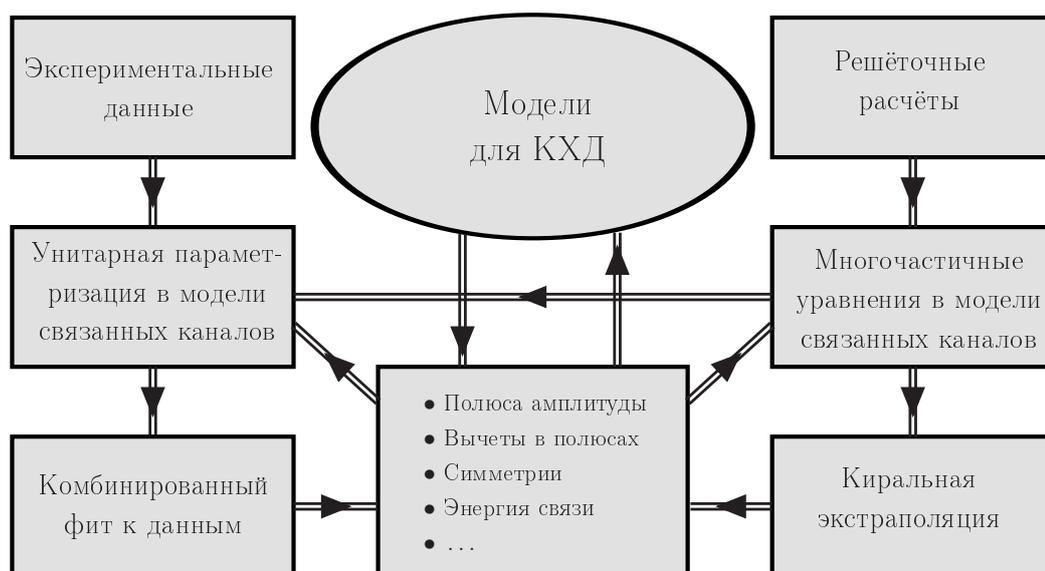


Рис. 1. Схематическое изображение взаимосвязи методов и подходов, предложенных в диссертации, а также их связи с экспериментом (реальным или численным) и теоретическими моделями для КХД — см. пояснения в тексте.

метризаций, призванных заменить “стандартное” распределение Брейта-Вигнера, а в ряде случаев и его расширение в виде распределения Флатте.

Другим важным источником информации об экзотических состояниях в спектре тяжёлых кварков является численный эксперимент, основанный на решёточных расчётах. Соотнесение результатов таких решёточных расчётов с теоретическими моделями и с экспериментальными данными также является важной задачей феноменологии сильных взаимодействий.

В диссертации предложены методы и подходы, призванные играть роль промежуточного звена между экспериментом (реальным или численным) и теоретическими моделями для КХД. На рис. 1 приведено схематическое изображение взаимосвязей между такими методами и подходами. Основой подхода является система уравнений связанных каналов с учётом произвольного числа упругих и неупругих каналов, а также затравочных полюсов (отвечающих кварковым состояниям). Построению такой системы уравнений посвящены первые три главы диссертации. В частности, в первой главе изучаются эффекты, возникающие в околопороговых резонансах за счёт взаимного влияния различных степеней свободы в них, а также подробно описывается используемый формализм. Во второй главе задача связанных каналов применительно к физике тяжёлых кварков рассматривается в наиболее общем виде. Полученная при этом система уравнений позволяет построить достаточно простую, но реалистическую параметризацию для одновременного описания экспериментальных данных для всех каналов реакций рождения и распада рассматриваемого околопорогового резонанса (или резонансов). Возможности предложенной параметризации

демонстрируются на примере описания экспериментальных данных для околопороговых состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония.

Включению в рассмотрение трёхчастичных эффектов, как эффективному, так и полному — за счёт расширения базиса модели, посвящены третья и четвёртая главы диссертации. Обобщённый таким образом подход к околопороговым состояниям позволяет успешно описывать не только сами пороговые явления, но также вычленять трёхчастичную динамику в них, что особенно важно для понимания природы околопороговых явлений, в частности, природы удерживающих сил и взаимодействий в околопороговых резонансах. Кроме того, это позволяет строить киральные экстраполяции для экзотических адронов и, тем самым, интерпретировать результаты решёточных вычислений, выполненных при нефизически больших массах лёгких кварков — данному вопросу посвящена пятая глава диссертации.

Построенные фиты к экспериментальным данным и киральные экстраполяции для результатов решёточных расчётов позволяют извлекать такие параметры изучаемых резонансов, как положение полюсов амплитуды, значения вычетов в полюсах, энергия связи, наличие или, наоборот, нарушение той или иной симметрии и тому подобное. Данные вопросы подробно разбираются в соответствующих разделах диссертации. Важно отметить, что извлечённая таким образом информация может использоваться для уточнения или упрощения используемой системы уравнений связанных каналов, что должно приводить к повышению точности и надёжности описания данных, а также извлечения из них параметров околопороговых резонансов. Важно также, что полученная информация может непосредственно использоваться при построении и тестировании моделей для КХД. И наоборот, при наличии модельных расчётов вычисленные величины (например, константы и формфакторы связи каналов, предсказанные симметрии и т.п.) могут использоваться в качестве входных параметров для предложенного в диссертации подхода. Таким образом, предлагаемый в диссертации метод исследования околопороговых явлений позволяет существенно продвинуться в описании и понимании природы и свойств околопороговых состояний.

### **Цели и задачи диссертационной работы**

Целью диссертации является разработка методов и подходов к описанию пороговых явлений и экзотических адронных состояний в спектре тяжёлых кварков, позволяющих извлекать необходимую для теоретического анализа информацию о природе и свойствах таких состояний из экспериментальных данных, а также из результатов решёточных расчётов.

### **Научная новизна**

Диссертация посвящена исследованию широкого круга вопросов, связанных с физикой экзотических адронов.

**В первой главе диссертации** впервые детально прослежено и описано взаимное влияние

кварковых и адронных степеней свободы в околопороговом резонансе, в том числе в многоканальном случае. Явно продемонстрировано, как учёт такого взаимного влияния может приводить к форме линии резонанса нетривиальной формы. Далее аргументировано, что описание экспериментальных данных полученными формулами может позволить извлекать информацию о природе околопорогового резонанса и об удерживающих силах в нём. Результаты, изложенные в первой главе, опубликованы в работах [1–3].

**Во второй главе диссертации** предложена параметризация формы линии околопороговых резонансов, непertурбативным образом включающая все возможные типы переходов между связанными каналами. Важным свойством полученной параметризации являются её явные унитарность и аналитичность, но при этом достаточная простота, позволяющая её непосредственное использование для анализа экспериментальных данных. Таким образом, в диссертации впервые представлен феноменологический инструмент, позволяющий преодолеть “пропасть” между моделями сильных взаимодействий и экспериментом: описание экспериментальных данных в терминах параметров, допускающих ясную физическую интерпретацию, даёт возможность построения и проверки различных модельных подходов без необходимости непосредственного описания эксперимента. Результаты, изложенные во второй главе, опубликованы в работах [4–11].

**В третьей главе диссертации** исследована возможность эффективного включения в рассмотрение трёхчастичной динамики в околопороговых резонансах, в частности, идентифицирован безразмерный параметр, определяющий возможность такого эффективного рассмотрения без явного расширения базиса системы связанных каналов на трёхчастичные состояния. Далее детально рассмотрена  $D_1 \bar{D}^*$  система, в которой такой эффективный подход к трёхчастичной динамике невозможен, поскольку точный учёт трёхчастичной унитарности является критически важным для описания свойств системы и во избежание ложных выводов, к которым может приводить нарушение трёхчастичной унитарности. Результаты, изложенные в третьей главе, опубликованы в работах [12–22].

**В четвёртой главе диссертации** проведено детальное изучение свойств одного из наиболее характерных представителей семейства экзотических околопороговых состояний — чармонийподобного состояния  $X(3872)$ . В частности, из совместного анализа экспериментальных данных по различным модам распада  $X(3872)$  сделан вывод о том, что  $X$  является слабо связанным состоянием с достаточно большой (порядка 50%) примесью истинного  $\bar{c}s$  чармония. Далее сделаны оценки вероятности прямого рождения  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  соударениях, а также проделаны вычисления вероятностей радиационных распадов  $X(3872)$  в рамках калибровочно инвариантного теоретико-полевого подхода, и продемонстрирована совместимость существующих на данный момент экспериментальных данных по таким распадам с молекулярной моделью  $X$ . Развита метод

непертурбативного учёта однопионного обмена между  $D$  и  $D^*$  мезонами в  $X(3872)$  с помощью системы трёхчастичных уравнений типа уравнения Фаддеева. Из решения полученной системы уравнений сделан ряд выводов относительно роли однопионного обмена для формирования и природы  $X(3872)$ . В частности, показано, что однопионный обмен является недостаточно удерживающим для формирования  $X(3872)$  как связанного состояния. Далее, на основе выведенной системы трёхчастичных уравнений сформулирован теоретико-полевой подход к описанию  $X(3872)$  в рамках системы связанных каналов с непертурбативным учётом как короткодействующих сил, так и дальнедействующей части однопионного обмена  $X(3872)$ . Получены количественные оценки влияния динамических пионов на форму линии резонанса и, в частности, продемонстрирована важность явного учёта пионной динамики в  $X(3872)$ . Результаты, изложенные в четвёртой главе, опубликованы в работах [23–37].

**В пятой главе диссертации** предложен метод киральной экстраполяции энергии связи  $X(3872)$  по массе пиона с целью интерпретации решёточных данных, полученных при нефизически большой массе пиона (массе лёгкого кварка), а также извлечения из них информации о свойствах изучаемого околопорогового резонанса в физической точке по массе пиона. Результаты, изложенные в пятой главе, опубликованы в работах [38, 39].

Таким образом, в диссертации впервые предложен комплексный подход к исследованию природы околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков на основании всех доступных источников информации о них. В частности, метод включает в себя анализ экспериментальных данных с помощью предложенной оригинальной параметризации, извлечение из них параметров системы, допускающих ясную физическую интерпретацию, а также их последующее использование в качестве входных параметров для теоретического описания свойств системы недоступных для экспериментального исследования, например, построения различных киральных экстраполяций. Метод допускает и обратную последовательность действий, при которой любая дополнительная информация об изучаемой системе, такая как дополнительные симметрии или данные, извлечённые из решёточных расчётов, может быть непосредственно включена в параметризацию формы линии резонанса с последующим анализом экспериментальных данных с её помощью — см. схему на рис. 1.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Результаты, изложенные в диссертации, имеют как чисто теоретическое, так и прикладное значение. В частности, сделанные оценки вероятностей рождения и распадов околопороговых состояний могут использоваться при планировании будущих экспериментов, а также при интерпретации их результатов. Предложенные в диссертации методы призваны облегчить обработку и анализ экспериментальных данных, сделать возможным извлечение из них наиболее полной информации об изучаемых околопороговых состояниях, а также непосредственное использование извле-

чѐнной информации в теоретических построениях. Развитые подходы позволяют существенно облегчить непосредственную имплементацию в анализе данных различных теоретических условий и ограничений, например, требований симметрий, информации, извлѐченной из решѐточных или модельных расчѐтов, и т.п. Также в диссертации предложен теоретико-полевой подход к описанию свойств состояния чармония  $X(3872)$ . Одним из приложений метода, описанным в диссертации, является построение киральной экстраполяции энергии связи  $X$  по массе лёгкого кварка, который открывает возможность интерпретации соответствующих решѐточных данных и извлечения из них информации о природе, удерживающих силах и других свойствах  $X(3872)$ . Развитый метод допускает естественное обобщение на другие окологороговые состояния в спектре тяжѐлых кварков.

**Положения, выносимые на защиту:**

- Построена согласующаяся с требованиями унитарности и аналитичности феноменологическая параметризация для описания формы линии окологороговых резонансов в спектре тяжѐлых кварков.
- С помощью построенной параметризации проведѐн совместный анализ экспериментальных данных для различных мод рождения и распада окологорогового состояния  $X(3872)$  в спектре чармония, а также окологороговых состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония, позволивший сделать вывод об их природе и описать форму их линии в каналах распада с открытым и скрытым ароматом.
- Построен самосогласованный теоретико-полевой подход к описанию чармонийподобного состояния  $X(3872)$  в рамках системы связанных каналов с непертурбативным учѐтом как короткодействующих сил, так и однопионного обмена. Продемонстрирована важная роль учѐта динамических пионов. Предложенный подход допускает естественное обобщение на другие окологороговые состояния в спектре тяжѐлых кварков.
- Получена киральная экстраполяция энергии связи чармонийподобного состояния  $X(3872)$  по массе пиона, позволяющая связать физический предел и область больших масс пионов, используемых в решѐточных расчѐтах.
- Сделана оценка вероятности прямого рождения  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  соударениях. Полученная оценка указывает на принципиальную возможность наблюдения изучаемого процесса на уже работающих ускорителях, в частности, в эксперименте BESIII.
- В рамках явно калибровочно инвариантного подхода получены оценки вероятностей ради-

ационных распадов  $X(3872)$  в молекулярной модели. Продемонстрировано согласие полученных оценок с экспериментально измеренными значениями.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались на теоретических семинарах ИТЭФ, в других научных центрах, сессиях-конференциях секции отделения ядерной физики РАН, школе физики ИТЭФ, а также на различных международных конференциях, в частности, на “12th International Conference on Hadron Spectroscopy”, 2007; “Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum (Confinement)”, 2008, 2010, 2016; “447th Wilhelm and Else Heraeus Seminar: Charmed Exotics”, 2009; “International Workshop on Heavy Quarkonium”, 2011; “2d SuperB Collaboration Meeting”, 2011; “Bethe Forum: Exotic Hadrons”, 2012; “New Hadrons”, 2014; “International Workshop on Exotic Hadron”, 2015; “The International Conference on Particle Physics and Astrophysics”, 2015.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в работах [1–39], из них 26 статей в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК, 5 статей в сборниках трудов конференций, а также 8 тезисов докладов.

### **Личный вклад автора**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из Введения, 5 глав, Заключение, 4 приложений и библиографии. Общий объем диссертации 228 страниц, включая 56 рисунков и 11 таблиц. Библиография включает 265 наименований.

# Глава 1

## Феноменология околопороговых состояний

### 1.1. Введение

В данном разделе диссертации развивается непертурбативный подход к описанию формы линии околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков, в частности, к описанию данных по экзотическим состояниям, обнаруженным в спектре чармония и боттомония. Основным источником информации о таких состояниях являются  $e^+e^-$  коллайдеры, в первую очередь, так называемые В-фабрики (BABAR, Belle, в недалёком будущем — Belle-II). Протон-протонные столкновения на LHC, во многом за счёт высокой статистики, также вносят весомый вклад в исследования экзотических адронных состояний. В будущем ожидается также набор данных по адронным состояниям с тяжёлыми кварками, включая экзотические адроны, коллаборацией PANDA на антипротонной установке FAIR.

### 1.2. Распределение Флатте

Хорошо известно, что форма линии изолированного резонанса, лежащего далеко от других состояний, а также далеко от порогов, описывается формулой Брейта-Вигнера, которая в нерелятивистском пределе имеет простой вид:

$$BW(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + \frac{i}{2}\Gamma_0} \quad (1.1)$$

и определяется двумя параметрами: положением пика  $E_0$  и его шириной  $\Gamma_0$ . Вклад в ширину дают открытые пороги, причём в силу их удалённости от положения резонанса зависимостью  $\Gamma_0$  от энергии в области резонанса можно пренебречь. Ситуация коренным образом меняется, если вблизи резонанса расположен  $S$ -волновой порог. Вклад такого порога в ширину резонанса не может уже описываться постоянной величиной, поскольку импульс в соответствующем канале распада резонанса является быстро меняющейся в области порога функцией энергии. Следовательно, формула для распределения, учитывающая указанный факт, должна иметь вид [40]:

$$F(E) = \frac{g/2}{E - E_f + \frac{i}{2}(gk(E) + \Gamma_0)}, \quad (1.2)$$

где адронный канал, отвечающий близлежащему порогу, учтён в ширине явно с  $\Delta\Gamma = \frac{1}{2}gk(E)$ , в соответствии с его  $S$ -волновой природой. Константа  $g$  учитывает силу связи резонанса с адронным каналом, а величина  $E_f$  традиционно называется параметром Флатте. Важно отметить, что

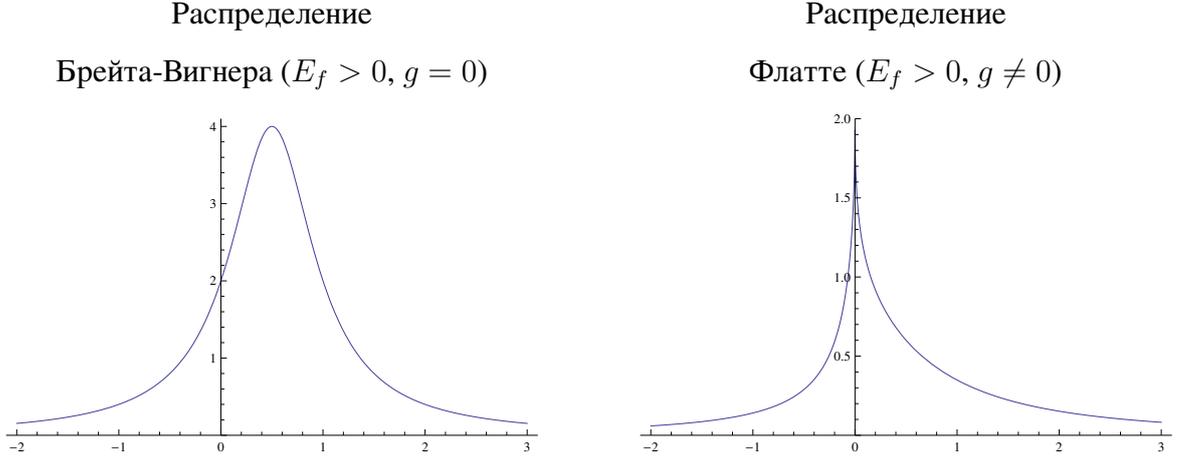


Рис. 1.1. Примеры распределений, даваемых формулой (1.4) с  $E_f > 0$ . На левом графике представлено распределение Брейта-Вигнера, отвечающее случаю  $g = 0$ , а на правом — распределение Флатте с  $g \neq 0$ .

аналитичность функции (1.2) требует аналитически продолжить импульс  $k(E)$  под порог, где он уже будет давать вклад в действительную часть знаменателя:

$$k(E) = \sqrt{2\mu E}\Theta(E) + i\sqrt{-2\mu E}\Theta(-E). \quad (1.3)$$

Здесь  $\mu$  есть приведённая масса в данном канале. Тогда, например, в неупругом канале форма линии резонанса даётся формулой

$$\frac{dBr_{in}(E)}{dE} = \text{const} \times \frac{\Gamma_0}{(E - E_f - \frac{1}{2}g\sqrt{-2\mu E}\Theta(-E))^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_0 + g\sqrt{2\mu E})^2}, \quad (1.4)$$

где общая константа учитывает особенности рождения данного резонанса и не влияет на форму линии. На рис. 1.1 приведены два характерных случая, описываемых формулой (1.4). Для определённости рассмотрен случай  $E_f > 0$ . В пределе  $g = 0$  формула (1.4) воспроизводит распределение Брейта-Вигнера. При этом пик располагается в точке  $E = E_f$  и имеет видимую ширину  $\Gamma_{\text{vis}} = \Gamma_0$ . Однако в случае  $g \neq 0$  форма линии, даваемая распределением (1.4), весьма сильно отличается от колоколообразной формы Брейта-Вигнера. Во-первых, формально пик располагается строго на пороге (так называемый пороговый касп), а его видимая ширина оказывается весьма маленькой, существенно меньше параметра  $\Gamma_0$ , что кажется контринтуитивным, поскольку в систему был добавлен новый канал, так что мнимая часть распределения (1.2) стала больше.

Если распределение Флатте (1.2) переписать в терминах относительного импульса  $k$ , то оно принимает вид стандартного разложения эффективного радиуса

$$F(k) = -\frac{1}{-a^{-1} - ik + (k^2 r_e)/2}, \quad k \ll \beta, \quad (1.5)$$

где

$$a^{-1} = -\frac{1}{g}(2E_f - i\Gamma_0), \quad r_e = -\frac{2}{\mu g}, \quad (1.6)$$

а через  $\beta$  обозначен радиус действия сил, физическая природа которых не влияет на модельно независимое описание резонанса вблизи порога с помощью распределения (1.5).

Из формулы (1.5) видно, что возможны два режима [41]. Так, если  $a^{-1} \simeq k^2 r_e \gg k$ , то амплитуда (1.5) имеет два почти симметрично расположенных околороговых полюса. Связь с адронным каналом в этом режиме слабая, поэтому о резонансе можно говорить как об “элементарном”, например, являющимся просто кварк-антикварковым мезоном. С другой стороны, если  $a^{-1} \simeq k \gg k^2 r_e$ , то, наоборот, пренебречь можно вкладом эффективного радиуса, так что в итоге в околороговой области остаётся всего один полюс при  $k \simeq i/a$ . В этом случае резонанс имеет динамическую природу. Описанная картина связи количества и расположения полюсов с природой околорогового резонанса обсуждается в работе [41]. Следует отметить, что в последнем режиме (то есть после пренебрежения членом  $E$  в знаменателе) распределение (1.2) демонстрирует свойство скейлинга, то есть амплитуда инвариантна относительно замены [42]

$$E_f \rightarrow \lambda E_f, \quad g \rightarrow \lambda g, \quad \Gamma_0 \rightarrow \lambda \Gamma_0 \quad (1.7)$$

с произвольным параметром  $\lambda$ . Данное свойство уменьшает число физических параметров амплитуды и может приводить к трудностям в процессе фитирования данных, поскольку фиты, связанные преобразованием (1.7), практически неразличимы.

### 1.3. Подход Вайнберга

Анализ полюсов амплитуды для извлечения природы резонанса, предложенный в работе [41] и кратко изложенный выше, может быть обобщён на более строгий подход, разработанный С. Вайнбергом [43–45]. В основе данного метода лежит анализ низкоэнергетических наблюдаемых, из которого оказывается возможным сделать вывод о том, является ли данное состояние “элементарным” или динамическим. В работе [45] применение предложенного подхода продемонстрировано на примере дейтрона, однако он допускает естественное обобщение на произвольный околороговый резонанс. Остановимся на данном вопросе немного более подробно.

Рассмотрим систему, описываемую уравнением Шредингера (энергия для удобства отсчитывается от двухчастичного порога, то есть от суммы масс адронов  $M_1$  и  $M_2$ )

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (1.8)$$

с двухкомпонентной волновой функцией

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} C|\psi_0\rangle \\ \chi(p)|M_1 M_2\rangle \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

и матричным гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_0 & \hat{v}_{0h}[\mathbf{p}] \\ \hat{v}_{h0}[\mathbf{p}] & \hat{H}_{hh}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где квадратные скобки использованы в обозначении операторов для того, чтобы отличать их от соответствующих функций. В частности,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}[\mathbf{p}]C &\equiv \mathcal{O}(\mathbf{p})C, \\ \hat{\mathcal{O}}[\mathbf{p}]\chi(\mathbf{p}) &\equiv \int \mathcal{O}(\mathbf{p})\chi(\mathbf{p})d^3p, \\ \hat{\mathcal{O}}[\mathbf{p}, \mathbf{p}']\chi(\mathbf{p}) &\equiv \int \mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\chi(\mathbf{p}')d^3p'. \end{aligned}$$

В гамильтониане (1.10)  $E_0$  есть “голая” энергия “элементарного” состояния (например, истинного кваркония), потенциалы  $\hat{v}_{0h}$  и  $\hat{v}_{h0}$  описывают взаимодействие, обеспечивающее переходы между “элементарным” и молекулярным состояниями:

$$\langle \psi_0 | \hat{v}_{0h}[\mathbf{p}] | M_1 M_2 \rangle = \langle M_1 M_2 | \hat{v}_{h0}[\mathbf{p}] | \psi_0 \rangle = f(\mathbf{p}), \quad (1.11)$$

а гамильтониан  $\hat{H}_{hh}$  отвечает за динамику молекулярной компоненты. В простейшем случае он описывает свободное движение адронов  $M_1$  и  $M_2$  и, следовательно, даётся просто кинетической энергией их относительного движения  $\mathbf{p}^2/(2\mu)$  ( $\mu$  есть приведённая масса). Верхняя граница импульсов определяется жёсткой шкалой модели, роль которой играет обратный радиус действия сил  $\beta$ . При этом нетрудно получить оценку  $\beta \simeq 1$  ГэВ, поскольку именно до таких масштабов кварковое состояние может рассматриваться в качестве “элементарного”, то есть бесструктурного. При бóльших импульсах для описания потенциала перехода  $\hat{v}_{0h}$  необходимо привлекать кварковые модели. Аналогичную оценку можно получить, исходя из массы легчайших мезонов, обменами которыми пренебрегается:  $\beta \simeq m_\rho$ .

Уравнение Шредингера (1.8) допускает два типа решений: связанное состояние с энергией связи  $E = -E_B$  и волновой функцией  $\{C_B, \chi_B(p)\}$ , а также состояние непрерывного спектра с  $E = k^2/(2\mu)$  и  $\{C_k, \chi_k(p)\}$ , которые взаимно ортогональны:

$$C_B C_{k'}^* + \int \chi_B(p) \chi_{k'}^*(p) d^3p = 0. \quad (1.12)$$

Для данных решений условия нормировки и полноты набора волновых функций принимают вид

$$C_B^2 + \int \chi_B^2(p) d^3p = 1, \quad C_k C_{k'}^* + \int \chi_k(p) \chi_{k'}^*(p) d^3p = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.13)$$

$$C_B^2 + \int |C_k|^2 d^3k = 1, \quad \chi_B(p) \chi_B^*(p') + \int \chi_k(p) \chi_k^*(p') d^3k = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.14)$$

Для связанного состояния величина  $C_B^2$  определяет вероятность обнаружения “голой” компоненты в физическом состоянии, то есть описывает константу перенормировки поля  $\psi_0$  при включении взаимодействия с адронным каналом. По этой причине вместо  $C_B$  часто используется обозначение  $\sqrt{Z}$ . Таким образом,

$$C_B^2 \equiv Z \equiv \cos^2 \theta, \quad (1.15)$$

где для удобства введён угол  $\theta$ , для которого нетрудно найти, что

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \left( \frac{\partial \mathcal{G}_0(E)}{\partial E} \right)_{|E=-E_B}. \quad (1.16)$$

Здесь  $\mathcal{G}_0(E)$  есть петлевая функция:

$$\mathcal{G}_0(E) = \text{---} \circ \text{---} = \int f^2(\mathbf{p}) S(\mathbf{p}) d^3 p, \quad (1.17)$$

а  $S(\mathbf{p})$  есть свободный пропагатор мезонного состояния:

$$S(\mathbf{p}) = \frac{1}{p^2/(2\mu) - E - i0}. \quad (1.18)$$

Тогда непосредственным вычислением можно найти:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \int \frac{f^2(p) d^3 p}{[p^2/(2\mu) + E_B]^2} \approx \frac{4\pi^2 \mu^2 f^2(0)}{\sqrt{2\mu E_B}}, \quad (1.19)$$

где в последнем вычислении удержан лишь лидирующий член в разложении по обратному радиусу действия сил  $\beta$ , поскольку  $\beta \gg \sqrt{2\mu E_B}$ . Как нетрудно видеть, в данном пределе решение совершенно нечувствительно к деталям взаимодействия, а зависит лишь от эффективной константы  $4\pi^2 \mu^2 f^2(0)$  и от энергии связи  $E_B$ . Благодаря этому свойству предложенный подход является универсальным, а его предсказания относительно природы состояния  $|\Psi\rangle$  модельно независимыми. В частности, амплитуду упругого рассеяния в канале  $M_1 M_2$  можно записать в виде (1.6) с длиной рассеяния и эффективным радиусом, даваемыми следующими выражениями [43–45]:

$$a = \frac{2(1-Z)}{2-Z} \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} + O\left(\frac{\sqrt{\mu E_B}}{\beta}\right), \quad r_e = -\frac{Z}{1-Z} \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} + O\left(\frac{\sqrt{\mu E_B}}{\beta}\right). \quad (1.20)$$

Таким образом, если изучаемое физическое состояние является в основном “элементарным”, то  $Z \approx 1$ , так что длина рассеяния мала, тогда как эффективный радиус, наоборот, принимает большие отрицательные значения. В обратном пределе  $Z \rightarrow 0$  эффективный радиус пренебрежимо мал, тогда как длина рассеяния принимает конечные значения, и в околопороговой области выживает лишь один полюс амплитуды. В этом случае в волновой функции (1.9) доминирует молекулярная компонента  $|M_1 M_2\rangle$ . Таким образом, нетрудно видеть, что подход Вайнберга полностью согласуется с методом изучения полюсов амплитуды рассеяния, предложенным в работе [41].

Резюмируя, можно утверждать, что в рамках предложенного С. Вайнбергом подхода “элементарные” состояния с  $Z \approx 1$  (в дальнейшем они будут для определённости называться кварковыми) характеризуются двумя окологороговыми полюсами в комплексной  $k$ -плоскости, большим отрицательным эффективным радиусом, а также маленькой длиной рассеяния и маленькой эффективной константой связи с адронным каналом. Динамически генерируемое адронное состояние, наоборот, отвечает маленьким значениям  $Z$ , одному окологороговому полюсу, маленькому эффективному радиусу и большим значениям длины рассеяния и эффективной константы связи. Следует заметить, что в последнем случае знак эффективного радиуса уже плохо определён, поскольку поправки  $O(1/\beta)$  могут оказаться велики по сравнению с формально лидирующим членом, который численно мал за счёт малых  $Z$ . В частности, из-за таких поправок эффективный радиус может стать положительным, так что в итоге становится невозможно различать  $s$ - и  $t$ -канальные обмены, а можно лишь утверждать, что состояние является в основном молекулярным.

## 1.4. Спектральная плотность

Описанный выше метод С. Вайнберга анализа природы резонанса применим в случае близкого расположения изучаемого резонанса к двухчастичному  $S$ -волновому порогу, а также для стабильных адронов  $M_1$  и  $M_2$ . К сожалению, последнее требование практически невыполнимо в адронной физике. При этом формальное введение ширины немедленно приводит к проблеме с интерпретацией  $Z$  фактора, который становится комплексной величиной. Следовательно, подход Вайнберга нуждается в обобщении. Такое обобщение предложено в работе [46], где для анализа природы резонанса используется спектральная плотность, ранее введённая в работе [47]. Идея обобщения состоит в том, чтобы извлекать информацию о природе резонанса не из волновой функции связанного состояния (которое, вообще говоря, может и вовсе отсутствовать в системе), а из волновой функции непрерывного спектра. В частности, можно определить величину (спектральную плотность)

$$w(M) = 4\pi\mu k |C_k(M)|^2 \Theta(M - M_{\text{th}}^{\min}), \quad M = m_1 + m_2 + E, \quad k = \sqrt{2\mu E}, \quad (1.21)$$

где  $M_{\text{th}}^{\min}$  есть наиболее низколежащий адронный порог, а также переписать её в виде [46]:

$$w(M) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{M - M_0 + \mathcal{G}_0^*(M)} - \frac{1}{M - M_0 + \mathcal{G}_0(M)} \right]. \quad (1.22)$$

Так введённая спектральная плотность нормирована условием [47]

$$\int_{M_{\text{th}}^{\min}}^{\infty} w(M) dM = \begin{cases} 1, & \text{в отсутствие связанных состояний} \\ 1 - \sum_i Z_i, & \text{при наличии связанных состояний,} \end{cases} \quad (1.23)$$

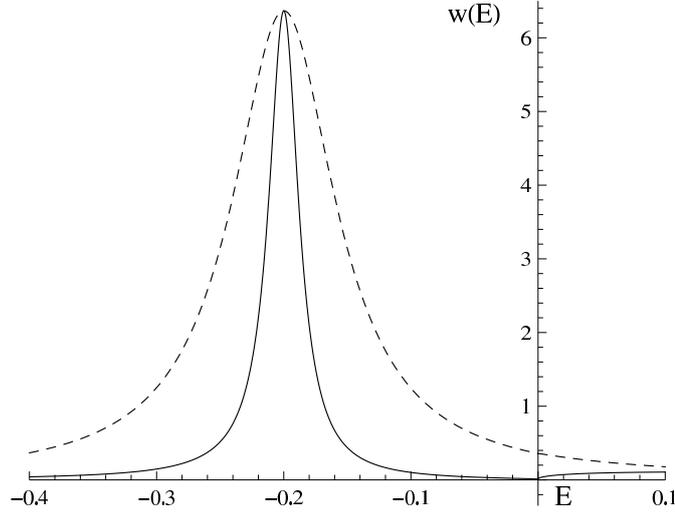


Рис. 1.2. Спектральная плотность  $w(E)$ , заданная формулами (1.25) и (1.26) для случая А (пунктирная линия) и случая Б (сплошная линия)

которое легко получить с помощью соотношений (1.14) и (1.15), а также определения (1.21).

Таким образом, очевидно, что интеграл от спектральной плотности

$$W = \int_{M_{\text{th}} - \Delta}^{M_{\text{th}} + \Delta} w(M) dM \quad (1.24)$$

по области вблизи упругого порога  $M_{\text{th}} = m_1 + m_2$  определяет примесь кваркового состояния в околороговом резонансе. В частности, если  $W \approx 1$ , то речь идёт о практически чистом кваркони, тогда как  $W \ll 1$  говорит о динамической природе резонанса. Размер области интегрирования  $\Delta$  зависит от конкретной рассматриваемой системы. Следовательно, околороговый интеграл от спектральной плотности содержит ту же информацию о природе резонанса, что и  $Z$  фактор Вайнберга, однако возможности её применения в адронной физике гораздо шире.

Если параметры распределения Флатте известны, то спектральную плотность можно построить по формуле

$$w(E) = \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{1}{D^*(E)} - \frac{1}{D(E)} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_0 + g\sqrt{2\mu E}\Theta(E)}{|D(E)|^2}, \quad (1.25)$$

где знаменатель  $D(E) = M - M_0 + \mathcal{G}_0(M)$  удобно переписать, вводя вместо параметра Флатте  $E_f$  величину  $E_R$ , определяющую положение резонанса как нуля действительной части знаменателя ( $\text{Re}D(E_R) = 0$ ). Для случая  $E_R < 0$  находим:

$$D(E) = E - E_R - \frac{g}{2}\sqrt{-2\mu E_R} + \frac{g}{2}\sqrt{-2\mu E}\Theta(-E) + \frac{i}{2} \left[ \Gamma_0 + g\sqrt{2\mu E}\Theta(E) \right]. \quad (1.26)$$

Поучительно рассмотреть два случая, различающихся лишь значением константы связи с ад-

ронным каналом:

$$\begin{aligned} \text{Случай А: } & E_R = -0.2 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_0 = 0.1 \text{ МэВ}, \quad \mu = 1 \text{ ГэВ}, \quad g = 0.0005, \\ \text{Случай Б: } & E_R = -0.2 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_0 = 0.1 \text{ МэВ}, \quad \mu = 1 \text{ ГэВ}, \quad g = 0.1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 1.2, а интегралы от спектральной плотности по околопороговой области равны:

$$W_A = \int_{-0.6 \text{ МэВ}}^{0.2 \text{ МэВ}} w_A(E) dE \approx 0.9, \quad W_B = \int_{-0.6 \text{ МэВ}}^{0.2 \text{ МэВ}} w_B(E) dE \approx 0.3. \quad (1.28)$$

Из сравнения графиков на рис. 1.2 нетрудно видеть, что для случая А практически весь нормировочный интеграл от спектральной плотности набирается вблизи резонанса, тогда как в случае Б (за счёт большой константы связи с адронным каналом) заметная часть нормировочного интеграла набирается в области  $E > 0$ . Этим объясняется существенная разница в величинах  $W_A$  и  $W_B$ . Соответственно и интерпретация рассмотренных двух случаев оказывается разной: случай А отвечает кварк-антикварковому состоянию, тогда как случай Б демонстрирует значительную (в данном случае доминирующую) примесь адронной молекулы.

## 1.5. Система связанных каналов и полюса матрицы рассеяния

Выше был изложен подход Вайнберга к описанию природы околопорогового состояния, основанный на анализе низкоэнергетических наблюдаемых для рассматриваемой системы, что напрямую связано с изучением положения полюсов матрицы рассеяния в комплексной плоскости энергии. Данный анализ модельно независим, что является его несомненным плюсом, с одной стороны, однако дополнительно требует построения микроскопических моделей для понимания связи извлечённых параметров резонансов с фундаментальными основами сильных взаимодействий.

В простейшем случае такая микроскопическая модель резонанса даётся просто кварковой моделью, в которой кварки связаны силами конфайнмента, а возможный спектр состояний исчерпывается различными многокварковыми образованиями типа кваркониев, трёхкварковых барионов, тетракварков и т.п. Строго говоря, КХД допускает также существование адронов с возбуждённой глюонной степенью свободы (гибриды и глюболы), которые также необходимо принимать во внимание при построении модели. Однако следует иметь в виду, что все такие компактные образования, удерживаемые силами конфайнмента, могут являться лишь связанными состояниями, тогда как природа околопороговых резонансов в спектре тяжёлых кварков явно не ограничивается такой возможностью и требует естественного включения в рассмотрение других типов состояний, в частности, виртуальных уровней и резонансов (в смысле положения полюса в комплексной

плоскости энергии на нефизическом листе вне вещественной оси). Описание таких особенностей матрицы рассеяния требует существенного шага вперёд по сравнению с наивной кварковой моделью, а именно включения механизма рождения пар из вакуума, что приводит к связи компактных кварковых образований (кваркониев, тетракварков и т.д.) с адронными каналами, и, следовательно, к расширению базиса модели, например, в таком виде, как это сделано в формуле (2.9) выше. Указанное обобщение кварковой модели может приводить к весьма существенным метаморфозам затравочных кварковых состояний. В частности, простейшим последствием такого расширения модели является адронный сдвиг массы кваркония за счёт вещественной части адронной петли (адронный сдвиг) (см., например, работу [48], в которой сформулирован и доказан ряд теорем, связанных с адронными сдвигами).

С другой стороны, появление у кваркония сильных каналов распада приводит к возникновению у него ненулевой ширины, то есть к сходу соответствующего полюса с вещественной оси энергии. Наивно можно было бы ожидать, что с ростом константы связи кваркония с адронным каналом ширина будет бесконечно расти, в конечном итоге сделав кварконий ненаблюдаемым. Однако это не так, поскольку с ростом константы связи в игру вступают эффекты унитаризации, которые могут в корне изменить траекторию движения полюса. В частности, в противоположность наивным ожиданиям, с ростом константы связи с адронным каналом кварковое состояние может даже становиться уже, как было отмечено, например, в работах [49, 50], а в недавней работе [51] было продемонстрировано, что при наличии многих кварковых полюсов одновременно эффекты унитаризации могут приводить к своего рода коллективным явлениям между кварковыми состояниями. Важность учёта эффектов унитаризации в кварковых моделях подчёркивалась во многих работах (см., например, [49, 52–59]), причём в ряде случаев наблюдалось возникновение динамически сгенерённых полюсов. Следует заметить, что более адекватными поставленной задаче являются подходы, с самого начала сохраняющие унитарность и аналитичность матрицы рассеяния.

Приложению задачи связанных каналов к окологороговым состояниям в спектре тяжёлых кварков посвящено достаточно большое число работ (см., например, работы [60–63] и многие другие). Разбор соответствующих методов и подходов в ядерной и адронной физике можно найти в обзоре [64], в котором подробным образом освещены такие вопросы, как метод  $K$ ,  $M$  и  $R$  матриц, различные представления для  $S$  матрицы, многоканальные формулы Брейта-Вигнера, различные подходы к задаче связанных каналов и т.п., а также приложение указанных методов к анализу конкретных реакций.

Остановимся чуть подробнее лишь на некоторых работах, появившихся в связи с недавними экспериментальными открытиями в области спектроскопии тяжёлых кварков и имеющих непо-

средственное отношение к данной диссертации. В частности, в работе [65] с помощью описанного выше метода Вайнберга детально изучен эффект мезонных петель в спектре чармония и в рамках достаточно простой точно решаемой модели показано, как связь с адронным каналом генерирует нетривиальную структуру на пороге  $D\bar{D}^*$  в канале с квантовыми числами  $1^{++}$ , то есть ровно в том месте, где ожидается существование экзотического состояния  $X(3872)$  (см. подробное обсуждение данного состояния в четвёртой главе ниже).

В работах [66, 67] предложен микроскопический подход к описанию связи каналов в чармониевых и боттомониевых системах. При этом затравочный спектр кварковых состояний вычисляется в реалистичной модели струны КХД (см. работы [68, 69], а также обзор метода вакуумных корреляторов [70], на котором основана данная модель), а для описания связи каналов используется формализм Вайнберга [44], хорошо адаптированный для изучения состояний, лежащих выше порога, а также гарантирующий сохранение унитарности в многоканальной задаче. Результатом применения подхода является микроскопическое вычисление положения полюса резонанса, а также его свойств (ширины распада, сечения рождения и т.п.). В частности, при определённом реалистичном наборе параметров предсказано появление пика на нейтральном  $D\bar{D}^*$  пороге в канале  $1^{++}$ , что, как указывалось выше, хорошо соотносится с экспериментальным наблюдением чармонийподобного состояния  $X(3872)$  в этом канале.

В рамках дальнейшего развития подхода в работах [71, 72] предложено описание с его помощью экспериментальных данных для состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония. В частности, дополненный механизм рождения пиона [73, 74], подход позволяет производить микроскопический расчёт вероятностей перехода между каналами с открытым и скрытым ароматом. В работах показано, что за счёт таких переходов в форме линии неупругих каналов могут возникать околопороговые пики, хорошо согласующиеся с наблюдаемыми на эксперименте структурами. Иначе говоря, явно продемонстрирована нетривиальная возможность генерировать околопороговые полюса исключительно за счёт сильной связи каналов.

В следующей главе данной диссертации описан метод построения и практического использования модельно независимой параметризации для формы линии околопорогового резонанса (или системы резонансов), параметры которой предлагается фиксировать посредством одновременного анализа данных по всем модам рождения и распада изучаемой системы околопороговых резонансов в спектре тяжёлых кварков. Описанные выше микроскопические методы и подходы, в частности, содержащиеся в работах [66, 67, 71, 72], могут служить естественными комплиментарными методами к предлагаемому модельно независимому анализу экспериментальных данных, в рамках которых возможно изучение положения полюсов амплитуды в комплексной плоскости энергии как при физических значениях параметров, так и при их изменении в достаточно широком диапазоне

значений, что позволяет не только извлекать истинную природу резонанса, но также исследовать его “происхождение”, связь с компактными кварковыми состояниями и порогами и т.д. Обращая данный аргумент, можно утверждать, что совместное использование модельно независимого анализа данных, предлагаемого в данной диссертации, и микроскопических подходов, в частности, содержащихся в работах [66, 67, 71, 72], позволяет рассчитывать на установление непрерывной связи между экспериментом и микроскопическими расчётами, основанными на первых принципах КХД.

## 1.6. Механизмы и вероятности рождения околопорогового резонанса

Наиболее полное описание околопорогового резонанса возможно в терминах  $t$ -матрицы, удовлетворяющей уравнению Липпмана-Швингера

$$t = V - VSt \quad (1.29)$$

с потенциалом (1.11), так что записанное в компонентах это уравнение принимает вид системы связанных уравнений (здесь и далее пропагатор кварковой компоненты есть  $S_0 = 1/(E_0 - E - i0)$ ):

$$\begin{cases} t_{hh}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = -f(\mathbf{k})S_0 t_{0h}(\mathbf{p}) \\ t_{0h}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - \int f(\mathbf{q})S(\mathbf{q})t_{hh}(\mathbf{q}, \mathbf{p})d^3q \\ t_{h0}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})S_0 t_{00} \\ t_{00} = - \int f(\mathbf{q})S(\mathbf{q})t_{h0}(\mathbf{q})d^3q, \end{cases} \quad (1.30)$$

решение которой есть [25]

$$\begin{aligned} t_{00} &= -\frac{(E - E_0)\mathcal{G}_0(E)}{E - E_0 + \mathcal{G}_0(E)}, \\ t_{0h}(\mathbf{p}) &= t_{h0}(\mathbf{p}) = \frac{(E - E_0)f(\mathbf{p})}{E - E_0 + \mathcal{G}_0(E)}, \\ t_{hh}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \frac{f(\mathbf{p})f(\mathbf{k})}{E - E_0 + \mathcal{G}_0(E)}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где петлевая функция  $\mathcal{G}_0(E)$  приведена в уравнении (1.17) выше.

В реальных экспериментах, к сожалению, нет возможности изучать упругое рассеяние мезонов  $M_1$  и  $M_2$  друг на друге, а информация о резонансах собирается в экспериментах по рождению. В частности, в эксперименте можно измерить вероятность рождения пары мезонов ( $M_1 M_2$ ) через образование резонанса в промежуточном состоянии. При этом для резонанса (1.9) возможны два механизма рождения: через кварковую компоненту и через адронную компоненту. Графически оба механизма представлены на рис. 1.3, а амплитуды рождения пары ( $M_1 M_2$ ) выражаются через соответствующие компоненты  $t$ -матрицы. В частности, для рождения через кварковую компоненту

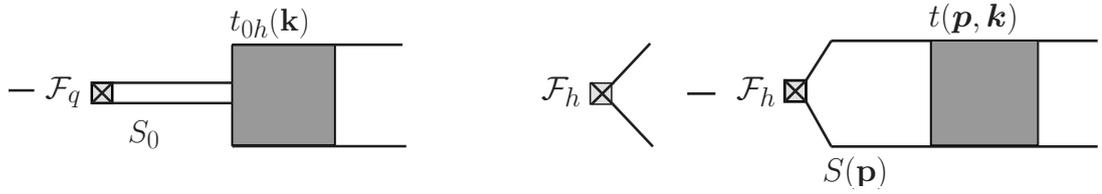


Рис. 1.3. Графическое изображение механизмов рождения состояния (1.9) через кварковую (левый график) и адронную (правый график) компоненту.

находим (см. левую диаграмму на рис. 1.3):

$$\mathcal{M}_q(E) = -\mathcal{F}_q S_0 t_{0h}(\mathbf{k}), \quad (1.32)$$

где мезоны в конечном состоянии находятся на массовой поверхности, так что  $k = \sqrt{2\mu E}$ , а через  $\mathcal{F}_q$  обозначена амплитуда рождения кварковой компоненты изучаемого резонанса. Тогда с помощью найденного выше решения уравнения Липпмана-Швингера нетрудно получить:

$$\mathcal{M}_q(E) = \frac{\mathcal{F}_q f(\mathbf{k})}{E - E_0 + \mathcal{G}_0(E)}, \quad (1.33)$$

что для дифференциальной вероятности рождения даёт выражение

$$\frac{dBr_q(M_1 M_2)}{dE} = \mathcal{B}_q w(E), \quad (1.34)$$

где была использована формула (1.22). Константа  $\mathcal{B}_q$  содержит детали рождения кварковой компоненты. Следовательно, ещё одним примечательным свойством спектральной плотности является то, что она определяет дифференциальную вероятность рождения состояния (1.9) через его кварковую компоненту. Соответственно, при интегрировании по околопороговой области (см. (1.24)) находим:

$$Br_q(M_1 M_2) = \mathcal{B}_q W, \quad (1.35)$$

что позволяет оценивать брэнчинги рождения околопороговых резонансов по величине интеграла от спектральной плотности.

Для амплитуды рождения через адронную компоненту находим (см. вторую диаграмму на рис. 1.3):

$$\mathcal{M}_h(E) = \mathcal{F}_h \left( 1 - \int S(\mathbf{p}) t_{hh}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) d^3 p \right), \quad k = \sqrt{2\mu E}, \quad (1.36)$$

где аналогично случаю рождения через кварковую компоненту величина  $\mathcal{F}_q$  описывает рождение мезонной компоненты резонанса из точечного источника. Выражение (1.36) можно упростить, если заметить, что  $t$ -матрица  $t_{hh}$  удовлетворяет уравнению

$$t_{hh}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \int V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S(\mathbf{q}) t_{hh}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^3 q, \quad (1.37)$$

следующему из системы (1.30) после исключения компоненты  $t_{0h}$ . В данном случае

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = f(\mathbf{p})S_0f(\mathbf{k}), \quad (1.38)$$

однако эффективный потенциал может содержать и другие взаимодействия — для данных рассуждений его явный вид не играет роли, а важно лишь его свойство слабо меняться в интересующей нас области импульсов вблизи порога. Так, для потенциала (1.38) это свойство с очевидностью выполнено. Действительно, отклонение формфактора  $f(\mathbf{p})$  от своего значения при нулевом импульсе  $f(0)$  определяется параметром  $|\mathbf{p}|/\beta$ , где  $\beta$  есть радиус действия сил. Поскольку, как уже обсуждалось выше, радиус действия сил предполагается большим по сравнению с характерными импульсами задачи, то  $|\mathbf{p}|/\beta \ll 1$ . Следовательно, в формулах (1.36) и (1.37) вблизи порога и эффективный потенциал, и  $t$ -матрицу можно вынести из-под знака интеграла, приходя к простому алгебраическому уравнению для упругой  $t$ -матрицы:

$$t_{hh}(E) = V_{\text{eff}}(1 - J(E)t_{hh}(E)), \quad (1.39)$$

где петлевой интеграл  $J(E)$  имеет вид:

$$J(E) = \int S(\mathbf{p})d^3p = 4\pi^2\mu(\kappa + ik), \quad k = \sqrt{2\mu E}, \quad (1.40)$$

причём величина  $\kappa$  имеет порядок радиуса действия сил, то есть  $\kappa \sim \beta$ . Рассуждая аналогично, нетрудно прийти к следующему выражению для амплитуды рождения:

$$\mathcal{M}_h(E) = \mathcal{F}_h(1 - J(E)t_{hh}(E)). \quad (1.41)$$

Поскольку целью исследования является описание околорогового резонанса, то естественно ожидать наличия у  $t$ -матрицы полюса (полюсов) в околороговой области (см. обсуждение в работе [75]). В этом случае борновским членом в формуле (1.41) можно пренебречь, так что амплитуда рождения резонанса через адронный канал  $\mathcal{M}_h$  прямо пропорциональна упругой  $t$ -матрице  $t_{hh}$ , а соответствующую дифференциальную вероятность рождения можно записать в виде:

$$\frac{dBr_h(M_1M_2)}{dE} = \mathcal{B}_h|t_{hh}(E)|^2\sqrt{E}\Theta(E), \quad (1.42)$$

где коэффициент  $\mathcal{B}_h$  описывает рождение пары мезонов ( $M_1M_2$ ) из точечного источника, а также поглощает все постоянные и медленно меняющиеся в области порога величины. Множитель  $\sqrt{E}$  проистекает из  $S$ -волнового фазового объёма.

Следует однако заметить, что в реальных условиях рождение резонанса может происходить смешанным образом, то есть свои вклады могут давать оба механизма, изображённые на рис. 1.3.

## 1.7. Взаимное влияние кварковых и адронных степеней свободы в околопороговом резонансе. Одноканальный случай

В предыдущем разделе диссертации было описано обобщение распределения Брейта-Вигнера на случай околопорогового резонанса. В частности, было продемонстрировано, как явный учёт связи “элементарного” состояния с  $S$ -волновым порогом приводит к сильному искажению формы линии резонанса по сравнению с простой колоколообразной формой, описываемой распределением Брейта-Вигнера. Соответствующее обобщение, приведённое в формуле (1.2), называется распределением Флатте. Однако, несмотря на существенный прогресс, достигаемый в описании околопороговых состояний при использовании формулы (1.2), а также его простых многоканальных расширений (ниже такое двухканальное расширение использовано в анализе данных для состояния чармония  $X(3872)$ ), многие интересные и важные эффекты не ухватываются этой формулой. К числу таких эффектов можно отнести взаимное влияние кварковых и адронных степеней свободы, вклад конечной ширины конститuenta, непertурбативный учёт неупругих каналов. Все эти вопросы составляют предмет изучения данного раздела диссертации.

Как и раньше, рассматривается “элементарное” (кварковое) состояние, связанное с адронной (мезонной) молекулой (1.9), подчиняющееся уравнению Шредингера (1.8) с гамильтонианом (1.10), однако теперь адронная компонента гамильтониана  $\hat{H}_{hh}[\mathbf{p}, \mathbf{p}']$  описывает не только свободное движение мезонов  $M_1$  и  $M_2$ , но также их прямое взаимодействие, то есть

$$\hat{H}_{hh}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] = \frac{p^2}{2\mu} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + v(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (1.43)$$

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  есть импульсы мезонов в системе центра инерции до и после взаимодействия.

Уравнение Шредингера (1.8) эквивалентно системе уравнений на коэффициенты волновой функции  $C$  и  $\chi(\mathbf{p})$ , которая принимает следующий вид:

$$\begin{cases} C(E)E_0 + \int f(\mathbf{p})\chi(\mathbf{p})d^3p = C(E)E, \\ \frac{p^2}{2\mu}\chi(\mathbf{p}) + C(E)f(\mathbf{p}) + \int v(\mathbf{p}, \mathbf{k})\chi(\mathbf{k})d^3k = E\chi(\mathbf{p}). \end{cases} \quad (1.44)$$

После исключения величины  $C(E)$  полученное уравнение можно интерпретировать как уравнение Шредингера в мезонном канале с эффективным потенциалом

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - f(\mathbf{p})S_0f(\mathbf{p}'), \quad (1.45)$$

физический смысл которого предельно прозрачен: взаимодействие между мезонами происходит не только за счёт потенциала  $v(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , но также и за счёт переходов через кварковое состояние —

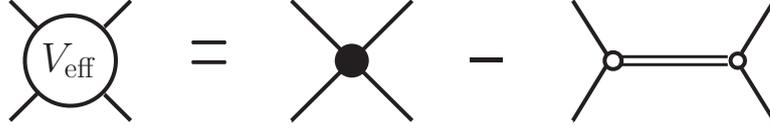


Рис. 1.4. Графическое представление эффективного потенциала (1.45). Двойная линия отвечает функции распространения кваркового состояния  $S_0 = 1/(E_0 - E - i0)$ .

см. рис. 1.4. Соответственно, решение уравнения Липпмана-Швингера с таким потенциалом

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \int V_{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S(\mathbf{q}) t(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q \quad (1.46)$$

определяет  $t$ -матрицу в мезонном (упругом) канале, причём как начальный, так и конечный мезоны, вообще говоря, находятся вне массовой поверхности. Нормировка выбрана таким образом, что амплитуда упругого рассеяния в мезонном канале связана с  $t$ -матрицей соотношением

$$F(\mathbf{k}) = -(2\pi)^2 \mu t(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (1.47)$$

в котором условие массовой поверхности уже выполнено, то есть положено  $k = \sqrt{2\mu E}$ .

Решение уравнения (1.46) можно представить в виде [1]:

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = t^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \frac{\phi(\mathbf{p}) \bar{\phi}(\mathbf{p}')}{E - E_0 + \mathcal{G}}, \quad (1.48)$$

где  $t$ -матрица прямого взаимодействия  $t^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  является решением уравнения Липпмана-Швингера с потенциалом  $v(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ :

$$t^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \int v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S(\mathbf{q}) t^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q, \quad (1.49)$$

а “одетые” вершины  $\phi(\mathbf{p})$  и  $\bar{\phi}(\mathbf{p})$  и петлевой оператор  $\mathcal{G}$  равны соответственно

$$\phi(\mathbf{p}) = \text{diagram} - \text{diagram} = f(\mathbf{p}) - \int t^v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S(\mathbf{q}) f(\mathbf{q}) d^3 q, \quad (1.50)$$

$$\bar{\phi}(\mathbf{p}) = \text{diagram} - \text{diagram} = f(\mathbf{p}) - \int f(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) t^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 q, \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sum_{\alpha} \text{diagram} - \sum_{\alpha, \beta} \text{diagram} \\ &= \int f^2(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) d^3 q - \int f(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) t^v(\mathbf{q}, \mathbf{q}') f(\mathbf{q}') S(\mathbf{q}') d^3 q d^3 q'. \end{aligned} \quad (1.52)$$

При этом нетрудно видеть, что петлевой оператор  $\mathcal{G}$  можно очень просто записать через “одетые” вершины:

$$\mathcal{G} = \text{diagram} = \int f(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{p}) d^3 q = \text{diagram} = \int \bar{\phi}(\mathbf{p}) S(\mathbf{q}) f(\mathbf{q}) d^3 q, \quad (1.53)$$

где, как обычно, во избежание двойного счёта “одевать” в петле следует лишь одну вершину.

Система уравнений (1.44) может иметь решения, отвечающие связанным состояниям. Каждое такое решение с энергией связи  $E_B$  можно представить в виде

$$C_B = \cos \theta, \quad \chi_B(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p})\phi(\mathbf{p}) \cos \theta, \quad (1.54)$$

так что с помощью условия нормировки

$$C_B^2 + \int |\chi_B(\mathbf{p})|^2 d^3p = 1 \quad (1.55)$$

приходим к обобщению формулы (1.19) в виде

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \int S^2(\mathbf{p})\phi^2(\mathbf{p})d^3p. \quad (1.56)$$

В соответствии с описанной выше интерпретацией С. Вайнберга [43–45], величина

$$Z = |\langle \psi_0 | \Psi \rangle_B|^2 = \cos^2 \theta = \left( 1 + \int S^2(\mathbf{p})\phi^2(\mathbf{p})d^3p \right)^{-1} \quad (1.57)$$

определяет вероятность обнаружения компактного кваркония в волновой функции данного связанного состояния. Если в системе присутствует несколько связанных состояний, то выведенные выше формулы справедливы для каждого из них.

Для решений системы уравнений (1.44), отвечающих состояниям непрерывного спектра, можно найти:

$$C_k(E) = \frac{1}{E - E_0} \int \chi_k(\mathbf{p})f(\mathbf{p})d^3p = \frac{\bar{\phi}(\mathbf{k})}{E - E_0 + \mathcal{G}}, \quad (1.58)$$

$$\chi_k(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \frac{2\mu t(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{p^2 - k^2 - i0}, \quad (1.59)$$

что позволяет явно построить аналог величины (1.57), даваемый, как указывалось выше, спектральной плотностью  $w(E)$  [47]:

$$w(E) = 4\pi\mu\sqrt{2\mu E}|C_k(E)|^2\Theta(E) \quad (1.60)$$

с функцией  $C_k(E)$ , приведённой в уравнении (1.58). При этом спектральная плотность нормирована условием

$$\int_0^\infty w(E)dE = 1 - \sum_i Z_i, \quad (1.61)$$

где сумма берётся по всем связанным состояниям системы, а соответствующие  $Z$ -факторы вычисляются по формуле (1.57).

Поскольку особый интерес представляет собой околороговая область, то целесообразно сделать низкоэнергетическое разложение амплитуд и  $t$ -матриц. Прежде всего заметим, что

$t$ -матрицу прямого взаимодействия в мезонном канале  $t^v$  можно записать в приближении длины рассеяния в виде

$$t^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{1}{4\pi^2\mu(-a_V^{-1} - ik)} = \frac{1}{4\pi^2\mu} \frac{1}{\gamma_V + ik}, \quad (1.62)$$

где длина рассеяния  $a_V \equiv \gamma_V^{-1}$  характеризует потенциал прямого взаимодействия  $v(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , а отброшенные члены подавлены большим обратным радиусом действия сил  $\beta$ . Таким образом, предполагается, что  $a_V\beta \gg 1$ , тогда как характерные импульсы задачи принимают значения порядка  $1/a_V$ . В этом случае  $t$ -матрица  $t^v$  имеет полюс в околороговой области. При этом следует отметить, что при включении взаимодействия с кварковым состоянием имеет место взаимное влияние особенностей, генерируемых кварковой и мезонной степенями свободы, в результате чего особенности физической  $t$ -матрицы могут располагаться весьма далеко от своих затравочных положений. Целью дальнейших вычислений является изучение наиболее интересных случаев поведения формы линии резонанса, являющихся следствием взаимного влияния кварковых и мезонных степеней свободы.

В дополнение к уже введённой ранее петлевой функции (1.17)

$$\mathcal{G}_0(E) = \int d^3q \frac{f^2(\mathbf{q})}{q^2/(2\mu) - E - i0} = f^{(0)2}(R + iI), \quad (1.63)$$

определим также величину

$$\mathcal{G}'_0(E) = \int d^3q \frac{f(\mathbf{q})}{q^2/(2\mu) - E - i0} = f^{(0)}(R' + iI), \quad (1.64)$$

где  $I = (2\pi)^2\mu k$ ,  $k = \sqrt{2\mu E}$ ,  $f^{(0)} \equiv f(0)$ , а константы  $R$  и  $R'$  определяются радиусом действия сил и имеют порядок величины  $\mu\beta$ . Поправки порядка  $O(k^2/\beta^2)$  отброшены. Тогда для упругой  $t$ -матрицы (1.48) нетрудно получить следующее выражение [1]:

$$t(E) = \frac{E - E_C}{[E - E_0]R_V + f^{(0)2}[RR_V - R'^2] + 4\pi^2\mu ik[E - E_C]}, \quad (1.65)$$

где

$$E_C = E_0 - f^{(0)2}(R + R_V - 2R'), \quad (1.66)$$

и для упрощения записи была введена величина

$$R_V = (2\pi)^2\mu\gamma_V. \quad (1.67)$$

Интересным свойством полученного выражения (1.65) является возможность его перенормировки, состоящей в переопределении физических параметров и поглощении в них величин, зависящих от радиуса действия сил. В частности, можно определить величину, имеющую смысл нуля

действительной части знаменателя и, следовательно, являющейся обобщением параметра Флатте  $E_f$ :

$$[E_f - E_0]R_V + f^{(0)2}[RR_V - R'^2] = 0. \quad (1.68)$$

Данное условие позволяет избавиться от “затравочного” параметра  $E_0$ . Кроме того, параметр  $E_C$  также можно выразить через  $E_f$ :

$$E_C = E_f - \frac{f^{(0)2}}{R_V}(R' - R_V)^2. \quad (1.69)$$

Наконец, вместо “затравочного” параметра  $f^{(0)}$  можно ввести эффективную константу связи кваркового состояния с мезонным каналом

$$g_f = 8\pi^2\mu \frac{E_f - E_C}{R_V} = \frac{8\pi^2\mu f^{(0)2}}{R_V^2}(R - R_V)^2. \quad (1.70)$$

В результате выражение для  $t$ -матрицы (1.65) полностью переписывается только через перенормированные параметры в виде:

$$t(E) = \frac{1}{(2\pi)^2\mu} \frac{g_f/2}{\mathcal{D}(E)}, \quad (1.71)$$

где

$$\mathcal{D}(E) = E - E_f - \frac{(E - E_f)^2}{E - E_C} + \frac{i}{2}g_fk, \quad (1.72)$$

причём при выводе было использовано тождество

$$\frac{E - E_f}{E - E_C} = \frac{E - E_f}{E_f - E_C} - \frac{(E - E_f)^2}{(E - E_C)(E_f - E_C)}. \quad (1.73)$$

Из вида знаменателя (1.72) становится понятен физический смысл параметра  $E_C$ , который определяет положение нуля упругой матрицы рассеяния.

Полученное выражение (1.71) является модельно-независимым обобщением формулы Флатте на случай прямого взаимодействия в мезонном канале, причём в разложении эффективного радиуса оно отвечает учёту членов до порядка  $O(k^4)$  включительно. При учёте внутренней структуры вершины перехода между кварковым и адронным каналами и замене константы  $g_f$  формфактором возможно возникновение модельно-зависимых членов порядка  $O(k^3)$ . Тем не менее, учёт таких членов лежит за рамками точности подхода, поскольку, как упоминалось выше, разложение формфактора идёт по степеням  $k/\beta$  с обратным радиусом действия сил  $\beta$ , существенно превышающим все характерные импульсы задачи. Таким образом, имеет место дополнительное подавление модельно-зависимых вкладов  $O(k^3)$ . В дальнейшем они обсуждаться не будут.

Если мезонная динамика не генерит особенностей вблизи порога (то есть длина рассеяния  $a_V$  мала), то  $|E_C| \gg |E_f|$  и

$$t(E) \approx \frac{1}{(2\pi)^2\mu} \frac{g_f/2}{E - E_f + \frac{i}{2}g_fk}, \quad (1.74)$$

то есть воспроизводится обычное распределение Флатте [40].

Если же параметры задачи подобраны так, что  $|E_C| \sim |E_f|$ , то есть если ноль амплитуды рассеяния лежит вблизи порога, то форма линии существенно искажается по сравнению с обычным распределением Флатте (1.74). Однако прежде, чем проиллюстрировать данный случай соответствующими графиками, обратимся к анализу С. Вайнберга [43–45] и изучим поведение связанных состояний в рассматриваемой системе. Остановимся на случае одного связанного состояния с энергией связи  $E_B$ . Вблизи полюса связанного состояния  $t$ -матрица может быть аппроксимирована простой формулой

$$t(E) \simeq \frac{g_{\text{eff}}^2}{E + E_B}, \quad (1.75)$$

причём эффективная константа  $g_{\text{eff}}$  выражается через  $Z$ -фактор в виде [43–45]:

$$g_{\text{eff}}^2 = \frac{\sqrt{2\mu E_B}}{4\pi^2 \mu^2} (1 - Z). \quad (1.76)$$

Тогда для полученного выше решения (1.65) нетрудно найти, что

$$t^{-1}(E) = \frac{E - E_f}{E - E_C} R_V + 4\pi^2 \mu i k \simeq \frac{E_B + E}{g_{\text{eff}}^2}, \quad (1.77)$$

откуда [1]

$$\frac{Z}{1 - Z} = \frac{2E_B}{E_B + E_C} \left( 1 - \frac{\gamma_V}{\sqrt{2\mu E_B}} \right), \quad (1.78)$$

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\sqrt{2\mu E_B} + \frac{\sqrt{2\mu E_B}(E + E_B)(E_B + E_C)}{2E_B(E - E_C)} \frac{Z}{1 - Z}, \quad (1.79)$$

$$E_C = -E_B \left( 1 - \frac{2(1 - Z)}{Z} + \frac{2(1 - Z)}{Z} \frac{\gamma_V}{\sqrt{2\mu E_B}} \right), \quad (1.80)$$

где  $\delta$  есть фаза рассеяния.

Как уже указывалось выше, в пределе  $|E_C| \gg E_B$  воспроизводится стандартное распределение Флатте, а из выведенных выше формул немедленно следуют соотношения между длиной рассеяния, эффективным радиусом и  $Z$ -фактором:

$$a = \frac{2(1 - Z)}{(2 - Z)} \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}}, \quad r_e = -\frac{Z}{(1 - Z)} \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}}, \quad (1.81)$$

совпадающие с аналогичными выражениями, полученными в работах [43–45] и уже приводившимися выше (см. формулу (1.20)).

Ситуация коренным образом меняется, если  $|E_C| \lesssim E_B$ . Действительно, в этом случае, ввиду присутствия в околороговой области особенности при  $E = E_C$ , радиус сходимости разложения эффективного радиуса оказывается существенно ограничен. Ниже данный предел рассматривается подробно.

Ввиду наличия простого соотношения (1.70) между величинами  $E_C$  и  $\gamma_V$  в качестве независимых параметров будем рассматривать набор  $\{E_f, g_f, \gamma_V\}$ , в терминах которого  $t$ -матрица (1.65) принимает вид:

$$t(E) = \frac{1}{(2\pi)^2 \mu} \frac{E - E_f + \frac{1}{2} g_f \gamma_V}{(E - E_f)(\gamma_V + ik) + \frac{i}{2} g_f \gamma_V k}. \quad (1.82)$$

Нетрудно видеть, что знаменатель в выражении (1.82) является функцией третьей степени по импульсу  $k$ , так что  $t$ -матрица имеет три полюса в комплексной  $k$ -плоскости, определяемых уравнением

$$(k^2 - 2\mu E_f)(\gamma_V + ik) + i\mu g_f \gamma_V k = 0, \quad (1.83)$$

причём одно из этих решения всегда чисто мнимое, а два других или также чисто мнимые, или расположены в нижней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси. Если обозначить полюса через  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ , то через них можно однозначно выразить параметры  $t$ -матрицы:

$$E_f = -\frac{1}{2\mu} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 + k_2 + k_3}, \quad (1.84)$$

$$g_f = -\frac{(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3)}{i\mu(k_1 + k_2 + k_3)^2}, \quad (1.85)$$

$$\gamma_V = -i(k_1 + k_2 + k_3), \quad (1.86)$$

а также положение нуля амплитуды:

$$E_C = E_f - \frac{1}{2} g_f \gamma_V = -\frac{1}{2\mu} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3). \quad (1.87)$$

Следует отметить, что при фиксированных значениях  $E_f$  и  $\gamma_V$  положение нуля  $E_C$  ограничено областью положительных констант  $g_f \geq 0$  (см. определение (1.70)). Поэтому поведение полюсов  $t$ -матрицы, а также наблюдаемых в данной модели можно изучать варьированием константы  $g_f$  от нуля до некоторого достаточно большого значения. Для удобства введём характерный масштаб  $\delta \ll \beta$ , определяющий околороговую область, в которой работает рассматриваемая эффективная теория. Строго говоря, дополнительные ограничения на эту область могут накладываться внешними по отношению к рассматриваемой модели факторами, например, наличием близости других порогов. Явный учёт таких порогов, как упругих, так и неупругих, является предметом изучения следующих разделов диссертации, поэтому здесь будем предполагать, что все физические явления, проявляющиеся в области энергий  $|E| \lesssim \delta$ , полностью исчерпываются теми, что уже учтены при построении модели. Тогда при выключении взаимодействия между кварковым и мезонным каналами, то есть в пределе  $g_f = 0$ , имеются три полюса:

$$k_{1,2}^{(0)} = \pm \sqrt{2\mu E_f}, \quad k_3^{(0)} = i\gamma_V, \quad (1.88)$$

причём первые два отвечают кварковому состоянию, а третий — прямому взаимодействию в мезонном канале за счёт потенциала  $v(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ . Между тем, числитель  $t$ -матрицы (1.82) имеет ноль при

$k = k_{1,2}^{(0)}$ , сокращающий полюса в этих точках. Таким образом, в пределе исчезающей константы связи кваркового канала с мезонным матрица упругого рассеяния имеет всего один полюс —  $k_3^{(0)}$ , отвечающий в зависимости от знака параметра  $\gamma_V$  связанному или виртуальному уровню в мезонном канале. Полученный результат является совершенно естественным, поскольку в рассматриваемом пределе кварковый канал полностью отщеплён от мезонного и, следовательно, не может влиять на упругое рассеяние мезонов друг на друге. При включении связи каналов, то есть при ненулевых значениях константы  $g_f$ , полюса сдвигаются и начинают смешиваться. При этом ноль числителя также смещается. В результате возникает достаточно сложная картина трёх полюсов и нуля, расположенных в разных местах комплексной  $k$ -плоскости. Следует отметить, что величина  $\gamma_V$  в этом случае утрачивает интерпретацию обратной длины рассеяния в мезонном канале и может рассматриваться исключительно как удобный параметр задачи. Нетрудно видеть, что характерные значения константы  $g_f$ , обеспечивающие наиболее сложную картину околороговых явлений, задаются соотношением  $g_f \sim |E_f|/|\gamma_V|$ . Именно в этом случае не только все три полюса лежат в околороговой области, но там же возникает и ноль  $t$ -матрицы, так что форма линии резонанса может быть весьма причудливой — гораздо сложнее, чем даётся стандартной формулой Флатте (1.74). При дальнейшем увеличении константы связи до значений, при которых начинает выполняться условие  $g_f \gg |E_f|/|\gamma_V|$ , ноль  $E_C$  покидает околороговую область ( $|E_C| \gg \delta$ ). При этом даже сосуществование всех трёх затравочных полюсов (1.88) в околороговой области, гарантированное выполнением условия  $|E_f| \simeq \gamma_V^2/(2\mu) \lesssim \delta$ , не приводит к искажению формы линии по сравнению со стандартным распределением Флатте, поскольку за счёт сильной связи каналов в околороговой области выживает лишь один полюс, отвечающий динамически сгенерённому молекулярному состоянию. Вблизи данного полюса восстанавливается обычное разложение эффективного радиуса, и выражения (1.81) вновь становятся справедливыми, равно как и основанный на них анализ Вайнберга.

Приведённые выше рассуждения можно резюмировать следующим образом: наиболее нетривиальная ситуация (а следовательно и наиболее сложная форма линии резонанса) имеет место, если затравочные полюса, отвечающие как кварковой, так и молекулярной динамике по случайным причинам сосуществуют в околороговой области ( $|E_f| \simeq \gamma_V^2/(2\mu) \lesssim \delta$ ), и при этом связь кваркового канала с мезонным не слишком сильная ( $g_f \sim |E_f|/|\gamma_V|$ ). Характерным признаком того, что имеет место такая тонкая подстройка параметров теории, может являться наличие в околороговой области нуля амплитуды рассеяния, нарушающего обычное разложение эффективного радиуса.

Изучим по-отдельности все возможные предельные случаи. Для определённости положим  $\mu = 1$  ГэВ, а в качестве масштаба околороговой области выберем  $\Delta = 1$  МэВ. Также по-

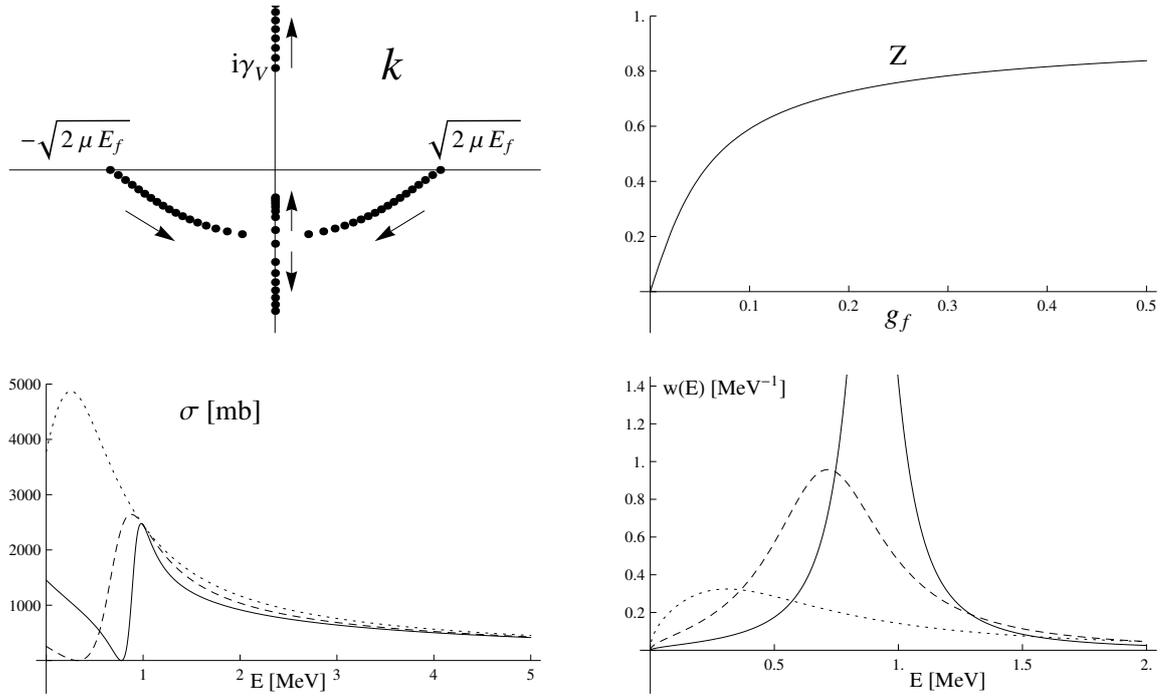


Рис. 1.5. Случай (i). Верхний ряд: структура полюсов в комплексной  $k$ -плоскости (левый рисунок) и  $Z$ -фактор (см. формулу (1.78)) (правый рисунок) как функции константы связи  $g_f$ . Нижний ряд: сечение упругого рассеяния (левый график) и спектральная плотность (правый график) как функции энергии при  $g_f = 0.01$  (сплошная линия),  $g_f = 0.03$  (штриховая линия) и  $g_f = 0.1$  (пунктирная линия).

требуем выполнения соотношения  $|\gamma_V| \sim \sqrt{2\mu|E_f|}$  (напомним, что отрицательные значения  $\gamma_V$  отвечают потенциалу притяжения без образования связанного состояния, а положительные — с образованием связанного состояния).

- Случай (i):  $E_f > 0$ ,  $\gamma_V > 0$  ( $E_f = 1$  МэВ,  $\gamma_V = 45$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.5, из которого нетрудно видеть, что адронное сечение обращается в ноль при  $E = E_C$  и вообще демонстрирует весьма специфическое поведение. В частности, при небольших значениях константы связи спектральная плотность и упругое сечение имеют максимум вблизи  $E_f$ . При этом образовавшееся в системе связанное состояние имеет чисто молекулярную природу ( $Z \ll 1$ ). С ростом  $g_f$  это связанное состояние покидает околопороговую область и приобретает примесь кварковой компоненты ( $Z$ -фактор растёт). При этом динамика системы всё больше определяется приближающимся к порогу полюсом, описывающим виртуальный уровень. В силу условия нормировки (1.61) спектральная плотность убывает с ростом  $g_f$ .
- Случай (ii):  $E_f > 0$ ,  $\gamma_V < 0$  ( $E_f = 1$  МэВ,  $\gamma_V = -45$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.6. Данный случай отличается от случая (i) тем, что при  $g_f = 0$  мезонная

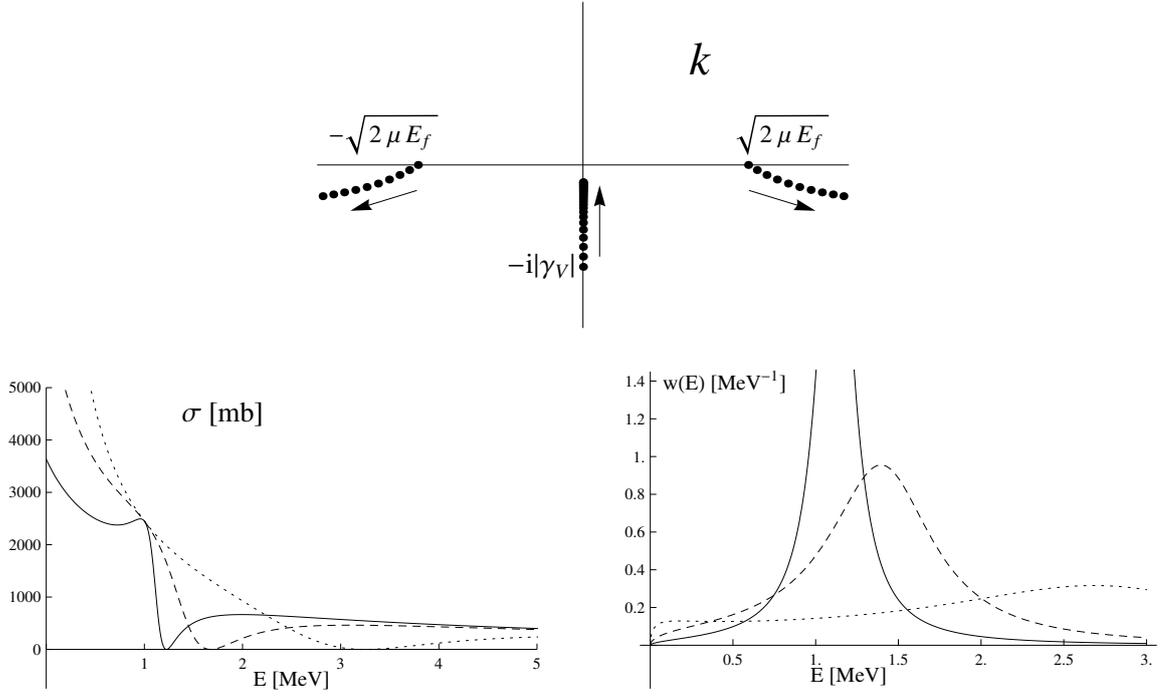


Рис. 1.6. Случай (ii). Верхний ряд: структура полюсов в комплексной  $k$ -плоскости как функции константы связи  $g_f$ . Нижний ряд: сечение упругого рассеяния (левый график) и спектральная плотность (правый график) как функции энергии при  $g_f = 0.01$  (сплошная линия),  $g_f = 0.03$  (штриховая линия) и  $g_f = 0.1$  (пунктирная линия).

динамика генерит не связанное состояние, а виртуальный уровень. С ростом константы связи  $g_f$  этот виртуальный уровень приближается к порогу, тогда как кварковые полюса, наоборот, покидают околороговую область.

- Случай (iii-a):  $E_f < 0$ ,  $\gamma_V > 0$ ,  $\sqrt{2\mu|E_f|} > \gamma_V$  ( $E_f = -1$  МэВ,  $\gamma_V = 40$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.7. Поскольку при данных значениях параметров  $E_C < 0$ , то ноль амплитуды не проявляется себя в адронном сечении, определённом при положительных энергиях. При этом при  $g_f = 0$  имеются два связанных состояния в околороговой области, лишь одно из которых выживает с ростом константы связи, причём для него  $Z \rightarrow 0$ . Поскольку в системе присутствуют два связанных состояния, которые практически полностью насыщают норму (1.61) ( $Z_1 + Z_2 \approx 1$ ), то спектральная плотность мала при любых значениях константы  $g_f$ .
- Случай (iii-b):  $E_f < 0$ ,  $\gamma_V > 0$ ,  $\sqrt{2\mu|E_f|} < \gamma_V$  ( $E_f = -1$  МэВ,  $\gamma_V = 50$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.8. Отличие от случая (iii-a) состоит в обратном расположении полюсов связанных состояний при  $g_f = 0$ , вследствие чего с ростом  $g_f$  к порогу подходит другой полюс. Этой разницей определяется иное поведение  $Z$ -факторов.

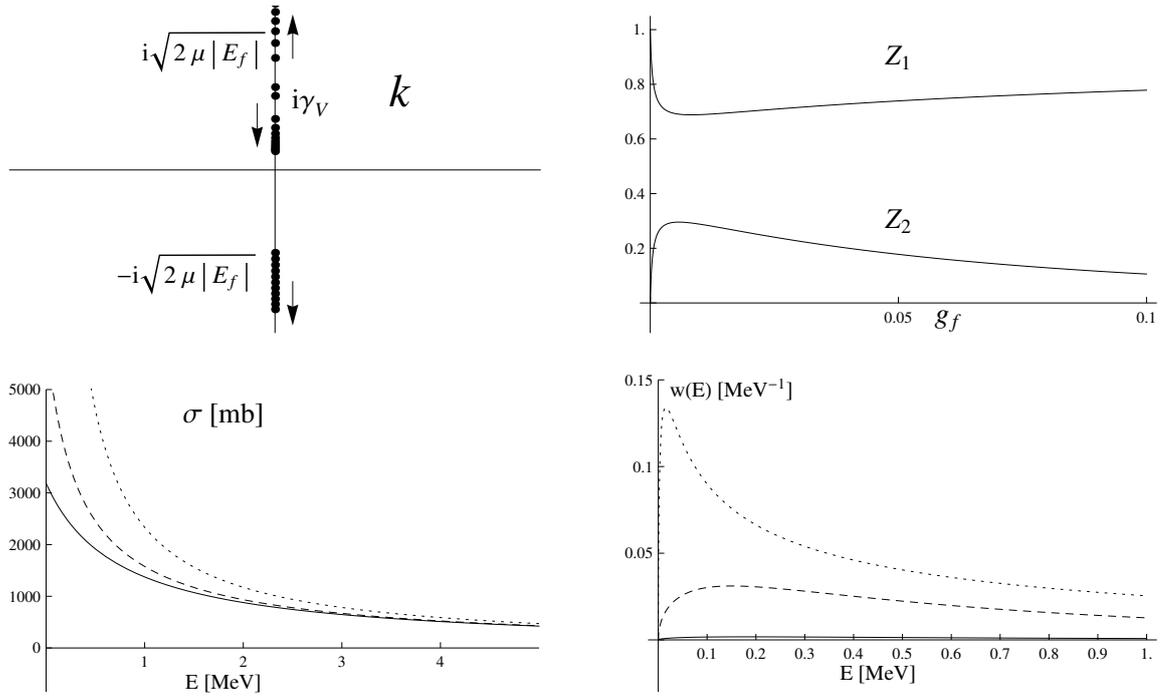


Рис. 1.7. Случай (iii-a). См. подпись к рис. 1.5.

- Случай (iv-a):  $E_f < 0$ ,  $\gamma_V < 0$ ,  $\sqrt{2\mu|E_f|} > |\gamma_V|$  ( $E_f = -1$  МэВ,  $\gamma_V = -20$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.9. При малых значениях  $g_f$  связанное состояние в основном имеет чисто кварковую природу, и при этом  $E_C < 0$ . С ростом  $g_f$  и его переходом через некоторую критическую величину  $E_C$  принимает положительные значения и проявляется в адронном сечении, тогда как связанное состояние приобретает значительный вклад молекулы. С дальнейшим ростом константы  $g_f$  ноль  $t$ -матрицы покидает околопороговую область, и динамика системы определяется единственным полюсом, описывающим связанное состояние практически чисто молекулярной природы ( $Z \rightarrow 0$ ).
- Случай (iv-b):  $E_f < 0$ ,  $\gamma_V < 0$ ,  $\sqrt{2\mu|E_f|} < |\gamma_V|$  ( $E_f = -1$  МэВ,  $\gamma_V = -55$  МэВ). Соответствующие графики приведены на рис. 1.10. Интерпретация движения полюсов и нуля  $E_C$  аналогична случаю (iv-a), описанному выше.

Как уже отмечалось выше, ввиду невозможности постановки эксперимента по упругому рассеянию мезонов  $M_1$  и  $M_2$  друг на друге, экспериментальная информация о резонансе черпается из процессов рождения. Тогда, воспользовавшись выведенными ранее формулами (1.36), (1.40) и (1.41) для амплитуды рождения резонанса через адронную компоненту, можно найти, что

$$\mathcal{M}_h(E) = \mathcal{F}_h \frac{(E - E_f)(E_f - E_C) - \frac{1}{2}kg_f(E - E_C)}{(E - E_f)(E_f - E_C) + \frac{i}{2}kg_f(E - E_C)}. \quad (1.89)$$

Следовательно, если ноль упругой амплитуды рассеяния  $E_C$  находится в околопороговой области, он проявляется и в амплитуде рождения через адронную компоненту, хотя и в несколько

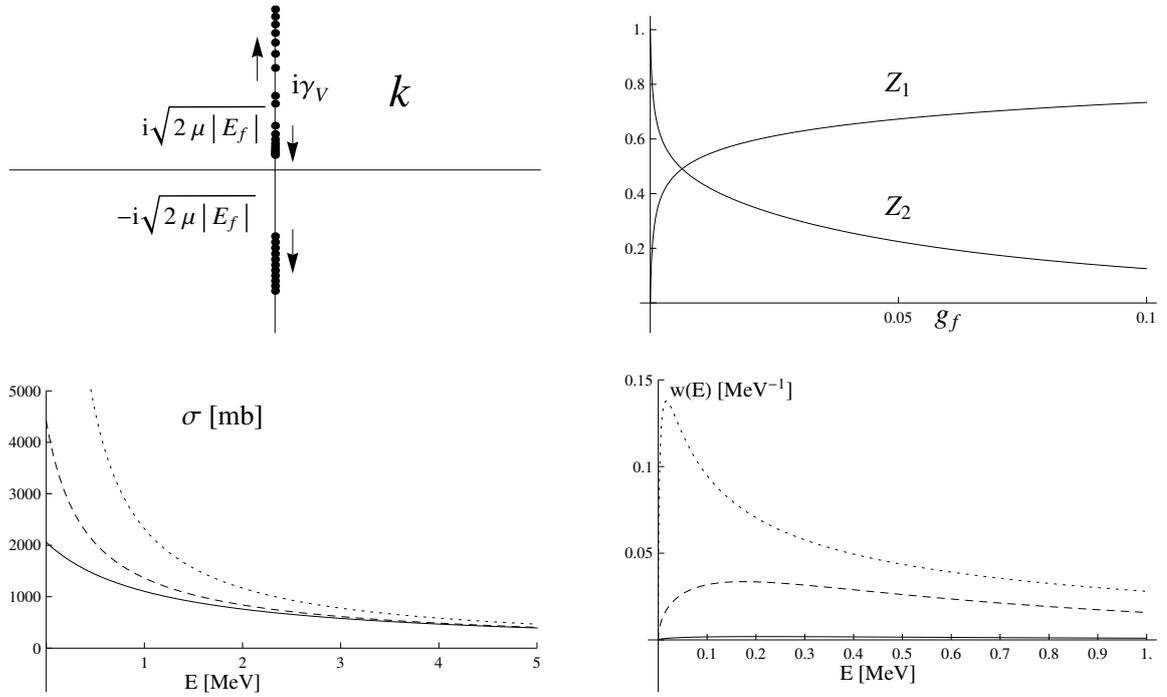


Рис. 1.8. Случай (iii-b). См. подпись к рис. 1.5.

смещённой точке по энергии. С другой стороны, для  $E_f \simeq E_C \ll \beta$  это смещение пренебрежимо мало, так что второй член в числителе выражения (1.89) доминирует, и вероятность рождения через адронную компоненту принимает вид:

$$\frac{dBr_h(M_1M_2)}{dE} = \text{const} \times k |t(E)|^2 \Theta(E) = \text{const} \times \left( \frac{g_f}{8\pi^2\mu} \right)^2 \frac{k}{|\mathcal{D}_F|^2}, \quad (1.90)$$

где знаменатель  $\mathcal{D}_F$  даётся выражением (1.72).

Для рождения через кварковую компоненту, в соответствии с формулой (1.34), имеем:

$$\frac{dBr_q(M_1M_2)}{dE} = \mathcal{B}_q w(E) = \frac{\mathcal{B}_q}{2\pi} \frac{kg_f}{|\mathcal{D}_F|^2} \frac{(E_f - E_C)^2}{(E - E_C)^2}, \quad (1.91)$$

где был использован явный вид коэффициента  $C_k$ :

$$C_k(E) = \sqrt{\frac{g_f}{8\pi^2\mu}} \frac{E_f - E_C}{E - E_C} \frac{1}{\mathcal{D}_F}, \quad (1.92)$$

следующий из формулы (1.58), а также определение спектральной плотности (1.60).

Из выражения (1.91) видно, что вероятность рождения через кварковую компоненту не содержит нуля. Таким образом, результирующая форма линии резонанса в канале  $(M_1M_2)$  зависит от относительной силы кваркового и мезонного вкладов в амплитуду рождения. Действительно, как уже отмечалось выше, вообще говоря, полная амплитуда рождения пары  $(M_1M_2)$  через образование резонанса включает оба вклада, изображённые на рис. 1.3. Следовательно, для полной дифференциальной вероятности рождения находим:

$$\frac{dBr(M_1M_2)}{dE} = \text{const} \times k \frac{|E - E_C + r(E_f - E_C)|^2}{|\mathcal{D}_F|^2 (E - E_C)^2}, \quad (1.93)$$

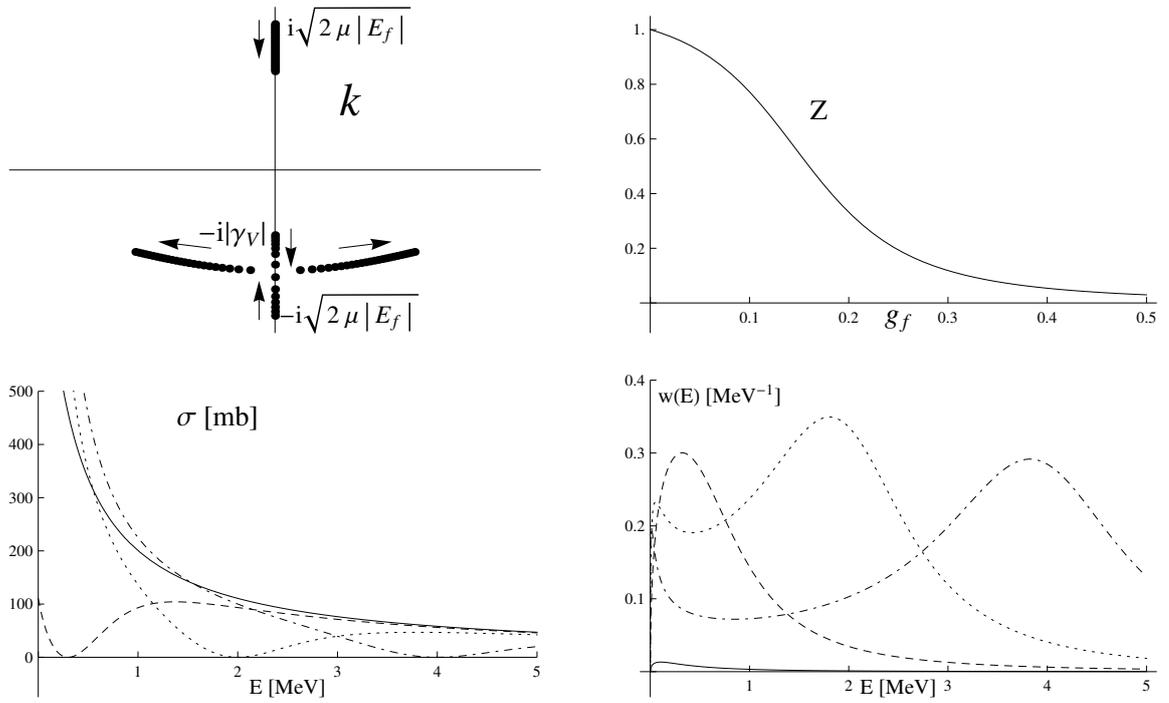


Рис. 1.9. Случай (iv-a). См. подпись к рис. 1.5 с той разницей, что взятые значения констант связи равны соответственно  $g_f = 0.01$ ,  $g_f = 0.13$ ,  $g_f = 0.3$  и  $g = 0.5$  (штрих-пунктирная линия).

где коэффициент  $r$  зависит от отношения вероятностей рождения резонанса через кварковую и мезонную компоненты. К сожалению, никаких заранее очевидных способов оценки данного параметра не существует. Из формулы (1.93) видно, что наличие нуля в амплитуде упругого рассеяния не гарантирует нуля амплитуде рождения. Если, тем не менее, такой ноль (или, по крайней мере, заметный провал в форме линии) имеет место, то это может служить свидетельством тонкой подстройки параметров задачи и, в частности, присутствия как кваркового, так и мезонного вкладов в волновую функцию резонанса.

Заметим, что дополнительным источником информации об околопороговых резонансах могут служить решёточные расчёты. Ввиду заметного прогресса, достигнутого в последнее время в решёточных расчётах за счёт использования больших базисов интерполирующих полей (см., например, [76, 77]) есть основания надеяться на возможность извлечения на решётках величин важных для установления природы околопороговых резонансов, таких как фазовые сдвиги [78], длины рассеяния [79], энергия связи и эффективный радиус [80] и т.п. В частности, ноль амплитуды рассеяния, обсуждавшийся выше в данном разделе, находит своё отражение и в фазовом сдвиге. Так, нетрудно найти, что

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\frac{\gamma_V(E - E_f)}{E - E_f + \frac{1}{2}g_f\gamma_V} = -\frac{\gamma_V(E - E_f)}{E - E_C}, \quad (1.94)$$

то есть ноль  $E_C$  проявляется как полюс в котангенсе фазового сдвига, который виден на графике

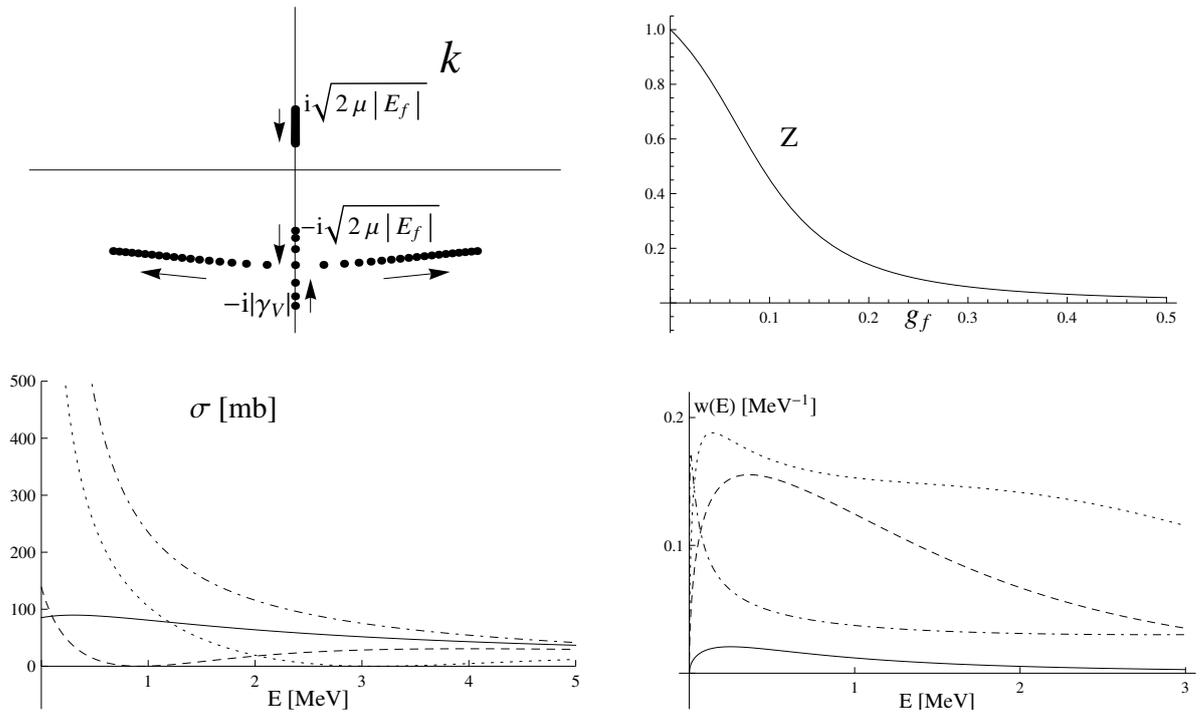


Рис. 1.10. Случай (iv-b). См. подпись к рис. 1.9.

зависимости  $k \operatorname{ctg} \delta$  от энергии (см. рис. 1.11). Было бы естественным ожидать наблюдения такого рода структур на решётках.

В заключение раздела кратко резюмируем полученные в нём результаты. Так, было показано, что при наличии прямого взаимодействия в мезонном канале и за счёт тонкой подстройки параметров задачи, состоящей в том, что и кварковая и мезонная динамика независимо друг от друга генерируют окологороговые полюса, разложение эффективного радиуса и связанный с ним анализ природы резонанса [41–46] перестают работать [1]. Характерным признаком такого взаимного влияния кварковых и мезонных степеней свободы является появление нуля амплитуды упругого рассеяния, проявляющегося также в дифференциальной вероятности рождения резонанса через мезонную компоненту, а также в виде полюса в котангенсе фазового сдвига. Наблюдение таких структур в экспериментальных данных по рождению или в решёточных данных по сдвигу фазы позволило бы не только сделать определённые заключения о природе окологорогового резонанса, но и извлечь информацию о связывающих механизмах в таком резонансе.

## 1.8. Обобщение на многоканальный случай

В предыдущем разделе было проведено обобщение распределения Флатте (1.2) на случай наличия прямого взаимодействия в мезонном канале, в результате чего при выполнении некоторых условий форма линии окологорогового резонанса испытывала весьма заметные изменения по срав-

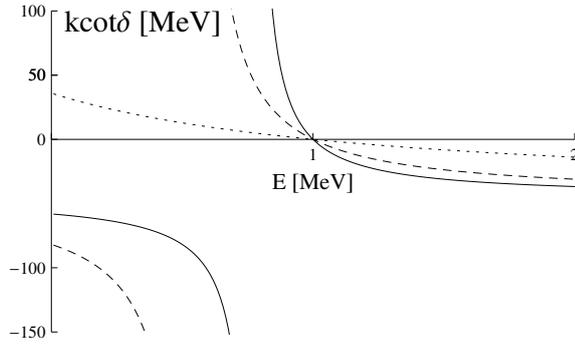


Рис. 1.11. Поведение сдвига фазы для случая (i) и для  $g_f = 0.01$  (сплошная линия),  $g_f = 0.02$  (штриховая линия) и  $g_f = 0.1$  (пунктирная линия).

нению со стандартным распределением Флатте [40]. Выведенные формулы, в частности, выражение для  $t$ -матрицы упругого рассеяния (1.71), были справедливы лишь в области энергий вблизи единственного учтённого упругого порога, тогда как роль соседних порогов сводилась лишь к ограничению области применимости полученных выражений. Однако реальная экспериментальная ситуация такова, что её описание требует знания амплитуды рождения резонанса в более широкой области, включающей несколько порогов. В данном разделе будет проведено обобщение подхода предыдущего раздела на случай множественных упругих каналов [2]. Аналогичная задача решалась в работе [81], однако лишь в приближении длины рассеяния. Непертурбативный учёт неупругих каналов является предметом изучения следующей главы диссертации.

Рассмотрим случай наличия двух каналов, связанных изоспиновой симметрией (например,  $D^0 \bar{D}^{*0}$  и  $D^+ D^{*-}$ ). Из-за разности масс нейтральных и заряженных мезонов данные пороги разнесены по энергии на величину  $\delta = M_{th_2} - M_{th_1}$ . При этом константы связи с кварковым каналом с хорошей точностью могут считаться одинаковыми (изоспиновый предел). Тогда простейшим обобщением одноканального знаменателя (1.72) на рассматриваемый двухканальный случай будет выражение типа:

$$\mathcal{D}(E) = E - E_f + \frac{i}{4} g_f (k_1 + k_2), \quad (1.95)$$

где для удобства константа связи  $g_f$  определена с дополнительным множителем  $1/2$  по сравнению с формулой (1.72), а относительные импульсы в упругих каналах равны

$$\begin{aligned} k_1(E) &= \sqrt{2\mu E} \Theta(E) + i\sqrt{-2\mu E} \Theta(-E), \\ k_2(E) &= \sqrt{2\mu(E - \delta)} \Theta(E - \delta) + i\sqrt{2\mu(\delta - E)} \Theta(\delta - E). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Нетрудно видеть, что в пределе  $\delta = 0$  формула (1.95) воспроизводит одноканальный случай (1.72) (именно с этой целью выбиралась нормировка константы связи  $g_f$ ). Для многих приложений про-

стой формулы (1.95) оказывается достаточно (см., например, обработку данных по распадам чармония  $X(3872)$  в разделе 4.3 ниже), однако возможное прямое взаимодействие между мезонами в ней не учтено. Таким образом, задача состоит в обобщении подхода предыдущего раздела на многоканальный случай, в том числе с учётом прямых переходов между упругими каналами. Для удобства отсчёт энергии ведётся от низшего упругого порога, то есть

$$M = m_{11} + m_{12} + E,$$

а расщепления между порогами равны

$$\delta_\alpha = (m_{\alpha 1} + m_{\alpha 2}) - (m_{11} + m_{12}), \quad (1.97)$$

где  $m_{\alpha 1}$  и  $m_{\alpha 2}$  есть массы соответствующих мезонов в упругом канале  $\alpha$ .

По аналогии с формулой (1.9) мы рассматриваем физическое состояние, представляющее собой смесь кварковой компоненты (для неё используется индекс 0) и множественных двухчастичных упругих каналов (обозначаемых через  $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots N_e$ , причём их число  $N_e$  не фиксировано):

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} C|\psi_0\rangle \\ \chi_1(\mathbf{p})|M_{11}M_{12}\rangle \\ \chi_2(\mathbf{p})|M_{21}M_{22}\rangle \\ \dots \\ \chi_{N_e}(\mathbf{p})|M_{N_e 1}M_{N_e 2}\rangle \end{pmatrix}, \quad (1.98)$$

где  $\mathbf{p}$  есть импульс одного из мезонов в паре  $\{M_{\alpha 1}M_{\alpha 2}\}$  (импульс второго мезона равен, соответственно,  $-\mathbf{p}$ ). Данное состояние подчиняется уравнению Шредингера (1.8) с гамильтонианом, включающим как переходы между кварковым и мезонными каналами  $\hat{v}_{\alpha 0}(\mathbf{p})$ , так и прямое взаимодействие в мезонных каналах  $v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ :

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} E_0 & \hat{v}_{01}[\mathbf{p}] & \hat{v}_{02}[\mathbf{p}] & \dots \\ \hat{v}_{10}[\mathbf{p}] & \hat{H}_{h_1}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] & \hat{v}_{12}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] & \dots \\ \hat{v}_{20}[\mathbf{p}] & \hat{v}_{21}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] & \hat{H}_{h_2}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

где

$$\hat{H}_{h_\alpha}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] = \left( \delta_\alpha + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_\alpha} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \hat{v}_{\alpha\alpha}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'], \quad (1.100)$$

а приведённая масса в канале  $\alpha$  есть

$$\mu_\alpha = \frac{m_{\alpha 1}m_{\alpha 2}}{m_{\alpha 1} + m_{\alpha 2}}.$$

При этом, как и раньше (см. формулу (1.11)),

$$\langle \psi_0 | \hat{v}_{0\alpha}[\mathbf{p}] | M_{\alpha 1} M_{\alpha 2} \rangle = \langle M_{\alpha 1} M_{\alpha 2} | \hat{v}_{\alpha 0}[\mathbf{p}] | \psi_0 \rangle = f_\alpha(\mathbf{p}), \quad \langle M_{\alpha 1} M_{\alpha 2} | \hat{v}_{\alpha\beta}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'] | M_{\beta 1} M_{\beta 2} \rangle = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (1.101)$$

Обобщение системы уравнений Липпмана-Швингера (1.30) на многоканальный случай имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{00} = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) t_{\alpha 0}(\mathbf{q}) d^3 q \\ t_{\alpha 0}(\mathbf{p}) = f_{\alpha}(\mathbf{p}) - f_{\alpha}(\mathbf{p}) S_0 t_{00} - \sum_{\beta} \int v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) t_{\alpha 0}(\mathbf{q}) d^3 q \\ t_{0\alpha}(\mathbf{p}) = f_{\alpha}(\mathbf{p}) - \sum_{\beta} \int f_{\beta}(\mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 q \\ t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - f_{\alpha}(\mathbf{p}) S_0 t_{0\beta}(\mathbf{p}') - \sum_{\gamma} \int v_{\alpha\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\gamma}(\mathbf{q}) t_{\gamma\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q, \end{array} \right. \quad (1.102)$$

где

$$S_0 = \frac{1}{E_0 - E - i0}, \quad S_{\alpha}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2 / (2\mu_{\alpha}) - E + \delta_{\alpha} - i0} \quad (1.103)$$

есть пропагаторы кварковой компоненты и  $\alpha$ -ой мезонной пары соответственно.

Решение системы уравнений (1.102) имеет вид аналогичный решению для одноканального случая (см. формулы (1.48), (1.50), (1.51), (1.52)) [2]:

$$t_{00} = - \frac{(E - E_0) \mathcal{G}}{E - E_0 + \mathcal{G}}, \quad (1.104)$$

$$t_{0\alpha}(\mathbf{p}) = \frac{E - E_0}{E - E_0 + \mathcal{G}} \bar{\phi}_{\alpha}(\mathbf{p}), \quad (1.105)$$

$$t_{\alpha 0}(\mathbf{p}) = \frac{E - E_0}{E - E_0 + \mathcal{G}} \phi_{\alpha}(\mathbf{p}), \quad (1.106)$$

$$t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \frac{\phi_{\alpha}(\mathbf{p}) \bar{\phi}_{\beta}(\mathbf{p}')}{E - E_0 + \mathcal{G}}, \quad (1.107)$$

где

$$\phi_{\alpha}(\mathbf{p}) = f_{\alpha}(\mathbf{p}) - \sum_{\beta} \int t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) f_{\beta}(\mathbf{q}) d^3 q, \quad (1.108)$$

$$\bar{\phi}_{\alpha}(\mathbf{p}') = f_{\alpha}(\mathbf{p}') - \sum_{\beta} \int f_{\beta}(\mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha}^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q, \quad (1.109)$$

$$\mathcal{G} = \sum_{\alpha} \int f_{\alpha}^2(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) d^3 q - \sum_{\alpha, \beta} \int f_{\alpha}(\mathbf{k}) S_{\alpha}(\mathbf{k}) t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{k}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) f_{\beta}(\mathbf{q}) d^3 k d^3 q, \quad (1.110)$$

а компоненты  $t$ -матрицы  $t^v$  удовлетворяют уравнению Липпмана-Швингера

$$t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_{\gamma} \int v_{\alpha\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\gamma}(\mathbf{q}) t_{\gamma\beta}^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q \quad (1.111)$$

и описывают прямое взаимодействие в мезонных каналах.

Для дальнейших выкладок удобно определить обобщение интегралов (1.63) и (1.64)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{0\alpha}(E) &= \int f_\alpha^2(\mathbf{q}) S_\alpha(\mathbf{q}) d^3q = f_\alpha^{(0)2}(R_\alpha + iI_\alpha), \\ \mathcal{G}'_{0\alpha}(E) &= \int f_\alpha(\mathbf{q}) S_\alpha(\mathbf{q}) d^3q = f_\alpha^{(0)}(R'_\alpha + iI_\alpha),\end{aligned}$$

где  $f_\alpha^{(0)} \equiv f_\alpha(0)$ ,  $I_\alpha = 4\pi^2\mu_\alpha k_\alpha$ , а импульс  $k_\alpha$  равен

$$k_\alpha(E) = \sqrt{2\mu_\alpha(E - \delta_\alpha)}\Theta(E - \delta_\alpha) + i\sqrt{2\mu_\alpha(\delta_\alpha - E)}\Theta(\delta_\alpha - E). \quad (1.112)$$

Нетрудно вывести формулы аналогичные одноканальному случаю для решений, отвечающих как связанному состоянию:

$$C_B = \cos \theta, \quad \chi_{\alpha B} = S_\alpha(\mathbf{p})\phi_\alpha(\mathbf{p}) \cos \theta, \quad (1.113)$$

так и свободной асимптотике в  $\alpha$ -м мезонном канале:

$$C_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(E) = \frac{\bar{\phi}_\alpha(\mathbf{k})}{E - E_0 + \mathcal{G}}, \quad \chi_{\beta;\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \frac{t_{\beta\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\mathbf{p}^2/(2\mu_\beta) - \mathbf{k}^2/(2\mu_\alpha) - i0}. \quad (1.114)$$

Для связанного состояния с волновой функцией (1.113) условие нормировки

$$C_B^2 + \sum_\alpha \int |\chi_{\alpha B}(\mathbf{p})|^2 d^3p = 1$$

определяет угол Вайнберга

$$\text{tg}^2 \theta = \sum_\alpha \int S_\alpha^2(\mathbf{p})\phi_\alpha^2(\mathbf{p}) d^3p,$$

через который нетрудно выразить  $Z$ -фактор:

$$Z = |C_B|^2 = \cos^2 \theta. \quad (1.115)$$

Для непрерывного спектра, как обсуждалось выше, можно построить спектральную плотность

$$w(E) = \sum_\alpha \mu_\alpha k_\alpha \Theta(E - \delta_\alpha) \int \left| C_{\mathbf{k}_\alpha}^{(\alpha)}(E) \right|^2 d\mathbf{o}_{\mathbf{k}_\alpha}, \quad (1.116)$$

нормированную условием (1.61) и определяющую вероятность обнаружить кварковое состояние в волновой функции непрерывного спектра.

В дальнейшем в данном разделе будем полагать число упругих каналов  $N_e = 2$ , что является минимальным расширением одноканального случая, рассмотренного в предыдущем разделе, позволяющим изучить дальнейшие изменения в форме линии околопорогового резонанса за счёт учёта дополнительных упругих каналов. Тогда  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_2 \equiv \delta > 0$ . Для упрощения выкладок будем считать величину  $\delta$  малой по сравнению с массами мезонов и положим  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .

В приближении длины рассеяния и в изоспиновом пределе  $2 \times 2$  матрицу прямого взаимодействия  $t^v$  можно параметризовать в виде:

$$t^v = \frac{1}{\text{Det}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(R_s + R_t) + iI_2 & \frac{1}{2}(R_t - R_s) \\ \frac{1}{2}(R_t - R_s) & \frac{1}{2}(R_s + R_t) + iI_1 \end{pmatrix}, \quad (1.117)$$

где

$$\text{Det} = (R_s R_t - I_1 I_2) + \frac{i}{2}(R_s + R_t)(I_1 + I_2), \quad (1.118)$$

причём величины  $R_s$  и  $R_t$  можно связать с обратными длинами рассеяния в синглетном и триплетном по изоспину каналах:

$$R_s = (2\pi)^2 \mu \gamma_s, \quad R_t = (2\pi)^2 \mu \gamma_t. \quad (1.119)$$

Заметим, впрочем, что такая интерпретация параметров  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  допустима лишь в пределе отсутствия связи с кварковым каналом. Далее, предполагая кварковое состояние изосинглетом, положим

$$R_1 = R_2 = R, \quad R'_1 = R'_2 = R', \quad f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = f^{(0)}/\sqrt{2}$$

и вместо трёх затравочных параметров  $E_0$ ,  $R$  и  $R'$  определим три физических параметра: энергию Флатте  $E_f$ , ноль синглетной  $t$ -матрицы  $E_C$  и константу связи кваркового канала с мезонными каналами  $g_f$ :

$$E_f = E_0 - \frac{f_0^2}{R_s}(RR_s - R'^2), \quad (1.120)$$

$$E_C = E_0 - f_0^2(R_s + R - 2R'), \quad (1.121)$$

$$g_f = \frac{8\pi^2 \mu}{R_s^2} f_0^2 (R_s - R')^2, \quad (1.122)$$

в терминах которых компоненты  $t$ -матрицы упругого рассеяния (1.107) принимают вид [2]:

$$t_{11} = \frac{1}{8\pi^2 \mu} \frac{\gamma_s(E - E_f) + (E - E_C)(\gamma_t + 2ik_2)}{D(E)}, \quad (1.123)$$

$$t_{12} = t_{21} = \frac{1}{8\pi^2 \mu} \frac{\gamma_t(E - E_C) - \gamma_s(E - E_f)}{D(E)}, \quad (1.124)$$

$$t_{22} = \frac{1}{8\pi^2 \mu} \frac{\gamma_s(E - E_f) + (E - E_C)(\gamma_t + 2ik_1)}{D(E)}, \quad (1.125)$$

где

$$D(E) = \gamma_s \left( \gamma_t + \frac{i}{2}(k_1 + k_2) \right) (E - E_f) - \left( k_1 k_2 - \frac{i}{2} \gamma_t (k_1 + k_2) \right) (E - E_C). \quad (1.126)$$

Тогда для изосинглетной, изотриплетной и недиагональной компонент упругой  $t$ -матрицы нетруд-

но найти:

$$t_s = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + t_{12} = \frac{1}{8\pi^2\mu} \frac{(E - E_C)(2\gamma_t + i(k_1 + k_2))}{D(E)}, \quad (1.127)$$

$$t_t = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - t_{12} = \frac{1}{8\pi^2\mu} \frac{2\gamma_s(E - E_f) + i(k_1 + k_2)(E - E_C)}{D(E)}, \quad (1.128)$$

$$t_{st} = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) = \frac{1}{8\pi^2\mu} \frac{i(k_2 - k_1)(E - E_C)}{D(E)}, \quad (1.129)$$

где недиагональная компонента  $t_{st}$ , отвечающая переходам между изосинглетом и изотриплетом, описывает явное нарушение изоспина в лидирующем порядке за счёт того, что  $k_1 \neq k_2$ .

Если в системе присутствует связанное состояние с энергией связи  $E_B$ , то с помощью выведенных ранее формул нетрудно найти для соответствующего  $Z$ -фактора:

$$Z = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \theta}, \quad (1.130)$$

где

$$\text{tg}^2 \theta = \frac{\mu(E_C + E_B)(\kappa_1(\gamma_t - \kappa_1)^2 + \kappa_2(\gamma_t - \kappa_2)^2)}{\kappa_1\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2 - 2\gamma_t)(\gamma_s\gamma_t + \kappa_1\kappa_2 - \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_t)(\kappa_1 + \kappa_2))}, \quad (1.131)$$

причём  $\kappa_i \equiv \text{Im}(k_i(-E_B))$  (см. определение импульсов (1.112)).

Заметим, что одноканальные формулы предыдущего раздела воспроизводятся подстановкой  $k_1 = k_2 = k$ .

Полученные формулы (1.127)-(1.129) позволяют исследовать форму линии околорогового резонанса в двухканальном случае. Прежде всего следует заметить, что обсуждавшийся в предыдущем разделе эффект возникновения нуля амплитуды упругого рассеяния в двухканальном случае проявляется в синглетном канале и определяется величиной  $\gamma_s$ , поскольку именно она связывает положение нуля  $E_C$  с параметром Флатте  $E_f$  в виде (см. формулы (1.120)–(1.122)):

$$E_C = E_f - \frac{1}{2}g_f\gamma_s. \quad (1.132)$$

Следовательно, при  $|\gamma_s| \lesssim \delta/g_f$  ноль  $E_C$  возникает в околороговой области и влияет на форму линии резонанса, тогда как в пределе

$$|\gamma_s| \gg \frac{\delta}{g_f} \quad (1.133)$$

он покидает околороговую область и выходит за границы применимости используемого подхода.

Принципиально новым эффектом, недоступным для исследования в одноканальном случае, является возникновение нелинейного по импульсам члена  $k_1k_2$  (в работе [81] обсуждается влияние этого члена на форму линии чармонийподобного состояния  $X(3872)$  в приближении длины рассеяния), вклад которого определяется величиной параметра  $\gamma_t$  (см. формулу (1.126)): вклад членов

	$\gamma_s$ , МэВ	$\gamma_t$ , МэВ	$E_f$ , МэВ	Line	Z
(i)	$\pm\infty$	$\pm\infty$	-10.47	solid	0.30
(ii)	-30	$\pm\infty$	-3.22	dashed	0.85
(iii)	$\pm\infty$	-30	-7.77	dashed -dotted	0.19
(iv)	-30	-30	-2.97	dotted	0.67

Таблица 1.1. Параметры  $\gamma_s$ ,  $\gamma_t$  и энергия Флатте  $E_f$ , отвечающие энергии связанного состояния  $E_B = 0.5$  МэВ для случаев (i)-(iv). Для каждого случая также вычислен Z-фактор (см. формулу (1.130)).

$k_1 k_2$  сравним с вкладом членов  $k_1 + k_2$  при  $|\gamma_t| \lesssim \sqrt{\mu\delta}$ , тогда как в пределе

$$|\gamma_t| \gg \sqrt{\mu\delta} \quad (1.134)$$

член  $k_1 k_2$  можно отбросить.

Таким образом, можно выделить следующие 4 предельных случая:

- Случай (i):  $|\gamma_s| \rightarrow \infty$  и  $|\gamma_t| \rightarrow \infty$ .
- Случай (ii):  $\gamma_s$  мал, а  $|\gamma_t| \rightarrow \infty$ .
- Случай (iii):  $|\gamma_s| \rightarrow \infty$ , а  $\gamma_t$  мал.
- Случай (iv):  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  оба малы.

Случай (i) отвечает одновременному взятию обоих пределов (1.133) и (1.134), что приводит к исчезновению нуля  $E_C$  из околороговой области и к пренебрежимой малости вклада члена  $k_1 k_2$ . В результате естественным образом воспроизводится знаменатель (1.95), в который каналы входят в виде простой суммы. Для Z-фактора в этом пределе приходим к выражению

$$Z = \left( 1 + \frac{\mu g_f (\kappa_1 + \kappa_2)}{4\kappa_1 \kappa_2} \right)^{-1},$$

обладающему стандартным поведением [46]: при  $g_f \rightarrow 0$   $Z \rightarrow 1$ , что соответствует чисто кварковому состоянию, тогда как при  $g_f \rightarrow \infty$ , наоборот,  $Z \rightarrow 0$ , и состояние является молекулярным. Форма линии, отвечающая случаю (i), будет подробно обсуждаться в разделе 4.3 ниже при анализе данных для состояния X(3872).

В случае (ii) запутывания мезонных каналов снова не происходит, а описание нетривиальной динамики системы за счёт формирования околорогового нуля  $E_C$  приведено в предыдущем разделе, поскольку в данном случае отличие знаменателя  $t$ -матрицы от (1.72) минимально:

$$\mathcal{D}(E) = E - E_f - \frac{(E - E_f)^2}{E - E_C} + \frac{i}{4} g_f (k_1 + k_2), \quad (1.135)$$

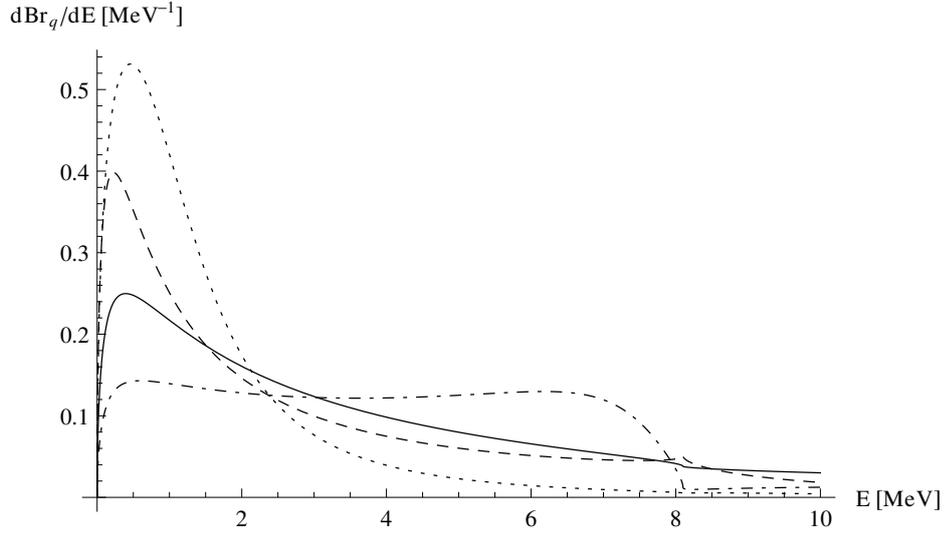


Рис. 1.12. Дифференциальная вероятность рождения резонанса через кварковую компоненту (1.143). Случаи (i)-(iv) показаны соответственно сплошной, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями.

то есть оно сводится лишь к добавлению вклада второго канала в мнимую часть знаменателя. Учёт первой неисчезающей поправки к режиму (1.135) в разложении по  $1/\gamma_t$  даёт замену

$$k_1 + k_2 \rightarrow k_1 + k_2 - \frac{i}{2\gamma_t}(k_1 - k_2)^2.$$

В случае (iii) ноль  $E_C$  не играет никакой роли для околопороговой динамики, зато новый эффект — влияние запутываения упругих каналов через появления членов  $k_1 k_2$  — наоборот, вступает в игру. В данном пределе компоненты матрицы рассеяния принимают вид:

$$t_s = \frac{g_f}{8\pi^2\mu} \frac{1}{\mathcal{D}(E)}, \quad (1.136)$$

$$t_t = \frac{E - E_f + \frac{i}{4}g_f(k_1 + k_2)}{4\pi^2\mu(\gamma_t + \frac{i}{2}(k_1 + k_2))} \frac{1}{\mathcal{D}(E)}, \quad (1.137)$$

$$t_{st} = \frac{ig_f}{16\pi^2\mu} \frac{k_2 - k_1}{\gamma_t + \frac{i}{2}(k_1 + k_2)} \frac{1}{\mathcal{D}(E)}, \quad (1.138)$$

где

$$\mathcal{D}(E) = E - E_f + \frac{i}{4}g_f(k_1 + k_2) + \frac{1}{4}g_f \frac{(k_1 - k_2)^2}{2\gamma_t + i(k_1 + k_2)}.$$

Наконец, случай (iv) не допускает никаких упрощений и демонстрирует всю полноту околопороговых эффектов в двухканальной системе, в которой и кварковая и мезонная динамика одновременно генерируют нули  $S$ -матрицы в околопороговой области.

Для того, чтобы проиллюстрировать пороговые явления в двухканальном случае, рассмотрим, по аналогии с одноканальным случаем, рождение резонанса через все три его компоненты по-отдельности, причём для определённости будем интересоваться мезонным каналом 1 в конеч-

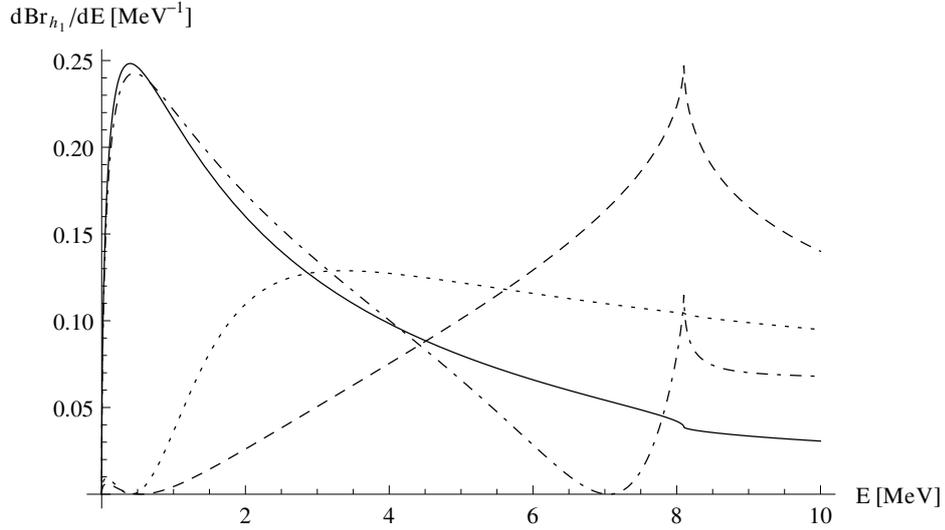


Рис. 1.13. Дифференциальная вероятность рождения резонанса через первую адронную компоненту (1.144). Случаи (i)-(iv) показаны соответственно сплошной, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями.

ном состоянии. Соответствующие амплитуды рождения имеют вид:

$$\mathcal{M}_{h_1} = \mathcal{F}_{h_1} - \mathcal{F}_{h_1} \int S_1(\mathbf{p}) t_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1) d^3p = \mathcal{F}_{h_1} (1 - J_1 t_{11}), \quad (1.139)$$

$$\mathcal{M}_{h_2} = \mathcal{F}_{h_2} - \mathcal{F}_{h_2} \int S_2(\mathbf{p}) t_{21}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2) d^3p = \mathcal{F}_{h_2} (1 - J_2 t_{21}), \quad (1.140)$$

$$\mathcal{M}_q = \mathcal{F}_q S_0 t_{01}, \quad (1.141)$$

где

$$J_\alpha = \int S_\alpha(\mathbf{p}) d^3p = (2\pi)^2 \mu_\alpha (\kappa_\alpha + ik_\alpha) \equiv R_\alpha + iI_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, N_e}, \quad (1.142)$$

а величины  $\mathcal{F}$  обозначают соответствующие точечные источники (см. рис. 1.3). Поскольку  $\kappa_\alpha \simeq \beta$ , где  $\beta$  есть обратный радиус действия сил, который предполагается существенно больше всех характерных импульсов задачи, то в формулах (1.139)-(1.141) в величинах  $J_\alpha$  можно пренебречь импульсом, подставив  $J_\alpha \approx (2\pi)^2 \mu_\alpha \beta$ .

Если  $t$ -матрица имеет полюс(а) в околороговой области, то борновскими членами в выражениях (1.139) и (1.140) можно пренебречь, так что для соответствующих дифференциальных вероятностей рождения окончательно находим:

$$\frac{dBr_q}{dE} = \Theta(E) \frac{\mathcal{B}_0 \sqrt{E}}{|D(E)|^2} \gamma_s^2 |\gamma_t + ik_2|^2, \quad (1.143)$$

$$\frac{dBr_{h_1}}{dE} = \Theta(E) \frac{\mathcal{B}_1 \sqrt{E}}{|D(E)|^2} \left| \gamma_s (E - E_f) + (\gamma_t + 2ik_2) \left( E - E_f + \frac{1}{2} g_f \gamma_s \right) \right|^2, \quad (1.144)$$

$$\frac{dBr_{h_2}}{dE} = \Theta(E) \frac{\mathcal{B}_2 \sqrt{E}}{|D(E)|^2} \left| \gamma_s (E - E_f) - \gamma_t \left( E - E_f + \frac{1}{2} g_f \gamma_s \right) \right|^2, \quad (1.145)$$

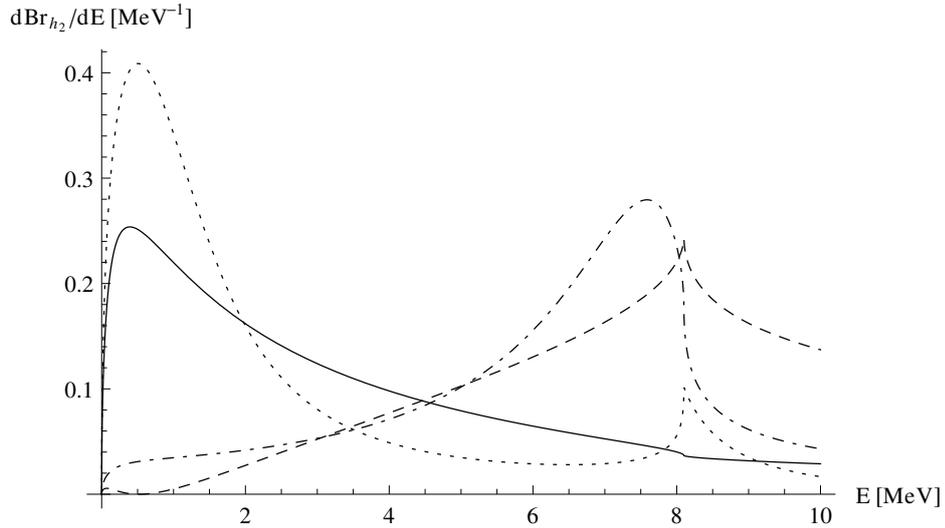


Рис. 1.14. Дифференциальная вероятность рождения резонанса через вторую адронную компоненту (1.145). Случаи (i)-(iv) показаны соответственно сплошной, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями.

где явный вид знаменателя  $D(E)$  приведён в формуле (1.126) выше.

Коэффициенты  $\mathcal{B}_0$ ,  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  пропорциональны множителям  $|\mathcal{F}_q|^2$ ,  $|\mathcal{F}_{h_1}|^2$  и  $|\mathcal{F}_{h_2}|^2$ , а в случае рождения через мезонные компоненты (формулы (1.139) и (1.140)) в них также удобно включить петлевые интегралы  $J_\alpha$ , которые, как объяснялось выше, с хорошей точностью являются постоянными величинами.

Для определённости зафиксируем параметры в виде:

$$\mu = 1 \text{ ГэВ}, \quad \delta = 8 \text{ МэВ}, \quad g_f = 0.25 \quad (1.146)$$

и рассмотрим случаи (i)-(iv) по-отдельности. Остальные используемые параметры приведены в таблице 1.1. Заметим, что, если параметры  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  принимают конечные значения, то их знаки выбраны таким образом, чтобы обеспечивать достаточно сильное притяжение в системе, не приводящее однако к образованию связанного состояния. При включении взаимодействия с кварковой компонентой связанное состояние уже образуется, причём параметр Флатте выбран таким образом, чтобы обеспечить фиксированную энергию связи  $E_B = 0.5 \text{ МэВ}$ .

Формы линии околопорогового резонанса, отвечающие формулам (1.143)-(1.145) для набора параметров из уравнения (1.146) и таблицы 1.1, показаны на рис. 1.12-1.14. Для удобства сравнения все кривые нормированы таким образом, что интеграл от распределения по околопороговой области (от 0 до 10 МэВ) равен 1, что полностью фиксирует общие нормировочные множители  $\mathcal{B}_0$ ,  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$ . Как и в одноканальном случае, следует оговориться, что в реальности не представляется возможным однозначно установить вид процесса рождения резонанса, амплитуда которого, вообще говоря, является комбинацией с неизвестными коэффициентами всех трёх амплитуд (1.139), (1.140) и (1.141).

	I	II	III	IV
(i)	i1.28 (-0.5)	i0.44 (-6.78)	-i0.35 (-12.80)	
(ii)	i1.28 (-0.5)	i0.71 (-0.96)		$\pm 0.63-i1.06$ (1.94 $\mp$ i1.54)
(iii)	i1.28 (-0.5)	$\pm 0.70+i0.19$ (8.26 $\mp$ i1.42)	-i0.99 (-6.6 $\times 10^{-4}$ )	
(iv)	i1.28 (-0.5)	$\pm 0.25+i0.73$ (0.42 $\mp$ i1.32)	$\pm 0.95-i0.31$ (7.73 $\pm$ i0.02)  -i0.93 (-0.05)	$\pm 0.50-i1.08$ (1.24 $\mp$ i1.10)

Таблица 1.2. Положение околопороговых полюсов в комплексной  $\omega$ -плоскости (в скобках даны соответствующие энергии в МэВ) для случаев (i)-(iv). Наименования колонок соответствуют листам поверхности Римана.

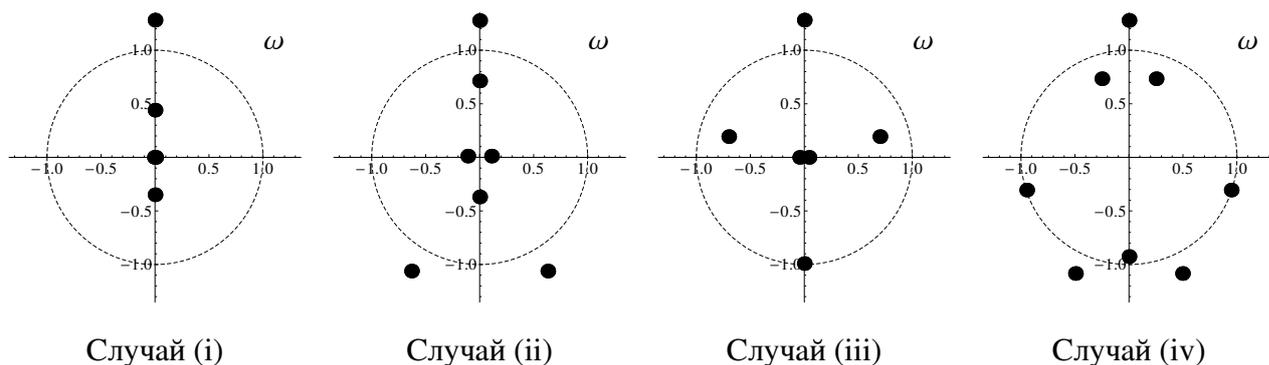


Рис. 1.15. Околопороговые полюса матрицы рассеяния в комплексной  $\omega$ -плоскости для случаев (i)-(iv).

Наконец, в таблице 1.2 и на рис. 1.15 приведено положение полюсов в комплексной  $\omega$ -плоскости (см. приложение А) для всех четырёх случаев (i)-(iv). В таблице 1.2 приведены лишь околопороговые полюса и соответствующие им значения энергии.

Таким образом, в многоканальном случае динамика околопорогового резонанса зависит как от взаимного влияния кварковых и мезонных степеней свободы, так и от прямого взаимодействия в мезонных каналах. Как видно из приведённых примеров, оба эти эффекта могут приводить к весьма причудливой форме линии резонанса, при обнаружении которой в эксперименте можно сделать вывод о том, что данный резонанс образовался в результате нетривиального взаимного влияния разных степеней свободы. При этом обратное утверждение неверно, поскольку интерференция различных механизмов рождения резонанса может приводить к выполаживанию формы

линии. С другой стороны, такое выполаживание подразумевает весьма тонкую подстройку параметров рождения резонанса, которая представляется маловероятной в реальном эксперименте.

## **1.9. Выводы ко второй главе**

В первой главе диссертации был рассмотрен вопрос о форме линии околопорогового состояния в спектре тяжёлых кварков. В частности, была построена модель связанных каналов, позволявшая изучить взаимное влияние друг на друга кварковых и мезонных степеней свободы в таких околопороговых состояниях. Проведённые расчёты показали, что наличие в околопороговой области полюсов матрицы рассеяния, образовавшихся за счёт кварковой и мезонной динамики по-отдельности, может приводить к весьма сложной форме линии околопорогового резонанса. Проведено обобщение полученных формул на многоканальный случай. При этом, помимо эффектов рассмотренных в одноканальной системе, возникают дополнительные эффекты за счёт взаимного влияния упругих каналов реакции друг на друга. Приведены примеры поведения дифференциальной вероятности рождения околопорогового резонанса, отвечающей различным режимам рождения резонанса, а также различным случаям взаимного влияния кварковых и мезонных степеней свободы. Кроме того, развит метод распутывания кварковых и адронных степеней свободы при решении соответствующих уравнений Липпмана-Швингера, который будет использован ниже, во второй главе диссертации.

## Параметризация формы линии околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков

### 2.1. Введение

Вторая глава диссертации посвящена построению метода изучения околопороговых состояний в спектре адронов, содержащих тяжёлые кварки. Основой метода является одновременный анализ данных для всех каналов реакции рождения и распада околопорогового резонанса (или нескольких резонансов). Полученные формулы играют роль связующего звена между моделями сильных взаимодействий и экспериментом. В частности, предложена параметризация формы линии околопороговых резонансов, удовлетворяющая требованиям унитарности и аналитичности, ключевым достоинством которой является её относительная простота, что делает возможным использование полученных формул для анализа экспериментальных данных. Другим важным достоинством предложенной параметризации является её непосредственная связь с феноменологией, поскольку все входящие в неё параметры имеют ясную физическую интерпретацию и по этой причине могут служить источником информации о природе изучаемого резонанса, о силах и взаимодействиях, ответственных за его образование, о точности предсказаний тех или иных симметрий для рассматриваемой системы и т.п.

Примерами состояний, для описания которых может использоваться предложенный метод, являются чармонийподобные состояния  $X(3872)$ ,  $Z_c(3900)$  и  $Z_c(4020)/Z_c(4025)$ , лежащие вблизи порогов  $D\bar{D}^*$  и  $D^*\bar{D}^*$ , а также состояния в спектре боттомония  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  (для краткости обозначаемые иногда как  $Z_b$  и  $Z'_b$  соответственно), лежащие вблизи порогов  $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}^*$ . В частности, в данной главе диссертации возможности предложенной параметризации продемонстрированы на примере одновременной обработки данных по каналам реакции  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$ ,  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi h_b(mP)$  ( $m = 1, 2$ ) и  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi\Upsilon(nS)$  ( $n = 1, 2, 3$ ). Получено хорошее описание данных, а параметры, извлечённые из фита, использованы для изучения природы состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ .

Заметим, что в данных примерах, а также повсеместно в дальнейшем под краткой записью  $\mathcal{M}_1\bar{\mathcal{M}}_2$  с  $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2$  понимаются должным образом нормированные комбинации волновых функций мезонов, обладающие необходимой  $C$ -чётностью. Например, для  $X(3872)$  под  $D\bar{D}^*$  подразумевается  $C$ -чётная комбинация  $(D\bar{D}^* + \bar{D}D^*)/\sqrt{2}$ , если операция зарядового сопряжения определена как  $C\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}$ . Аналогично, для  $Z_b^{(\prime)}$  под  $B\bar{B}^*$  подразумевается  $C$ -нечётная комбинация

состояний  $B\bar{B}^*$  и  $\bar{B}B^*$ .

## 2.2. Модель связанных каналов и система уравнений Липпмана-Швингера

Дальнейшим расширением модели связанных каналов, развитой в предыдущем разделе диссертации, является учёт неупругих каналов. В простейшем случае удалённые неупругие каналы могут быть включены в виде дополнительного постоянного вклада в ширину резонанса (см., например, параметр  $\Gamma_0$  в распределении Флатте (1.2)). Однако такой эффективный учёт неупругих каналов не позволяет рассчитывать на детальное описание данных в этих каналах, в частности формы линии резонанса в них. Кроме того, амбициозной целью является построение относительно простой, но реалистичной параметризации, которая позволяла бы описывать данные по распадам околопорогового резонанса (резонансов) в нескольких каналах одновременно. Таким образом, рассматривается система, содержащая тяжёлую пару  $\bar{Q}Q$  и распадающаяся по упругим каналам с открытым ароматом вида  $(\bar{Q}q)(\bar{q}Q)$  (для обозначения данных каналов используются маленькие буквы греческого алфавита  $\alpha, \beta$  и т.д.), а также по неупругим каналам со скрытым ароматом вида  $(\bar{Q}Q)(\bar{q}q)$  (обозначаются маленькими буквами из середины латинского алфавита:  $i, j, \dots$ ). В системе также возможно присутствие элементарных (кварковых) состояний, обозначаемых индексами  $a, b, \dots$ . Характерным примером системы, описываемой такой моделью, являются распады чармония  $X(3872)$  [82]. При этом упругими являются каналы распада  $D\bar{D}^*$  (с нейтральными и заряженными  $D$  мезонами), а неупругими —  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$ . Кварковую компоненту волновой функции резонанса можно отождествить с  $\bar{c}s$  чармонием с квантовыми числами  $2^3P_1$ . Другим примером являются боттомонийподобные состояния  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  [83], распадающиеся по упругим каналам  $B^{(*)}\bar{B}^*$  и по неупругим каналам  $\pi\Upsilon(nS)$  и  $\pi h_b(mP)$  ( $n = 1, 2, 3, m = 1, 2$ ). При этом, поскольку состояния  $Z_b^{(i)}$  содержат пару  $\bar{b}b$ , но при этом являются заряженными, то их минимальный состав является четырёхкварковым. Таким образом, хотя наличие кварковой компоненты (в данном случае компактного тетракварка (см., например, обзор [84] и расчёты в рамках релятивистской кварковой модели в работах [85–87]) в волновой функции  $Z_b^{(i)}$  не может быть полностью исключено, однако на первом этапе наиболее естественным было бы предположить отсутствие такой компоненты.

Ключевыми элементами модели являются, таким образом, (i) прямое взаимодействие в упругих каналах  $v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  и в неупругих каналах  $v_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , (ii) формфакторы перехода между упругими и неупругими каналами (микроскопическая модель таких переходов предложена в работах [71, 72]), а также (iii) формфакторы перехода между кварковыми состояниями и упругими и неупру-

Рис. 2.1. Уравнение Липпмана-Швингера для упругой  $t$ -матрицы  $t_{AB}$  (см. уравнение (2.14)). Сплошной линией обозначены тяжёло-лёгкие мезоны с открытым ароматом ( $\bar{q}Q$ ) и ( $\bar{Q}q$ ).

гими каналами:

$$v_{i\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad v_{a\alpha}(\mathbf{p}), \quad v_{ai}(\mathbf{k}), \quad \alpha = \overline{1, N_e}, \quad a = \overline{1, N_p}, \quad i = \overline{1, N_{in}}. \quad (2.1)$$

Заметим, что, если модель включает в себя все возможные каналы реакции, то унитарность и  $T$ -инвариантность приводят к требованию вещественности и симметрии потенциала взаимодействия. В этом случае все вершины, формфакторы переходов, а также источники (см. ниже) являются вещественными функциями, а источниками мнимостей могут быть только петлевые интегралы в каналах, пороги которых лежат ниже рассматриваемой энергии. Введение дополнительной неупругости, эффективно описывающей неучтённые каналы, возможно, но нарушает унитарность, поэтому должно производиться контролируемым образом. Данный аргумент можно обратить: если для описания данных часть параметров должна приобрести мнимые части, то это свидетельствует о неполноте модели и о необходимости её расширения.

Таким образом, полное взаимодействие в системе может быть записано в виде:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} v_{ab} & v_{a\beta}(\mathbf{p}') & v_{ai}(\mathbf{k}) \\ v_{\alpha b}(\mathbf{p}) & v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \\ v_{ja}(\mathbf{k}') & v_{j\beta}(\mathbf{k}', \mathbf{p}') & v_{ji}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{matrix} b = \overline{1, N_p} & \beta = \overline{1, N_e} & i = \overline{1, N_{in}} \\ a = \overline{1, N_p} \\ \alpha = \overline{1, N_e} \\ j = \overline{1, N_{in}} \end{matrix} \quad (2.2)$$

Количество упругих каналов  $N_e$ , количество неупругих каналов  $N_{in}$  и количество затравочных полюсов  $N_p$  не фиксированы и могут меняться в зависимости от конкретной рассматриваемой физической системы. В принципе, задачу о связанных каналах с взаимодействием (2.2) можно решать численно в наиболее общем виде, а также аналитически, если предположить сепарабельную форму потенциала  $v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ , однако полученные при этом выражения весьма громоздки и поэтому малоприспособны для анализа экспериментальных данных. В частности, полученное решение будет требовать многократного обращения матриц размером  $(N_e + N_{in} + N_p) \times (N_e + N_{in} + N_p)$ . Дополнительным неудобством полного решения является необходимость начинать всю процедуру сначала для включения дополнительных неупругих каналов. Между тем, есть основания пренебрегать

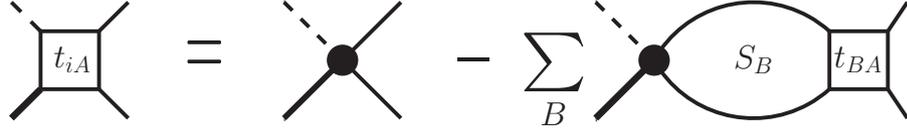


Рис. 2.2. Графическое представление для компоненты  $t$ -матрицы  $t_{iA}$ , приведённой в формуле (2.16). Представление для  $t_{Ai}$  выглядит полностью аналогично. Сплошная линия обозначает тяжёло-лёгкий мезон ( $\bar{q}Q$ ) или ( $\bar{Q}q$ ) с открытым ароматом, жирная сплошная линия обозначает тяжёлый мезон со скрытым ароматом ( $\bar{Q}Q$ ), а пунктирная линия обозначает лёгкий мезон ( $\bar{q}q$ ).

прямым взаимодействием между неупругими каналами. Так, для неупругих каналов, содержащих тяжёлые кваркони и пионы (например, для каналов  $\pi\Upsilon(nS)$  и  $\pi h_b(mP)$  в секторе боттомониев) имеется подавление в силу того, что в тяжёлых кваркониях отсутствуют валентные лёгкие кварки и, следовательно, в лидирующем порядке низкоэнергетического разложения пионы с тяжёлыми кваркониями не взаимодействуют. Дополнительным подтверждением такого приближения являются решёточные данные по длинам рассеяния в системах  $\pi J/\psi$  и  $\pi\eta_c$ , которые принимают крайне малые, совместимые с нулём, значения [88]. В случае состояния чармония  $X(3872)$  прямые переходы между неупругими каналами  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$  должны идти с сильным нарушением изоспина, поэтому они также подавлены<sup>1</sup>.

Таким образом, в дальнейшем прямым взаимодействием  $v_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  будем полностью пренебрегать, так что матрица потенциалов (2.2) принимает более простой вид:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} v_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & v_{Ai}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \\ v_{jB}(\mathbf{k}', \mathbf{p}') & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A = \overline{1, N_e + N_p} \\ j = \overline{1, N_{in}} \end{array} \quad (2.3)$$

где для краткости записи кварковые каналы рассматриваются в качестве частного случая упругих каналов. Таким образом, набор упругих каналов формально расширен, и в качестве соответствующих индексов используются заглавные буквы греческого алфавита, пробегающие значения от 1 до  $N_e + N_p$ .

Продемонстрируем на простом примере упрощения, достигаемые за счёт пренебрежения прямым взаимодействием в неупругих каналах. Для этого рассмотрим двухканальную систему, опи-

<sup>1</sup> Здесь следует лишний раз подчеркнуть, что речь идёт не о полном запрете переходов между неупругими каналами, а об отсутствии короткодействующих сил, обеспечивающих такие переходы. При этом перерассеяния в неупругих каналах через упругие каналы и через кварковые состояния по-прежнему возможны.

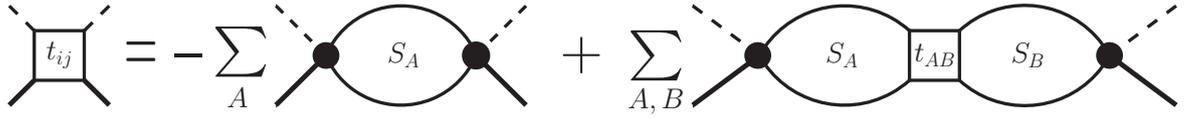


Рис. 2.3. Графическое представление для компоненты  $t$ -матрицы  $t_{ij}$ , приведённой в формуле (2.16). Для идентификации линий см. подпись к рис. 2.2.

сываемую алгебраическим уравнением Липпмана-Швингера

$$t = v - vSt, \quad (2.4)$$

где  $S$  есть диагональная матрица затравочных пропагаторов, а матрица потенциалов имеет вид:

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Тогда, записав уравнение (2.4) покомпонентно, приходим к системе двух “зацепленных” уравнений

$$t_{ij} = v_{ij} - \sum_{k=1,2} v_{ik} S_k t_{kj}, \quad (2.6)$$

которая допускает существенное упрощение в случае обращения в ноль диагонального матричного элемента, например,  $v_{22} = 0$ . Действительно, в этом случае с помощью переопределения потенциала

$$\tilde{v}_{11} = v_{11} - v_{12} S_2 v_{21}, \quad (2.7)$$

систему уравнений (2.6) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} t_{11} = \tilde{v}_{11} - t_{11} S_1 \tilde{v}_{11} = \tilde{v}_{11} - \tilde{v}_{11} S_1 t_{11} \\ t_{12} = v_{12} - \tilde{v}_{11} S_1 t_{12} = v_{12} - t_{11} S_1 v_{12} \\ t_{21} = v_{21} - t_{21} S_1 \tilde{v}_{11} = v_{21} - v_{21} S_1 t_{11} \\ t_{22} = -t_{21} S_1 v_{12} = -v_{21} S_1 v_{12} + v_{21} S_1 t_{11} S_1 v_{12}, \end{cases} \quad (2.8)$$

где теперь только первое уравнение для  $t_{11}$  требует решения, тогда как все остальные соотношения алгебраически выражают другие компоненты  $t$ -матрицы через  $t_{11}$ . Более того, переопределённый потенциал (2.7) аддитивен, то есть добавление в систему третьего, четвёртого и т.д. невзаимодействующих между собой каналов привело бы к появлению дополнительных членов в правой части выражения (2.7), однако оно никак не сказалось бы на соотношениях между  $t_{11}$  и другими компонентами  $t$ -матрицы. При этом для самой компоненты  $t_{11}$  имеем всего одно уравнение, то есть произошло эффективное сокращение базиса каналов.

Воспользуемся описанным выше приёмом для упрощения изучаемой полной системы уравнений связанных каналов. Прежде всего удобно определить потенциал  $V_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  в виде:

$$V_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_i \int v_{Ai}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{iB}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3q, \quad (2.9)$$

который имеет простую физическую интерпретацию: переход из упругого канала  $A$  в упругий канал  $B$  может происходить как за счёт прямого взаимодействия  $v_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , так и за счёт неупругих каналов (петель) в промежуточном состоянии, причём суммирование по  $i$  включает все такие неупругие петли (см. простой пример (2.7)). Записанный покомпонентно потенциал (2.9) принимает вид:

$$V_{ab} = \text{---}\otimes\text{---} - \sum_i \text{---}\text{---} = v_{ab} - \sum_i \int v_{ai}(\mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{ib}(\mathbf{q}) d^3q \equiv -\mathcal{G}_{ab}^{\text{in}}, \quad (2.10)$$

$$V_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) = \text{---}\text{---} - \sum_i \text{---}\text{---} = v_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) - \sum_i \int v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{i\alpha}(\mathbf{q}) d^3q, \quad (2.11)$$

$$V_{a\beta}(\mathbf{p}) = \text{---}\text{---} - \sum_i \text{---}\text{---} = v_{a\beta}(\mathbf{p}) - \sum_i \int v_{ai}(\mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{i\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3q, \quad (2.12)$$

$$V_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \text{---}\text{---} - \sum_i \text{---}\text{---} = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_i \int v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{i\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3q, \quad (2.13)$$

где через  $S_i(\mathbf{q})$  обозначены пропагаторы неупругих каналов.

Уравнение Липпмана-Швингера для упругой  $t$ -матрицы  $t_{AB}$  можно записать в виде (см. рис. 2.1)

$$t_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_{\Gamma} \int V_{A\Gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\Gamma}(\mathbf{q}) t_{\Gamma B}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3q, \quad (2.14)$$

где

$$S_{0,aa} \equiv \int \mathcal{S}_a(\mathbf{q}) d^3q = \frac{1}{M_{0,a} - M - i0} \quad (2.15)$$

обозначает диагональный элемент матрицы пропагаторов полюсных членов ( $M_{0,a}$  есть “затравочная” масса), а  $S_{\alpha}(\mathbf{p})$  есть пропагатор  $\alpha$ -ой мезонной пары  $(\bar{Q}q)(\bar{q}Q)$ . Поскольку в дальнейшем для петлевых интегралов в упругих и неупругих каналах будет использована удобная параметризация, то явный вид пропагаторов  $S_i(\mathbf{q})$  и  $S_{\alpha}(\mathbf{q})$  не играет роли.

Если решение уравнения (2.14) известно, то остальные компоненты полной  $t$ -матрицы можно найти с помощью простых соотношений, уже не подразумевающих ни решения уравнений, ни

Рис. 2.4. Полный эффективный упругий потенциал (см. формулу (2.19)). Двойная сплошная линия обозначает пропагатор полюсного члена. Для идентификации остальных линий см. подпись к рис. 2.2. Потенциалы  $V_{\alpha a}$  и  $V_{b\beta}$  определены в уравнениях (2.11) и (2.12).

обращения матриц (см. рис. 2.2 и 2.3):

$$\begin{aligned}
t_{Ai}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= v_{Ai}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \sum_B \int t_{AB}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_B(\mathbf{q}) v_{Bi}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^3 q, \\
t_{iA}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= v_{iA}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \sum_B \int v_{iB}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) S_B(\mathbf{q}) t_{BA}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^3 q, \\
t_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= - \sum_A \int v_{iA}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) S_A(\mathbf{q}) v_{Aj}(\mathbf{q}, \mathbf{k}') d^3 q \\
&\quad + \sum_{A,B} \int v_{iA}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) S_A(\mathbf{q}) t_{AB}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') S_B(\mathbf{q}') v_{Bj}(\mathbf{q}', \mathbf{k}') d^3 q d^3 q'.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Заметим, что, поскольку прямое перерасcеяние неупругих каналов друг через друга было отброшено, то в полной аналогии с разобранным выше простым примером неупругие каналы входят в уравнения аддитивно, так что добавление новых неупругих каналов сводится лишь к добавлению лишних слагаемых в сумму по  $i$  в формуле (2.9). Кроме того произошло полное распутывание упругих и неупругих каналов, что сводит решение полной задачи к решению существенно более простой задачи о перерасcеяниях в упругих каналах — см. уравнение (2.14). Иначе говоря, с практической точки зрения упрощение состоит в том, что обращаться приходится матрицы гораздо меньшего размера — всего лишь  $(N_e + N_p) \times (N_e + N_p)$ . Действительно, на практике количество упругих каналов обычно не превышает двух, и количество полюсных членов также естественно ожидать на уровне от нуля до двух. При этом включение неупругих каналов, число которых обычно является довольно большим, уже не увеличивает ранг матриц.

Для решения уравнения (2.14) удобно снова явно разделить кварковые и упругие каналы и рассмотреть их по-отдельности. Соответственно, уравнение (2.14) сводится к замкнутой системе уравнений для компонент  $t$ -матрицы  $t_{\alpha\beta}$ ,  $t_{\alpha a}$ ,  $t_{a\alpha}$  и  $t_{ab}$ , которая, в свою очередь, распадается на две несвязанные подсистемы, состоящие из двух уравнений каждая. Далее, полностью исключив компоненты  $t_{ab}$  и  $t_{a\alpha}$ , нетрудно прийти к следующим уравнениям Липпмана-Швингера для оставшихся компонент  $t$ -матрицы  $t_{\alpha\beta}$  и  $t_{\alpha a}(\mathbf{p})$ , представляющих основной интерес:

$$t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_{\gamma} \int V_{\alpha\gamma}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\gamma}(\mathbf{q}) t_{\gamma\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q, \tag{2.17}$$

$$t_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) = V_{\alpha\alpha}^{\text{eff}}(\mathbf{p}) - \sum_{\beta} \int V_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha}(\mathbf{q}) d^3q, \quad (2.18)$$

где эффективный упругий потенциал  $V_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  схематично представлен на рис. 2.4 и имеет вид:

$$V_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_{a,b} V_{\alpha a}(\mathbf{p}) G_{0,ab} V_{b\beta}(\mathbf{p}') - \sum_i \int v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{i\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3q, \quad (2.19)$$

тогда как эффективный потенциал  $V_{\alpha\alpha}^{\text{eff}}(\mathbf{p})$  равен

$$V_{\alpha\alpha}^{\text{eff}}(\mathbf{p}) = (M_{0,a} - M) \sum_b V_{\alpha b}(\mathbf{p}) G_{0,ba}. \quad (2.20)$$

Матрица пропагаторов кварковых состояний с учётом перерасеяний через неупругие каналы принимает вид:

$$G_0 = (S_0^{-1} - \mathcal{G}^{\text{in}})^{-1}. \quad (2.21)$$

В случае всего одного затравочного полюса ( $N_p = 1$ , для обозначения соответствующих величин используется индекс 0) функция  $G_0$  есть просто

$$G_0 = \frac{1}{M_0 - M + V_{00} - i0}. \quad (2.22)$$

Таким образом, эффект от неупругих каналов собран в величину  $\mathcal{G}^{\text{in}}$ , определённую в формуле (2.10). Вещественную часть  $\mathcal{G}^{\text{in}}$  можно поглотить в перенормировку затравочной массы  $M_0$ , тогда как её мнимая часть сдвигает полюс одетого пропагатора с вещественной оси в комплексную плоскость, причём, как и требует унитарность, этот сдвиг непосредственно связан с переходами через неупругие каналы.

При наличии множественных затравочных полюсов диагональные элементы  $\mathcal{G}_{aa}^{\text{in}}$  точно так же перенормируют затравочные массы  $M_{0,a}$  (см. уравнение (2.15)), тогда как внедиагональные элементы  $\mathcal{G}_{ab}^{\text{in}}$  ( $a \neq b$ ) описывают прямые переходы между затравочными кварковыми состояниями, так что их вещественные части

$$\kappa_{ab}^{\text{in}} \equiv \text{Re}(\mathcal{G}_{ab}^{\text{in}}) \quad \text{для } a \neq b \quad (2.23)$$

необходимо удерживать в качестве дополнительных параметров модели. Так, например, в случае двух затравочных полюсов имеем всего один такой дополнительный параметр  $\kappa_{12}^{\text{in}} = \kappa_{21}^{\text{in}}$ . При этом представить себе ситуацию, в которой для описания системы потребовалось бы введение более двух затравочных полюсов, достаточно сложно.

Если предположить сепарабельность взаимодействия (2.1), отвечающего за связь упругих и неупругих каналов, то есть положить

$$v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \chi_{i\alpha}(\mathbf{p}) \varphi_{i\alpha}(\mathbf{k}), \quad (2.24)$$

то можно получить аналитическое решение уравнения (2.17). При этом заметим, что разделение вершины перехода  $v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  на множители является неоднозначной процедурой, поскольку множители  $\chi_{i\alpha}(\mathbf{p})$  и  $\varphi_{i\alpha}(\mathbf{k})$  определены лишь с точностью до постоянного множителя. Следовательно, без ограничения общности можно нормировать формфактор  $\chi_{i\alpha}(\mathbf{p})$  условием

$$\chi_{i\alpha}(\mathbf{p} = 0) = 1. \quad (2.25)$$

Дополнительные существенные упрощения в уравнениях (2.17) и (2.18) возникают в том случае, если формфактор  $\chi_{i\alpha}(\mathbf{p})$ , входящий в вершинную функцию (2.24), не зависит от неупругого канала. Заметим, что данное предположение весьма естественно и практически не сужает границы применимости модели, поскольку переходы между различными упругими и неупругими каналами обусловлены одними и теми же короткодействующими силами. Таким образом, для формфактора перехода между упругими и неупругими каналами находим окончательно:

$$v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \chi_{\alpha}(\mathbf{p})\varphi_{i\alpha}(\mathbf{k}). \quad (2.26)$$

Тогда с учётом сделанных предположений эффективный потенциал (2.19) можно записать в виде:

$$V_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \chi_{\alpha}(\mathbf{p})G_{\alpha\beta}\chi_{\beta}(\mathbf{p}') - \sum_{a,b} V_{\alpha a}(\mathbf{p})G_{0,ab}V_{b\beta}(\mathbf{p}'), \quad (2.27)$$

где суммарный вклад неупругих петель  $G_{\alpha\beta}$  равен

$$G_{\alpha\beta} \equiv \sum_i G_{\alpha\beta}^i = \sum_i \int \varphi_{\alpha i}(\mathbf{q})S_i(\mathbf{q})\varphi_{i\beta}(\mathbf{q})d^3q. \quad (2.28)$$

Уравнения (2.17) и (2.18) удобно решать в несколько этапов:

1. На первом шаге удобно оставить только прямое взаимодействие  $v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  (первый член в потенциале (2.27)), так что в соответствии с принятыми ранее обозначениями полученное решение есть упругая  $t$ -матрица прямого взаимодействия  $t^v$ .
2. На следующем шаге прямое взаимодействие дополняется вкладом неупругих каналов (второй член в потенциале (2.27)) и решается уравнение Липпмана-Швингера в потенциале

$$w_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \chi_{\alpha}(\mathbf{p})G_{\alpha\beta}\chi_{\beta}(\mathbf{p}'), \quad (2.29)$$

решение которого для краткости записи обозначается через  $t^w$ .

3. Наконец, на последнем этапе добавляется связь с кварковыми каналами (последний член в потенциале (2.27)) и тем самым решается полная задача. В случае, если вклады кварковых каналов можно не учитывать, достаточно остановиться на предыдущем шаге, так что полная  $t$ -матрица будет даваться матрицей  $t^w$ .

Таким образом, в соответствии с первым шагом решения, описанным выше, сначала рассматривается уравнение Липпмана-Швингера для матрицы  $t^v$  вида

$$t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \sum_{\gamma} \int v_{\alpha\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\gamma}(\mathbf{q}) t_{\gamma\beta}^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d^3 q \quad (2.30)$$

с потенциалом прямого взаимодействия  $v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ . Как и ранее, в предыдущих разделах, решение данного уравнения считается известным, в частности, оно может быть просто параметризовано в подходящем виде [1, 2] (см., например, формулу (1.117) выше).

При переходе ко второму шагу решения и включении взаимодействия с неупругими каналами “голые” формфакторы  $\chi_{\alpha}(\mathbf{p})$  и  $\chi_{\alpha}(\mathbf{p})$  “одеваются” за счёт прямого упругого взаимодействия, так что удобно определить новые формфакторы  $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$  и  $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$  как<sup>2</sup>

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \text{>} - \text{>} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha}(\mathbf{p}) - \int t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) \chi_{\beta}(\mathbf{q}) d^3 q, \quad (2.31)$$

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \text{<} - \text{<} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha}(\mathbf{p}) - \int \chi_{\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 q. \quad (2.32)$$

Тогда нетрудно убедиться, что решение уравнения Липпмана-Швингера с потенциалом (2.29) можно построить в виде:

$$t_{\alpha\beta}^w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = t_{\alpha\beta}^v(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sum_{\gamma, \delta} \psi_{\alpha\gamma}(\mathbf{p}) ([\mathcal{G} - G^{-1}]^{-1})_{\gamma\delta} \bar{\psi}_{\delta\beta}(\mathbf{p}'), \quad (2.33)$$

где матрица  $G$  дана в уравнении (2.28), тогда как матрица  $\mathcal{G}$  определяется как

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \text{>} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \int \chi_{\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) d^3 q = \text{<} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \int \bar{\psi}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) \chi_{\beta}(\mathbf{q}) d^3 q. \quad (2.34)$$

Такой вид решения можно рассматривать в качестве непосредственного обобщения формулы (1.107) на случай взаимодействия, смешивающего упругие каналы.

Перейдём теперь к шагу 3 и обратимся к построению решений уравнений (2.17) и (2.18). Достаточно воспользоваться результатами раздела 1.7, чтобы получить

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= t_{\alpha\beta}^w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sum_{a,b} \phi_{\alpha a}(\mathbf{p}) (\mathcal{G}^e - G_0^{-1})_{ab}^{-1} \bar{\phi}_{b\beta}(\mathbf{p}'), \\ &= t_{\alpha\beta}^w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sum_{a,b} \phi_{\alpha a}(\mathbf{p}) (\mathcal{G}^e + \mathcal{G}^{\text{in}} - S_0^{-1})_{ab}^{-1} \bar{\phi}_{b\beta}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$t_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) = - \sum_b \phi_{\alpha b}(\mathbf{p}) [S_0 (\mathcal{G}^e - G_0^{-1})]_{ba}^{-1} = \sum_b \phi_{\alpha b}(\mathbf{p}) [1 - S_0 (\mathcal{G}^e + \mathcal{G}^{\text{in}})]_{ba}^{-1}, \quad (2.36)$$

<sup>2</sup> Поскольку “голые” величины  $\chi_{\alpha}(\mathbf{p})$  не зависят от неупругого канала, то же справедливо и для их “одетых” обобщений  $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ .

где величина  $G_0^{-1}$  была выражена из соотношения (2.21), и

$$\phi_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) = \text{---} \text{---} - \sum_{\beta} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = V_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) - \sum_{\beta} \int t_{\alpha\beta}^w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) V_{\beta\alpha}(\mathbf{q}) d^3 q, \quad (2.37)$$

$$\bar{\phi}_{\alpha}(\mathbf{p}) = \text{---} \text{---} - \sum_{\beta} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = V_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) - \sum_{\beta} \int V_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha}^w(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 q, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab}^e &= \sum_{\alpha} \text{---} \text{---} - \sum_{\alpha, \beta} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= \sum_{\alpha} \int V_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) V_{\alpha b}(\mathbf{q}) d^3 q - \sum_{\alpha, \beta} \int V_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) t_{\alpha\beta}^w(\mathbf{q}, \mathbf{q}') V_{\beta b}(\mathbf{q}') S_{\beta}(\mathbf{q}') d^3 q d^3 q'. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Примечательно, что, в соответствии с естественными ожиданиями, в окончательные формулы (2.35) и (2.36) упругие и неупругие петлевые операторы  $\mathcal{G}^e$  и  $\mathcal{G}^{\text{in}}$  вошли в сумме.

Аналогично формуле (1.53) можно записать:

$$\mathcal{G}_{ab}^e = \sum_{\alpha} \text{---} \text{---} = \sum_{\alpha} \int V_{\alpha\alpha}(\mathbf{q}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) \phi_{\alpha b}(\mathbf{p}) d^3 q = \sum_{\alpha} \text{---} \text{---} = \sum_{\alpha} \int \bar{\phi}_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) S_{\alpha}(\mathbf{q}) V_{\alpha b}(\mathbf{q}) d^3 q. \quad (2.40)$$

Полученные выражения (2.35) и (2.36) представляют собой искомые решения полных уравнений Липпмана-Швингера (2.17) и (2.18). Тогда компоненту  $t$ -матрицы  $t_{\alpha i}$  можно найти из первого уравнения системы (2.16):

$$t_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = v_{\alpha i}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \sum_a t_{\alpha a}(\mathbf{p}) S_{0,aa} v_{ai}(\mathbf{k}) - \sum_{\beta} \int t_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) S_{\beta}(\mathbf{q}) v_{\beta i}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^3 q. \quad (2.41)$$

Таким образом, полная задача сводится к решению лишь уравнения Липпмана-Швингера (2.30) для упругой  $t$ -матрицы прямого взаимодействия  $t^v$  (или к её подходящей параметризации), после чего решение полной системы уравнений строится по выведенным выше формулам. С практической точки зрения построение полного решения требует обращения матриц  $N_e \times N_e$  и  $N_p \times N_p$  по-отдельности, то есть в большинстве случаев всего лишь матриц не больше, чем  $2 \times 2$ . Иначе говоря, достигнуто существенное упрощение исходной задачи, требовавшей обращения матриц гораздо большего размера —  $(N_e + N_p + N_{\text{in}}) \times (N_e + N_p + N_{\text{in}})$ , где обычно  $N_{\text{in}} \gg 1$ .

Полученные выше решения для компонент  $t$ -матрицы (1.48), (2.36) и (2.41) можно использовать для определения амплитуд и сечений различных реакций в изучаемой системе. Остальные компоненты  $t$ -матрицы, а именно,  $t_{00}$ ,  $t_{0\alpha}$ ,  $t_{i\alpha}$  и  $t_{ij}$  в дальнейшем использоваться не будут, потому для экономии места их явный вид не приводится.

К сожалению, как уже указывалось выше, прямое экспериментальное изучение процессов рассеяния адронов друг на друге невозможно ввиду их нестабильности, поэтому источником информации о резонансах являются процессы рождения. Для простоты будем полагать, что рождение имеет место из точечных источников. Вообще говоря, необходимо добавить в систему  $N_e$  упругих

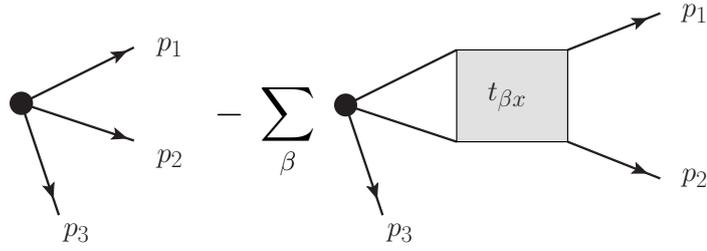


Рис. 2.5. Амплитуда рождения канала  $x$  из точечного источника: борновский член (первая диаграмма; присутствует только для упругих каналов  $x$ ) плюс член с перерассеянием (вторая диаграмма). Взаимодействием в конечном состоянии частицы 3 с остальными частицами пренебрежено.

источников,  $N_{\text{in}}$  неупругих источников и  $N_{\text{p}}$  источников для кварковых каналов. Однако, интересуясь явлениями вблизи упругих порогов, можно считать, что рождение резонансов происходит только из упругих источников — будем обозначать их через  $\mathcal{F}_\alpha$ . Кроме того, в подавляющем большинстве изучаемых процессов резонанс рождается в сопровождении других адронов<sup>3</sup>. На рис. 2.5 приведены диаграммы, дающие вклад в амплитуду рождения канала  $x$  (упругого или неупругого), так что задача рассматривается в следующей постановке: а) имеет место рождение упругого канала из точечного источника, сопровождающееся рождением частицы-спектатора (частица 3 на рис. 2.5); б) для упрощения задачи взаимодействие в конечном состоянии рассматривается лишь между частицами 1 и 2, а взаимодействием между ними и частицей 3 пренебрегается (данное приближение позволяет дальше продвинуться с аналитическими вычислениями, тогда как в численных расчётах от него можно отказаться); в) благодаря перерассеяниям в конечном состоянии в системе частиц 1 и 2 может образовываться любой упругий или неупругий канал  $x$ . Соответствующие амплитуды можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{M}_\alpha^e(\mathbf{p}) = \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{p}) - \sum_\beta \int \mathcal{F}_\beta(\mathbf{q}) S_\beta(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3q \quad (2.42)$$

для упругого канала  $x = \alpha$  или

$$\mathcal{M}_i^{\text{in}}(\mathbf{k}) = - \sum_\alpha \int \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{q}) S_\alpha(\mathbf{q}) t_{\alpha i}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) d^3q \quad (2.43)$$

для неупругого канала  $x = i$ .

Для вычисления дифференциальной вероятности рождения воспользуемся стандартным выражением для дифференциальной ширины трёхчастичного распада [89]

$$\frac{d\Gamma_x}{dm_{12}^2 dm_{23}^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M_{\text{tot}}^3} |\mathcal{M}_x|^2, \quad (2.44)$$

<sup>3</sup> Примером ситуации, когда рождается лишь сам резонанс, является, например, довольно редкий процесс прямого рождения чармония  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  соударениях, подробно рассматриваемый в разделе 4.5 ниже.

где  $M_{\text{tot}}$  есть полная энергия системы. Поскольку взаимодействием с частицей 3 в конечном состоянии пренебрежено, интегрирование по инвариантной массе  $m_{23}^2$  может быть элементарно выполнено, что даёт:

$$\int_{(m_{23}^2)_{\min}}^{(m_{23}^2)_{\max}} dm_{23}^2 = \frac{1}{m_{12}^2} \lambda^{1/2}(m_{12}^2, m_1^2, m_2^2) \lambda^{1/2}(M_{\text{tot}}^2, m_{12}^2, m_3^2) = \frac{4M_{\text{tot}}}{m_{12}} k_{3(12)} k_{12}, \quad (2.45)$$

где через  $\lambda(x^2, y^2, z^2)$  обозначена стандартная треугольная функция, тогда как  $k_{3(12)} \equiv p_3$  и  $k_{12} \equiv k_x$  есть соответственно трёхмерные импульсы частицы 3 и частиц 1 и 2 соответственно. Тогда для дифференциальной относительной вероятности рождения  $dBr_x \equiv d\Gamma_x/\Gamma_{\text{tot}}$  находим:

$$\frac{dBr_x}{ds} = \frac{|\mathcal{M}_x|^2 p_3 k_x}{64\pi^3 M_{\text{tot}}^2 \Gamma_{\text{tot}} \sqrt{s}}, \quad (2.46)$$

где  $s \equiv M^2 = m_{12}^2$  и, следовательно,

$$\frac{dBr_x}{dM} = \frac{|\mathcal{M}_x|^2 p_3 k_x}{32\pi^3 M_{\text{tot}}^2 \Gamma_{\text{tot}}}. \quad (2.47)$$

Для вычисления полной относительной вероятности рождения (полного брэнчинга) необходимо проинтегрировать дифференциальный брэнчинг (2.47) в пределах от  $M_{\min} = m_1 + m_2$  до  $M_{\max} = M_{\text{tot}} - m_3$ :

$$Br_x = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \left( \frac{dBr_x}{dM} \right) dM. \quad (2.48)$$

### 2.3. Унитарная параметризация формы линии околопорогового резонанса

Полученные выше выражения для элементов полной  $t$ -матрицы, а также для амплитуд и вероятностей рождения произвольного упругого или неупругого канала из точечного источника носят достаточно общий характер и могут применяться для описания весьма широкого круга околопороговых явлений. В данном разделе диссертации на основе полученных выражений будет построена параметризация общего вида [5], а ниже, в разделах 2.4 и 4.3, будут рассмотрены два характерных предельных случая полученной параметризации, с помощью которых будет проведён анализ экспериментальных данных для состояния  $X(3872)$  в спектре чармония [82] и состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония [83].

Прежде всего заметим, что характерный масштаб изменения формфактора  $\chi_\alpha(\mathbf{p})$  задаётся обратным радиусом действия сил  $\beta$ , который, по предположению, намного превышает все характерные импульсы задачи. Следовательно, в околопороговой области достаточно ограничиться первым членом разложения  $\chi_\alpha(\mathbf{p})$  по параметру  $\mathbf{p}/\beta$ , то есть положить  $\chi_\alpha(\mathbf{p}) \approx \chi_\alpha(0) = 1$ , где было

использовано условие нормировки (2.25). Тогда для интегралов, входящих в выражения (2.31), (2.32) и (2.34), находим:

$$\begin{aligned}\int \chi_\alpha^2(\mathbf{q}) S_\alpha(\mathbf{q}) d^3q &\approx \chi_\alpha^2(0) J_\alpha = J_\alpha, \\ \int \chi_\alpha(\mathbf{q}) S_\alpha(\mathbf{q}) d^3q &\approx \chi_\alpha(0) J_\alpha = J_\alpha,\end{aligned}\tag{2.49}$$

где петлевой интеграл  $J_\alpha$  определён в формуле (1.142) выше. Действительная часть интеграла определяется обратным радиусом действия сил, то есть  $\kappa_\alpha \simeq \beta$ . Тогда нетрудно прийти к следующим выражениям для “одетых” формфакторов (2.32) и для матрицы (2.34):

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta}^v J_\beta, \\ \bar{\psi}_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - J_\alpha t_{\alpha\beta}^v, \\ \mathcal{G}_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} J_\alpha - J_\alpha t_{\alpha\beta}^v J_\beta.\end{aligned}\tag{2.50}$$

В соответствии с формулами (2.10) и (2.28) вклады неупругих каналов даются величинами (см. приложение Б)

$$\mathcal{G}_{ab}^{\text{in}} = -v_{ab} + \sum_i \int v_{ai}(\mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) v_{ib}(\mathbf{q}) d^3q \rightarrow \kappa_{ab}^{\text{in}} + \frac{i(2\pi)^2}{\sqrt{s}} \sum_i m_{th_i^{\text{in}}} \mu_i^{\text{in}} \lambda_{ai} \lambda_{bi} (k_i^{\text{in}})^{2l_i+1},\tag{2.51}$$

где отличны от нуля только  $\kappa_{ab}^{\text{in}}$  с  $a \neq b$  (см. пояснения ниже), и

$$G_{\alpha\beta} = \sum_i \int \varphi_{i\alpha}(\mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) \varphi_{i\beta}(\mathbf{q}) d^3q \rightarrow \frac{i(2\pi)^2}{\sqrt{s}} \sum_i m_{th_i^{\text{in}}} \mu_i^{\text{in}} g_{i\alpha} g_{i\beta} (k_i^{\text{in}})^{2l_i+1},\tag{2.52}$$

где

$$v_{ai}(\mathbf{k}) = v_{ia}(\mathbf{k}) = \lambda_{ai} |\mathbf{k}|^{l_i}, \quad \varphi_{i\alpha}(\mathbf{k}) = g_{i\alpha} |\mathbf{k}|^{l_i},\tag{2.53}$$

$l_i$ ,  $\mu_i^{\text{in}}$  и  $k_i^{\text{in}}$  есть угловой момент, приведённая масса и импульс в  $i$ -ом неупругом канале, а  $m_{th_i^{\text{in}}}$  есть соответствующий неупругий порог.

В уравнении (2.51) постоянные вещественные константы  $\kappa_{ab}^{\text{in}}$  включают как потенциалы  $v_{ab}$ , смешивающие затравочные полюса, так и вещественные части неупругих петель (см. формулы (2.10) и (2.23)). При этом диагональные элементы  $\kappa_{aa}^{\text{in}}$  поглощаются в перенормировку “затравочных” масс  $M_{0,a}$ , так что для упрощения формул их достаточно просто положить равными нулю. В этом случае вместо “затравочных” масс  $M_{0,a}$  в качестве параметров задачи будут рассматриваться перенормированные массы  $M_a$ .

Аналогично постоянная часть петлевого оператора  $G_{\alpha\beta}$  в уравнении (2.52) была опущена, поскольку она перенормирует параметры потенциала прямого взаимодействия (см. формулу (2.27)).

Выражения (2.51) и (2.52) можно рассматривать в качестве естественного обобщения К-матричного формализма. Однако в предлагаемом подходе действительные части упругих петель не отбрасываются, а удерживаются: постоянные вклады порядка радиуса действия сил (член с  $\kappa_\alpha$  в формуле (1.142)) поглощаются в перенормировку параметров задачи, а быстрая зависимость вблизи порога, возникающая из аналитического продолжения импульса под порог (член, пропорциональный  $k_\alpha$  в формуле (1.142)), рассматривается явно. Заметим при этом, что, поскольку в типичной ситуации подлежащие учёту неупругие пороги лежат существенно ниже упругих, то использование вблизи последних упрощённых выражений для  $\mathcal{G}^{\text{in}}$  и  $G_{\alpha\beta}$  не приводит к нарушению ни унитарности, ни аналитичности. Если при этом зависимостью импульсов  $k_i^{\text{in}}$  от энергии можно пренебречь, то вклад неупругих каналов сводится лишь к перенормировке “затравочных” положений полюсов  $M_{0,a}$ , а также потенциалов прямого взаимодействия  $v_{\alpha\beta}$  и  $v_{ab}$ . Следовательно, учёт неупругих каналов в этом пределе возможен эффективно, через добавление к величинам  $M_{0,a}$ ,  $v_{\alpha\beta}$  и  $v_{ab}$  постоянных мнимых частей.

Как уже указывалось выше, ввиду того, что неупругие каналы входят в модель аддитивно (из выражений (2.51) и (2.52) это следует непосредственно), то расширение модели и включение в неё дополнительных неупругих каналов является достаточно простой процедурой, в частности, это не приводит к увеличению размера матриц, требующих обращения при решении уравнений Липпмана–Швингера, — размер таких матриц определяется лишь количеством упругих каналов.

Теперь нетрудно построить  $t$ -матрицу  $t^w$ , определённую в формуле (2.33), в виде:

$$t^w(M) = t^v(M) + \psi[\mathcal{G} - G^{-1}]^{-1}\bar{\psi}. \quad (2.54)$$

По аналогии с формулой (2.49) можно записать:

$$\begin{aligned} \int v_{a\alpha}(\mathbf{q})S_\alpha(\mathbf{q})v_{ab}(\mathbf{q})d^3q &\approx v_{a\alpha}v_{b\alpha}J_\alpha, \\ \int v_{a\alpha}(\mathbf{q})S_\alpha(\mathbf{q})d^3q &\approx v_{a\alpha}J_\alpha, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где  $v_{a\alpha} \equiv v_{a\alpha}(0) = v_{\alpha a}(0)$  и

$$V_{\alpha a} = V_{a\alpha} = v_{a\alpha} - \frac{i(2\pi)^2}{\sqrt{s}} \sum_i m_{\text{th}_i^{\text{in}}} \mu_i^{\text{in}} g_{i\alpha} \lambda_{ai}(k_i^{\text{in}})^{2l_i+1}, \quad (2.56)$$

причём, как и ранее, не зависящие от энергии вещественные части сумм поглощены в перенормировку констант  $v_{a\alpha}$ .

Теперь не составляет труда построить в явном виде величины  $\phi_\alpha$ ,  $\bar{\phi}_\alpha$  и  $\mathcal{G}$ , определённые в

формулах (1.50), (1.51) и (1.53):

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\alpha} &= V_{\alpha\alpha} - \sum_{\beta} t_{\alpha\beta}^w J_{\beta} V_{\beta\alpha}, \\
\bar{\phi}_{\alpha\alpha} &= V_{\alpha\alpha} - \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} J_{\beta} t_{\beta\alpha}^w, \\
\mathcal{G}_{ab}^e &= \sum_{\alpha} V_{\alpha\alpha} J_{\alpha} V_{\alpha b} - \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha\alpha} J_{\alpha} t_{\alpha\beta}^w J_{\beta} V_{\beta b},
\end{aligned} \tag{2.57}$$

которые можно затем подставить в выражения (2.35), (2.36) и (2.41) и таким образом прийти к окончательным формулам для компонент  $t$ -матрицы  $t_{\alpha\beta}$ ,  $t_{\alpha\alpha}$  и  $t_{\alpha i}$ .

Тогда для амплитуды (2.42) рождения  $\alpha$ -го упругого канала из точечного источника  $\mathcal{F}_{\alpha}$  находим:

$$\mathcal{M}_{\alpha}^e = \mathcal{F}_{\alpha} - \sum_{\beta} \int \mathcal{F}_{\beta} S_{\beta}(\mathbf{q}) t_{\beta\alpha} d^3q = \mathcal{F}_{\alpha} - \sum_{\beta} \mathcal{F}_{\beta} J_{\beta} t_{\beta\alpha}. \tag{2.58}$$

Если  $t$ -матрица имеет полюс в околороговой области, то, как и раньше, будем пренебрегать борновским членом. Подробное обсуждение данного вопроса можно найти в работе [1]. Строго говоря, пренебрежение борновским членом приводит к нарушению унитарности, однако такое нарушение пренебрежимо мало.

Аналогично для амплитуды рождения  $i$ -го неупругого канала (2.43) имеем:

$$\mathcal{M}_i^{\text{in}} = - \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha} J_{\alpha} t_{\alpha i}. \tag{2.59}$$

Выражения для дифференциальных брэнчингов рождения даются формулами

$$\frac{dBr_{\alpha}}{dM} = \left| \sum_{\beta} \mathcal{F}_{\beta} t_{\beta\alpha} \right|^2 p_3 k_{\alpha}, \tag{2.60}$$

$$\frac{dBr_i}{dM} = \left| \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha} t_{\alpha i} \right|^2 p_3 k_i^{\text{in}}, \tag{2.61}$$

где для упрощения записи источники  $\mathcal{F}_{\alpha}$  были переопределены и включают теперь дополнительно медленные функции энергии  $J_{\alpha} = R_{\alpha} + iI_{\alpha} \approx R_{\alpha}$ , а также все постоянные множители, приведённые в явном виде в выражении (2.47). Более того, если допустить, что радиус действия сил во всех упругих каналах определяется одной и той же физикой, то можно положить  $\kappa_{\alpha} = \kappa$  для всех  $R_{\alpha}$  (см. формулу (1.142)).

Таким образом, в качестве независимых параметров модели удобно выбрать следующий набор  $N_v + N_{\text{in}}(N_e + N_p) + (N_p + 1)(N_e + 1) + N_p(N_p - 1)/2 + 1$  вещественных величин:

$$\mathcal{N}, \xi_{\alpha}, v_{\alpha\alpha}, \lambda_{\alpha i}, g_{i\alpha}, M_a, \kappa, \kappa_{ab}^{\text{in}}(a \neq b), t^v, \tag{2.62}$$

где вместо набора источников  $\mathcal{F}_\alpha$  был введён общий нормировочный параметр  $\mathcal{N}$ , а также набор отношений  $\xi_\alpha = \mathcal{F}_\alpha/\mathcal{F}_1$ , а через  $t^v$  обозначен набор  $N_v$  параметров, описывающих  $t$ -матрицу прямого взаимодействия в упругих каналах. Заметим, что параметры  $v_{ab}$  не являются независимыми, поскольку они были включены в определение  $\mathcal{G}_{ab}^{\text{in}}$  и, в конечном итоге, поглощены в  $\kappa_{ab}^{\text{in}}$  (см. формулы (2.10) и (2.51)).

Тогда находим окончательно для формул, описывающих форму линии резонанса в упругих и неупругих каналах:

$$\frac{dB r_\alpha^e}{dM} = \mathcal{N} \left| \sum_\beta \xi_\beta t_{\beta\alpha} \right|^2 p_3 k_\alpha, \quad (2.63)$$

$$\frac{dB r_i^{\text{in}}}{dM} = \mathcal{N} \left| \sum_\alpha \xi_\alpha t_{\alpha i} \right|^2 p_3 k_i^{\text{in}}. \quad (2.64)$$

В следующем разделе диссертации предлагаемый метод параметризации формы линии околопороговых резонансов иллюстрируется на примере обработки экспериментальных данных для состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония [83], а в разделе 4.3 его упрощённая версия используется для описания состояния  $X(3872)$  в спектре чармония [82].

## 2.4. Состояния $Z_b(10610)$ и $Z_b(10650)$ в спектре боттомония

В данном разделе диссертации в качестве примера применения параметризации, предложенной в предыдущем разделе, проведён совместный анализ данных по всем измеренным каналам распада заряженных состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония, обнаруженных коллаборацией Belle в 2011 году [83] в промежуточных состояниях распадов векторного боттомония  $\Upsilon(5S)$  [90, 91] (обзор теоретических подходов и моделей, связанных с описанием распадов  $\Upsilon(5S)$  с открытым и скрытым боттомомом можно найти в работе [4]). Данные состояния являются идеальным “полигоном” для демонстрации возможностей предложенной выше параметризации, поскольку речь идёт о двух достаточно близко расположенных друг от друга резонансах, причём каждый из них, в свою очередь, лежит в непосредственной близости от двухчастичного  $S$ -волнового сильного порога:  $Z_b(10610)$  вблизи порога  $B\bar{B}^*$ , а  $Z_b(10650)$  вблизи порога  $B^*\bar{B}^*$ , что указывает на вероятную большую молекулярную компоненту их волновых функций [90].

Существующие экспериментальные данные исчерпываются 7 каналами распада состояний  $Z_b$ , а именно:

$$\begin{aligned} \Upsilon(5S) &\rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi B^{(*)} \bar{B}^*, \\ \Upsilon(5S) &\rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi\Upsilon(nS), \quad n = 1, 2, 3 \\ \Upsilon(5S) &\rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi h_b(mP), \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Таким образом, в описанном выше подходе спектатором является пион (частица 3 на рис. 2.5), а с помощью формул (2.63) и (2.64) нетрудно найти для дифференциальных вероятностей рождения в двух упругих ( $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}$ ) и пяти неупругих ( $\pi\Upsilon(nS)$  и  $\pi h_b(mP)$ ) каналах:

$$\begin{aligned}\frac{dB\Gamma_1^e}{dM} &= \mathcal{N} \left| t_{11} + \xi t_{21} \right|^2 p_\pi k_1, \\ \frac{dB\Gamma_2^e}{dM} &= \mathcal{N} \left| t_{12} + \xi t_{22} \right|^2 p_\pi k_2, \\ \frac{dB\Gamma_i^{\text{in}}}{dM} &= \mathcal{N} R^2 \left| g_{i1}(t_{11} + \xi t_{21}) + g_{i2}(t_{12} + \xi t_{22}) \right|^2 p_\pi (k_i^{\text{in}})^{2l_i+1},\end{aligned}\tag{2.66}$$

где  $l = 0$  в каналах  $\pi\Upsilon$  и  $l = 1$  в каналах  $\pi h_b$ , а  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  и  $t_{22}$  есть компоненты упругой  $t$ -матрицы  $t_{\alpha\beta}$ . Как указывалось выше, везде положено  $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$ , так что  $R_1 = R_2 \equiv R = (2\pi)^2 \mu k$ .

Здесь необходимо дать небольшой комментарий относительно механизмов рождения состояний  $Z_b$  в распадах  $\Upsilon(5S) \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*\pi$ . Вообще говоря, в дополнение к трёхчастичному источнику, изображённому точкой на рис. 2.5, испускание пионов может происходить из  $B$ -мезонных линий. Такой механизм испускания детально изучался в работе [92], причём из полученных в ней результатов можно заключить, что на древесном уровне амплитуда такого испускания пиона сильно подавлена по сравнению с контактной амплитудой, отвечающей испусканию пиона непосредственно из вершины перехода  $\Upsilon(5S) \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$ . Поэтому в дальнейшем именно механизм, изображённый на рис. 2.5, будет считаться доминирующим.

Для описания данных по состояниям  $Z_b^{(l)}$  выберем наиболее простой случай параметризации. В частности, отбросим полюсные члены, что отвечает переходу к пределу  $v_{a\alpha}(\mathbf{p}) = v_{ai}(\mathbf{k}) = 0$  и  $M_a \rightarrow \infty$  во всех формулах. Действительно, полюсной член отвечает элементарному кварковому состоянию, однако в данном случае, ввиду того, что состояния  $Z_b$  содержат пару кварков  $b\bar{b}$ , но при этом заряжены, минимальный кварковый состав такого элементарного состояния — тетракварк. Несмотря на наличие в литературе соответствующих моделей для  $Z_b^{(l)}$  [93, 94], существование тетракварков само по себе является до сих пор не подтверждённой гипотезой, поэтому естественно сначала протестировать параметризацию, их не включающую. Таким образом, предлагаемый подход не предполагает существования  $Z_b^{(l)}$  как асимптотических состояний (см., например, работу [95] и аналогичные ей, в которых поля  $Z_b^{(l)}$  возникают в эффективном лагранжиане теории) — своим возникновением пикообразные структуры в форме линии обязаны исключительно всевозможным перерассеяниям, роль которых в описании заряженных состояний  $Z_c^+$  в спектре чармония подчеркнута в работах [96, 97]. В работе [98] соответствующая амплитуда исследована на предмет наличия в ней треугольных сингулярностей (сингулярностей Ландау) (см., например, описание в работе [99]).

Начнём с параметризации прямого взаимодействия в каналах  $B^{(*)}\bar{B}^*$ . Для этого построим

спиновые волновые функции четырёх  $S$ -волновых  $B$  мезонов с отрицательной чётностью в виде

$$B = 0_{\bar{b}q}^-, \quad \bar{B} = 0_{\bar{q}b}^-, \quad B^* = 1_{\bar{b}q}^-, \quad \bar{B}^* = -1_{\bar{q}b}^-, \quad (2.67)$$

где, например,  $0_{\bar{b}q}^-$  обозначает систему антикварка  $b$  и лёгкого кварка  $q$ , обладающую полным спином равным нулю и отрицательной пространственной чётностью. При этом для мезонного состояния  $\mathcal{M}$  операция зарядового сопряжения определена как

$$\hat{C}\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}. \quad (2.68)$$

Потенциал прямого взаимодействия в упругих каналах  $B^{(*)}\bar{B}^*$  можно установить из вида эффективного лагранжиана совместимого с симметрией спина тяжёлого кварка [100, 101]. Альтернативный подход состоит в том, чтобы для описания  $u$ -канальных обменов лёгким кварком воспользоваться преобразованием Фирца от состояний со скрытым боттомом вида  $(S_{\bar{b}b}^- \otimes S_{\bar{q}q}^-)_S$  к состояниям с открытым боттомом  $(S_{\bar{q}b}^- \otimes S_{\bar{b}q}^-)_S$ :

$$(0_{\bar{q}b}^- \otimes 0_{\bar{b}q}^-)_{S=0} = \frac{1}{2}(0_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=0} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=0}, \quad (2.69)$$

$$(1_{\bar{q}b}^- \otimes 1_{\bar{b}q}^-)_{S=0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(0_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=0} - \frac{1}{2}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=0}, \quad (2.70)$$

$$(1_{\bar{q}b}^- \otimes 0_{\bar{b}q}^-)_{S=1} = \frac{1}{2}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=1} + \frac{1}{2}(0_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1}, \quad (2.71)$$

$$(0_{\bar{q}b}^- \otimes 1_{\bar{b}q}^-)_{S=1} = \frac{1}{2}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=1} + \frac{1}{2}(0_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1}, \quad (2.72)$$

$$(1_{\bar{q}b}^- \otimes 1_{\bar{b}q}^-)_{S=1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(0_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1}, \quad (2.73)$$

$$(1_{\bar{q}b}^- \otimes 1_{\bar{b}q}^-)_{S=2} = (1_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=2}. \quad (2.74)$$

Поскольку в пределе бесконечно тяжёлого  $b$ -кварка потенциалы переходов между упругими каналами зависят только от лёгкой степени свободы, то для их описания требуется всего два параметра:

$$V[0_{\bar{q}q}^-] \equiv V_0, \quad V[1_{\bar{q}q}^-] \equiv V_1. \quad (2.75)$$

Тогда с помощью соотношений (2.69)-(2.74) нетрудно установить следующий вид потенциалов прямого взаимодействия в упругих каналах:

$$v(0^{++}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V_0 + 3V_1 & \sqrt{3}(V_0 - V_1) \\ \sqrt{3}(V_0 - V_1) & 3V_0 + V_1 \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

$$v(1^{+-}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_0 + V_1 & V_1 - V_0 \\ V_1 - V_0 & V_0 + V_1 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

$$v(1^{++}) = {}_{1^{++}}\langle B\bar{B}^* | \hat{V}(1^{++}) | B\bar{B}^* \rangle_{1^{++}} = V_1, \quad (2.78)$$

$$v(2^{++}) = {}_{2^{++}}\langle B^*\bar{B}^* | \hat{V}(2^{++}) | B^*\bar{B}^* \rangle_{2^{++}} = V_1, \quad (2.79)$$

где при выводе потенциала (2.77) были использованы  $C$ -нечётные комбинации  $B^{(*)}$  и  $B^*$  мезонов (см. определение (2.68)) вида [90, 91]

$$|B\bar{B}^*\rangle_{1^{+-}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B\bar{B}^*\rangle - |\bar{B}B^*\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=1} + (0_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1}\right], \quad (2.80)$$

$$|B^*\bar{B}^*\rangle_{1^{+-}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1_{\bar{b}b}^- \otimes 0_{\bar{q}q}^-)_{S=1} - (0_{\bar{b}b}^- \otimes 1_{\bar{q}q}^-)_{S=1}\right]. \quad (2.81)$$

Следует отметить, что потенциалы переходов (2.76)-(2.79) эквивалентны потенциалам, полученным в работе [101] и выраженным через контактные взаимодействия  $C_{0a}$  и  $C_{0b}$ , если сделать отождествление:

$$C_{0a} = \frac{1}{4}V_0 + \frac{3}{4}V_1, \quad C_{0b} = -\frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{4}V_1. \quad (2.82)$$

При этом однако необходимо иметь ввиду другое определение операции зарядового сопряжения, использованное в работе [101], что приводит к противоположному знаку внедиагональных членов в потенциале  $v(0^{++})$ .

Для постоянного, не зависящего от импульсов потенциала  $v_{\alpha\beta}$   $t$ -матрицу прямого взаимодействия  $t^v$  можно получить из решения алгебраического уравнения (2.30)

$$t_{\alpha\beta}^v = v_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} v_{\alpha\gamma} J_{\gamma} t_{\gamma\beta}^v, \quad (2.83)$$

где петлевые интегралы  $J_{\alpha}$  определены в формуле (1.142) выше. Тогда нетрудно найти, что

$$(t^v)^{-1} = v^{-1} + (R + iI) = v_{\text{ren}}^{-1} + iI, \quad (2.84)$$

где вещественная часть петлевого оператора  $R$  поглощена в перенормировку контактного взаимодействия  $v$ , так что

$$v_{\text{ren}} = Z^{-1}v, \quad Z = 1 + vR. \quad (2.85)$$

Таким образом, поскольку потенциал прямого взаимодействия в упругих каналах является свободным параметром модели, в дальнейшем достаточно считать его перенормированной физической величиной (индекс “ren” при этом будет опускаться для упрощения записи), а действительную часть петлевого интеграла в уравнении (2.83) формально отбросить.

В каналах  $1^{++}$  и  $2^{++}$  уравнение Липпмана-Швингера (2.83) сводится к простому алгебраическому уравнению вида  $t^v = v - vIt^v$ , так что решение тривиально находится в виде

$$t^v = \frac{1}{(2\pi)^2\mu}(\gamma_V + ik)^{-1}, \quad \gamma_V^{-1} = (2\pi)^2\mu v, \quad (2.86)$$

где, как объяснялось выше, действительная часть  $R$  петлевого интеграла  $J = \int S(\mathbf{q})d^3q = R + iI$  поглощается потенциалом  $v$ . Здесь  $\mu$  и  $k$  есть приведённая масса и импульс в соответствующей системе  $B^*\bar{B}^{(*)}$ .

В каналах  $0^{++}$  и  $1^{+-}$  приходим к системе двух связанных уравнений, решение которой представимо в виде:

$$t^v = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} v_{11} + \Delta_v J_2 & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} + \Delta_v J_1 \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

где

$$\Delta_v = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}, \quad (2.88)$$

$$\Delta = 1 + v_{11}J_1 + v_{22}J_2 + \Delta_v J_1 J_2. \quad (2.89)$$

Как и раньше, действительные части интегралов  $J_\alpha$  поглощены в перенормировку потенциала  $v_{\alpha\beta}$ , а величины  $\mu_\alpha$  и  $k_\alpha$  обозначают приведённые массы и импульсы в соответствующих упругих каналах. Так, в нерелятивистском пределе

$$k_\alpha(E) = \sqrt{2\mu_\alpha(E - \delta_\alpha)}\Theta(E - \delta_\alpha) + i\sqrt{2\mu_\alpha(\delta_\alpha - E)}\Theta(\delta_\alpha - E), \quad (2.90)$$

где через  $\delta_\alpha$  обозначено положение соответствующего упругого порога, причём для удобства энергия отсчитывается от низшего из них, то есть  $E = M - m_{th}^{\min}$ ,  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 \equiv \delta$  (см. также формулу (1.96)).

Рассмотрим случай квантовых чисел  $1^{+-}$ , имеющий отношение к состояниям  $Z_b^{(\prime)}$  в спектре боттомония. Тогда

$$\begin{aligned} v_{11} = v_{22} &= \frac{1}{2}(V_0 + V_1), \\ v_{12} = v_{21} &= \frac{1}{2}(V_1 - V_0), \end{aligned} \quad (2.91)$$

так что удобно ввести параметры  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  в соответствии с определением:

$$\begin{aligned} \gamma_s^{-1} &= (2\pi)^2\mu(v_{11} + v_{12}) = (2\pi)^2\mu V_1, \\ \gamma_t^{-1} &= (2\pi)^2\mu(v_{11} - v_{12}) = (2\pi)^2\mu V_0, \end{aligned} \quad (2.92)$$

где для упрощения формул пренебрежено различием в приведённых массах систем  $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}^*$ , то есть положено  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Таким образом, прямое взаимодействие в канале  $1^{+-}$  определяется

двумя параметрами:  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$ , а выраженная через них  $t$ -матрица прямого взаимодействия (2.87) принимает вид:

$$t^v = \frac{1}{(2\pi)^2 \mu \text{Det}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_t) + ik_2 & \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) \\ \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) & \frac{1}{2}(\gamma_s + \gamma_t) + ik_1 \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

где

$$\text{Det} = \gamma_s \gamma_t - k_1 k_2 + \frac{i}{2}(\gamma_s + \gamma_t)(k_1 + k_2).$$

Заметим, что аналогичные выражения уже возникали ранее (см. формулы (1.117)-(1.119)), однако в данном случае подразумеваются синглетное и триплетное состояния по полному спину в системе  $\bar{b}b$ . Поскольку полный спин системы тяжёлых и лёгких кварков фиксирован, то синглетное состояние в системе  $\bar{b}b$  отвечает триплетному в системе лёгких кварков и наоборот, что согласуется с определением (2.92) и отождествлением параметров  $V_0$  и  $V_1$  с потенциалами обмена лёгкими мезонами, содержащимися в формуле (2.75).

Таким образом, находим, что набор данных по форме линии состояний  $Z_b^{(\prime)}$  в 2 упругих и 5 неупругих каналах (см. (2.65)) одновременно описывается набором 15 параметров:

$$\gamma_s, \gamma_t, \kappa, \xi, \mathcal{N}, g_{i\alpha}, \quad i = \overline{1,5}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.94)$$

Здесь необходимо отметить, что ввиду наличия систематических ошибок в экспериментальных данных (в первую очередь, погрешности в эффективности детектора) при их анализе не представляется возможным ограничиться единым нормировочным параметром  $\mathcal{N}$ . Для удобства восприятия фитируемые данные можно условно представить как совокупность распределений в произвольной нормировке и отношений полных вероятностей в различных каналах. Это эквивалентно введению отношений нормировочных факторов, число которых на единицу меньше полного числа каналов, то есть в данном случае равно 6. Таким образом, полное число параметров равно 21. Однако это число можно уменьшить, наложив требования симметрии спина тяжёлого кварка. Действительно, поскольку масса  $b$ -кварка достаточно велика ( $m_b \gg \Lambda_{QCD}$ ), то спин тяжёлого кварка очень слабо влияет на динамику системы. Тогда с помощью соотношений (2.80) и (2.81) нетрудно видеть, что в точном пределе тяжёлого кварка константы связи должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\mathcal{G}[\pi h_b(mP)][B^* \bar{B}^*]}{\mathcal{G}[\pi h_b(mP)][B \bar{B}^*]} = 1, \quad (2.95)$$

$$\frac{\mathcal{G}[\pi \Upsilon(nS)][B^* \bar{B}^*]}{\mathcal{G}[\pi \Upsilon(nS)][B \bar{B}^*]} = -1, \quad (2.96)$$

где  $n = 1, 2, 3$  и  $m = 1, 2$ . Более того, поскольку упругие каналы  $B \bar{B}^*$  и  $B^* \bar{B}^*$  рождаются в распадах боттомония  $\Upsilon(5S)$  (см. (2.65)), то и отношение источников  $\xi$  должно подчиняться анало-

Фит	Данные	$\gamma_s$ , МэВ	$\gamma_t$ , МэВ	$\xi$	$\frac{g_{[\pi h_b(1P)][B^* \bar{B}^*]}}{g_{[\pi h_b(1P)][B \bar{B}^*]}}$	$\frac{g_{[\pi h_b(2P)][B^* \bar{B}^*]}}{g_{[\pi h_b(2P)][B \bar{B}^*]}}$	C.L.
A	[83, 102]	$85^{+22}_{-28}$	$-285^{+48}_{-53}$	$-0.84 \pm 0.06$	$2.43^{+1.07}_{-0.61}$	$2.38^{+1.08}_{-0.61}$	76%
B	[83, 102]	$-39^{+24}_{-29}$	$-137^{+36}_{-39}$	-1	1	1	32%
C	[83, 103]	$43^{+37}_{-58}$	$-211^{+68}_{-58}$	$-0.80 \pm 0.10$	$1.8^{+0.9}_{-0.5}$	$1.8^{+0.9}_{-0.5}$	53%
D	[83, 103]	$-70^{+32}_{-36}$	$-83^{+35}_{-38}$	-1	1	1	48%

Таблица 2.1. Параметры фитов к данным для  $Z_b^{(\prime)}$ . Соответствующие распределения приведены на рис. 2.6.

гичному требованию, то есть

$$\xi = \frac{g_{[\pi \Upsilon(5S)][B^* \bar{B}^*]}}{g_{[\pi \Upsilon(5S)][B \bar{B}^*]}} = -1. \quad (2.97)$$

Наконец, зависимость качества фита от параметра  $\kappa$  ничтожна, поэтому его величину достаточно зафиксировать на феноменологически адекватном значении, например,  $\kappa = 1$  ГэВ. Данное обстоятельство можно рассматривать в качестве численного подтверждения того факта, что действительные части петель поглощаются в перенормировку параметров взаимодействия и потому не являются независимыми параметрами. В простых случаях такую перенормировку можно произвести аналитически в явном виде, как это было сделано в первой главе диссертации при описании взаимного влияния кварковых и адронных степеней свободы. В результате фит содержит всего 14 параметров, лишь 7 из которых влияют на форму распределений (параметры прямого взаимодействия  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$ , а также 5 независимых констант связи каналов), а остальные 7 определяют лишь их общую нормировку. Важно отметить, что среди этих параметров нет “стандартных” масс или ширин, поскольку сами эти понятия жёстко завязаны на определённый вид параметризации формы линии резонанса — на формулу Брейта-Вигнера. Как неоднократно отмечалось выше, в случае околопорогового резонанса, а тем более в случае нескольких близко расположенных околопороговых резонансов, комбинации распределений Брейта-Вигнера не являются адекватными параметризациями и приводят к сильному нарушению унитарности.

В качестве иллюстрации возможностей предложенного метода перечисленные выше параметры извлекаются из одновременного фита к экспериментальным распределениям (поправленным на эффективность) в 4 модах распада:  $B^{(*)} \bar{B}^*$  и  $\pi h_b(mP)$  ( $m = 1, 2$ ). В расчётах учитывается также конечное разрешение детектора, для чего результирующее теоретическое распределение сворачивается с гауссовой функцией разрешения с  $\sigma = 6$  МэВ. К сожалению, данные по неупругим каналам  $\pi \Upsilon(nS)$  не могут быть корректно учтены в данном одномерном фите ввиду присутствия большой нерезонансной компоненты, зависящей от  $M(\pi^+ \pi^-)$ , для учёта которой необходим многомерный анализ. Тем не менее, полные брэнчинги указанных выше мод также учтены при фитировании.

вании, так что общие нормировки во всех 7 каналах фиксированы на экспериментальные значения соответствующих брэнчингов. Рассматриваются 4 фита:

- **Фит А.** Совместный анализ данных для мод распада  $Z_b \rightarrow \pi h_b(mP)$  ( $m = 1, 2$ ) [83] и старых данных для мод распада  $Z_b \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$  [102] с учётом лишь соотношений (2.96)<sup>4</sup>. Никаких ограничений на константы  $g_{[\pi h_b(mP)][B^*\bar{B}^]}$  и  $g_{[\pi h_b(mP)][B\bar{B}^]}$ , а также на отношение источников  $\xi$  не накладывается.
- **Фит В.** То же, что и в фите А, но с учётом всех соотношений (2.95)-(2.97), следующих из симметрии спина тяжёлого кварка.
- **Фит С.** То же, что и в фите А, но для новых данных для мод распада  $Z_b \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$  [103].
- **Фит D.** То же, что и в фите В, но для новых данных для мод распада  $Z_b \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$  [103].

Параметры фитов приведены в таблице 2.1, а соответствующие им распределения показаны на рис. 2.6, из которых следует ряд выводов. Прежде всего нужно отметить, что в целом описание как старых данных для мод распада  $Z_b \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^*$  [102], так и более новых данных для этих мод [103], является удовлетворительным. При этом видно, что новые данные лучше совместимы с требованиями симметрии тяжёлого кварка. Действительно, с одной стороны, наложение условий (2.95) и (2.97) для новых данных (фиты С и D) приводит лишь к весьма умеренному ухудшению качества фита (с CL=53% до CL=48%), тогда как в случае старых данных (фиты А и В) такое ухудшение довольно кардинально — с CL=76% до CL=32%. С другой стороны, качество фита D для новых данных с учётом требований симметрии заметно превосходит качество аналогичного фита В для старых данных (CL=48% против CL=32%). Наконец, отклонение отношения констант  $g_{[\pi h_b(mP)][B^*\bar{B}^]}$  и  $g_{[\pi h_b(mP)][B\bar{B}^]}$  от предсказания предела тяжёлого кварка (2.95) существенно меньше в фите С к новым данным, чем в фите А к старым данным.

Сделаем ещё два замечания относительно параметров полученных фитов, приведённых в таблице 2.1. Как уже указывалось выше, в фитах А и С, в которых условие точной симметрии тяжёлого кварка не накладывается специально, соответствующие параметры фитов демонстрируют отклонение от предсказаний симметрии, а именно величина  $\xi$  принимает значение отличное от  $-1$ , и отношения констант  $g_{[\pi h_b(nP)][B^*\bar{B}^]}/g_{[\pi h_b(nP)][B\bar{B}^]}$  ( $n = 1, 2$ ) также отклоняются от значений, приведённых в формуле (2.95).

<sup>4</sup> Ввиду того, что данные по форме линии в каналах  $\pi\Upsilon(nS)$  не могут использоваться в рассматриваемом одномерном фите (только полные экспериментальные брэнчинги), учитывать отклонение соответствующих констант связи от значений (2.96) представляется нецелесообразным, поскольку точность их извлечения будет крайне низкой.

Нарушение точной симметрии тяжёлого кварка может возникать вследствие многих причин. С одной стороны, малые поправки, возникающие из-за явного нарушения симметрии ( $\Lambda_{\text{QCD}}/m_b \neq 0$ ), могут усиливаться за счёт близко расположенных к порогу полюсов  $t$ -матрицы [104]. Однако к данному случаю рассматриваемый эффект вряд ли имеет отношение, поскольку положение полюсов полностью зафиксировано фитом. С другой стороны, к нарушению симметрии может приводить наличие в волновой функции состояния  $\Upsilon(10860)$ , отождествляемого здесь с  $5S$  боттомонием, примеси  $D$ -волны [105], а также не- $\bar{b}b$  компоненты [106]. Известно, что нарушение симметрии тяжёлого кварка наблюдается в соотношениях измеренных относительных вероятностей двухчастичных распадов  $\Upsilon(5S)$  с открытым ароматом (см., например, обзор [4]). Кроме того, в работе [92] обсуждается необходимость введения в лагранжиане больших явно нарушающих указанную симметрию членов для описания формы линии состояний  $Z_b$  в распадах  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi B^{(*)} \bar{B}^*$ . По-видимому, можно исключить влияние на параметры распределений  $S$ - $D$  смешивания для пары  $B$  мезонов в конечном состоянии реакции  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi B^{(*)} \bar{B}^*$ . Такое смешивание изучалось в работе [107] и его влияние на внутреннюю структуру состояний  $Z_b$  оказался минимальным (вычисления в рамках модели однобозонных обменов можно найти в работе [108]). С учётом улучшения ситуации с выполнением симметрии спина тяжёлого кварка в новых данных по сравнению со старыми, довольно естественно ожидать, что и дальше по мере поступления уточнённых данных отклонение от предсказаний симметрии будет уменьшаться. В противном случае вопрос о причинах нарушения указанной симметрии в рассматриваемых процессах следует изучить более внимательно, поскольку обычно в боттомониях данная симметрия имеет место с хорошей точностью. Дальнейшее обсуждение нарушения симметрии тяжёлого кварка выходит за рамки круга вопросов, изучаемых в данном разделе диссертации.

Обратим также внимание на тот факт, что в фите  $D$ , в который изначально заложена симметрия спина тяжёлого кварка, параметры  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  практически совпадают. В этом случае из формул (2.91) и (2.92) следует, что внедиагональные матричные элементы в потенциале прямого взаимодействия  $B$  мезонов близки к нулю:

$$v_{12} = \frac{1}{8\pi^2\mu} (\gamma_s^{-1} - \gamma_t^{-1}) \ll v_{11} = v_{22}. \quad (2.98)$$

Поскольку, как следует из определения (2.75), величины  $\gamma_s^{-1} \propto V_1$  и  $\gamma_t^{-1} \propto V_0$  описывают взаимодействие в случае полного спина лёгкого кваркония равного соответственно 1 и 0, то приближённое равенство таких взаимодействий совместимо с идеей “симметрии лёгкого кварка”, предложенной в работе [109], то есть с идеей независимости взаимодействия между  $B$  мезонами от спинов лёгких кварков. Проявлением такой симметрии является отсутствие пика, отвечающего состоянию  $Z_b(10650)$ , в распределении по инвариантной массе системы  $B\bar{B}^*$ . Действительно, как

видно из рис. 2.6 (первый график в нижнем ряду) пик на пороге  $B\bar{B}^*$  отсутствует.

Однако аналогичное по качеству описание данных, даваемое фитом  $C$ , отвечает совершенно разным (даже противоположным по знаку) значениям параметров  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$ , так что “симметрия лёгкого кварка” оказывается сильно нарушенной. При этом на пороге  $B\bar{B}^*$  возникает хотя и небольшой, но всё же различимый пик состояния  $Z_b(10650)$  (см. первый график в предпоследнем ряду на рис. 2.6).

Из распределений, приведённых на рис. 2.6, видно, что, несмотря на весьма небольшое число свободных параметров, фиты описывают данные достаточно хорошо. При этом форма линии в каналах  $\pi\Upsilon(nS)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) является предсказанием. Как видно из рис. 2.7, где для иллюстрации приведена форма линии в канале  $\pi\Upsilon(1S)$  (графики для каналов  $\pi\Upsilon(2S)$  и  $\pi\Upsilon(3S)$  выглядят аналогично и по этой причине не приводятся), предсказанная форма линии обладает всеми характерными особенностями соответствующего экспериментального распределения [83]. Впрочем, необходимо заметить, что детальное сравнение кривых невозможно, поскольку экспериментальная зависимость содержит большую нерезонансную составляющую, учёт которой возможен только с помощью многомерного анализа, как уже указывалось выше. Уместно также сравнить полученные кривые с теоретическими предсказаниями работ [71, 72], в которых форма линии  $Z_b^{(i)}$  описана в микроскопическом подходе за счёт переходов между упругими и неупругими каналами.

Таким образом, предложенная параметризация формы линии околопороговых резонансов даже в наиболее простой своей форме хорошо описывает экспериментальные данные в достаточно нетривиальной ситуации одновременного сосуществования двух близлежащих околопороговых состояний. Как видно из больших погрешностей извлечения параметров фита (см. таблицу 2.1), а также из отсутствия пригодных для одномерного фитирования данных по распределениям в модах  $\pi\Upsilon(nS)$ , для достоверного извлечения свойств состояний  $Z_b$ , а также предсказания свойств их спиновых партнёров из данных требуется существенное улучшение качества последних. Особая надежда в этом плане возлагается на работу коллаборации Belle-II, начало которой ожидается уже в обозримой перспективе.

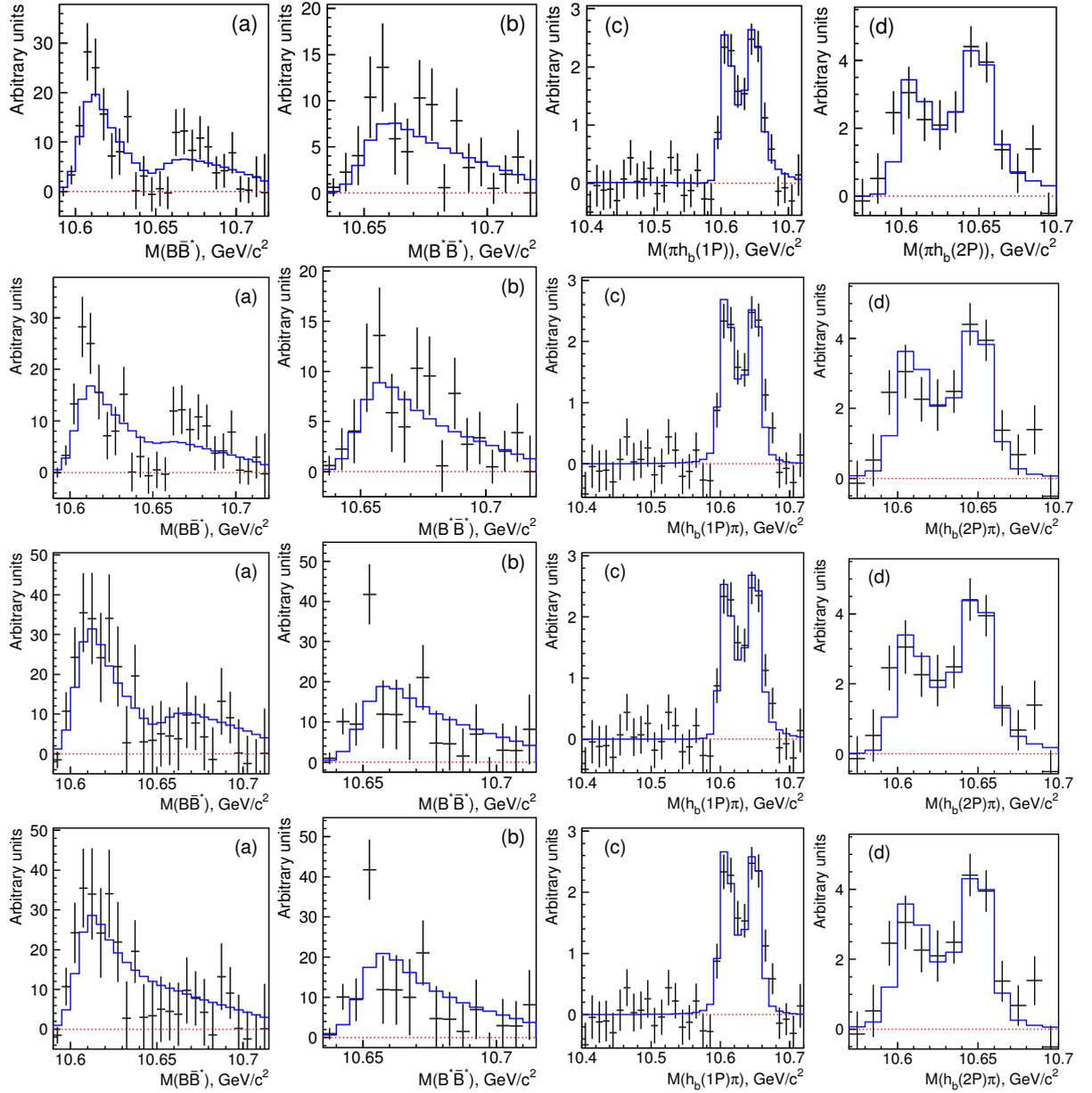


Рис. 2.6. Форма линии околопороговых состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ , полученная в результате одновременного фитирования данных в каналах  $B^{(*)}\bar{B}^*$  и  $\pi h_b(mP)$  ( $m = 1, 2$ ). Каждая строка графиков отвечает одному и тому же фиту от А до D по порядку. Параметры фитов приведены в таблице 2.1.

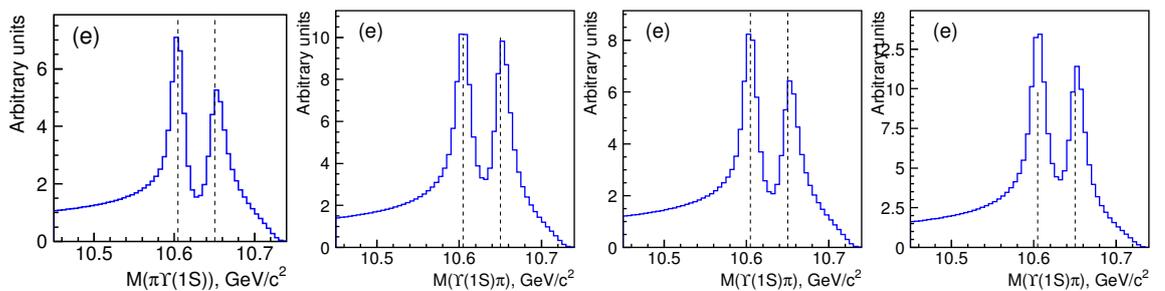


Рис. 2.7. Предсказания для распределения в канале  $\pi\Upsilon(1S)$ , соответствующие фитам от А до D по порядку (распределения в каналах  $\pi\Upsilon(2S)$  и  $\pi\Upsilon(3S)$  выглядят аналогично и не приводятся).

Фит	$g_{[\pi h_b(1P)][B\bar{B}^*]}$	$g_{[\pi h_b(2P)][B\bar{B}^*]}$	$g_{[\pi\Upsilon(1S)][B\bar{B}^*]}$	$g_{[\pi\Upsilon(2S)][B\bar{B}^*]}$	$g_{[\pi\Upsilon(3S)][B\bar{B}^*]}$
C	$(2.0^{+0.3}_{-0.2}) \cdot 10^{-3}$	$(7.5^{+1.0}_{-0.9}) \cdot 10^{-3}$	$(1.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-4}$	$(5.0^{+0.8}_{-0.9}) \cdot 10^{-4}$	$(7.0^{+1.3}_{-1.5}) \cdot 10^{-4}$
D	$(1.2^{+0.5}_{-0.4}) \cdot 10^{-3}$	$(4.6^{+1.7}_{-1.4}) \cdot 10^{-3}$	$(1.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-4}$	$(5.5 \pm 1.0) \cdot 10^{-4}$	$(7.9^{+1.6}_{-1.8}) \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.2. Параметры фитов C и D. Константы связи  $g_{[\pi h_b(mP)][B\bar{B}^]}$  и  $g_{[\pi\Upsilon(nS)][B\bar{B}^]}$  даны соответственно в  $\text{ГэВ}^{-3}$  и  $\text{ГэВ}^{-2}$ . Для обоих фитов  $g_{[\pi\Upsilon(nS)][B^*\bar{B}^*]}/g_{[\pi\Upsilon(nS)][B\bar{B}^*]} = -1$ , как следует из требований симметрии тяжёлого кварка (см. формулу (2.96)), тогда как значения отношений  $g_{[\pi h_b(mP)][B^*\bar{B}^*]}/g_{[\pi h_b(mP)][B\bar{B}^*]}$  приведены в таблице 2.1.

## 2.5. Природа состояний $Z_b(10610)$ и $Z_b(10650)$ из данных

Параметры фитов к экспериментальным данным, приведённые в таблице 2.1, можно использовать для извлечения величин  $V_0$  и  $V_1$  и, следовательно, для построения потенциалов (2.76)-(2.79). При этом следует заметить, что полученные величины являются перенормированными и по этой причине не могут непосредственно сравниваться с аналогичными потенциалами, приведёнными, например, в работе [101]. Действительно, в работе [101] для регуляризации расходящихся петлевых интегралов использован гауссов формфактор. Полученная таким образом величина контактного члена зависит от величины регулятора в формфакторе. Напротив, в использованной выше процедуре перенормировки (см., например, формулу (2.84)) величины  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  поглощают действительную часть петлевых операторов и являются ренормгрупповыми инвариантами. Следовательно, найденные параметры можно непосредственно использовать для поиска полюсов матрицы рассеяния и, тем самым, для установления природы рассматриваемых околопороговых изовекторных состояний.

Вообще говоря, полная  $t$ -матрица имеет 7 каналов, так что соответствующая ей риманова поверхность в комплексной плоскости энергии имеет  $2^7 = 128$  листов. Однако, поскольку все неупругие пороги расположены достаточно далеко от упругих порогов  $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}^*$ , а взаимодействие между неупругими каналами крайне слабое (в данном расчёте мы им полностью пренебрегли), то полюса, определяющие динамику системы, располагаются далеко от неупругих порогов. И напротив, полюса, сгенерённые неупругой динамикой, располагаются далеко от физической области. Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением римановой поверхности вблизи упругих порогов, где она имеет практически тот же вид, что и риманова поверхность двухканальной чисто упругой задачи.

Ограничимся рассмотрением квантовых чисел  $1^{+-}$  и извлечём положение полюсов, отвечающих состояниям  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ . Будем работать с параметрами фитов к новым данным,

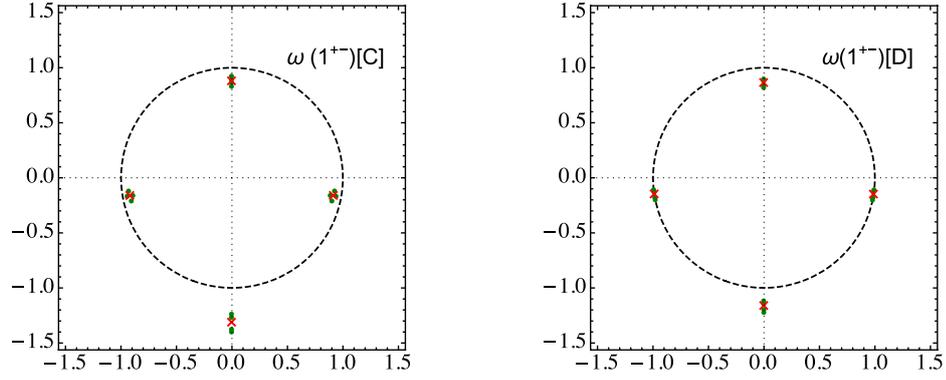


Рис. 2.8. Полюса полной  $t$ -матрицы, отвечающие квантовым числам  $1^{+-}$ , найденные для параметров фитов С (левый график) и D (правый график) (см. таблицу 2.1). Красными крестиками отмечены центральные значения, а зелёными точками — отклонения от центрального значения за счёт неопределённости в значениях параметров.

то есть с параметрами фитов С и D (см. таблицы 2.1 и 2.2). Как объяснялось выше, в двухканальном случае удобно работать с комплексной областью  $\omega$  [110] (см. подробности в Приложении А). При этом порогу  $B\bar{B}^*$  отвечают точки  $\omega = \pm i$ , порогу  $B^*\bar{B}$  — точка  $\omega = \pm 1$ , а околопороговой области — область вблизи окружности  $|\omega| = 1$ .

Нетрудно найти, что в интересующей нас области  $\omega$ -плоскости полная  $t$ -матрица имеет 4 полюса, расположенных как показано на рис. 2.8. Полюс, расположенный в нижней полуплоскости вблизи мнимой оси, находится под порогом  $B\bar{B}^*$  на четвёртом листе римановой поверхности (RS-IV) (см. определение (A.3)), и поэтому он практически не влияет на динамику системы. В дальнейшем он рассматриваться не будет.

Полюс в верхней полуплоскости (при выключении неупругих каналов он расположен строго на мнимой оси в  $\omega$ -плоскости) лежит практически на вещественной оси на втором листе римановой поверхности в плоскости энергии (RS-II). Он располагается близко к порогу  $B\bar{B}^*$  и определяет  $Z_b(10610)$  как виртуальный уровень (в строгом смысле, как резонанс, поскольку за счёт распадов в неупругие каналы полюс несколько смещён с вещественной оси). Здесь поучительно заметить, что в пренебрежении каналом  $B^*\bar{B}$  одноканальная  $t$ -матрица имела бы вид

$$t \propto \frac{1}{v_{11}^{-1} + i(2\pi)^2 \mu k_1}, \quad (2.99)$$

так что природа состояния  $Z_b(10610)$  определялась бы знаком потенциала  $v_{11}$ . Нетрудно видеть, что для фита С  $v_{11} \propto \gamma_s^{-1} + \gamma_t^{-1} > 0$ , то есть в одноканальном случае  $Z_b(10610)$  был бы связанным состоянием. Тем не менее, наличие второго канала приводит к эффективному ослаблению притяжения в  $B\bar{B}^*$  системе, так что связанное состояние превращается в виртуальный уровень.

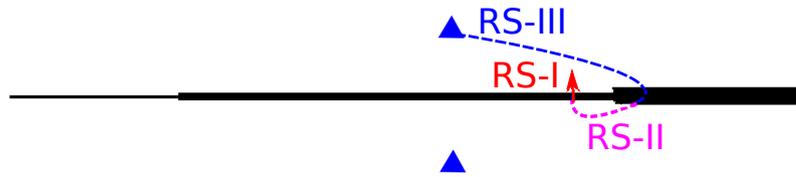


Рис. 2.9. Путь полюса, отвечающего  $Z_b(10650)$  для фита С, с RS-III на RS-I. Комплексно сопряжённый полюс также отмечен, однако для упрощения рисунка его путь не показан.

При рассмотрении фита D полюс отвечает виртуальному уровню как в одноканальном, так и в двухканальном случаях.

Оставшиеся два полюса с  $\omega \simeq \pm 1$  представляют собой пару сопряжённых полюсов, отвечающих состоянию  $Z_b(10650)$ . Ограничимся рассмотрением правого полюса из двух, поскольку он лежит ближе к физической области. Для фита С он лежит на третьем листе римановой поверхности RS-III, а для фита D — на четвёртом листе RS-IV (см. рис. 2.8)). Тем не менее, ввиду очень близкого расположения данного полюса к соответствующему порогу его влияние на динамику системы оказывается достаточно сильным. Действительно, как видно из рис. 2.9, путь данного полюса в фите С на физический лист лежит сначала через унитарный разрез, отвечающий порогу  $B^*\bar{B}^*$ , на второй лист, а затем через разрез от порога  $B\bar{B}^*$  — на первый лист. Альтернативный путь лежит через четвёртый лист римановой поверхности: RS-III→RS-IV→RS-I, что обусловлено тем, что выше порога  $B^*\bar{B}^*$  четвёртый и первый листы непосредственно склеены друг с другом. В любом случае такой путь весьма короток, так что, как указывалось выше, несмотря на формальное расположение на третьем листе, данный полюс оказывает существенное влияние на динамику системы. В случае фита D соответствующий полюс располагается на четвёртом листе, так что ввиду возможности непосредственного перехода с четвёртого листа на первый его путь на физический лист ещё короче. Для обоих рассматриваемых фитов в комплексной плоскости энергии данный полюс лежит немного ниже порога  $B^*\bar{B}^*$ , но выше порога  $B\bar{B}^*$ , так что  $Z_b(10650)$  представляет собой резонанс<sup>5</sup>. С другой стороны, расположение данного полюса чуть ниже порога  $B^*\bar{B}^*$  в непосредственной близости от вещественной оси (мнимая часть данного полюса обусловлена распадами  $Z'_b$  не только в неупругие каналы, но и в упругий канал  $B\bar{B}^*$ ) позволяет с некоторой натяжкой называть его виртуальным уровнем, аналогично  $Z_b$ . Несмотря на некоторую жаргонность термина “виртуальный уровень” применительно к обоим  $Z_b$ , его использование более точно указывает на положение соответствующих полюсов, чем намного менее определённое понятие “резонанс”.

<sup>5</sup> Следует ещё раз подчеркнуть, что в данном случае понятие “резонанс” использовано именно в смысле определённого расположения полюса в комплексной плоскости энергии, тогда как во всех остальных случаях в данной диссертации слово “резонанс” используется в качестве синонима слову “состояние”.

Энергии состояний  $Z_b$  и  $Z'_b$  относительно соответствующих порогов, определённые как

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(Z_b) &\equiv M(B\bar{B}^*) - M(Z_b), \\ \varepsilon_B(Z'_b) &\equiv M(B^*\bar{B}^*) - M(Z'_b),\end{aligned}\tag{2.100}$$

равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(Z_b) &= (1.10_{-0.54}^{+0.79} \pm i0.06_{-0.02}^{+0.02}) \text{ МэВ}, \\ \varepsilon_B(Z'_b) &= (1.10_{-0.53}^{+0.79} \pm i0.08_{-0.05}^{+0.03}) \text{ МэВ}\end{aligned}\tag{2.101}$$

для параметров фита С и

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(Z_b) &= (0.60_{-0.49}^{+1.40} \pm i0.02_{-0.01}^{+0.02}) \text{ МэВ}, \\ \varepsilon_B(Z'_b) &= (0.97_{-0.68}^{+1.42} \pm i0.84_{-0.34}^{+0.22}) \text{ МэВ}\end{aligned}\tag{2.102}$$

для параметров фита D. Неопределённости в положении полюсов оценены по ошибкам в определении параметров  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  в соответствии с найденными фитами.

Следует заметить, что мнимые части энергий (2.101) и (2.102) весьма невелики и составляют доли МэВ при том, что структуры в форме линии, которые они описывают имеют гораздо бóльшую видимую ширину, совместимую с брейт-вигнеровской шириной  $\Gamma_{Z_b^{(\prime)}} \simeq 10..20$  МэВ [89]. Данное явление не должно вызывать недоумения, поскольку ширина окологорогового каспа определяется вовсе не мнимой (как в распределении Брейта-Вигнера), а вещественной частью полюса, поэтому даже в отсутствие мнимой части пороговый касп имеет отличную от нуля видимую ширину. Это наблюдение лишний раз указывает на невозможность адекватного описания пороговых явлений формулой Брейта-Вигнера.

Ввиду наличия большой неопределённости извлечения параметров из данных поучительно рассмотреть вопрос о возможном положении полюсов в зависимости от значений параметров модели и о природе соответствующего окологорогового состояния. Поскольку полное число параметров очень велико, то ограничимся обсуждением лишь двух из них,  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$ , оказывающих наибольшее влияние на положение полюсов  $t$ -матрицы. Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что параметры фита изменяются не очень сильно, если вместо полной  $t$ -матрицы ограничиться рассмотрением лишь матрицы прямого взаимодействия  $t^v$ . Более того, в рассматриваемом наборе данных влияние неупругих каналов на форму линии весьма невелико и ограничивается в основном лишь приданием полюсам небольших мнимых частей. Таким образом, исследуем зависимость положения полюсов матрицы  $t^v$  от значений параметров  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$ , причём ограничимся исследованием полюса вблизи порога  $B\bar{B}^*$  и рассмотрим случай точной сим-

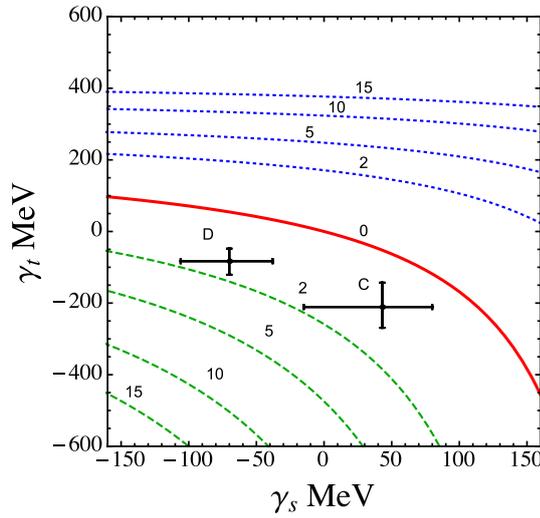


Рис. 2.10. Пространство параметров  $(\gamma_s, \gamma_t)$  для полюсов  $t$ -матрицы прямого взаимодействия  $t^v$  в изовекторном канале с квантовыми числами  $1^{+-}$ , расположенных вблизи порога  $B\bar{B}^*$ . Голубые и зелёные кривые отвечают полюсам с заданной энергией относительно порога (указана в МэВ рядом с каждой кривой), лежащим на различных листах римановой поверхности (RS-I и RS-II соответственно), а красная линия показывает положение границы между двумя областями. Чёрные точки с ошибками задают значения параметров, извлечённые из соответствующих фитов.

метрии спина тяжёлого кварка. Результаты удобнее всего представить в виде областей в плоскости  $(\gamma_s, \gamma_t)$ , каждая из которых отвечает расположению полюса на определённом листе римановой поверхности. Соответствующий график для полюсов в канале  $1^{+-}$ , отвечающих состоянию  $Z_b(10610)$ , приведён на рис. 2.10. Красная кривая

$$\gamma_t = \left( \gamma_s^{-1} - \sqrt{2/(\mu\delta)} \right)^{-1}, \quad \delta = M_{B^*} - M_B \quad (2.103)$$

разделяет области RS-I/RS-II (синяя/зелёная области соответственно). Значения параметров из фита (с учётом ошибок) приведены чёрными точками. Рядом с каждой кривой дано значение энергии по отношению к соответствующему порогу, отвечающее полюсу, лежащему на данной кривой.

Из рис. 2.10 видно, что, несмотря на большую неопределённость в данных и на то, что извлечённые из них значения параметров  $\gamma_s$  и  $\gamma_t$  также достаточно сильно меняются от фита к фиту, тем не менее, отвечающие им точки на плоскости  $(\gamma_s, \gamma_t)$  лежат в “зелёной” области (то есть отвечают виртуальному уровню), причём достаточно далеко от красной разделительной черты. Таким образом, вывод о том, что состояние  $Z_b(10610)$  является виртуальным уровнем можно считать надёжно установленным на основании данных. Аналогичный вывод справедлив и относительно состояния  $Z_b(10650)$ . Однако, поскольку даже с полностью выключенными неупругими каналами данное состояние может распадаться по каналу  $B\bar{B}^*$ , то соответствующий полюс имеет мнимую часть, так что построение для него простого и наглядного графика аналогичного рис. 2.10 представляется

затруднительным.

Следует отметить, что включение в совместный анализ данных коллаборации Belle по двух-пионным модам распада  $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi Z_b^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi\Upsilon(nS)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) явилось бы существенным шагом вперёд и позволило бы зафиксировать параметры модели с большей точностью. Действительно, объём обрабатываемых данных при этом практически удвоился бы, однако это не привело бы к необходимости введения новых параметров — все нормировки и константы связи уже введены в параметризацию. Кроме того, уже в обозримой перспективе ожидается появления новых данных, полученных в экспериментах с большой статистикой, которые также будут способствовать более точному и достоверному описанию природы и свойств состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ , а также других околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков.

## 2.6. Замечание о спиновых партнёрах $Z_b$

Предложенный подход позволяет извлекать из экспериментальных данных не только информацию о свойствах и природе самих исследуемых состояний  $Z_b$ , но также предсказывать свойства их спиновых партнёров. Действительно, симметрия спина тяжёлого кварка предсказывает существование состояний  $W_{bJ}$  с квантовыми числами  $J^{++}$  ( $J = 0, 1, 2$ ) [91] (см. также недавний обзор [111]). Упругие потенциалы прямого взаимодействия в данных каналах-сателлитах явно приведены в формулах (2.76), (2.78) и (2.79), а соответствующие спиновые волновые функции можно легко построить с помощью формул (2.69)-(2.74).

Для простоты ограничимся только прямым взаимодействием в упругих каналах и рассмотрим состояния с квантовыми числами  $1^{++}$  и  $2^{++}$ , для каждого из которых существует всего одна подходящая комбинация  $B^{(*)}$  мезонов, а соответствующие потенциалы совпадают и даются величиной  $V_0$ , то есть параметром  $\gamma_s$ . Тогда для  $t$ -матрицы прямого взаимодействия в этих каналах находим:

$$t^v(1^{++}) = t^v(2^{++}) = \frac{1}{(2\pi)^2\mu} \frac{1}{\gamma_s + ik}, \quad (2.104)$$

откуда нетрудно найти положение полюса в комплексной плоскости импульса:

$$k_0 = i\gamma_s. \quad (2.105)$$

В зависимости от значения параметра  $\gamma_s$ , извлечённого из фита к данным, данный полюс отвечает или связанному состоянию ( $\gamma_s > 0$ ), или виртуальному уровню ( $\gamma_s < 0$ ). Включение неупругих каналов может лишь несколько сдвинуть полюс с мнимой оси, однако его интерпретация останется прежней.

К сожалению, как уже упоминалось выше, имеющиеся экспериментальные данные не позволяют надёжно зафиксировать значения параметров фита, в частности, параметра  $\gamma_s$  — даже его знак плохо определён, поскольку в фитах с учётом симметрии тяжёлого кварка  $\gamma_s < 0$  (фиты В и D), тогда как в остальных фитах  $\gamma_s > 0$  (фиты А и С). Таким образом, возможность надёжного извлечения сведений о партнёрах изучаемых околопороговых резонансов сильно зависит от точности и полноты экспериментальных данных, появление которых на качественно новом уровне ожидается с началом работы *B* фабрик нового поколения.

## 2.7. Замечание об однопионном обмене

В предыдущих разделах данной главы подробно обсуждалось решение системы уравнений Липпмана–Швингера для задачи связанных каналов. В частности, одним из важных ингредиентов решения является матрица рассеяния в упругих каналах. Как подчёркивалось выше, используя подходящую модель прямого взаимодействия тяжёло-лёгких мезонов, можно решить соответствующее уравнение Липпмана–Швингера явно — например, численно. С другой стороны, для практических целей достаточно такую матрицу рассеяния подходящим образом параметризовать. В последнем случае имеет место автоматический эффективный учёт всех типов взаимодействия в упругих каналах. При этом, поскольку форма линии околопороговых резонансов определяется, в первую очередь, положением полюсов матрицы рассеяния в околопороговой области, то включение дополнительных упругих взаимодействий с последующим перефитированием данных не должно приводить к существенным изменениям в форме линии, поскольку предложенная параметризация обладает достаточной гибкостью для сохранения полюсов  $t$ -матрицы практически на старых местах. Тем не менее, одно из возможных взаимодействий в упругих каналах — однопионный обмен — заслуживает отдельного и более детального рассмотрения, поскольку оно содержит дальное действие, и его включение может приводить к проявлению принципиально новых эффектов, таких, например, как возникновению трёхчастичной динамики, оказывающей заметное влияние на формирование, природу и свойства изучаемого околопорогового резонанса. Заметим также, что проблема корректного учёта однопионного обмена может иметь принципиальное значение для предсказания свойств партнёров изучаемых резонансов. Например, если при фитировании данных для состояний  $Z_b$  эффективный учёт однопионного обмена происходит автоматически, как это объяснялось выше, то для их спиновых партнёров  $W_{b,J}$  правильность такого учёта оказывается под большим вопросом, поскольку однопионный обмен в состояниях с разной зарядовой чётностью имеет разную природу: отталкивание в канале с одной зарядовой чётностью сменяется притяжением в канале с противоположной чётностью.

Нужно заметить, что обсуждению роли однопионного обмена в экзотических резонансах и, в частности, в адронных молекулах, посвящена весьма обширная литература. Так, например, в работах [101, 112, 113] вклад однопионного обмена в потенциал взаимодействия тяжёло-лёгких мезонов рассматривается по теории возмущений, тогда как в работах [114, 115] однопионному обмену даже приписывается ключевая роль в связывании двухадронных систем. В работе [116] обсуждается весьма сильное влияние, оказываемое на форму линии состояний  $Z_b$  действующей частью потенциала однопионного обмена, а в работе [109] рассматривается большое смешивание между каналами  $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}$ , вызванное однопионным обменом. Можно также упомянуть работу [117], в которой однопионный обмен рассматривается в качестве причины возникновения нестандартной картины квантовых чисел экзотических адронов. Исследование свойств однопионного обмена в околопороговых резонансах важно также и для интерпретации результатов решёточных расчётов (см., например, работы [80, 118, 119]), для чего требуется построение киральных экстраполяций по массе лёгкого кварка [38, 120, 121].

В следующих разделах диссертации подробно обсуждаются все упомянутые выше вопросы, связанные с однопионным обменом, а именно: проблема трёхчастичной унитарности и трёхчастичной динамики в околопороговых резонансах, проблема удерживающих свойств однопионного обмена, его теоретико-полевое описание, зависимость величины константы связи пиона с адронами от степени возбуждения последних, а также построение киральной экстраполяции энергии связи состояния  $X(3872)$ .

## 2.8. Выводы к третьей главе

В третьей главе диссертации предложена достаточно простая, но при этом реалистичная и совместимая с требованиями унитарности и аналитичности параметризация формы линии околопороговых резонансов. Достоинствами такой параметризации является возможность одновременного описания всех каналов реакции рождения и распада рассматриваемого околопорогового резонанса (или системы резонансов) и, тем самым, извлечение наиболее полной информации из экспериментальных данных. С теоретической точки зрения достоинствами созданной параметризации является простая физическая интерпретация её параметров, таких, например, как константы связи каналов или  $t$ -матрица прямого взаимодействия тяжёлых мезонов. Извлечение этих параметров непосредственно из фита к экспериментальным данным позволяет модельно независимым образом вычислять брэнчинги отдельных каналов реакции, предсказывать форму линии в ещё не измеренных каналах, использовать найденные параметры прямого взаимодействия тяжёлых мезонов для описания уже известных и предсказания новых молекулярных околопороговых состояний, оцени-

вать точность приближённых симметрий системы (например, симметрии спина тяжёлого кварка) и т.п. Предложенная параметризация является унитарной, то есть все мнимые части элементов матрицы рассеяния естественным образом возникают из явного непертурбативного учёта перерассеяний через соответствующие упругие и неупругие каналы. В этом случае отсутствие в матрице рассеяния информации о ещё неизвестных или не измеренных каналах реакции будет проявляться в виде “дефицита” неупругости, без восполнения которого, например, с помощью введения эффективных мнимых частей некоторых параметров, хорошее описание данных окажется невозможным. По величине такого “дефицита” можно оценить брэнчинги отсутствующих каналов даже в том случае, если сами эти каналы экспериментально ещё не изучены.

Важной особенностью предложенной параметризации является заполнение “пропасти” между микроскопическими теоретическими подходами, основанными на фундаментальной теории сильных взаимодействия, и экспериментом. Действительно, анализ экспериментальных данных, особенно одновременный совместный анализ множественных каналов реакции, является весьма сложным и трудоёмким процессом. В связи с этим пригодными для использования в таком анализе являются только теоретические выражения, основанные на относительно простых алгебраических конструкциях. С другой стороны, использование микроскопических моделей взаимодействия адронов, основанных на КХД, не позволяет получать такие достаточно простые выражения пригодные для непосредственного использования в анализе экспериментальных данных. Созданная феноменологическая параметризация представляет собой недостающее промежуточное звено цепи: будучи относительно простой, она может непосредственно использоваться для анализа данных, а извлечённые из неё значения параметров, имеющих прямой физический смысл, могут затем описываться и объясняться в рамках микроскопических моделей.

Для демонстрации возможностей предложенной параметризации формы линии околопороговых резонансов она была протестирована на одновременном описании данных по нескольким модам распада  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ , причём получено весьма хорошее описание данных. С помощью значений параметров, извлечённых из подгонок к экспериментальным данным, определено положение полюсов матрицы рассеяния в комплексной плоскости, отвечающих околопороговым состояниям в каналах с квантовыми числами  $1^{+-}$  и, таким образом, сделан вывод о природе состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$ . В частности, проанализированные данные указывают на то, что и  $Z_b(10610)$ , и  $Z_b(10650)$  являются виртуальными уровнями, лежащим на нефизических листах поверхности Римана в непосредственной близости (примерно в пределах 1 МэВ) от порогов  $B\bar{B}^*$  и  $B^*\bar{B}$  соответственно. Заметим, что полученное совместное описание данных и заключения, сделанные относительно природы состояний  $Z_b$ , являются весомым аргументом в пользу их динамической природы как адронных молекулярных состояний. Действительно, только существенная

примесь молекулы делает возможным возникновение виртуального уровня, тогда как из решения уравнения Шредингера для многокварковой системы (например, для тетракварка) могут возникать лишь связанные состояния.

Несмотря на неопределённость при извлечении параметров подгонки из данных, выводы относительно природы околопороговых состояния  $Z_b^{(l)}$ , зависящие, в первую очередь, от положения полюсов в комплексной плоскости, довольно устойчивы к вариации параметров. Тем не менее, справедливость сделанных выводов требует дальнейшей проверки, а параметры резонансов — дальнейшего уточнения по мере поступления новых, более точных данных как для рассмотренных выше каналов, так и для каналов  $\pi\Upsilon(nS)$ .

Следует заметить также, что параметры, извлечённые из анализа экспериментальных данных, проведённого с помощью предложенной параметризации, могут напрямую использоваться в качестве входных данных для других, комплементарных теоретических и феноменологических подходов. Один из таких подходов — построение киральной экстраполяции по массе пиона энергии связи околопорогового резонанса, — основанный на системе трёхчастичных уравнений, подробно рассматривается в пятой главе диссертации.

# Трёхчастичная динамика в околопороговом резонансе

### 3.1. Введение

В предыдущей главе диссертации были получены формулы для описания формы линии околопороговых резонансов с учётом наличия множественных упругих и неупругих каналов, а также в присутствии “затравочных” полюсов, которые могут быть отождествлены с кварковыми состояниями. При этом все адроны, участвовавшие в рассматриваемом процессе рождения и распада резонанса, считались стабильными. Однако в реальности это не так, поэтому необходимо установить критерий, при выполнении которого конечной шириной конstituентов действительно можно пренебрегать в расчётах, а также предложить подход, позволяющий учитывать нестабильность конstituентов на регулярной основе. Поскольку основной эффект ожидается от двухчастичных мод распада конstituентов, то в данной главе диссертации изучается трёхчастичная динамика в околопороговом резонансе на примере системы, один из конstituентов которой стабилен, а второй распадается по двухчастичному каналу. Типичным примером такого резонанса может служить состояние в спектре чармония  $X(3872)$ , уже неоднократно упоминавшееся ранее. Действительно, ввиду близости данного резонанса к нейтральному двухчастичному порогу  $D\bar{D}^*$ , примесь соответствующей молекулярной компоненты в волновой функции резонанса может быть весьма велика. При этом  $D^*$  мезон сам является нестабильным и может переходить в  $D$  мезон с испусканием фотона или пиона [89]. С одной стороны, соответствующие ширины крайне малы и составляют величины порядка всего лишь нескольких десятков килоэлектронвольт. Но, с другой стороны, нейтральный трёхчастичный порог  $D\bar{D}\pi$  отстоит от нейтрального двухчастичного порога  $D\bar{D}^*$  всего на несколько мегаэлектронвольт, причём он лежит ниже по энергии. Такая близость двух- и трёхчастичных порогов, а также их весьма специфическое взаимное расположение приводят к тому, что однопионный обмен в системе  $D\bar{D}^*$  сильно отличается от статического обмена в дейтроне, который часто рассматривается в качестве аналогичной и уже хорошо изученной системы. Действительно, если в дейтроне  $m_n - m_p \ll m_\pi$ , то в  $X(3872)$   $m_{D^*} - m_D \approx m_\pi$ , так что пион в промежуточном состоянии находится очень близко к массовой поверхности [122], и влияние трёхчастичного разреза на динамику системы может быть весьма ощутимым. Таким образом, состояние  $X(3872)$  позволяет детально исследовать вопрос о влиянии трёхчастичной динамики на природу и форму линии околопорогового резонанса. Этот вопрос подробно изложен в четвёртой главе диссертации, а в данной главе рассматриваются примеры более простых систем и, следо-

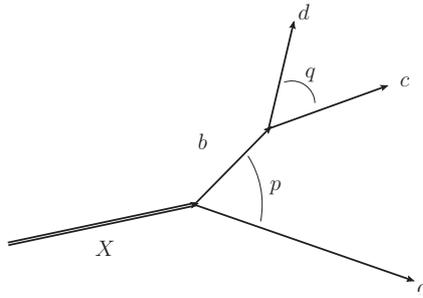


Рис. 3.1. Диаграмма трёхчастичного распада околопорогового резонанса  $X$ , протекающего через образование двухчастичного промежуточного состояния, в предположении о рождении резонанса из точечного источника.

вательно, более простого, в том числе эффективного, описания трёхчастичной динамики. В частности, в начале главы трёхчастичная динамика в околопороговом резонансе изучается в рамках феноменологического эффективного подхода, позволяющего не расширять двухчастичный базис модели связанных каналов. Затем приведён пример ситуации, в которой такой эффективный учёт трёхчастичных эффектов является недостаточным, и требуется применение непertурбативного подхода, должным образом (неpertурбативно) учитывающего трёхчастичную унитарность. В частности, такой непertурбативный подход, основанный на трёхчастичных уравнениях типа уравнений Фаддева, построен и применён для изучения возможности существования связанных состояний в системе  $D_1 \bar{D}^*$ , удерживаемых однопионным обменом.

### 3.2. Феноменологический учёт конечной ширины конститuenta

Как указывалось выше, в отсутствие близлежащих порогов форма линии резонанса хорошо описывается формулой Брейта и Вигнера (1.1). В случае, если изучаемый резонанс (в данном разделе будем для краткости обозначать его через  $X$ ) располагается вблизи двухчастичного  $S$ -волнового порога  $ab$  (здесь через  $a$  и  $b$  обозначены некоторые адроны), связь резонанса с таким порогом приводит к искажению формы линии, которая теперь описывается формулой Флатте (1.2). В частности, для дифференциальной вероятности рождения резонанса в упругом канале  $ab$  можно записать простую формулу:

$$\frac{dBr(ab)}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ab}k(E)}{|E - E_X + \frac{i}{2}(g_{ab}k(E) + \Gamma_0)|^2}, \quad (3.1)$$

где в константу  $\mathcal{B}$  поглощены все детали рождения резонанса, через  $k(E)$  обозначен импульс конститuentов в упругом канале (с учётом его аналитического продолжения ниже порога (см. формулу (1.3)), а параметр  $\Gamma_0$  эффективно учитывает вклады удалённых открытых каналов распада

резонанса. Однако, если адрон  $b$  сам нестабилен и может распадаться по каналу  $b \rightarrow c + d$ , то наблюдаться в эксперименте может лишь трёхчастичное конечное состояние  $acd$  (см. диаграмму на рис. 3.1). Проблема влияния ширины адрона  $b$  на форму линии резонанса  $X$  обсуждалась в ряде работ (см., например, работы [81, 123, 124]) и был сделан вывод о том, что такое влияние может быть значительным. Таким образом, вопросы, на которые необходимо дать ответ состоят в следующем:

- Как в наиболее общем виде записать формулы для формы линии резонанса с учётом нестабильности его конститuenta?
- Возможен ли эффективный учёт нестабильности конститuenta, который не требовал бы расширения базиса модели?
- Какой параметр контролирует отклонение кривых для формы линии резонанса от простых формул, предложенных в работах [123, 124]?

Для ответа на поставленные вопросы сформулируем задачу следующим образом: резонанс  $X$ , рождаемый из точечного источника, распадается на пару адронов  $a$  и  $b$ , из которых один (для определённости пусть это будет  $a$ ) является стабильным, а второй ( $b$ ) распадается на пару  $c + d$  (см. рис. 3.1). Ширину распада  $b \rightarrow c + d$  будем обозначать через  $\Gamma_R$ , а массу состояния  $b$  представим в виде  $m_b = m_c + m_d + E_R$  и будем предполагать, что  $E_R > 0$ . Аналогично для массы резонанса  $X$  запишем  $M_X = m_a + m_c + m_d + E_X$ , причём знак  $E_X - E_R$  может быть как положительным ( $X$  есть виртуальный уровень), так и отрицательным ( $X$  есть связанное состояние). Все остальные моды распада состояния  $X$  будем описывать эффективной постоянной шириной  $\Gamma_0$ . Под такую постановку задачи подпадает, например, уже упоминавшийся выше чармоний  $X(3872)$ , для которого роль адронов  $a, b, c$  и  $d$  играют соответственно мезоны  $D, \bar{D}^*, \bar{D}$  и  $\pi$  (для упрощения записи черта над античастицами часто будет опускаться — в случае необходимости она может быть элементарно восстановлена в любом месте).

Если ширина  $\Gamma_R$  достаточно мала (ниже будет дан критерий такой малости), то представляется очевидным, что форму линии резонанса  $X$  в упругом и неупругом каналах можно записать в виде аналогичном формуле (3.1) (здесь и далее квадратные скобки в записи  $a[cd]$  указывают на происхождение частиц  $c$  и  $d$  из распада частицы  $b$ ):

$$\frac{dBr(a[cd])}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ab} k_{\text{eff}}(E)}{\left| E - E_X + \frac{1}{2} g_{ab} [\kappa_{\text{eff}}(E) + i k_{\text{eff}}(E)] + \frac{i}{2} \Gamma_0 \right|^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dBr(\text{inel})}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_0}{\left| E - E_X + \frac{1}{2} g_{ab} [\kappa_{\text{eff}}(E) + i k_{\text{eff}}(E)] + \frac{i}{2} \Gamma_0 \right|^2}, \quad (3.3)$$

где, однако, величины  $\kappa_{\text{eff}}(E)$  и  $k_{\text{eff}}(E)$  уже не связаны между собой аналитическим продолжением при переходе через двухчастичный порог, причём явный вид этих функций предстоит установить.

В пределе  $\Gamma_R = 0$  полученные выражения должны воспроизводить хорошо изученный выше предел стабильного конstituента  $b$ , то есть<sup>1</sup>

$$k_{\text{eff}}(E, \Gamma_R = 0) = \sqrt{2\mu_p(E - E_R)} \Theta(E - E_R), \quad (3.4)$$

$$\kappa_{\text{eff}}(E, \Gamma_R = 0) = -\sqrt{2\mu_p(E_R - E)} \Theta(E_R - E) + \sqrt{2\mu_p(E_R - E_X)} \Theta(E_R - E_X), \quad (3.5)$$

где  $\mu_p$  есть приведённая масса (см. определение (3.12) ниже). Необходимость вычитания постоянного члена в  $\kappa_{\text{eff}}(E, \Gamma_R = 0)$  обусловлена определением величины  $E_X$  как нуля действительной части знаменателя распределения.

В работах [123, 124] предложено простое обобщение формул (3.4) и (3.5) на случай ненулевой ширины  $\Gamma_R$  в виде:

$$k_{\text{eff}}^{(0)}(E) = \sqrt{\mu_p} \sqrt{\sqrt{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} + E - E_R}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{eff}}^{(0)}(E) = & -\sqrt{\mu_p} \sqrt{\sqrt{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} - E + E_R} \\ & + \sqrt{\mu_p} \sqrt{\sqrt{(E_X - E_R)^2 + \Gamma^2/4} - E_X + E_R}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

причём в работе [123] ширина взята постоянной,  $\Gamma \equiv \Gamma_R$ , тогда как в работе [124] те же выражения используются с “бегущей” шириной

$$\Gamma(E) = \Gamma_R \left( \frac{E}{E_R} \right)^{l+1/2}, \quad (3.8)$$

где через  $l$  обозначен угловой момент в подсистеме  $cd$ . Наибольший интерес представляют случаи низших волн, то есть  $l = 0$  и  $l = 1$ . Так, в разделе 3.3 проблема трёхчастичной унитарности обсуждается на примере (не)существования глубокосвязанных состояний в системе  $D_1 \bar{D}^*$ , где  $D_1$  мезон является нестабильным и распадается по каналу  $D_1 \rightarrow D^* \pi$  в  $S$ -волне. С другой стороны, однопионный обмен в  $X(3872)$ , подробно обсуждаемый в разделе 4.7 ниже, определяется  $P$ -волновой вершиной  $D^* \rightarrow D \pi$ .

Для вывода формул (3.2) и (3.3) и установления явного вида функций  $k_{\text{eff}}$  и  $\kappa_{\text{eff}}$  рассмотрим следующую задачу о связанных каналах для фоковского пространства, состоящего из трёх состояний: элементарного состояния  $X_0$ , двухчастичного состояния  $ab$  и трёхчастичного состояния  $a[cd]$ . Соответственно, волновую функцию изучаемого резонанса  $X$  можно записать в виде:

$$|X\rangle = \begin{pmatrix} C|X_0\rangle \\ \chi(\mathbf{p})|ab\rangle \\ \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q})|a[cd]\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

<sup>1</sup> В данном разделе начало отсчёта энергии выбрано не в двухчастичном пороге, как это делалось ранее, а в трёхчастичном, что существенно упрощает ряд формул. По этой причине в формулах для стабильного конstituента (см., например, выражение (1.3)) произошёл сдвиг аргумента на величину раздвижки порогов:  $E \rightarrow E - E_R$ .

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  есть импульсы в подсистемах  $ab$  и  $cd$  соответственно (см. рис. 3.1). Волновая функция (3.9) удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H|X\rangle = M|X\rangle, \quad (3.10)$$

гамильтониан в котором представим в виде матрицы  $3 \times 3$ :

$$H = H_0 + V = \begin{pmatrix} M_0 & f(\mathbf{p}) & 0 \\ f(\mathbf{p}) & m_a + m_{b0} + T_{ab}(p) & g(\mathbf{q}) \\ 0 & g(\mathbf{q}) & m_a + m_c + m_d + T_{ab}(p) + T_{cd}(q) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где использованы краткие обозначения

$$T_{ab}(p) = \frac{p^2}{2\mu_p}, \quad T_{cd}(q) = \frac{q^2}{2\mu_q}$$

для кинетических энергий в подсистемах  $ab$  и  $cd$  соответственно, приведённые массы определены как

$$\mu_{ab} = \frac{m_a m_{b0}}{m_a + m_{b0}}, \quad \mu_p = \frac{m_a(m_c + m_d)}{m_a + m_c + m_d}, \quad \mu_q = \frac{m_c m_d}{m_c + m_d}, \quad (3.12)$$

а параметры  $M_0$  и  $m_{b0}$ , входящие в выражения (3.11) и (3.12), обозначают “голые” массы.

Из гамильтониана (3.11) видно, что разрешены прямые переходы между элементарным и двухчастичным состояниями, а также между двухчастичным и трёхчастичным состояниями. Прямых переходов из элементарного состояния в трёхчастичное и обратно нет. Такое предположение является весьма правдоподобным, причём оно заметно упрощает выкладки. Заметим также, что в задаче не рассматривается прямое взаимодействие в адронных каналах. В разделах 1.7 и 1.8 подробно рассматривались возможные ситуации, возникающие при учёте такого прямого взаимодействия. В частности, было продемонстрировано, что форма линии резонанса весьма сильно отклоняется от простого распределения Флатте в том (и только в том) случае, если и кварковая и адронная динамики независимо генерируют околопороговые полюса матрицы рассеяния. В противном случае с помощью унитарного преобразования прямое взаимодействие можно “спрятать” в переопределение констант связи и затравочной массы  $M_0$  [43–45]. Таким образом, в дальнейшем в этом разделе предполагаем, что такое унитарное преобразование уже совершено, так что все параметры задачи определены уже с учётом поглощения прямого взаимодействия. Наконец, имея ввиду рассмотрение околопорогового резонанса, ограничимся нерелятивистской кинематикой и отождествим приведённые массы  $\mu_{ab}$  и  $\mu_p$ , то есть положим  $\mu_{ab} = \mu_p$ . Такое отождествление позволяет заменить “голую” массу нестабильного мезона  $m_{b0}$  его физической массой  $m_b$ , которая будет определена ниже.

Уравнение Липпмана-Швингера для полной  $t$ -матрицы изучаемой системы можно записать в виде:

$$t_{ij} = V_{ij} - \sum_k V_{ik} S_k t_{kj}, \quad (3.13)$$

где для удобства записи каналы пронумерованы как

$$1 = |X_0\rangle, \quad 2 = |ab\rangle, \quad 3 = |a[cd]\rangle, \quad (3.14)$$

а свободные пропагаторы даются выражениями

$$S_i = (H_{0i} - M - i0)^{-1}. \quad (3.15)$$

Наконец, как указывалось выше, в данном разделе удобно отсчитывать все энергии от трёхчастичного порога, так что

$$M = m_a + m_c + m_d + E, \quad M_0 = m_a + m_c + m_d + E_0, \quad m_{b0} = m_c + m_d + E_{b0}, \quad (3.16)$$

где  $E$  есть полная энергия системы, а  $E_0$  и  $E_{b0}$  есть “затравочные” энергии нестабильных частиц  $X$  и  $b$ .

Решение системы уравнений связанных каналов для компонент  $t$ -матрицы (3.13) можно найти в замкнутом аналитическом виде [12]:

$$t_{11}(E) = \frac{\mathcal{G}_X^{(0)}(E)(E - E_0)}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)}, \quad (3.17)$$

$$t_{21}(\mathbf{p}, E) = t_{12}(\mathbf{p}, E) = \frac{f(\mathbf{p})D_2(p, E)}{\Delta(p, E)} \frac{E_0 - E}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)}, \quad (3.18)$$

$$t_{31}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, E) = t_{13}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, E) = -\frac{g(\mathbf{q})f(\mathbf{p})}{\Delta(p, E)} \frac{E_0 - E}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)}, \quad (3.19)$$

$$t_{22}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\mathcal{G}_b^{(0)}(p, E)D_2(p, E)}{\Delta(p, E)} + \frac{D_2(p, E)}{\Delta(p, E)} \frac{f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}')}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)} \frac{D_2(p', E)}{\Delta(p', E)}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} t_{23}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}', E) &= t_{32}(\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{p}, E) = -\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{g(\mathbf{q}')D_2(p', E)}{\Delta(p, E)} \\ &- \frac{g(\mathbf{q}')f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}')D_2(p, E)}{\Delta(p, E)\Delta(p', E)} \frac{1}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$t_{33}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}', E) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{g(\mathbf{q})g(\mathbf{q}')}{\Delta(p, E)} + \frac{g(\mathbf{q})g(\mathbf{q}')f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}')}{\Delta(p, E)\Delta(p', E)} \frac{1}{E - E_0 + \mathcal{G}_X^{(0)}(E)}, \quad (3.22)$$

где обратные одетые пропагаторы есть

$$\Delta(p, E) = \mathcal{G}_b^{(0)}(p, E) - D_2(p, E), \quad D_2(p, E) = T_{ab}(p) + E_{b0} - E, \quad (3.23)$$

а “голые” собственноэнергетические части для состояний  $b$  и  $X$  определены как

$$\mathcal{G}_b^{(0)}(p, E) = \int \frac{g^2(\mathbf{q})d^3q}{T_{ab}(p) + T_{cd}(q) - E - i0}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{G}_X^{(0)}(E) = \int \frac{f^2(\mathbf{p})d^3p}{E_{b0} + T_{ab}(p) - E - \mathcal{G}_b^{(0)}(p, E) - i0}. \quad (3.25)$$

Для нестабильных частиц  $b$  и  $X$  определим массы как нули действительных частей соответствующих обратных пропагаторов. Для этого сначала определим физические массы  $m_b$  и  $M_X$  через соответствующие им энергии  $E_R$  и  $E_X$  в виде:

$$m_b = m_c + m_d + E_R, \quad M_X = m_a + m_c + m_d + E_X, \quad (3.26)$$

а затем определим перенормированные собственные энергии, вычтенные в так определённых массах (энергиях):

$$\mathcal{G}_b(p, E) = \mathcal{G}_b^{(0)}(p, E) - \text{Re} \left( \mathcal{G}_b^{(0)}(0, E_R) \right), \quad (3.27)$$

$$\mathcal{G}_X(E) = \int \frac{f^2(\mathbf{p})d^3p}{E_R + T_{ab}(p) - E - \mathcal{G}_b(p, E) - i0} - \text{Re} \left( \int \frac{f^2(\mathbf{p})d^3p}{E_R + T_{ab}(p) - E_X - \mathcal{G}_b(p, E_X) - i0} \right). \quad (3.28)$$

Переходим к решению уравнения (3.10) для волновой функции резонанса. Прежде всего заметим, что возможны три вида таких решений в зависимости от их асимптотического поведения:

1. Связанное состояние всех трёх частиц  $a$ ,  $c$  и  $d$ .
2. Связанное состояние в подсистеме  $cd$  и свободное движение последней по отношению в частице  $a$ .
3. Свободное движение всех трёх частиц  $a$ ,  $c$  и  $d$ .

В связи с изучением резонансов в такого рода реакциях наибольший интерес представляет собой последний случай, поэтому обратимся именно к нему. В предположении рождения резонанса из точечного источника через кварковую компоненту (см. подробное обсуждение различных механизмов рождения в разделе 1.6 выше) соответствующую амплитуду можно записать в виде:

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{F}_1 S_1(E) t_{13}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}, E) = \frac{\mathcal{F}_1 f(\tilde{\mathbf{p}}) g(\tilde{\mathbf{q}})}{[E - E_X + (E)][E - E_R - T_{ab}(\tilde{\mathbf{p}}) + \mathcal{G}_b(\tilde{\mathbf{p}}, E)],} \quad (3.29)$$

где, как и раньше, детали рождения резонанса поглощены в мультипликативную константу  $\mathcal{F}_1$ .

Входящие в последнее выражение импульсы  $\tilde{\mathbf{p}}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$  подчиняются закону сохранения энергии:

$$E - T_{ab}(\tilde{\mathbf{p}}) - T_{cd}(\tilde{\mathbf{q}}) = 0. \quad (3.30)$$

Решение (3.29) нетрудно получить непосредственно из уравнения Шредингера (3.10):

$$\Psi_i = \Psi_i^{(0)} - \sum_k S_i t_{ik} \Psi_k^{(0)}, \quad (3.31)$$

где  $\Psi_i^{(0)}$  есть волновая функция, описывающая свободное движение в  $i$ -ом канале. В данном случае

$$\Psi_i^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q} | \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \delta_{i3} \delta(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}) \delta(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}). \quad (3.32)$$

Тогда нетрудно найти следующее явное решение уравнения (3.10):

$$C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{f(\tilde{\mathbf{p}})g(\tilde{\mathbf{q}})}{[E - E_X + \mathcal{G}_X(E)][E - E_R - T_{ab}(\tilde{\mathbf{p}}) + \mathcal{G}_b(\tilde{\mathbf{p}}, E)]}, \quad (3.33)$$

$$\chi(\mathbf{p} | \tilde{\mathbf{p}}) = \frac{C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})f(\mathbf{p}) + g(\tilde{\mathbf{q}})\delta(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})}{E - E_R - T_{ab}(p) + \mathcal{G}_b(p, E)}, \quad (3.34)$$

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q} | \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \delta(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})\delta(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{g(\mathbf{q})\chi(\mathbf{p} | \tilde{\mathbf{p}})}{E - T_{ab}(p) - T_{cd}(q)}, \quad (3.35)$$

причём все волновые функции выражены через физические энергии  $E_X$  и  $E_R$ .

В разделе 1.4 выше подробно рассматривалась спектральная плотность — величина, определяющая вероятность обнаружения кваркового состояния в волновой функции непрерывного спектра. В данном случае спектральная плотность определяется как

$$w(E) = \int d^3\tilde{p}d^3\tilde{q} |C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})|^2 \delta(E - T_{ab}(\tilde{\mathbf{p}}) - T_{cd}(\tilde{\mathbf{q}})) \quad (3.36)$$

и описывает вероятность обнаружения затравочного состояния  $X_0$  в континууме  $a[cd]$ . Непосредственным вычислением нетрудно найти, что

$$w(E) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{E - E_X + \mathcal{G}_X^*(E)} - \frac{1}{E - E_X + \mathcal{G}_X(E)} \right]. \quad (3.37)$$

Тогда сравнение выражений (3.29) и (3.33) показывает, что спектральная плотность определяет дифференциальную вероятность рождения состояния  $a[cd]$  (см. также формулу (1.34) и её обсуждение выше):

$$\frac{dBr(a[cd])}{dE} \propto \int d^3\tilde{p}d^3\tilde{q} |C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})|^2 \delta(E - T_{ab}(\tilde{\mathbf{p}}) - T_{cd}(\tilde{\mathbf{q}})) = w(E). \quad (3.38)$$

Строго говоря, дальнейшие вычисления возможны только при использовании явного вида формфакторов перехода. Однако, для относительно небольших значений энергии  $E$  (то есть оставаясь вблизи двух- и трёхчастичного порогов, если они не очень сильно разнесены), когда изменением формфакторов можно пренебречь, считая их постоянными величинами, возможно получение модельно-независимых выражений. В частности, в этом пределе имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_b(p, E) &= \frac{i}{2} g_{cd} \left[ 2\mu_q \left( E - \frac{p^2}{2\mu_p} \right) \right]^{l+1/2} \Theta \left( E - \frac{p^2}{2\mu_p} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^l g_{cd} \left[ -2\mu_q \left( E - \frac{p^2}{2\mu_p} \right) \right]^{l+1/2} \Theta \left( -E + \frac{p^2}{2\mu_p} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где  $l$  есть угловой момент в подсистеме  $cd$ , а введённая здесь константа связи  $g_{cd}$  определяется шириной нестабильного конституента  $\Gamma_R$  по формуле

$$\Gamma_R = g_{cd}(2\mu_q E_R)^{l+1/2} = g_l E_R^{l+1/2}, \quad g_l \equiv g_{cd}(2\mu_q)^{l+1/2}. \quad (3.40)$$

Заметим, что в выражении (3.39) оставлена лишь быстро меняющаяся часть  $\mathcal{G}_b(p, E)$ , тогда как постоянная часть опущена, поскольку её всегда можно поглотить в перенормировку энергии резонанса  $E_R$  (в частности, данный вопрос подробно обсуждался в предыдущей главе диссертации в связи с феноменологической параметризацией формы линии околопорогового резонанса). В случае ненулевого углового момента может потребоваться более одного вычитания.

Таким образом, параметрами модели являются энергия и ширина резонанса  $E_R$  и  $\Gamma_R$ , из которых можно составить безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{\Gamma_R}{E_R}, \quad (3.41)$$

определяющий трёхчастичную динамику системы. Поскольку речь в данном разделе идёт о феноменологическом учёте ширины конституента, то такая ширина предполагается достаточно маленькой, что в терминах введённого выше параметра означает  $\lambda \ll 1$ . По крайней мере качественно подход, развиваемый в данном разделе, должен работать и для бóльших ширин, для которых, однако, условие  $\lambda \lesssim 1$  выполнено с запасом. Для ещё бóльших ширин эффективные подходы уже неприменимы, и трёхчастичная динамика должна учитываться точно. Ниже этот вопрос обсуждается подробно.

Для практических целей наибольший интерес представляют  $S$ -волновые двухчастичные пороги, так что угловой момент в подсистеме  $ab$  предполагается нулевым. В этом случае удобно ввести эффективную константу связи  $g_{ab}$  и выразить  $\mathcal{G}_X(E)$  через неё:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{G}_X(E)) = \frac{1}{2}g_{ab}\kappa_{\text{eff}}(E), \quad \operatorname{Im}(\mathcal{G}_X(E)) = \frac{1}{2}g_{ab}k_{\text{eff}}(E), \quad g_{ab} = 8\pi^2\mu_p f^2(0). \quad (3.42)$$

Тогда непосредственным вычислением нетрудно разделить действительную и мнимую части величины  $\mathcal{G}_X(E)$ , задаваемой выражением (3.28), и найти, что мнимая часть даётся формулой

$$k_{\text{eff}}(E) = \frac{g_l}{2\pi\mu_p} \int_0^{\sqrt{2\mu_p E}} \frac{p^2 dp (E - \frac{p^2}{2\mu_p})^{(2l+1)/2}}{(E_R - E + \frac{p^2}{2\mu_p})^2 + \frac{g_l^2}{4} (E - \frac{p^2}{2\mu_p})^{2l+1}}, \quad (3.43)$$

где через  $l$  обозначен угловой момент в подсистеме  $cd$ , а константа  $g_l$  определена в формуле (3.40). Аналогично, из действительной части  $\mathcal{G}_X(E)$  находим:

$$\kappa_{\text{eff}}(E) = \kappa_1(E) + \kappa_2(E) - \kappa_1(E_X) - \kappa_2(E_X), \quad (3.44)$$

причём первый член здесь даётся формулой

$$\kappa_1(E) = \frac{1}{\pi\mu_p} \int_0^\infty p^2 dp \frac{E_R - E + \frac{p^2}{2\mu_p}}{(E_R - E + \frac{p^2}{2\mu_p})^2 + \frac{g_l^2}{4} (E - \frac{p^2}{2\mu_p})^{2l+1}}, \quad (3.45)$$

тогда как второй член равен

$$\kappa_2(E) = -\frac{g_l}{2\pi\mu_p} \int_{\sqrt{2\mu_p E}}^\infty p^2 dp \frac{(\frac{p^2}{2\mu_p} - E)^{(2l+1)/2}}{(E_R - E + \frac{p^2}{2\mu_p})^2 + \frac{g_l^2}{4} (E - \frac{p^2}{2\mu_p})^{2l+1}}. \quad (3.46)$$

Поскольку, по предположению,  $\lambda \ll 1$ , то  $g_l \propto \lambda$  есть малая величина, и, следовательно, вклад  $\kappa_2(E)$  подавлен по сравнению с  $\kappa_1(E)$ , поэтому в дальнейшем величиной  $\kappa_2(E)$  будем пренебрегать.

Для случая  $l = 0$  нетрудно получить следующие явные выражения:

$$k_{\text{eff}}(E) = \frac{g_0 \sqrt{2\mu_p}}{2} \left( -1 + \frac{E_R + \sqrt{(E - E_R)^2 + \frac{g_0^2 E}{4}}}{\sqrt{2E_R \left( E_R - E + \frac{g_0^2 E}{8E_R} + \sqrt{(E - E_R)^2 + \frac{g_0^2 E}{4}} \right)}} \right), \quad (3.47)$$

$$\kappa_{\text{eff}}(E) \approx \kappa_1(E) - \kappa_1(E_X), \quad (3.48)$$

где

$$\kappa_1(E) = \text{const} + \sqrt{\mu_p} \frac{E - E_R + \frac{g_0^2}{4} - \sqrt{(E_R - E)^2 + \frac{g_0^2 E}{4}}}{\sqrt{E_R - E - \frac{g_0^2}{8} + \sqrt{(E_R - E)^2 + \frac{g_0^2 E}{4}}}}, \quad (3.49)$$

причём, как следует из определения (3.48), бесконечная константа, содержащаяся в  $\kappa_1$ , уходит из  $\kappa_{\text{eff}}$ .

При  $l > 0$  помимо двух физических полюсов функция  $\kappa_{\text{eff}}$  имеет также нефизические полюса, лежащие за пределами области применимости развиваемого эффективного подхода, то есть при  $p \gg \sqrt{2\mu_p E}$ . Вклады этих полюсов могут быть формально отброшены, например, с помощью принципа главного значения. После этого для случая  $l > 0$  также можно записать аналитические выражения аналогичные формулам (3.47) и (3.49). Явный вид этих выражений можно найти в работе [12], а здесь они не приводятся ввиду своей громоздкости — вместо этого случай  $l = 1$  будет изучен численно.

Полученные выражения (3.43) и (3.44) могут быть сопоставлены с простым анзацем, описанным в формулах (3.6) и (3.7). Для определённости остановимся на случае “бегущей” ширины (3.8) [124]. Рассмотрим два набора параметров:

- Набор 1:  $E_R = 7$ , МэВ,  $\Gamma_R = 0.1$  МэВ, что соответствует  $\lambda = 1/70 \ll 1$ .

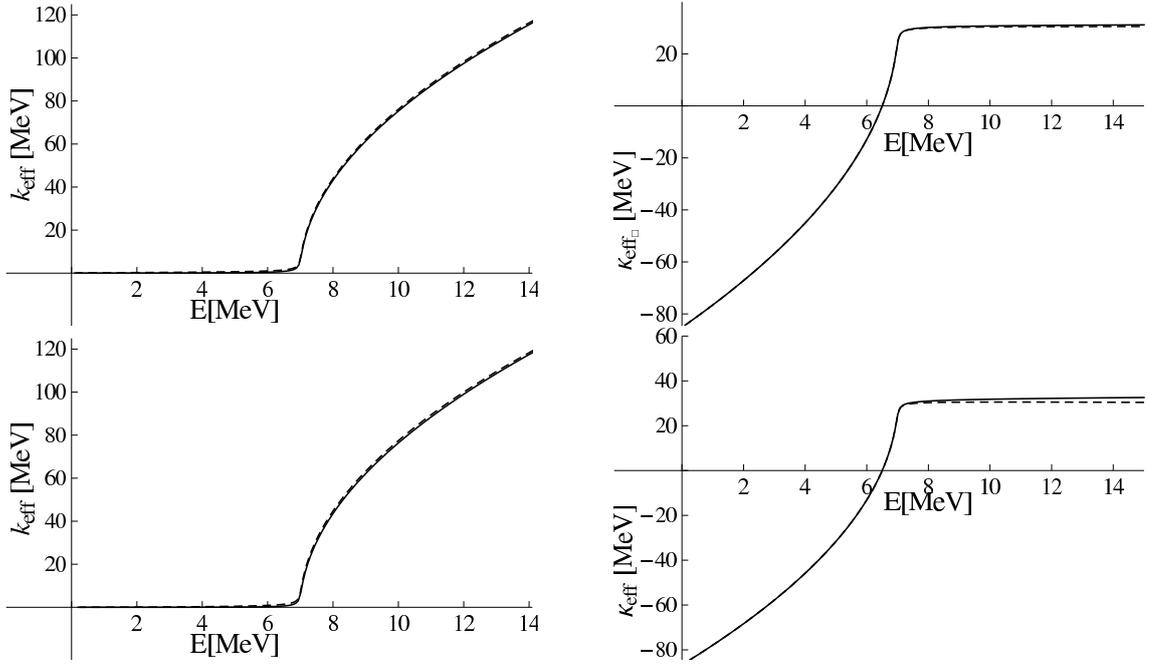


Рис. 3.2. Сравнение поведения величин  $k_{\text{eff}}(E)$  (левые графики) и  $\kappa_{\text{eff}}(E)$  (правые графики) для случаев  $l = 0$  (верхние графики) и  $l = 1$  (нижние графики) с поведением упрощённых выражений, даваемых формулами (3.6) и (3.7) с шириной, зависящей от энергии, (см. формулу (3.8)). Сплошная линия описывает точный результат, а пунктирная — приближённый. Параметры фиксированы как  $E_R = 7$  МэВ и  $\Gamma_R = 0.1$  МэВ ( $\lambda = 1/70$ ).

- Набор 2:  $E_R = 7$ , МэВ,  $\Gamma_R = 3$  МэВ, что соответствует  $\lambda \approx 3/7 \lesssim 1$ .

Результаты сравнения для обоих наборов параметров представлены на рис. 3.2 и 3.3, из которых видно, что при малых значениях параметра  $\lambda$  приближённый подход даёт хорошее согласие с точными формулами. В то же время, с ростом  $\lambda$  отклонение приближённых формул от точных становится заметным невооружённым глазом и может приводить к заметным эффектам в форме линии резонанса. Основной причиной такого отклонения является неправильное пороговое поведение приближённых формул. Действительно, вблизи трёхчастичного порога (при  $E \rightarrow 0$ ) имеем точное выражение, следующее из формулы (3.43):

$$k_{\text{eff}}(E) \underset{E \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{2} \Gamma_R \sqrt{\frac{\mu_p}{2E_R}} \left( \frac{E}{2E_R} \right)^{l+2} \propto E^{l+2}, \quad (3.50)$$

воспроизводящее правильное пороговое поведение в системе с угловым моментом  $l$ . Между тем, приближённая формула (3.6) для  $k_{\text{eff}}^{(0)}(E)$  с “бегущей” шириной (3.8) приводит к совершенно иному, неправильному, пределу:

$$k_{\text{eff}}^{(0)}(E) \underset{E \rightarrow 0}{\approx} \frac{\Gamma_R \sqrt{2\mu_p E}}{4E_R} \left( \frac{E}{E_R} \right)^l \propto E^{(2l+1)/2}, \quad (3.51)$$

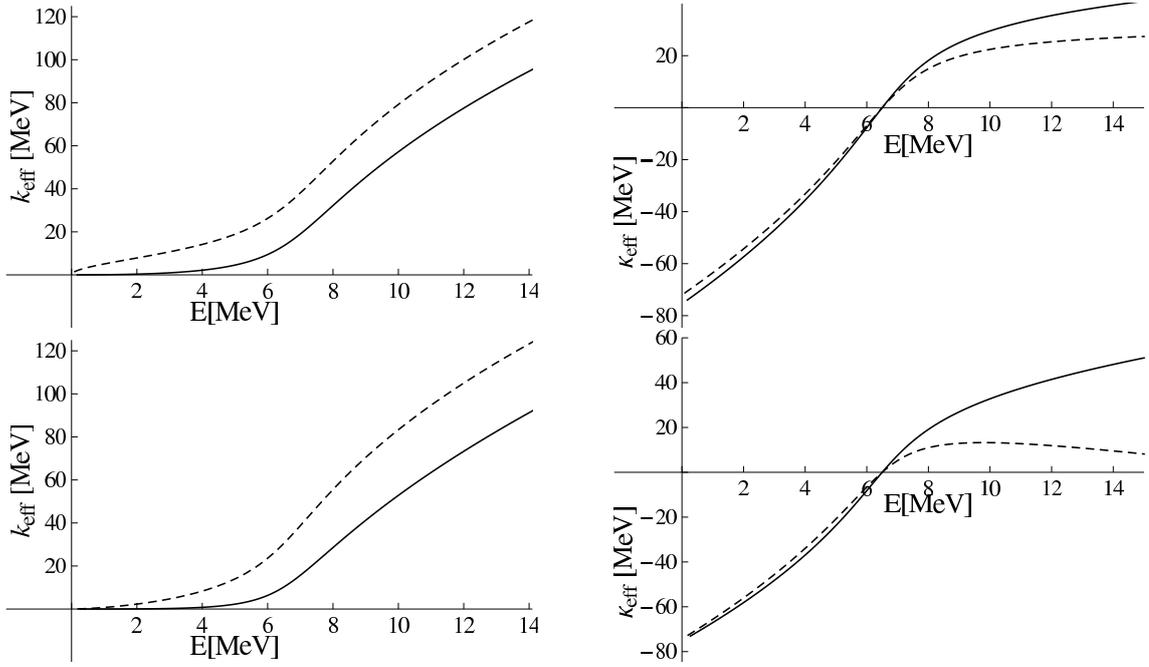


Рис. 3.3. То же, что и на рис. 3.2, но для ширины  $\Gamma_R = 3$  МэВ ( $\lambda \approx 3/7$ ).

который соответствует не трёхчастичному фазовому объёму, а двухчастичному, что приводит к гораздо более быстрому росту функции  $k_{\text{eff}}(E)$  и, соответственно, к сильному отклонению от точной формулы (см. рис. 3.3).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при достаточно сильном разделении двух- и трёхчастичного порогов, количественной мерой чего служит величина определённого выше параметра  $\lambda$ , то есть при выполнении сильных неравенств

$$\lambda \ll 1, \quad \frac{|E_R - E|}{E_R} \ll 1, \quad (3.52)$$

можно использовать простые формулы (3.6) и (3.7), предложенные в работе [123]. При этом эффект “бега” ширины пренебрежимо мал, и его можно не учитывать. Отличие точных аналитических формул от приближённых в этом случае очень мало. Однако с ростом ширины конститuenta и, соответственно, с увеличением параметра  $\lambda$ , приближённые формулы перестают работать, и необходимо использовать точные выражения (3.43) и (3.45). Среди имеющихся экспериментальных данных [89] можно обнаружить примеры обеих ситуаций. Так, например, для состояния  $X(3872)$ , распадающегося по цепочке  $X \rightarrow D^0 \bar{D}^{*0} \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ , имеем  $E_R = m_{D^*} - (m_D + m_\pi) \approx 7$  МэВ,  $\Gamma_R \simeq 0.1$  МэВ и, соответственно,  $\lambda \approx 0.01 \ll 1$ . В соответствии со сделанным выше выводом, учёт конечной ширины  $D^*$  может производиться по приближённым формулам. В разделе 4.3 этот вопрос будет рассмотрен более подробно. Однако в случае состояния  $Y(4260)$ , расположенного вблизи порога  $D_1 \bar{D}$ , возможна ситуация с достаточно большим значением  $\lambda$ , а именно  $\lambda \approx 1$ , если в качестве мезона  $D_1$  выступает состояние  $D_1(2430)$ , имеющее ширину около 400 МэВ

[89]. Использование полных формул является в этом случае неизбежным. Более того, может потребоваться точный учёт трёхчастичного разреза и трёхчастичной унитарности (см., в частности, пример, подробно рассмотренный в разделе 3.3 ниже). В случае же мезона  $D_1(2420)$  с шириной около 25-30 МэВ имеем  $\lambda \approx 0.1$ , что снова делает возможным использование приближённых формул.

Перейдём теперь к построению формы линии резонанса  $X$ . Для этого дополним его функцию распространения  $\mathcal{G}_X(E)$  вкладом удалённых неупругих каналов, что можно сделать, добавив к мнимой части постоянную ширину  $\Gamma_0$ :

$$\mathcal{G}_X(E) = \frac{1}{2} g_{ab} \kappa_{\text{eff}} + \frac{i}{2} (g_{ab} k_{\text{eff}} + \Gamma_0). \quad (3.53)$$

При этом спектральную плотность по-прежнему можно записать в виде:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{E - E_X + \mathcal{G}_X^*(E)} - \frac{1}{E - E_X + \mathcal{G}_X(E)} \right], \quad (3.54)$$

а дифференциальные вероятности рождения трёхчастичного канала и неупругих каналов принимают вид (как и раньше, постоянный множитель  $\mathcal{B}$  поглощает все детали рождения резонанса):

$$\frac{dBr(a[cd])}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ab} k_{\text{eff}}(E)}{(E - E_X + \frac{1}{2} g_{ab} \kappa_{\text{eff}}(E))^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_0 + g_{ab} k_{\text{eff}}(E))^2}, \quad (3.55)$$

$$\frac{dBr(\text{inel})}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_0}{(E - E_X + \frac{1}{2} g_{ab} \kappa_{\text{eff}}(E))^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_0 + g_{ab} k_{\text{eff}}(E))^2}. \quad (3.56)$$

Прежде, чем перейти к иллюстрации различных типов формы линии резонанса, определим, в каком случае мы имеем дело со связанным состоянием, а в каком — с виртуальным уровнем. Для простоты сначала отбросим все неупругости и изучим положение полюсов знаменателя  $E - E_X + \mathcal{G}_X(E)$  в комплексной плоскости импульса  $k = \sqrt{2\mu(E - E_R)}$ , причём достаточно ограничиться рассмотрением простых формул (3.4) и (3.5). Если  $E_X < E_R$ , то такие полюса располагаются в точках

$$k_1 = i\sqrt{2\mu_p(E_R - E_X)}, \quad k_2 = -i\sqrt{2\mu_p(E_R - E_X)} - i g_{ab} \mu_p, \quad (3.57)$$

причём первый из них лежит на первом (физическом) листе римановой поверхности и отвечает связанному состоянию с энергией  $E_X$ , а второй — на втором (нефизическом) листе. Длина рассеяния в системе  $ab$  при этом положительна.

В обратном случае  $E_X > E_R$  полюса располагаются в точках

$$k_{1,2} = -i \frac{g_{ab} \mu_p}{2} \pm i \sqrt{\frac{g_{ab}^2 \mu_p^2}{4} - 2\mu_p(E_X - E_R)}, \quad (3.58)$$

причём оба они лежат на нефизическом листе. Если  $g_{ab}^2 \mu_p > 8(E_X - E_R)$ , то полюса попадают на мнимую ось, так что речь идёт о виртуальном уровне. Длина рассеяния при этом отрицательна.

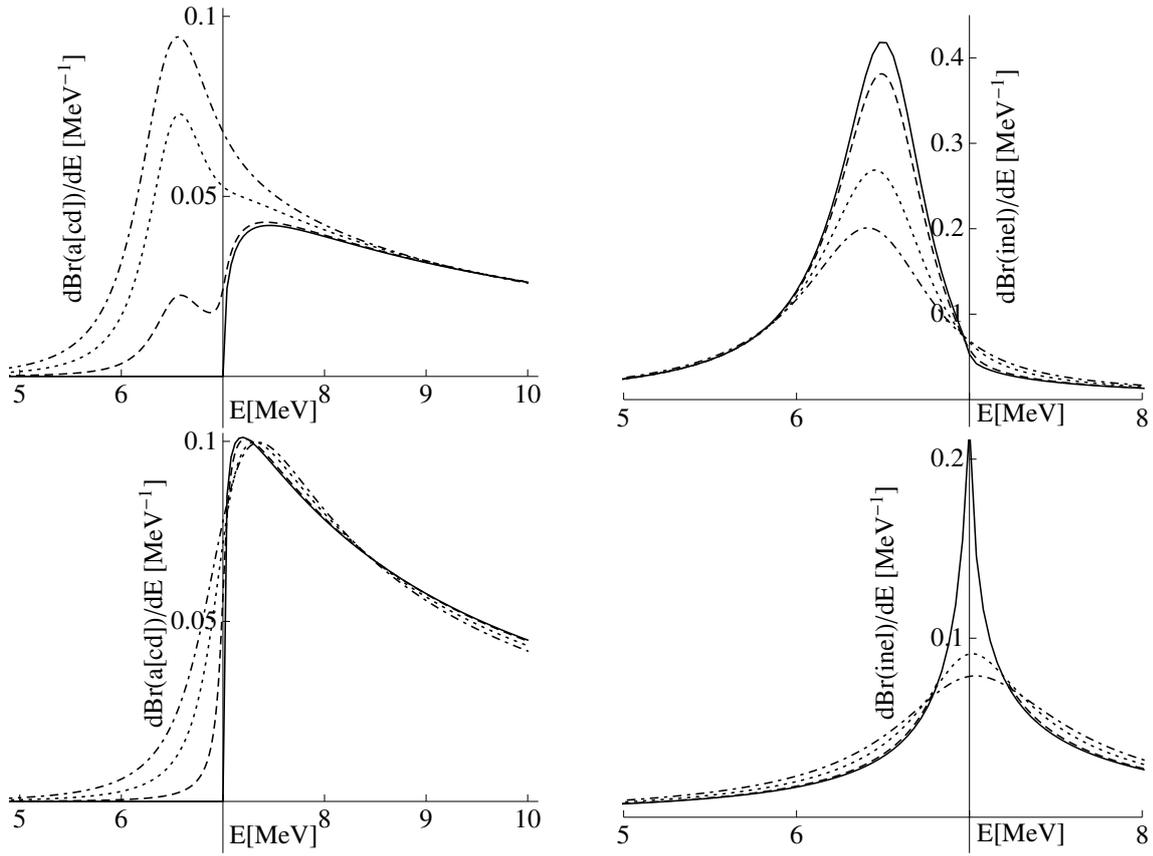


Рис. 3.4. Форма линии резонанса в канале  $a[cd]$  (левые графики) и в неупругом канале (правые графики) для  $S$ -волнового околопорогового резонанса, являющегося связанным состоянием (верхние графики) или виртуальным уровнем (нижние графики). Здесь  $E_R = 7$  МэВ и  $\Gamma_R = 0$  (сплошная линия),  $\Gamma_R = 100$  кэВ (штриховая линия),  $\Gamma_R = 500$  кэВ (пунктирная линия) и  $\Gamma_R = 1$  МэВ (штрих-пунктирная линия). При этом фиксировано  $B = 1$ , поскольку данный параметр не влияет на форму линии.

Заметим, что включение небольших неупругостей качественно не меняет сложившуюся картину полюсов, а лишь слегка их смещает, придавая длине рассеяния небольшую мнимую часть. Следовательно, связанное состояние и виртуальный уровень по-прежнему могут различаться знаком действительной части длины рассеяния — этот метод будет использован ниже, в главе 4, при установлении природы состояния  $X(3872)$ .

Для иллюстрации поведения формы линии резонанса рассмотрим два случая:

$$\text{Случай 1: } E_R = 7 \text{ МэВ, } g_{ab} = 0.1, E_X = E_R - 0.5 \text{ МэВ, } \Gamma_0 = 1.5 \text{ МэВ,} \quad (3.59)$$

$$\text{Случай 2: } E_R = 7 \text{ МэВ, } g_{ab} = 0.1, E_X = E_R + 0.5 \text{ МэВ, } \Gamma_0 = 1.5 \text{ МэВ,} \quad (3.60)$$

различие между которыми состоит лишь в разных значениях параметра  $E_X$ , причём, в соответствии с приведёнными выше рассуждениями, в первом случае мы имеем дело со связанным состоянием, а во втором — с виртуальным уровнем. Соответствующие графики приведены на рис. 3.4 и 3.5. При этом величина ширины конститuenta  $\Gamma_R$  принимает несколько значений, перечисленных в

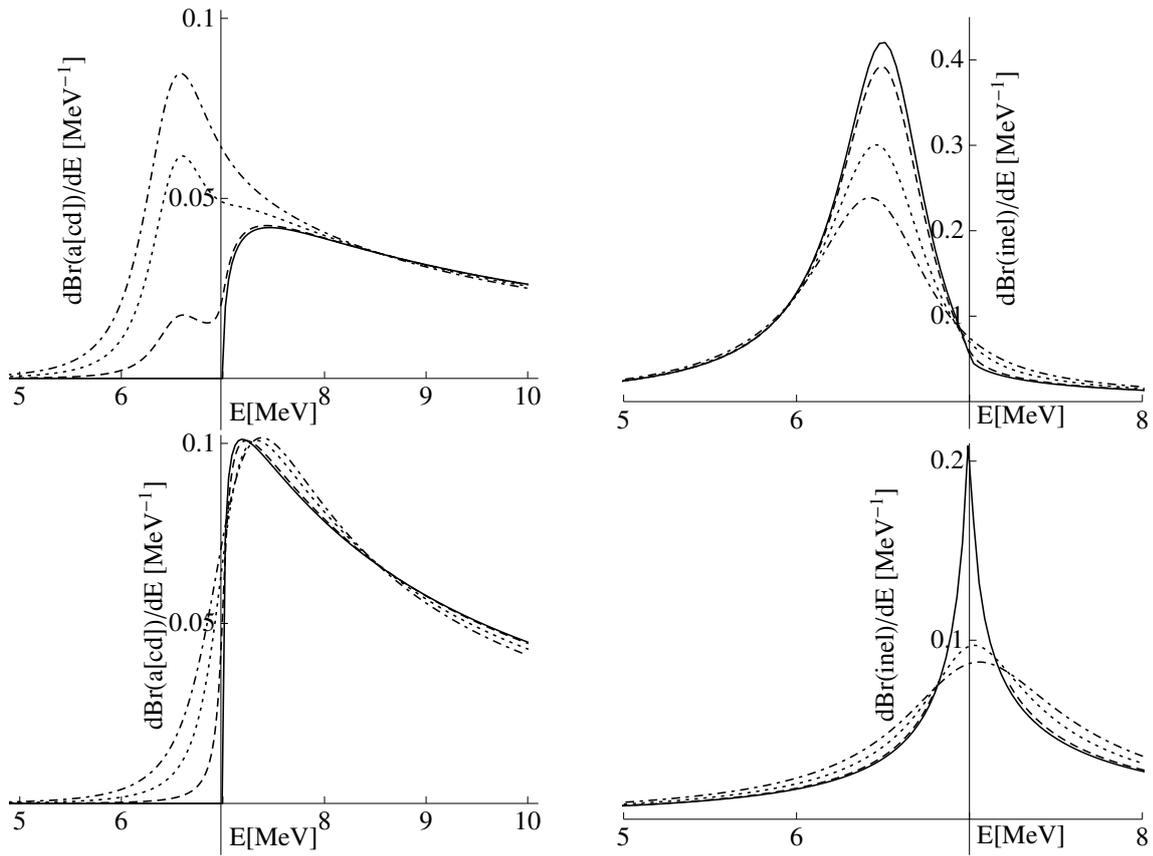


Рис. 3.5. То же, что и на рис. 3.4, но для  $P$ -волнового резонанса.

подписи к рис. 3.4.

Как видно из приведённых графиков, с увеличением ширины конstituента ненулевой сигнал в канале  $a[cd]$  появляется ниже номинального двухчастичного порога  $ab$ , и начинается формирование подпорогового пика связанного состояния. При небольших значениях  $\Gamma_R$  сигнал над порогом практически не затрагивается подпороговым пиком, однако при приближении параметра  $\lambda$  к единице сигнал принимает форму широкого горба, “накрывающего” как подпороговую, так и надпороговую области. При этом по-прежнему заметна асимметрия сигнала, отличающая его от симметричной формы Брейта-Вигнера. В неупругом канале, наоборот, имеет место быстрое убывание сигнала с ростом ширины конstituента.

В случае виртуального уровня эффект включения и роста ширины конstituента выражен существенно слабее, чем для связанного состояния. Такая разница в поведении является однозначным указанием на природу резонанса. Действительно, для виртуального уровня неупругий реит убывает с ростом ширины конstituента  $b$ , и касп-подобная структура на пороге, имеющая место в пределе нулевой ширины, расплывается, постепенно принимая сходные очертания с формой линии в упругом канале. При этом однако положение пика несколько сдвинуто.

Здесь уместно сделать следующее замечание. Поскольку форма пика выше номинального порога  $ab$  содержит информацию о природе резонанса [46], то при анализе экспериментальных данных важно учитывать события именно в той области, в которой они обнаружены (в частности, ниже номинального порога), избегая искусственного перемещения данных в область выше порога, поскольку такое искажение сигнала может привести к неправильной интерпретации данных [24, 81].

Последним эффектом, который необходимо обсудить в данном разделе, является интерференция в конечном состоянии [125]. Например, распад состояния  $X(3872)$  в конечное состояние  $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  с равной вероятностью может протекать двумя путями:

$$X(3872) \begin{cases} \nearrow \bar{D}^0 D^{0*} \rightarrow \bar{D}^0 [D^0 \pi^0] \\ \searrow D^0 \bar{D}^{0*} \rightarrow D^0 [\bar{D}^0 \pi^0] \end{cases} \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0, \quad (3.61)$$

так что имеет место интерференция соответствующих амплитуд. Строгий учёт такой интерференции требует расширения базиса состояний в модели связанных каналов и решения полной задачи с самого начала. Однако ввиду малой ширины конститuenta достаточно более простого, эффективного учёта интерференции на основе уже полученных выше формул. Так, для учёта интерференции в форме линии в лидирующем порядке достаточно следующим образом модифицировать коэффициент  $C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})$  (см. формулу (3.33)) в выражении (3.36):

$$C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) \rightarrow \tilde{C}(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) + C(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})), \quad (3.62)$$

где  $\bar{\mathbf{p}}$  и  $\bar{\mathbf{q}}$  есть известные комбинации импульсов  $\tilde{\mathbf{p}}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$ :

$$\bar{\mathbf{p}} = -\frac{m_a}{m_c + m_d} \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \frac{m_a}{m_c + m_d} \tilde{\mathbf{q}} + \frac{(m_a + m_c + m_d)m_d}{(m_c + m_d)^2} \tilde{\mathbf{p}}. \quad (3.63)$$

Поскольку мера интегрирования в формуле (3.36) инвариантна относительно замены переменных  $\{\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}\} \rightarrow \{\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}\}$ , то модифицированное с учётом интерференции выражение можно записать в виде:

$$w(M) = \int d^3 \tilde{p} d^3 \tilde{q} [ |C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})|^2 + \text{Re}(C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) C^*(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})) ] \delta(M - m_a - m_c - m_d - T_3(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})), \quad (3.64)$$

где вклад интерференции содержится во втором слагаемом в скобках. Следовательно, интерференция лишь несколько модифицирует эффективный импульс  $k_{\text{eff}}(E)$ , добавляя к нему величину, которую обозначим через  $k_{\text{int}}(E)$ :

$$k_{\text{int}}(E) = k_{\text{eff}}(E) \frac{\int d^3 \tilde{p} d^3 \tilde{q} \text{Re}(C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) C^*(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})) \delta(M - m_a - m_c - m_d - T_3(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}))}{\int d^3 \tilde{p} d^3 \tilde{q} |C(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})|^2 \delta(M - m_a - m_c - m_d - T_3(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}))}. \quad (3.65)$$

Таким образом, с учётом интерференции в лидирующем порядке дифференциальная вероятность рождения в неупругих каналах остаётся неизменной, а в упругом канале может быть записана в виде (3.55), но с модифицированным эффективным импульсом, учитывающим вклад интерференции:

$$\frac{dBr(a[cd])}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ab}(k_{\text{eff}}(E) + k_{\text{int}}(E))}{(E - E_X + \frac{g_{ab}}{2} \kappa_{\text{eff}}(E))^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_0 + g_{ab} k_{\text{eff}}(E))^2}. \quad (3.66)$$

Ясно однако, что учёт интерференции только в числителе и пренебрежение её более высокими порядками (отсутствие итераций) приводит к нарушению унитарности. Как указывалось выше, строгое рассмотрение этой проблемы снова требует решения полной задачи с расширенным базисом. Можно однако вновь воспользоваться эффективным подходом и заменить  $k_{\text{eff}}(E)$  на сумму  $k_{\text{eff}}(E) + k_{\text{int}}(E)$  не только в числителе формулы для рейта, но и в знаменателе, тем самым эффективно учитывая интерференцию во всех порядках:

$$\frac{dBr(a[cd])}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ab}(k_{\text{eff}}(E) + k_{\text{int}}(E))}{(E - E_X + \frac{g_{ab}}{2} \kappa_{\text{eff}}(E))^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_0 + g_{ab}(k_{\text{eff}}(E) + k_{\text{int}}(E)))^2}. \quad (3.67)$$

Такой учёт интерференции будем называть “улучшенным”.

На рис. 3.6 приведено поведение дифференциальной вероятности рождения в упругом канале  $dBr(a[cd])/dE$  для  $S$ -волнового резонанса и для следующих трёх случаев: а) без интерференции (см. уравнение (3.55)), б) с простым учётом интерференции (см. формулу (3.66)) и в) с улучшенным учётом интерференции (см. формулу (3.67)). Для определённости параметры фиксированы вблизи значений, описывающих состояние в спектре чармония  $X(3872)$ , а именно:

$$E_R = 7 \text{ МэВ}, \quad g_{ab} = 0.1, \quad E_X = E_R \mp 0.5 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_0 = 1.5 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_R = 100 \text{ кэВ}, \quad (3.68)$$

где верхний (нижний) знак соответствует связанному (виртуальному) состоянию. Наконец, для определённости положим  $m_a = m_c = m_0$  и  $m_d = m_\pi$ , где  $m_0$  и  $m_\pi$  есть соответственно массы  $D^0$  и  $\pi^0$  мезонов.

Как и следовало ожидать, учёт интерференции приводит к некоторому усилению сигнала в области пика связанного состояния, тогда как в надпороговой области эффект интерференции практически не заметен. При этом разница между полным (улучшенным) и простым учётом интерференции весьма невелика. Аналогичные кривые для  $P$ -волнового случая демонстрируют абсолютно идентичное поведение и поэтому не приводятся.

Заметим, что строгий учёт интерференции требует не только расширения базиса модели, но и введения нового типа взаимодействия в гамильтониане, отвечающего за переходы между интерферирующими состояниями. Так, для случая  $X(3872)$  такие переходы имеют вид  $D^0 \bar{D}^{0*} \leftrightarrow \bar{D}^0 D^{0*}$  и обеспечиваются однопионным обменом в системе. Таким образом, мы естественным образом приходим к однопионному обмену, как к важному элементу всего теоретического построения. В

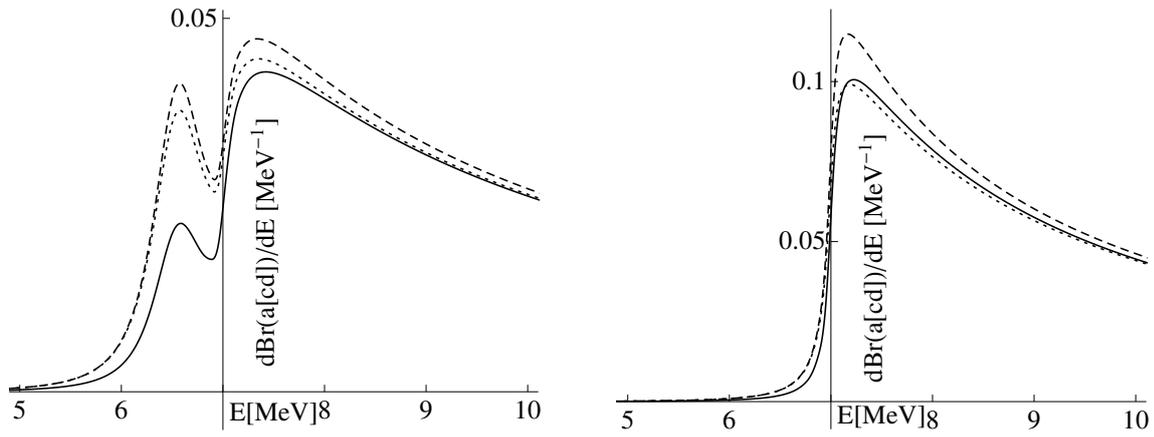


Рис. 3.6. Форма линии в канале  $a[cd]$  для случая  $S$ -волнового резонанса и связанного состояния (левый график) или виртуального уровня (правый график). Сплошная линия: отсутствие интерференции; пунктирная линия: простой учёт интерференции; штриховая линия: улучшенный учёт интерференции. Как и раньше  $\mathcal{B} = 1$ .

следующем разделе диссертации будет детально исследован вопрос о непертурбативной трёхчастичной динамике, обусловленной близким расположением двух- и трёхчастичных разрезов, что имеет место именно благодаря однопионному обмену и относительно малой массе пиона. Вопросу о связывающих свойствах однопионного обмена в  $X(3872)$  посвящён раздел 4.7, а вопросам соответствующей трёхчастичной динамики и её учёта при построении киральной экстраполяции энергии связи  $X(3872)$  по массе пиона посвящены раздел 4.8 и вся глава 5.

В заключение данного раздела сформулируем основные выводы, которые можно сделать на основе полученных в нём результатов. К числу основных результатов данного раздела следует отнести установление вида параметра  $\lambda$ , определяющего влияние трёхчастичной динамики на свойства околопорогового резонанса. В качестве такого параметра выступает отношение ширины нестабильного конstituента к раздвижке двух- и трёхчастичного порогов. В случае малости этого параметра учёт конечной ширины конstituента может быть произведён на основе простых формул, предложенных в работе [123]. При этом учёт “бега” ширины с энергией, как предложено в работе [124], является превышением точности и не приводит к новым эффектам. Примером ситуации, в которой реализуется такой простой сценарий, является состояние в спектре чармония  $X(3872)$ , для которого соответствующий параметр принимает ничтожно малое значение за счёт крайне малой ширины  $D^*$  мезона. С ростом параметра  $\lambda$  до значений порядка единицы влияние ширины конstituента на форму линии резонанса становится всё более заметным, однако описание данного эффекта с помощью “бега” ширины с энергией представляется невозможным, в первую очередь, в силу неправильного порогового поведения, даваемого такими “бегущими” формулами. При этом описание свойств резонанса по-прежнему возможно в рамках относительно простого эф-

эффективного формализма, не требующего полного учёта трёхчастичной динамики. При значениях параметра  $\lambda$  сравнимых с единицей необходим качественный скачок в описании, при котором эффекты трёхчастичного разреза не сводятся уже к модификации двухчастичных формул. Пример такой ситуации приведён в следующем разделе диссертации, а подробному изучению трёхчастичной динамики с выводом и решением соответствующих трёхчастичных уравнений типа уравнений Фаддеева для состояния  $X(3872)$  посвящён раздел 4.6.

### 3.3. Проблема трёхчастичной унитарности

В предыдущем разделе был изучен вопрос о возможности эффективного включения в рассмотрение трёхчастичной динамики в околопороговом резонансе, которое не требует расширения базиса модели связанных каналов. Полученные формулы имеют вид двухчастичных, однако выражения для относительного импульса и его аналитического продолжения ниже двухчастичного порога заменяются модифицированными формулами, учитывающими конечную ширину конститuenta. Применимость такого упрощённого подхода определяется, во-первых, величиной отношения ширины конститuenta к расстоянию между двух- и трёхчастичным порогами (параметр  $\lambda$ , определённый в формуле (3.41)), а во-вторых, деталями конкретной решаемой задачи. Так, например, при анализе имеющихся экспериментальных данных для состояния в спектре чармония  $X(3872)$  (см. раздел 4.3) достаточно ограничиться простыми формулами вида (3.6) и (3.7) (см. формулы (4.57) и (4.58)), тогда как для киральных экстраполяций  $X(3872)$  по массе пиона (см. главу 5) пионная динамика крайне важна, так что её учёт возможен лишь с помощью точного включения трёхчастичных состояний в базис модели связанных каналов.

В данном разделе рассматривается характерный пример ситуации, когда непертурбативный учёт трёхчастичной унитарности необходим и позволяет избежать неверных выводов. Так, в работах [126, 127] обсуждается возможность существования глубоко связанных состояний пары мезонов, содержащих  $c$ -кварк. В качестве примера рассмотрена система  $D_1\bar{D}^*$ , где  $D_1(2430)$  и  $D^*(2010)$  есть  $P$ - и  $S$ -волновой тяжёло-лёгкие мезоны с квантовыми числами  $1^+$  и  $1^-$  соответственно. Сначала поясним качественно результат работ [126, 127]. На первом шаге выделим из однопионного взаимодействия в  $D_1\bar{D}^*$  системе статический потенциал, для чего проделаем следующие преобразования пропагатора пиона:

$$\frac{1}{m_\pi^2 - p_\pi^2} = \frac{1}{\mathbf{p}_\pi^2 + [m_\pi^2 - p_{\pi 0}^2]} \approx \frac{1}{\mathbf{p}_\pi^2 + [m_\pi^2 - (m_1 - m_*)^2]} = \frac{1}{\mathbf{p}_\pi^2 + \mu^2}, \quad (3.69)$$

где было использовано, что  $p_{\pi 0} = E_1 - E'_* = E'_1 - E_*$  (штрихом обозначены частицы в конечном

состоянии), энергии  $D_1$  и  $D^*$  мезонов были заменены их массами и затем введён параметр

$$\mu^2 = m_\pi^2 - (m_1 - m_*)^2. \quad (3.70)$$

Поскольку  $D_1$  распадается по каналу  $D^*\pi$  в  $S$ -волне, то статический потенциал однопионного обмена в системе  $D_1\bar{D}^*$  определяется просто произведением пропагатора пиона в статическом пределе (3.69), квадрата константы распада  $g_{D_1D^*\pi}$ , а также изоспинового оператора  $\tau_1 \cdot \tau_2$ , который можно заменить на его собственное значение в изосинглетном состоянии равное 3. Следует отметить важное отличие полученного потенциала от обычного потенциала Юкавы, описывающего, например, однопионное взаимодействие в дейтроне. Поскольку  $m_1 > m_* + m_\pi$ , то нетрудно видеть, что  $\mu^2 < 0$ , так что вместо экспоненциального спадания с расстоянием статический потенциал осциллирует, а также у него появляется ненулевая мнимая часть. В работах [126, 127] она отброшена, и потенциал рассмотрен в виде<sup>2</sup>

$$V(r) = \frac{3g_{D_1D^*\pi}^2}{4\pi r} \cos(|\mu|r). \quad (3.71)$$

Константу связи  $g_{D_1D^*\pi}$  можно связать с шириной распада  $D_1 \rightarrow D^*\pi$  с помощью формулы

$$\Gamma(D_1 \rightarrow D^*\pi) = \frac{g_{D_1D^*\pi}^2 m_*}{8\pi m_1^2} \lambda^{1/2}(m_1^2, m_*^2, m_\pi^2), \quad (3.72)$$

где  $\lambda(x, y, z)$  есть стандартная треугольная функция (см. определение (Б.6)).

Поскольку мезон  $D_1(2430)$  имеет большую ширину [89]:

$$\Gamma_R \approx 384_{-110}^{+130} \text{ МэВ}, \quad (3.73)$$

обусловленную, в первую очередь, однопионным переходом в состояние  $D^*(2010)$ , то и извлечённая из неё константа связи  $g_{D_1D^*\pi}$  также оказывается большой. В итоге, если решить уравнение Шредингера с потенциалом (3.71), то, действительно, можно обнаружить решения с энергиями связи порядка десятков, даже сотен, МэВ [126, 127].

Ошибочность данного результата проистекает из сильного нарушения трёхчастичной унитарности в таком потенциальном подходе. Прежде всего, заметим, что в данной ситуации введённый в предыдущем разделе параметр  $\lambda$  весьма велик:

$$\lambda = \frac{\Gamma_R}{m_1 - (m_* + m_\pi)} \simeq 1, \quad (3.74)$$

что, как было продемонстрировано выше, увляется явным указанием на необходимость аккуратного учёта трёхчастичной динамики. В частности, пренебрежение мнимыми частями потенциала является незаконной процедурой.

<sup>2</sup> Вместо безразмерной константы  $g_{D_1D^*\pi}$  в работах [126, 127] используется безразмерная константа  $h$ , связанная с  $g_{D_1D^*\pi}$  соотношением  $g_{D_1D^*\pi}^2 = 3h^2(m_1 - m_*)^2/(4f_\pi^2)$ , где  $f_\pi = 92.4$  МэВ [89].

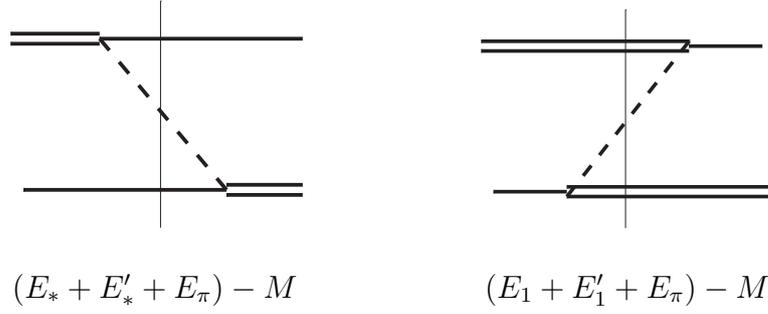


Рис. 3.7. Диаграммы, дающие вклад в потенциал однопионного обмена между  $D_1$  и  $D^*$  мезонами. Двойная, одинарная и пунктирная линии обозначают соответственно  $D_1$ ,  $D^*$  и  $\pi$  мезоны. Тонкая вертикальная линия выделяет промежуточное состояние. Под каждой диаграммой явно выписан вклад соответствующего трёхчастичного разреза в обратный трёхчастичный пропагатор, отвечающий данной диаграмме (см. последнюю строчку формулы (3.76)).

Для прояснения ситуации рассмотрим уравнение Липпмана-Швингера для  $t$ -матрицы такой трёхчастичной системы:

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \int d^3k V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \frac{1}{\Delta(\mathbf{k})} t(\mathbf{k}, \mathbf{p}'), \quad (3.75)$$

где  $V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  есть потенциал однопионного обмена, а  $\Delta(\mathbf{k})$  есть обратный двухчастичный пропагатор  $D_1 \bar{D}^*$  системы.

Для того, чтобы получить вид потенциала однопионного обмена  $V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  вне статического приближения, вернёмся к пропагатору пиона (3.69) и запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_\pi^2 - p_\pi^2} &= \frac{1}{\mathbf{p}_\pi^2 + [m_\pi^2 - p_{\pi 0}^2]} = \frac{1}{\mathbf{p}_\pi^2 + [m_\pi^2 - (E_1 - E'_*)^2]} = \frac{1}{E_\pi - (E_1 - E'_*)^2} \\ &= \frac{1}{2E_\pi[(E_* + E'_* + E_\pi) - M]} + \frac{1}{2E_\pi[(E_1 + E'_1 + E_\pi) - M]}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где энергии мезонов равны:

$$E_* = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_*^2}, \quad E'_* = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_*^2}, \quad E_1 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2}, \quad E'_1 = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_1^2}, \quad E_\pi = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 + m_\pi^2}, \quad (3.77)$$

а полную энергию системы  $M$  можно представить в виде

$$M = E_1 + E_* = E'_1 + E'_* \equiv m_* + m_1 + E, \quad (3.78)$$

где энергия  $E$  для удобства отсчитывается от двухчастичного порога.

Заметим, что полученное выражение имеет простую интерпретацию в рамках упорядоченной по времени теории возмущений, поскольку каждому из двух членов в окончательном выражении отвечает соответствующая упорядоченная по времени диаграмма (см. рис. 3.7).

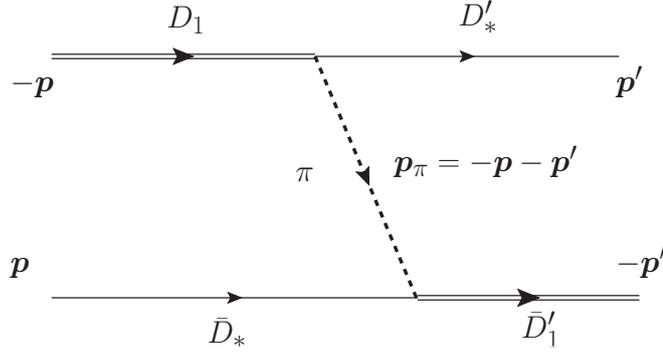


Рис. 3.8. Кинематика рассеяния  $D_1$  мезона на  $\bar{D}^*$  мезоне за счёт однопионного обмена. Двойной сплошной линией обозначены  $D_1$  мезоны, сплошной одинарной линией —  $D^*$  мезоны. Пион обозначен пунктирной линией.

Таким образом, отказываясь от статического приближения для потенциала, но ограничиваясь лишь лидирующим членом в рамках упорядоченной по времени теории возмущений (рассматривается лишь первая из двух диаграмм на рис. 3.7), нетрудно изобразить диаграмму, отвечающую потенциалу  $V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  (см. рис. 3.8), а также записать соответствующее выражение в виде:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{3}{(2\pi)^3} \frac{g_{D_1 D^* \pi}^2}{2E_\pi(E_* + E'_* + E_\pi - M)} = -\frac{3}{(2\pi)^3} \frac{g_{D_1 D^* \pi}^2}{D_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}, \quad (3.79)$$

где  $D_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  есть трёхчастичный пропагатор, а явный вид энергий приведён в формуле (3.77).

При этом для обратного двухчастичного пропагатора  $\Delta(\mathbf{k})$  запишем:

$$\Delta(\mathbf{k}) = \sqrt{k^2 + m_*^2} + \sqrt{k^2 + m_1^2} - M - \frac{i}{2}\Gamma(\mathbf{k}) \approx \frac{k^2}{2\mu_p} - E - \frac{i}{2}\Gamma(\mathbf{k}), \quad (3.80)$$

где для “бегущей” ширины взято выражение

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \frac{g_{D_1 D^* \pi}^2 m_* m_1}{8\pi \mu^2(\mathbf{k}) E_1(\mathbf{k})} \lambda^{1/2}(\mu^2(\mathbf{k}), m_*^2, m_\pi^2), \quad \mu^2(\mathbf{k}) = (M - E_*(\mathbf{k}))^2 - \mathbf{k}^2, \quad (3.81)$$

воспроизводящее формулу (3.72) в пределе  $D_1$  мезона, лежащего на массовой поверхности ( $M = E_1(\mathbf{k}) + E_*(\mathbf{k})$ ) и находящегося в покое ( $\mathbf{k} = 0$ ).

С помощью полученных выше выражений вычислим дифференциальное сечение рождения трёхчастичного конечного состояния  $\bar{D}^* D^* \pi$  из точечного источника  $\bar{D}^* D_1$  для трёх различных случаев: 1) в приближениях работ [126, 127], 2) в приближении постоянных мнимых частей (для  $\Gamma(\mathbf{k}) = \Gamma_R = \text{const}$ ), а также 3) для полного расчёта, включающего зависимость ширины  $\Gamma$  от энергии и импульса. Соответствующие диаграммы, в том числе вклад перерассеяний, изображены на рис. 3.9. Опуская детали (в разделе 4.6 аналогичные, но несколько более сложные, вычисления будут со всеми подробностями изложены для чармонийподобного состояния  $X(3872)$ ), приведём лишь окончательный результат (см. рис. 3.10). Из данного рисунка видно, что учёт “бегущей” ширины даёт заметный, хотя и не очень большой эффект по сравнению с приближением постоянной

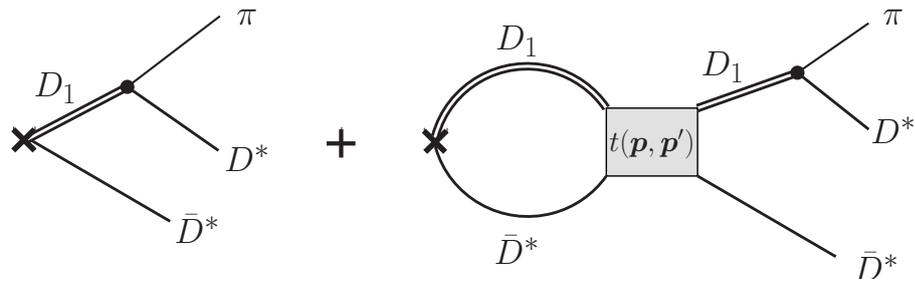


Рис. 3.9. Диаграммы, дающие вклад в полную амплитуду (с непертурбативным учётом перерассеяний через  $D_1$ ) рождения трёхчастичного состояния  $\bar{D}^* D^* \pi$  из точечного источника  $\bar{D}^* D_1$ .

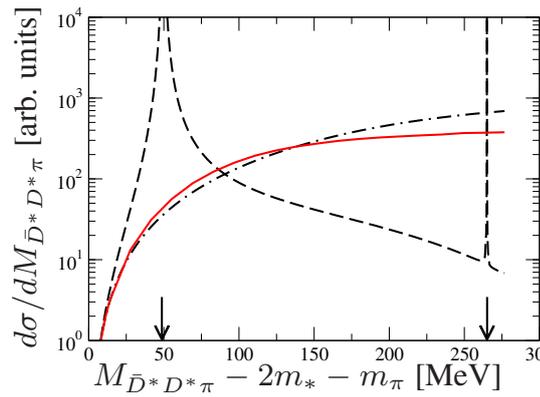


Рис. 3.10. Дифференциальное сечение рождения  $D^* \bar{D}^* \pi$ . Пунктирной линией приведён результат, полученный в приближениях работ [126, 127], штрих-пунктирной линией — результат с учётом постоянных мнимых частей ( $\Gamma(\mathbf{k}) = \Gamma_R = \text{const}$  в формуле (3.80)), сплошной красной линией — точный результат.

ширины. При этом отличие полного расчёта от расчёта в приближениях работ [126, 127] огромное: пики в сечении, отвечающие глубоко связанным состояниям (пунктирная чёртная линия), исчезают при восстановлении унитарности в полном расчёте (сплошная красная линия) [13]. Иначе говоря, если константа распада  $D_1 \rightarrow D^* \pi$  настолько велика, что обеспечивает возникновение глубоко связанных состояний, то унитарность требует, чтобы та же константа приводила к возникновению у таких состояний настолько большой ширины, чтобы они становились ненаблюдаемыми.

### 3.4. Константа связи пиона с адронами

В предыдущих разделах данной главы было продемонстрировано влияние трёхчастичной динамики в околопороговом резонансе на его свойства. В частности, обсуждалась взаимосвязь величины константы связи распада нестабильного конstituента и роли трёхчастичной унитарности. При этом важное значение имеют сильные распады с участием пиона. Особая роль пиона в спектре адронов объясняется его уникальной двойкой природой: пион одновременно является и легчай-

шим адронным состоянием, и псевдоголдстоуновским бозоном, возникающим вследствие спонтанного нарушения киральной инвариантности в вакууме КХД. Первое свойство делает распады с пионами в конечном состоянии одним из наиболее распространённых типов сильных распадов, тогда как последнее свойство позволяет сделать некоторые предсказания относительно величины связи пиона с адронами.

Рассмотренная в предыдущем разделе система  $D_1 \bar{D}^*$  является типичным представителем целого класса систем  $n\bar{n}'$ , в которых однопионный обмен между мезонами  $n$  и  $\bar{n}'$  является  $S$ -волновым. Тогда сохранение в сильных распадах полного момента и пространственной чётности требуют, чтобы мезоны  $n$  и  $n'$  имели одинаковый полный момент и противоположную пространственную чётность (в рассмотренном выше примере  $D_1$  и  $D^*$  есть аксиальный и истинный векторы соответственно). В строгом киральном пределе КХД такие состояния могут входить в один и тот же мультиплет, отвечающий соответствующему представлению группы киральных преобразований и, как результат, вырождаться по массе. Взаимодействие пиона с такими адронами также обладает рядом универсальных свойств, диктуемых киральной симметрией. Данный раздел диссертации посвящён обсуждению такого взаимодействия и, как следствие, роли трёхчастичной динамики в околопороговых резонансах, образованных киральными партнёрами. Мы несколько отступаем от принятого в диссертации эффективного феноменологического подхода, обладающего достоинством модельной независимости, и на данном промежуточном этапе используем микроскопическую кварковую модель для изучения вопроса о величине константы связи пиона с возбуждёнными адронами. Несмотря на это, поскольку сделанные выводы основаны на совершенно общих рассуждениях, в основе которых лежит киральная симметрия, они также являются модельно независимыми.

Как известно, в киральном пределе и  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , и  $U(1)_A$  симметрии лагранжиана КХД спонтанно нарушены, что приводит к ряду наблюдаемых свойств адронного спектра. Так, спонтанное нарушение симметрии  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_I$  [128] проявляется 1) через отсутствие в спектре низколежащих адронов мультиплетов, отвечающих группе  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , 2) через голдстоуновскую природу пиона, в частности через его нулевую (вне кирального предела — конечную, но крайне малую на адронном масштабе) массу, 3) через ненулевое значение величины кирального конденсата в вакууме и так далее. При этом о нарушении аномалией [129–131], а также кварковым конденсатом [132, 133]  $U(1)_A$  симметрии свидетельствует, например, отсутствие у  $\eta'$  мезона свойств голдстоуновского бозона. Таким образом, в области низколежащих адронов киральная симметрия реализуется нелинейным образом. Между тем, есть основания полагать, что обе указанные выше симметрии эффективно восстанавливаются как в спектре возбуждённых барионов [132–134], так и в спектре возбуждённых мезонов [135–137], то есть возникают мультиплеты

адронных состояний, приближённо вырожденных по массе, для описания которых удобно воспользоваться киральным базисом [138]. В ряде теоретических работ [17, 139–145] были предприняты попытки описания данного явления в рамках различных подходов к КХД. Красивое и весьма убедительное подтверждение явления восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых адронов получено в недавней работе [146], в которой массы лёгких адронов извлекались из решёточных конфигураций после рукотворного удаления из последних околонулевых мод оператора Дирака, ответственных за спонтанное нарушение киральной симметрии в вакууме. Полученный в результате спектр масс демонстрирует достаточно высокую группу симметрии [147], включая образование киральных мультиплетов [148].

Несмотря на то, что обсуждаемое явление эффективного восстановления киральной симметрии в спектре возбуждённых адронов имеет общий характер, удобно воспользоваться моделью, в которой как нарушение симметрии, так и её эффективное восстановление описываются микроскопически. Подходящая кварковая модель с одновременным взаимодействием кварковых токов была предложена в качестве модели КХД около 30 лет назад в работах [149–152], она независимо изучалась в гамильтоновом формализме в работах [153–158], а также в более поздних работах [14, 15, 19, 159–164]. Модель можно одновременно рассматривать и как обобщение двумерной модели 'т Хофта [20, 165–170] на четырёхмерное пространство, и как обобщение четырёхмерной модели Намбу-Иона-Лазинио [128] на случай нелокального взаимодействия кварковых токов. Важной особенностью данной модели, называемой в дальнейшем обобщённой моделью Намбу-Иона-Лазинио, является явное присутствие в теории удерживающего взаимодействия, что позволяет изучать вопрос о спектре связанных состояний, в том числе высоковозбуждённых, а также привносит в теорию характерный масштаб. Простейшим с технической точки зрения представителем семейства таких моделей является модель с осцилляторным удерживающим потенциалом [149–157], тогда как более реалистические количественные предсказания могут делаться с использованием линейного конфайнмента [171–179]. При этом качественные предсказания модели не зависят от формы удерживающего потенциала, единственными требованиями к которому являются обеспечение невылетания цвета, с одной стороны, и умеренный рост с расстоянием между кварками, чтобы не приводить к расходящимся интегралам, с другой стороны. Обычно удерживающий потенциал выбирается в форме степенной функции

$$V_0(|\mathbf{x}|) = K_0^{\alpha+1} |\mathbf{x}|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2, \quad (3.82)$$

где  $K_0$  является размерным (имеет размерность массы) параметром модели. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  степенной потенциал сводится к логарифмическому. В случае  $\alpha = 2$  фурье-образ потенциала сводится к лапласиану трёхмерной  $\delta$ -функции, так что с помощью процедуры взятия интегралов

по частям все интегральные уравнения сводятся к существенно более простым дифференциальным уравнениям второго порядка, чем и обусловлен выбор осцилляторного потенциала в качестве удерживающего в ряде работ (см., например, работы [149–157]). Большие показатели степени ( $\alpha > 2$ ) приводят к расходящимся интегралам и не рассматриваются (см. подробное обсуждение данной проблемы в работах [19, 149–151]). Формально область определения степени  $\alpha$  можно распространить на отрицательные значения вплоть до  $\alpha > -1$  [180]. При  $\alpha = -1$ , то есть для кулоновского потенциала, в интегралах вновь возникает расходимость (см. подробности, например, в работе [19]). Однако, поскольку отрицательные показатели степени  $\alpha$  не удовлетворяют требованию удержания кварков, они обычно не рассматриваются.

Обобщённая модель Намбу-Иона-Лазинио задаётся гамильтонианом (для простоты рассматривается случай одного кваркового аромата — обобщение на случай нескольких ароматов тривиально)

$$\hat{H} = \int d^3x \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu^a(\mathbf{x}, t) K_{\mu\nu}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_\nu^b(\mathbf{y}, t), \quad (3.83)$$

то есть она определяется взаимодействием кварковых токов  $J_\mu^a(\mathbf{x}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi(\mathbf{x}, t)$ , описываемым одновременным ядром

$$K_{\mu\nu}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = g_{\mu 0} g_{\nu 0} \delta^{ab} V_0(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (3.84)$$

Пространственная структура ядра отброшена, поскольку никаких новых эффектов она не обеспечивает и приводит лишь к техническим усложнениям. Полученная модель удовлетворяет достаточно большому набору требований, а именно, она а) является релятивистской, б) явно содержит конфайнмент и поэтому может использоваться для изучения связанных состояний кварков, в том числе высоковозбуждённых, в) является кирально симметричной (при  $m = 0$ ), г) способна описать явление спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме, в частности, данная модель удовлетворяет всем низкоэнергетическим теоремам, таким как соотношения Гелл-Манна-Окса-Реннера [181] (см. работу [149–151]) и Голдбергера-Треймана [182] (см. работу [183]), условие Адлера [184] и теорема Вайнберга [185] (см. работу [186]). При этом, как упоминалось выше, одной из наиболее привлекательных черт данной модели является возможность микроскопического описания явления спонтанного нарушения киральной симметрии.

Удобным методом исследования класса моделей, описываемых гамильтонианом (3.83), является преобразование Боголюбова, которое необходимо сделать для перехода от “голых” кварков, являющихся затравочными степенями свободы в кирально симметричном вакууме, к “одетым” кваркам, представляющим собой физические степени свободы в кирально нарушенном вакуу-

ме [153–157]:

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} [\hat{b}_{\alpha s}(\mathbf{p}, t) u_s(\mathbf{p}) + \hat{d}_{\alpha s}^\dagger(-\mathbf{p}, t) v_s(-\mathbf{p})], \quad (3.85)$$

$$\begin{cases} u(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \sin \varphi_p} + \sqrt{1 - \sin \varphi_p} (\boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}}) \right] u(0), \\ v(-\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \sin \varphi_p} - \sqrt{1 - \sin \varphi_p} (\boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}}) \right] v(0), \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\hat{b}_s(\mathbf{p}, t) = e^{iE_p t} \hat{b}_s(\mathbf{p}, 0), \quad \hat{d}_s(-\mathbf{p}, t) = e^{iE_p t} \hat{d}_s(-\mathbf{p}, 0), \quad (3.87)$$

где  $E_p$  есть энергия одетого кварка, а  $\alpha = \overline{1, N_C}$  есть цветовой индекс. Модель рассматривается в пределе большого числа цветов  $N_C \rightarrow \infty$ . Величина  $\varphi_p$ , параметризующая преобразование Боголюбова (3.85), называется киральным углом, который определён с граничными условиями  $\varphi_p(p=0) = \pi/2$  и  $\varphi_p(p \rightarrow \infty) = 0$ .

Нормально упорядоченный в терминах новых (“одетых”) операторов рождения и аннигиляции кварков и антикварков гамильтониан модели (3.83) принимает вид:

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + : \hat{H}_2 : + : \hat{H}_4 :, \quad (3.88)$$

причём, опуская несущественные детали, имеем (схематично) [153]:

$$E_{\text{vac}} = \underbrace{\bar{\psi} D \psi} + \underbrace{\bar{\psi} \Gamma \psi K \bar{\psi} \Gamma \psi}, \quad H_2 = \bar{\psi} D \psi + \bar{\psi} \Gamma \psi \underbrace{K \bar{\psi} \Gamma \psi} + \bar{\psi} \Gamma \psi \underbrace{K \bar{\psi} \Gamma \psi}, \quad H_4 = \bar{\psi} \Gamma \psi \underbrace{K \bar{\psi} \Gamma \psi}, \quad (3.89)$$

где  $D = (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m)$ ,  $\Gamma = \gamma_0$ , а ядро  $K$  даётся формулой (3.84). В результате несложных вычислений для энергии вакуума можно найти:

$$E_{\text{vac}}[\varphi_p] = -\frac{1}{2} g V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( [m + A_p] \sin \varphi_p + [B_p + p] \cos \varphi_p \right), \quad (3.90)$$

где  $V$  есть трёхмерный нормировочный объём, а фактор  $g$  учитывает полное число степеней свободы кварка:  $g = (2S + 1)N_C$ , где  $2S + 1 = 2$  есть число проекций спина кварка (при наличии нескольких кварковых ароматов  $g$  следует также домножить на их число  $N_f$ ). Функции импульса  $A_p$  и  $B_p$  даются формулами

$$A_p = m + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \sin \varphi_k, \quad B_p = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}}) V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cos \varphi_k, \quad (3.91)$$

где  $V = C_F V_0$ , а  $C_F = (N_C^2 - 1)/(2N_C)$  есть собственное значение оператора Казимира в фундаментальном представлении. Для того, чтобы при  $N_C \rightarrow \infty$  потенциал принимал конечные значения, предполагается, что  $K_0^{\alpha+1} N_C \rightarrow \text{const}$  в этом пределе.

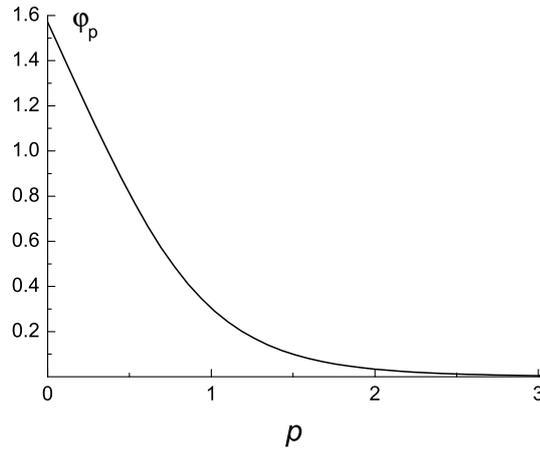


Рис. 3.11. Решение щелевого уравнения (3.92) для  $m = 0$  и линейного потенциала  $V(r) = \sigma r$ . Импульс  $p$  дан в единицах  $\sqrt{\sigma}$ .

Явный вид кирального угла  $\varphi_p$  определяется из условия минимальности энергии вакуума, которое является одновременно и условием диагонализации квадратичного члена :  $\hat{H}_2$  : (то есть условием отсутствия в нём аномальных членов вида  $\hat{b}^\dagger \hat{d}^\dagger - \hat{\tilde{b}} \hat{\tilde{d}}$ ), причём соответствующее уравнение

$$A_p \cos \varphi_p = B_p \sin \varphi_p \quad (3.92)$$

называется щелевым [149–157] и для степенного потенциала (3.82) принимает вид (в киральном пределе для  $0 \leq \alpha < 2$ ; случай  $\alpha = 2$  необходимо рассматривать отдельно) [19]:

$$p^3 \sin \varphi_p = K_0^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) \sin \frac{\pi \alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \frac{pk \sin[\varphi_k - \varphi_p]}{|p - k|^{\alpha+1}} + \frac{\cos \varphi_k \sin \varphi_p}{(\alpha - 1)|p - k|^{\alpha-1}} \right\}. \quad (3.93)$$

Для удобства и компактности записи модуль импульса  $p$  продолжен в область  $p < 0$  в соответствии со следующим правилом:  $\cos \varphi_{-p} = -\cos \varphi_p$ ,  $\sin \varphi_{-p} = \sin \varphi_p$ .

Для кирального угла, удовлетворяющего уравнению (3.92), гамильтониан (3.88) принимает диагональный вид [153–157]:

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sum_{\alpha=1}^{N_C} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p [\hat{b}_{\alpha s}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{b}_{\alpha s}(\mathbf{p}) + \hat{d}_{\alpha s}^\dagger(-\mathbf{p}) \hat{d}_{\alpha s}(-\mathbf{p})], \quad (3.94)$$

где закон дисперсии одетого кварка есть

$$E_p = A_p \sin \varphi_p + B_p \cos \varphi_p, \quad (3.95)$$

а также учтено, что вклад члена :  $\hat{H}_4$  : подавлен в пределе большого числа цветов как  $1/\sqrt{N_C}$ . В литературе данное приближение иногда называется приближением БКШ по аналогии с соответствующим подходом в теории сверхпроводимости.

На рис. 3.11 приведён график зависимости кирального угла от импульса. Для определённости выбран случай  $\alpha = 1$ , однако качественно вид полученной кривой не зависит от формы межкваркового потенциала. Подробности формализма кирального угла можно найти в работах [14, 149–158], а детальное исследование свойств щелевого уравнения — в работах [19] (для четырёхмерной теории) и [20, 166] (для двумерной теории). Таким образом, имеет место спонтанное нарушение киральной симметрии: гамильтониан теории кирально инвариантен, тогда как БКШ вакуум, обладающий меньшей объёмной плотностью энергии, в каждой точке конфигурационного пространства содержит облако сильно скореллированных кварк-антикварковых пар, для которых отличен от нуля киральный конденсат (в соответствии с естественными ожиданиями, на тривиальном кирально симметричном решении  $\varphi_p \equiv 0$  он обращается в ноль)

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sin \varphi_p. \quad (3.96)$$

При этом асимптотика решения на больших импульсах даётся формулой

$$\varphi_{p|m=0} \underset{p \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{\pi}{N_C} \Gamma(\alpha + 2) K_0^{\alpha+1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle}{p^{\alpha+4}}, \quad (3.97)$$

то есть киральный угол быстро убывает с ростом импульса.

Важно отметить, что, поскольку модель содержит конфайнмент и, следовательно, не допускает существования цветных кварков в свободном состоянии, то следующим неизбежным шагом является выход за рамки приближения БКШ и построение из одетых кварков бесцветных объектов. Возможны два подхода. С одной стороны, можно сформулировать уравнение Бете-Салпите-ра для соответствующих связанных состояний кварков [149–157]. Альтернативный подход сформулирован в работе [187] для двумерной модели КХД, а затем расширен на случай обобщённой модели Намбу–Иона-Лазинио в работах [14, 15]. Идея такого подхода состоит в диагонализации гамильтониана теории в мезонном секторе посредством обобщённого преобразования Боголюбова. С этой целью удобно ввести четыре оператора квадратичных по кварковым операторам, из которых первые два:

$$\hat{B}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{\alpha} \hat{b}_{\alpha s}^{\dagger}(\mathbf{p}) \hat{b}_{\alpha s'}(\mathbf{p}'), \quad \hat{D}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{\alpha} \hat{d}_{\alpha s}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \hat{d}_{\alpha s'}(-\mathbf{p}') \quad (3.98)$$

“считают” количество кварков и антикварков, а вторые два:

$$\hat{M}_{ss'}^{\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{\alpha} \hat{b}_{\alpha s'}^{\dagger}(\mathbf{p}') \hat{d}_{\alpha s}^{\dagger}(-\mathbf{p}), \quad \hat{M}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{\alpha} \hat{d}_{\alpha s}(-\mathbf{p}) \hat{b}_{\alpha s'}(\mathbf{p}') \quad (3.99)$$

создают и аннигилируют бесцветные кварк-антикварковые пары. Полученные таким образом операторы обладают стандартными бозонными коммутационными соотношениями. В приближении

БКШ гамильтониан (3.94) выражается лишь через первую пару операторов, тогда как отброшенная (в пределе БКШ подавленная по  $N_C$ ) часть гамильтониана :  $\hat{H}_4$  : выражается через все четыре оператора. Ключевым моментом данного подхода является требование рождения и аннигиляции кварков и антикварков только парами, что является следствием наличия в системе конфайнмента. Следовательно, за рамками приближения БКШ операторы (3.98) не могут быть независимыми, а должны выражаться через операторы (3.99). Такая связь имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{B}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{s''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \hat{M}_{s''s}^\dagger(\mathbf{p}'', \mathbf{p}) \hat{M}_{s''s'}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}') \\ \hat{D}_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{s''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \hat{M}_{ss''}^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') \hat{M}_{s's''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}''), \end{cases} \quad (3.100)$$

где мы ограничились лишь лидирующим в пределе  $N_C \rightarrow \infty$  порядком, отбросив члены, содержащие большее число кварк-антикварковых пар и вследствие этого подавленные по  $N_C$ . После подстановки соотношений (3.100) в гамильтониан (3.88) члены :  $\hat{H}_2$  : и :  $\hat{H}_4$  : оказываются одного порядка, причём полученный гамильтониан можно привести к диагональному виду преобразованием вида (в системе центра масс):

$$\begin{cases} \hat{M}_\nu(p) = \sum_n [\hat{m}_{n\nu} \varphi_{n\nu}^+(p) + \hat{m}_{n\nu}^\dagger \varphi_{n\nu}^-(p)] \\ \hat{M}_\nu^\dagger(p) = \sum_n [\hat{m}_{n\nu}^\dagger \varphi_{n\nu}^+(p) + \hat{m}_{n\nu} \varphi_{n\nu}^-(p)], \end{cases} \quad (3.101)$$

обобщающим стандартное бозонное преобразование Боголюбова на случай составных операторов. Здесь каждое мезонное состояние обозначено как  $\{n, \nu\}$ , где  $n$  есть радиальное возбуждение, а квантовое число  $\nu$  однозначно идентифицирует состояние в каждом мультиплете  $nJ^{PC}$  [14]. Как следует из вида преобразования (3.101), каждое мезонное состояние описывается двухкомпонентной радиальной волновой функцией  $\varphi_{n\nu}^\pm(p)$ . Требование отсутствия аномальных боголюбовских членов в гамильтониане приводит к системе уравнений для волновых функций  $\varphi_{n\nu}^\pm(p)$  [14, 15], которая полностью эквивалентна системе уравнений, возникающей из уравнения Бете-Салпитера для матричной амплитуды мезона [149–157]. Условия полноты и нормировки волновых функций вида:

$$\int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} [\varphi_{n\nu}^+(p) \varphi_{m\nu}^+(p) - \varphi_{n\nu}^-(p) \varphi_{m\nu}^-(p)] = \delta_{nm}, \quad \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} [\varphi_{n\nu}^+(p) \varphi_{m\nu}^-(p) - \varphi_{n\nu}^-(p) \varphi_{m\nu}^+(p)] = 0 \quad (3.102)$$

непосредственно следуют из стандартных бозонных коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения мезонов  $\hat{m}_{n\nu}$  и  $\hat{m}_{n\nu}^\dagger$  [14, 15].

Для кирального пиона волновые функции имеют вид (для удобства используется релятивистская нормировка на  $2m_\pi$ ):

$$\varphi_\pi^\pm(p) = \frac{\sqrt{N_C}}{f_\pi} [\sin \varphi_p \pm m_\pi \Delta_p], \quad (3.103)$$

где величина  $\Delta_p$  определяет поправку к киральному пределу, в котором волновые функции пиона совпадают и даются синусом кирального угла [149–157].

Таким образом, обобщённая модель Намбу–Иона-Лазино микроскопическим образом описывает процесс спонтанного нарушения киральной инвариантности в вакууме КХД, а также процесс образования мезонных состояний. Следовательно, она является удобным инструментом и для изучения процесса эффективного восстановления киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых адронов, которое имеет простое качественное объяснение [188]. Действительно, поскольку спонтанное нарушение киральной симметрии в вакууме является следствием квантовых флуктуаций (описываемых петлями), то само оно также является квантовым эффектом. Параметром, определяющим роль таких флуктуаций в динамике системы, может служить отношение  $\hbar/S$ , где  $S$  есть классическое действие, отвечающее внутренним степеням свободы адрона. Для больших чисел возбуждения, то есть в квазиклассической области спектра, имеет место соотношение  $S \gg \hbar$ , и, следовательно, спонтанное нарушение киральной инвариантности не должно оказывать влияния на свойства высоковозбуждённых адронов [188]. Проследим детально, как это происходит, на примере линейного потенциала конфайнмента  $V(r) = \sigma r$ . Щелевое уравнение (3.92) с явно восстановленными в нём постоянной Планка  $\hbar$  и скоростью света  $c$  принимает вид [16]:

$$pc \sin \varphi_p - mc^2 \cos \varphi_p = \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ \cos \varphi_k \sin \varphi_p - (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{k}}) \sin \varphi_k \cos \varphi_p \right], \quad (3.104)$$

где зависимость от постоянной Планка в потенциале выделена и учтена явно, а функция  $\tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$  уже не содержит  $\hbar$ .

Уравнение (3.104) допускает два типа разложения решения для кирального угла [16]. С одной стороны, функцию  $\varphi_p$  можно представить в виде ряда по степеням безразмерного параметра  $\frac{mc^2}{\sqrt{\sigma\hbar c}}$ :

$$\varphi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{\sigma\hbar c}} \right)^n f_n \left( \frac{pc}{\sqrt{\sigma\hbar c}} \right), \quad (3.105)$$

где график лидирующего члена  $f_0(p)$  приведён на рис. 3.11. Данное разложение удобно вблизи кирального предела  $m = 0$ , причём одновременный переход к формальному классическому пределу  $\hbar \rightarrow 0$  приводит к коллапсу кирального угла. Действительно, в задаче просто отсутствуют размерные параметры, позволяющие сконструировать величину размерности действия  $S$  и строить квазиклассическое разложение  $\varphi_p$  по степеням отношения  $\hbar/S$ . Вне кирального предела массы кварка  $m$  уже достаточно для того, чтобы построить как классический параметр размерности действия  $S \sim \frac{m^2 c^3}{\sigma}$ , так и классический параметр  $mc$  для обезразмеривания импульса. Таким образом, квазиклассическое разложение становится возможным и принимает вид:

$$\varphi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma\hbar c}{(mc^2)^2} \right)^n \tilde{f}_n \left( \frac{p}{mc} \right), \quad (3.106)$$

то есть безразмерным параметром разложения является величина  $\frac{\sigma\hbar c}{(mc^2)^2}$ . Лидирующий член ряда (3.106) известен аналитически и даётся свободным киральным углом  $\tilde{f}_0 = \arctan \frac{mc}{p}$ .

После суммирования всего ряда оба разложения кирального угла (3.105) и (3.106) воспроизводят одно и то же точное решение щелевого уравнения. Однако разложение (3.105) хорошо сходится вблизи кирального предела  $m = 0$  и за пределами классического предела  $\hbar \neq 0$  (разложение (3.106) “взрывается” в этом пределе). И наоборот, в случае  $m \gg \frac{\sqrt{\sigma\hbar c}}{c^2}$  разложение (3.106) сходится гораздо лучше разложения (3.105). При этом один в один соответствие между функциями  $\{f_n\}$  и  $\{\tilde{f}_n\}$  отсутствует — каждая функция из одного набора раскладывается в бесконечный ряд по функциям из другого набора и наоборот. Например, функция  $f_0$ , изображённая на рис. 3.11, стремится к нулю при асимптотически больших импульсах как  $1/p^5$  (см. формулу (3.97)), тогда как асимптотическое поведение функции  $\tilde{f}_0$  намного медленнее — как  $1/p$ .

В качестве заключительного комментария заметим, что разложения (3.105) и (3.106) задают два динамических режима системы в зависимости от величины параметра  $m/\sqrt{\sigma}$ . Спонтанное нарушение киральной симметрии происходит в пределе  $m \ll \sqrt{\sigma}$  — режим (3.105), тогда как в противоположном пределе  $m \gg \sqrt{\sigma}$  имеет место “физика тяжёлого кварка” — режим (3.106).

Таким образом, обобщённая модель Намбу-Иона-Лазинио действительно демонстрирует эффективное восстановление киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых адронов. Детально проследить такой процесс восстановления можно на примере простейшей системы, состоящей из лёгкого кварка, движущегося в поля статического антикварка. Примечательно, что уравнение на связанные состояния для такой системы можно получить как переходом к пределу одной бесконечной массы в уравнении Бете-Салпитера для кварк-антикваркового мезона, так и специфическим выбором калибровки [189], зануляющим глюонное поле на траектории статического антикварка [175, 176, 190, 191]. Опуская несущественные в данный момент детали, приведём лишь окончательный вид уравнения для спектра такой тяжёло-лёгкой системы (энергия отсчитывается от массы статического центра):

$$E_p \psi(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ C_p C_k + (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}) S_p S_k \right] \psi(\mathbf{k}) = E \psi(\mathbf{p}), \quad (3.107)$$

где для краткости записи использованы обозначения

$$C_p = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_p}{2}}, \quad S_p = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_p}{2}}, \quad (3.108)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  есть матрицы Паули, а шляпки обозначают единичные векторы в направлении соответствующих векторов. Подробности вывода можно найти в работе [17].

Домножим уравнение (3.107) на величину  $(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})$  слева и представим результат в виде уравнения для функции

$$\psi'(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) \psi(\mathbf{p}), \quad (3.109)$$

которая по построению обладает противоположной пространственной чётностью по отношению к  $\psi(\mathbf{p})$ . Полученное уравнение принимает вид

$$E_p \psi'(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ S_p S_k + (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}) C_p C_k \right] \psi'(\mathbf{k}) = E \psi'(\mathbf{p}) \quad (3.110)$$

и отличается от уравнения (3.107) взаимной заменой величин  $C_p$  и  $S_p$ , определённых в формуле (3.108). В пределе больших относительных импульсов  $\varphi_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$  (см. рис. 3.11) и, следовательно,  $C_p = S_p = 1/\sqrt{2}$ . В результате уравнения (3.107) и (3.110) принимают одинаковый вид:

$$E_p \psi^{(\prime)}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left[ 1 + (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{k}}) \right] \psi^{(\prime)}(\mathbf{k}) = E \psi^{(\prime)}(\mathbf{p}), \quad (3.111)$$

что доказывает требуемое утверждение о том, что состояния с противоположной чётностью  $\psi(\mathbf{p})$  и  $(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})\psi(\mathbf{p})$  в этом пределе вырождаются по энергии, причём величина остаточного расщепления между уровнями определяется значением величины  $\sin \varphi_p$ , взятой при данных характерных значениях импульса (см. формулу (3.108) [17, 18]).

Одним из специфических предсказаний для высоковозбуждённых адронов с эффективно восстановленной киральной симметрией является отщепление от них кирального пиона, которое выражается в убывании соответствующей константы связи с ростом степени возбуждения адрона [136, 192–195]. Исследуем данное явление в рамках обобщённой модели Намбу–Иона-Лазинио. Начнём с приближения БКШ и для среднего от дивергенции аксиально векторного тока  $J_\mu^5$  между состояниями одетых кварков найдём:

$$\langle q(p) | \partial_\mu J_\mu^5(x) | q(p') \rangle = f_\pi m_\pi^2 \langle q(p) | \phi_\pi(x) | q(p') \rangle \propto f_\pi g_\pi(q^2) (\bar{u}_p \gamma_5 u_{p'}), \quad q = p - p', \quad (3.112)$$

где была использована операторная форма закона частичного сохранения аксиально-векторного тока (ЧСАТ) и был введён пион-кварк-кварковый формфактор  $g_\pi(q^2)$ . С другой стороны, если считать, что киральная симметрия в системе спонтанно нарушена, и кварковые волновые функции удовлетворяют эффективному уравнению Дирака с динамически сгенерённой массой  $m_q^{\text{eff}}$ , то нетрудно получить, что

$$\langle q(p) | \partial_\mu J_\mu^5(x) | q(p') \rangle \propto m_q^{\text{eff}} (\bar{u}_p \gamma_5 u_{p'}). \quad (3.113)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.112) и (3.113), приходим к соотношению

$$f_\pi g_\pi = m_q^{\text{eff}}, \quad g_\pi \equiv g_\pi(m_\pi^2), \quad (3.114)$$

где для простоты все численные коэффициенты поглощены в определение константы  $g_\pi$ . Из формулы (3.91) видно, что эффективную массу кварка описывает величина  $A_p$ , поэтому с помощью соотношения (3.114) находим окончательно, что [21]

$$f_\pi g_\pi(p) \simeq A_p. \quad (3.115)$$

Приведённый выше вывод является качественным, однако формулу (3.115) можно вывести микроскопически [21], используя явные выражения для волновых функций пиона. Связь (3.115) имеет смысл соотношения Голдбергера-Треймана на кварковом уровне (в приближении БКШ). Нетрудно видеть, что с ростом импульса  $p$  величина  $A_p$  убывает, что в силу соотношения (3.115), означает убывание пионного формфактора  $g_\pi(p)$ . При этом нетрудно сделать простую оценку скорости такого убывания. Действительно, в киральном пределе  $A_p = E_p \sin \varphi_p$ , тогда как при больших импульсах  $E_p \approx p$ , а киральный угол для степенного потенциала ведёт себя в этом пределе как  $\varphi_p \propto 1/p^{4+\alpha}$  (см. формулу (3.97)). Таким образом,

$$g_\pi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha+3}}. \quad (3.116)$$

За рамками использованного выше приближения БКШ соотношение Голдбергера-Треймана выражает константу связи пиона с возбуждённым адроном через расщепление по массе между этим адроном и его киральным партнёром. Для определённости рассмотрим переход  $\bar{D}(J^P = 0^+) \rightarrow \bar{D}'(J^P = 0^-)\pi$ , где кварковый состав  $\bar{D}^{(\prime)}$  мезона есть  $\bar{c}q$  с лёгким кварком  $q = u, d$ . Из условия ЧСАТ следует, что

$$\langle 0 | J_\mu^{5a}(0) | \pi^b(\mathbf{q}) \rangle = i f_\pi q_\mu \delta^{ab}, \quad (3.117)$$

так что для матричного элемента перехода  $\langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle$  ( $n^{(\prime)} = \bar{D}^{(\prime)}$ ) находим:

$$\langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle = \langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle_{\text{nonpion}} - \frac{2M q_\mu f_\pi g_{nn'\pi}}{q^2 - M_\pi^2 + i0} D'^\dagger \tau^a D, \quad (3.118)$$

где введена пионная константа связи  $g_{nn'\pi}$ , а также изоспиновые дублеты  $D'$  и  $D$ .

С другой стороны, нетрудно установить наиболее общий вид левой части выражения (3.118) совместимый с лоренцевой инвариантностью:

$$\langle n' | J_\mu^{5a} | n \rangle = [(P_\mu + P'_\mu)G_A(q^2) - (P_\mu - P'_\mu)G_S(q^2)] D'^\dagger \left( \frac{\tau^a}{2} \right) D, \quad (3.119)$$

где  $P_\mu$  и  $P'_\mu$  есть импульсы начального и конечного  $D$  мезонов,  $q_\mu = P_\mu - P'_\mu$ . Тогда в лидирующем порядке по массе тяжёлого кварка сохранение аксиально-векторного тока в киральном пределе приводит к условию

$$2M(M - M')G_A - q^2 G_S = 0, \quad (3.120)$$

где использовано, что  $M' \approx M$ , так что  $M + M' \approx 2M$ .

При этом из соотношения (3.118) видно, что в пределе  $q^2 \rightarrow 0$  можно иметь  $G_A(0) \equiv G_A \neq 0$ , если отождествить  $G_S$  с вкладом пионного полюса, то есть считать, что

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} G_S(q^2) \rightarrow \frac{4M f_\pi g_{nn'\pi}}{q^2}. \quad (3.121)$$

Возникающее при этом равенство

$$\frac{1}{2}(M - M')G_A = f_\pi g_{nn'\pi} \quad (3.122)$$

представляет собой искомое соотношение Голдбергера-Треймана для тяжёло-лёгких мезонов. В рамках обобщённой модели Намбу–Иона-Лазинио соотношение (3.122) можно вывести микроскопически [22]. Для этого заметим, что константа взаимодействия с пионом  $g_{nn'\pi}$  определяется соотношением

$$\langle \bar{D}'\pi^a | V | \bar{D} \rangle = 2M i g_{nn'\pi} (D'^\dagger \tau^a D) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{P}' + \mathbf{q} - \mathbf{P}), \quad (3.123)$$

где  $V$  есть взаимодействие, отвечающее за испускание пиона.

Волновые функции псевдоскалярного и скалярного тяжёло-лёгких мезонов, удовлетворяющие уравнениям (3.107) и (3.110), удобно записать в виде

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_2 \phi_p, \quad \psi'(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) \psi(\mathbf{p}) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) \sigma_2 \phi'_p, \quad (3.124)$$

тогда как волновые функции пиона даются выражениями (3.103). На рис. 3.12 изображены четыре диаграммы, дающие вклад в матричный элемент  $\langle \bar{D}'\pi | V | \bar{D} \rangle$ , для которого можно записать:

$$\langle \bar{D}'\pi^a | V | \bar{D} \rangle = 2M [A^a + B^a + C^a + D^a] (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{P}' + \mathbf{q} - \mathbf{P}), \quad (3.125)$$

причём можно показать, что вклады  $A^a$  и  $B^a$  взаимно уничтожают друг друга, тогда как амплитуды  $C^a$  и  $D^a$  имеют вид (здесь  $M = m_{\bar{c}} + E \approx m_{\bar{c}} + E' = M'$ ) [22]:

$$\begin{aligned} C^a &= \frac{(D' \tau^a D)}{4M \sqrt{N_C}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \varphi_\pi^+(k) \phi_k [S_p C_k - (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}}) C_p S_k], \\ D^a &= \frac{(D' \tau^a D)}{4M \sqrt{N_C}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \varphi_\pi^-(k) \phi_k [S_p C_k - (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}}) C_p S_k], \end{aligned} \quad (3.126)$$

где величины  $C_p$  и  $S_p$  определены в формуле (3.108), а их произведения возникают из вершин, отмеченных на диаграммах жирными кружками и даваемых различными произведениями одетых биспиноров (3.86).

Рассматривая соотношения (3.123), (3.125) и (3.126) вместе, а также используя явный вид компонент волновых функций пиона (3.103), нетрудно найти для константы  $g_{nn'\pi}$  в лидирующем по  $m_\pi$  порядке:

$$f_\pi g_{nn'\pi} = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \phi_k (\sin \varphi_p + \sin \varphi_k) [S_p C_k - (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{k}}) C_p S_k]. \quad (3.127)$$

Непионный вклад в недиагональный аксиальный заряд  $G_A$  можно вычислить с помощью явного выражения для временной компоненты аксиально-векторного тока:

$$G_A = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi'_k \phi_k \cos \varphi_k. \quad (3.128)$$

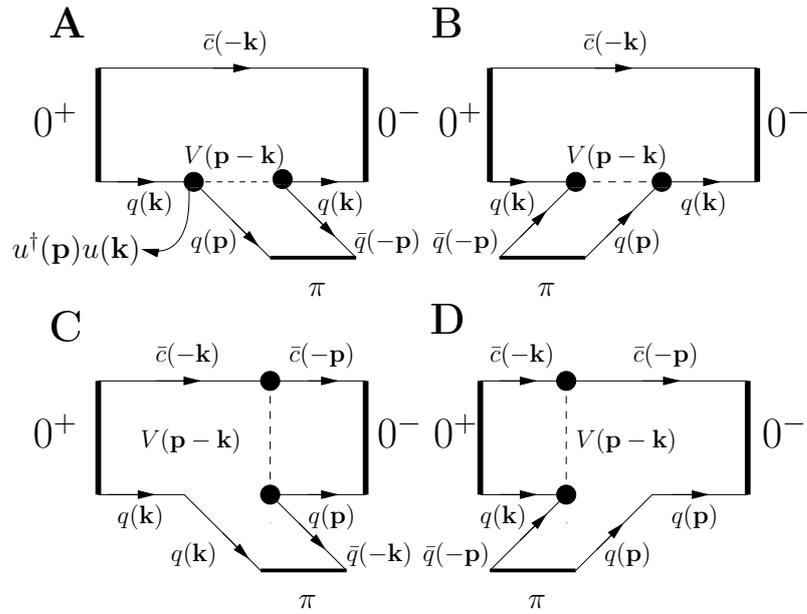


Рис. 3.12. Диаграммы, дающие вклад в матричный элемент  $\langle \bar{D}'\pi | V | \bar{D} \rangle$  в формуле (3.125).

Теперь домножим уравнение (3.107) на  $\psi'(\mathbf{p}) \cos \varphi_p$ , а уравнение (3.110) — на  $\psi(\mathbf{p}) \cos \varphi_p$ , в обоих полученных уравнениях вычислим след по спинорным индексам и проинтегрируем обе их части по импульсу  $d^3p/(2\pi)^3$ . Вычитая полученные уравнения почленно, придём к соотношению:

$$\frac{1}{2}(E - E')G_A = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \phi'_p V(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \phi_k [\cos \varphi_p (C_p C_k + (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{k}}) S_p S_k) - \cos \varphi_k ((\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{k}}) C_p C_k + S_p S_k)], \quad (3.129)$$

правая часть которого после простых преобразований тригонометрических функций в точности сводится к правой части соотношения (3.127). Приравняв левые части соотношений (3.127) и (3.129), а также переходя от энергий  $E$  и  $E'$  к соответствующим массам (то есть добавляя массу тяжёлого кварка), снова приходим к соотношению Голдбергера-Треймана (3.122). Из формулы (3.128), а также из свойств кирального угла и нормировочного условия (3.124) следует, что аксиальный заряд  $G_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , так что

$$g_{nn'\pi} = \frac{G_A \Delta M_{\pm}}{2f_{\pi}} \propto \Delta M_{\pm} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.130)$$

Данное соотношение означает, что с ростом степени возбуждения  $D$  мезона и, соответственно, по мере увеличения степени его вырождения со своим киральным партнёром  $D'$ , связь пиона с данным мезоном убывает. Обобщение на другие квантовые числа тяжёло-лёгких мезонов представляется очевидным, поскольку основное соотношение между волновыми функциями киральных партнёров (3.109) остаётся неизменным.

Обратимся теперь к вопросу о влиянии трёхчастичной динамики на свойства околопорогового резонанса, возникающего в системе  $n\bar{n}'$ , где мезоны  $n$  и  $n'$  являются киральными партнёрами. Для выведенного ранее параметра  $\lambda$  (см. определение (3.41)) нетрудно найти:

$$\lambda = \frac{\Gamma_R}{E_R} \propto \frac{g_{nn'\pi}^2 (\sqrt{E_R})^{2l+1}}{E_R} \propto (M' - M)^2 (M' - M - m_\pi)^{l-1/2}, \quad (3.131)$$

где  $l$  есть угловой момент в  $\pi n$  системе к конечному состоянию, а также были использованы соотношение (3.130) и определение  $E_R = M' - (M + m_\pi)$ . Таким образом, в строгом киральном пределе с  $m_\pi = 0$  трёхчастичная динамика оказывает влияние на свойства резонанса в системе адронов  $n$  и  $\bar{n}'$  при любых числах возбуждения последних, однако это влияние быстро убывает с ростом такой степени возбуждения, то есть по мере эффективного восстановления киральной симметрии в спектре и, соответственно, вырождения киральных партнёров  $n$  и  $n'$  по массе. Вне кирального предела, то есть для конечной массы пиона, также происходит ослабление влияния трёхчастичной динамики на свойства системы с ростом степени возбуждения адронов  $n$  и  $\bar{n}'$ , однако в некоторый момент оказывается, что  $M' < M + m_\pi$ , так что распад  $n' \rightarrow n\pi$  становится запрещён кинематически. В этом случае трёхчастичный разрез в амплитуде не возникает.

### 3.5. Выводы к третьей главе

В третьей главе диссертации была изучена проблема учёта трёхчастичной динамики в околопороговых состояниях. Был выявлен параметр (равный отношению ширины конститuenta к разности энергий двухчастичного и трёхчастичного порогов), количественно определяющий величину эффекта трёхчастичной динамики в околопороговом резонансе, и предложен простой феноменологический подход к учёту конечной ширины конститuenta околопорогового резонанса в случае, когда введённый выше параметр достаточно мал.

Напротив, в случае, когда указанный параметр принимает достаточно большие значения, эффективный учёт трёхчастичной динамики без расширения базиса системы связанных каналов и включения в него трёхчастичных состояний уже невозможен. В качестве иллюстрации был рассмотрен вопрос о существовании глубоко связанных состояний в системе  $D_1 \bar{D}^*$ , образующихся за счёт однопионного обмена. В частности, была продемонстрирована важность непертурбативного учёта трёхчастичной динамики и, тем самым, удовлетворения требований трёхчастичной унитарности для адекватного описания свойств системы  $D_1 \bar{D}^*$ . В результате было доказано отсутствие связанных состояний в указанной системе.

Следует отметить, что выбор подхода к учёту трёхчастичной динамики в околопороговом резонансе зависит от конкретной решаемой задачи. Так, для описания формы линии околопоро-

гового состояния  $X(3872)$  с учётом имеющихся на сегодняшний день экспериментальных данных достаточно ограничиться эффективным учётом конечной ширины  $D^*$  мезона — такой подход использован в следующей главе диссертации. Однако при изучении более тонких эффектов, таких, например, как построение киральных экстраполяций энергии связи  $X(3872)$  по массе пиона, рассмотренных в пятой главе диссертации, трёхчастичные эффекты необходимо учитывать явно, причём непertурбативным образом. Дополнительные трудности сопряжены с тем, что вершина перехода  $D^* \rightarrow D\pi$  является  $P$ -волновой, так что петлевые интегралы расходятся (в отличие от конечных петлевых интегралов в рассмотренной выше в этой главе системе  $D_1\bar{D}^*$ , в которой вершина  $D_1 \rightarrow D^*\pi$  является  $S$ -волновой), что требует должной регуляризации и перенормировки соответствующих трёхчастичных уравнений. Этот вопрос также подробно рассмотрен в четвёртой главе диссертации.

В последнем разделе третьей главы обсуждался вопрос о величине константы связи пиона с возбуждёнными адронами и было обнаружено убывание такой константы с ростом степени возбуждения адронов. В частности, в рамках микроскопической обобщённой модели Намбу–Иона-Лазини продемонстрировано явление эффективного восстановления киральной симметрии в спектре высоковозбуждённых адронов и, как следствие, отщепление пиона от мезонов, образующих приближённые киральные мультиплеты. С этой целью в используемом микроскопическом подходе было выведено соотношение Голдбергера-Треймана между константой связи пиона с мезоном — членом кирального дублета и расщеплением по массе внутри данного кирального дублета. По мере эффективного восстановления киральной симметрии с ростом степени возбуждения мезона такое расщепление быстро убывает, и вместе с этим происходит отщепление пиона. Таким образом, полученные результаты означают уменьшение роли трёхчастичной динамики в околопороговых резонансах, если таковые будут обнаружены на соответствующих порогах.

## Глава 4

### Свойства состояния $X(3872)$ в спектре чармония

#### 4.1. Введение

Как уже отмечалось выше, наиболее хорошо изученным экзотическим состоянием в спектре так называемых “бездомных” чармониев является состояние  $X(3872)$ , обнаруженное в 2003 году группой Belle в реакции  $B^+ \rightarrow K^+ X \rightarrow K^+(\pi^+\pi^- J/\psi)$  [82]. Удивительными оказались как положение данного состояния в спектре, так и ряд его свойств. Прежде всего, следует отметить поразительную близость расположения данного состояния к порогу  $D^0 \bar{D}^{*0}$  — для усреднённого значения массы имеем [89]:

$$M_X = 3871.69 \pm 0.17 \text{ МэВ}, \quad (4.1)$$

что лежит в пределах всего 1 МэВ от порога  $D^0 \bar{D}^{*0}$  [89]:

$$E_B = M_{D^0} + M_{\bar{D}^{*0}} - M_X = (0.12 \pm 0.26) \text{ МэВ}. \quad (4.2)$$

Точная ширина состояния  $X(3872)$  неизвестна, но при этом на неё существует верхнее ограничение [89]:

$$\Gamma_X < 1.2 \text{ МэВ}. \quad (4.3)$$

Аналогично, на полный брэнчинг рождения  $X(3872)$  в слабых распадах  $B$  мезона имеется только верхнее ограничение, наложенное коллаборацией BABAR [196]:

$$Br(B \rightarrow KX) < 3.2 \times 10^{-4}. \quad (4.4)$$

Несколько позже это же состояние было обнаружено в моде  $\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$  [197], причём изучение спектра пионов показало, что в случае двухпионного распада они происходят из  $\rho$  мезона, тогда как в трёхпионной моде — от  $\omega$  мезона. По этой причине в дальнейшем данные моды могут упоминаться как  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$ . Аналогичные измерения с аналогичными результатами были выполнены затем и в распадах нейтрального  $B$  мезона [198, 199], хотя и с худшей точностью. Измерения двухпионной моды, проведённые коллаборацией CDF на Теватроне [200], позволили сузить круг допустимых квантовых чисел  $X(3872)$  до всего двух возможностей:  $1^{++}$  и  $2^{-+}$ . Отвергнуть гипотезу  $2^{-+}$  (на уровне 8 стандартных отклонений) удалось лишь в 2013 году, то есть спустя 10 лет после открытия  $X$ , благодаря измерениям двухпионной моды, выполненным с высокой статистикой в эксперименте ЛНСб в ЦЕРН [201, 202].

Таким образом,  $X(3872)$  демонстрирует свою уникальность уже с самых первых измерений. Действительно, с одной стороны, в его распадах имеет место сильное нарушение изоспина, поскольку вероятности распада по двух- и трёхпионной модам оказались приблизительно одинаковыми (см. формулу (4.15) ниже). С другой стороны, наиболее естественный кандидат на роль  $X(3872)$  в спектре истинных  $\bar{c}c$  кваркониев  $\chi'_{c1}$  лежит существенно выше значения (4.1). Дальнейшее экспериментальное изучение данного состояния принесло новые сюрпризы. Прежде всего, в 2006 году оно было обнаружено в моде с открытым чармом, а именно в моде распада  $B^+ \rightarrow K^+ D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  [203], причём с довольно значительным брэнчингом<sup>1</sup>:

$$Br(B^+ \rightarrow K^+ D^0 \bar{D}^0 \pi^0) = (1.02 \pm 0.31_{-0.29}^{+0.21}) \times 10^{-4}. \quad (4.5)$$

Первоначально масса найденного в данной моде состояния лежала несколько выше массы, измеренной в неупругих модах с закрытым чармом. Так в работе [203] приводилась масса

$$M_X = 3875.2 \pm 0.7_{-1.6}^{+0.3} \pm 0.8 \text{ МэВ}, \quad (4.6)$$

однако более тщательный анализ данных позволил уменьшить её до значения, совместимого в пределах ошибки с прежними измерениями в неупругих каналах [204]:

$$M_X = 3872.6_{-0.4}^{+0.5} \pm 0.4 \text{ МэВ}. \quad (4.7)$$

Несмотря на то, что коллаборация BABAR также давала в данной моде несколько большее значение массы, чем в двухпионной моде [205], стало очевидным, что речь всё же идёт об одном и том же чармонийподобном состоянии.

Для будущих ссылок приведём основные установленные свойства состояния  $X(3872)$ :

- Если явно не оговорено иначе, квантовые числа  $X(3872)$  принимаются равными  $1^{++}$ .
- В слабых распадах  $B$  мезонов состояние  $X(3872)$  рождается примерно с такой же вероятностью, что и обычные чармонии:

$$Br(B^+ \rightarrow K^+ X(D^{*0} \bar{D}^0)) = (0.73 \pm 0.17 \pm 0.13) \times 10^{-4} [204], \quad (4.8)$$

$$Br(B \rightarrow K J/\psi, K \psi', K \chi_{c1}) \sim 10^{-4} [89]. \quad (4.9)$$

<sup>1</sup> Данные по модам с открытым чармом приводятся разными коллаборациями по-разному. Так, Belle приводит данные в канале  $D\bar{D}\pi$ , тогда как BABAR складывает данные, полученные в конечных состояниях  $D\bar{D}\pi$  и  $D\bar{D}\gamma$ , и ссылается на соответствующую моду как на  $D\bar{D}^*$ . Для упрощения записи в дальнейшем канал с открытым чармом будет всегда указываться как  $D\bar{D}^*$  вне зависимости от того, о данных какой коллаборации идёт речь.

- Для радиационных мод распада  $X$  в конечные состояния  $\gamma J/\psi$  и  $\gamma\psi'$  коллаборация BABAR даёт значения [206]:

$$\begin{aligned} Br(B^\pm \rightarrow K^\pm X) Br(X \rightarrow \gamma J/\psi) &= (2.8 \pm 0.8 \pm 0.2) \times 10^{-6}, \\ Br(B^\pm \rightarrow K^\pm X) Br(X \rightarrow \gamma\psi') &= (9.5 \pm 2.9 \pm 0.6) \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

а также отношения

$$\frac{Br(X \rightarrow \gamma J/\psi)}{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 0.33 \pm 0.12, \quad (4.11)$$

$$\frac{Br(X \rightarrow \gamma\psi')}{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 1.1 \pm 0.4. \quad (4.12)$$

При этом аналогичные данные коллаборации Belle имеют вид [207]:

$$\begin{aligned} Br(B^\pm \rightarrow K^\pm X) Br(X \rightarrow \gamma J/\psi) &= (1.78_{-0.44}^{+0.48} \pm 0.12) \times 10^{-6}, \\ Br(B^\pm \rightarrow K^\pm X) Br(X \rightarrow \gamma\psi') &< 3.45 \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

то есть имеется несогласованность между данными двух указанных коллабораций относительно моды  $\gamma\psi'$ . Между тем, имеется также недавнее измерение отношения брэнчингов указанных мод, выполненное коллаборацией LHCb [208]:

$$R \equiv \frac{Br(X \rightarrow \gamma\psi')}{Br(X \rightarrow \gamma J/\psi)} = 2.46 \pm 0.64 \pm 0.29. \quad (4.14)$$

- Состояние  $X$  с примерно одинаковыми брэнчингами рождается в двух- и в трёхпионной модах [197]:

$$\frac{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi)}{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 1.0 \pm 0.4 \pm 0.3, \quad (4.15)$$

причём несколькими годами позже были измерены брэнчинги каждой моды в отдельности в распадах как заряженных, так и нейтральных  $B$  мезонов. В частности, для двухпионной моды Belle даёт брэнчинги [199]

$$\begin{aligned} Br(B^+ \rightarrow K^+ X(3872)) Br(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi) \\ &= [8.61 \pm 0.82(\text{stat}) \pm 0.52(\text{syst})] \times 10^{-6}, \\ Br(B^0 \rightarrow K^0 X(3872)) Br(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi) \\ &= [4.3 \pm 1.2(\text{stat}) \pm 0.4(\text{syst})] \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

тогда как трёхпионные брэнчинги были измерены коллаборацией BABAR [209]:

$$\begin{aligned} Br(B^+ \rightarrow K^+ X(3872)) Br(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi) \\ &= [0.6 \pm 0.2(\text{stat}) \pm 0.1(\text{syst})] \times 10^{-5}, \\ Br(B^0 \rightarrow K^0 X(3872)) Br(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi) \\ &= [0.6 \pm 0.3(\text{stat}) \pm 0.1(\text{syst})] \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (4.17)$$



Рис. 4.1. Модели для  $X(3872)$ , совместимые с квантовыми числами  $1^{++}$ .

## 4.2. Проблема квантовых чисел $X(3872)$

Как указывалось выше, до недавнего времени имела место неопределённость относительно квантовых чисел состояния  $X(3872)$ , для которых существовало две конкурирующие возможности:  $1^{++}$  и  $2^{-+}$ . Поскольку экспериментально этот вопрос на данный момент полностью закрыт, остановимся лишь на некоторых теоретических аспектах проблемы квантовых чисел  $X$ . Прежде всего, следует отметить, что квантовые числа  $2^{-+}$  приводят к довольно серьёзным противоречиям с теоретическими моделями. Действительно, единственным приемлемым кандидатом на роль  $X$  становится в этом случае истинный  $\bar{c}c$  чармоний с квантовыми числами  $1^1D_2$ . Проблемы при этом начинаются уже с того, что кварковые модели предсказывают массу такого состояния в диапазоне  $3770 \div 3830$  МэВ (см., например, работы [210–212]), что никак не представляется возможным существенно изменить, в том числе, с помощью учёта  $D$  мезонных петель [65, 213]. В результате не видно возможности совместить массу такого чармония с экспериментальным значением. Проблемы, однако, этим не исчерпываются. Можно показать, что ширины радиационных мод распада  $1^1D_2$  чармония находятся в сильном противоречии с данными [214]. Аналогичный вывод справедлив и для мод распада с открытым чармом. Действительно, квантовые числа  $2^{-+}$  подразумевают относительную  $P$ -волну в конечном состоянии  $D^0\bar{D}^{*0}$ . Поскольку распад происходит вблизи порога, то дополнительная степень относительного импульса в амплитуде распада, проистекающая из  $P$ -волны, приводит к сильному подавлению вероятности распада и, как результат, к крайне маленькому брэнчингу соответствующей моды, что находится в сильном противоречии с данными [26, 29].

Напротив, для квантовых чисел  $1^{++}$  недостатка в моделях нет — см. рис. 4.1, на котором схематично представлены наиболее реалистические и часто обсуждаемые модели. В частности, возможно отождествление  $X(3872)$  с истинным  $2^3P_1$  чармонием, что, впрочем, сопряжено с существенными трудностями с объяснением его свойств. Так, масса соответствующего состояния лежит заметно выше экспериментальной массы  $X$  (см., например, оценку  $M(\chi'_{c1}(^3P_1)) = 3925 \div 3950$  МэВ, полученную в работе [212]), а также не имеет естественного объяснения сильное нарушение изоспина в двух- и трёхпионных распадах (см. отношение (4.15)). Другая модель — мо-

дель адронной молекулы — имеет достаточно длинную историю (см, например, работы [215, 216]), причём открытие состояния  $X(3872)$  вблизи  $D\bar{D}^*$  порога сделало данную модель весьма популярной [23, 114, 115, 217, 218]. Ещё одной популярной моделью  $X(3872)$  является тетрокварковая модель (см. работы [84–86, 219]). Наконец, относительно недавно была предложена модель адрочармония [220, 221], позволяющая естественным образом объяснить большую вероятность распада экзотического состояния в низколежащий чармоний плюс лёгкие адроны. В данной главе обсуждается модель связанных каналов для  $X(3872)$ , подробно изложенная в первой главе диссертации. Ключевым моментом данной модели является сильная связь компактного кваркового состояния с адронным каналом, следствием которой является возникновение полюса матрицы рассеяния в околопороговой области и, как результат, появление в форме линии пикообразной структуры на адронном пороге [24, 25, 65–67]. При этом наиболее естественным кандидатом на роль компактной компоненты  $X(3872)$  является вышеупомянутый истинный чармоний  $\chi'_{c1}$ , однако примесь тетракварка также не исключена.

Целью данного раздела является демонстрация того, что совокупности данных, полученных на  $B$ -фабриках для двух- и трёхпионных мод распада  $X(3872)$  достаточно для того, чтобы сделать заключение в пользу квантовых чисел  $1^{++}$  для  $X(3872)$  при условии, что делается совместный анализ обеих мод [27]. Для этого построим амплитуды перехода в конечные состояния с двумя и тремя пионами через промежуточные  $\rho$  и  $\omega$  мезоны с учётом их смешивания:

$$A_{2\pi} = A_{X \rightarrow J/\psi \rho} G_\rho A_{\rho \rightarrow 2\pi} + A_{X \rightarrow J/\psi \omega} G_\omega \epsilon G_\rho A_{\rho \rightarrow 2\pi}, \quad (4.18)$$

$$A_{3\pi} = A_{X \rightarrow J/\psi \omega} G_\omega A_{\omega \rightarrow 3\pi} + A_{X \rightarrow J/\psi \rho} G_\rho \epsilon G_\omega A_{\omega \rightarrow 3\pi},$$

где пропагаторы векторных мезонов даются формулой

$$G_V^{-1} = m_V^2 - m^2 - im_V \Gamma_V(m), \quad V = \rho, \omega, \quad (4.19)$$

а через  $m = m_{\pi\pi}$  ( $m = m_{\pi\pi\pi}$ ) обозначена инвариантная масса системы  $\pi^+\pi^-$  ( $\pi^+\pi^-\pi^0$ ) в конечном состоянии  $\pi^+\pi^- J/\psi$  ( $\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$ ). Параметр  $\rho$ - $\omega$  смешивания  $\epsilon$  извлекается из ширины распада  $\omega \rightarrow 2\pi$  в предположении, что этот распад протекает через переход  $\omega \rightarrow \rho$  с последующим распадом  $\rho \rightarrow 2\pi$ . Это даёт амплитуду

$$A_{\omega \rightarrow 2\pi} = \epsilon G_\rho A_{\rho \rightarrow 2\pi} \quad (4.20)$$

и численную оценку

$$\epsilon \approx \sqrt{m_\omega m_\rho \Gamma_\rho \Gamma_{\omega \rightarrow 2\pi}} \approx 3.4 \times 10^{-3} \text{ ГэВ}^2. \quad (4.21)$$

Наконец, амплитуда перехода  $X \rightarrow J/\psi V$  предполагается равной константе, умноженной на “барьерный фактор” Блата-Вайскопфа

$$A_{X \rightarrow J/\psi V} = g_{XV} f_{IX}(p), \quad (4.22)$$

Fit	Wave	$J^{PC}$	$r, \text{GeV}^{-1}$	$R_X = g_{X\rho}/g_{X\omega}$	$\chi^2/N_{\text{dof}}$	CL	Точки на рис. 4.2
$S$	$S$	$1^{++}$	—	$0.26_{-0.05}^{+0.08}$	1.07	37%	треугольники
$P_5$	$P$	$2^{-+}$	5	$0.15_{-0.03}^{+0.05}$	1.33	14%	квадраты
$P_1$	$P$	$2^{-+}$	1	$0.09_{-0.02}^{+0.03}$	2.77	$10^{-5}$	ромбы

Таблица 4.1. Наборы параметров и оценка достоверности фитов. В последней колонке даны ссылки на соответствующие кривые на рис. 4.2.

где  $p$  есть импульс  $J/\psi$  мезона в конечном состоянии, а  $l$  — угловой момент, принимающий значения  $l = 0$  и  $l = 1$ , что соответствует квантовым числам  $1^{++}$  и  $2^{-+}$  для  $X(3872)$ , причём

$$f_{0X}(p) = 1, \quad f_{1X}(p) = (1 + r^2 p^2)^{-1/2}. \quad (4.23)$$

Величина “радиуса”  $r$  плохо определена, поэтому для неё рассматриваются два значения:  $r \sim 0.2 \text{ Фм} = 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ , что является феноменологически обоснованной величиной (например, определяется массами легчайших частиц доступных для обмена в  $t$  канале), а также  $r = 5 \text{ ГэВ}^{-1}$  — величина, используемая в экспериментальных подгонках.

Полученные в таких предположениях теоретические формулы для массовых распределений в двух- и трёхпионной системах принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dBr_{2\pi}}{dm} &= \mathcal{B} m_\rho \Gamma_{\rho \rightarrow 2\pi} p^{2l+1} f_{lX}^2(p) |R_X G_\rho + \epsilon G_\rho G_\omega|^2, \\ \frac{dBr_{3\pi}}{dm} &= \mathcal{B} m_\omega \Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi} p^{2l+1} f_{lX}^2(p) |G_\omega + \epsilon R_X G_\omega G_\rho|^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

и определяются всего двумя параметрами: отношением  $R_X = g_{X\rho}/g_{X\omega}$  и общей нормировкой  $\mathcal{B}$ , включающей в себя детали рождения  $X$ . Поскольку общая нормировка выпадает из отношения полных брэнчингов

$$\left( \int \frac{dBr_{3\pi}}{dm} dm \right) / \left( \int \frac{dBr_{2\pi}}{dm} dm \right), \quad (4.25)$$

то единственный параметр ( $R_X$ ), от которого зависит данное отношение, полностью фиксируется экспериментальным значением (4.15) и, следовательно, он не является подгоночным при фитировании экспериментальных массовых распределений для конечных состояний  $\pi\pi$  и  $\pi\pi\pi$ . Следовательно, форма таких распределений полностью фиксируется радиусом  $r$ , а единственный подгоночный параметр  $\mathcal{B}$  определяет лишь общую нормировку в обеих модах одновременно. В таблице 4.1 приведены параметры распределений, полученные одновременной подгонкой экспериментальных данных по двух- и трёхпионным модам. На рис. 4.2 приведены соответствующие распределения, наложенные на экспериментальные данные.

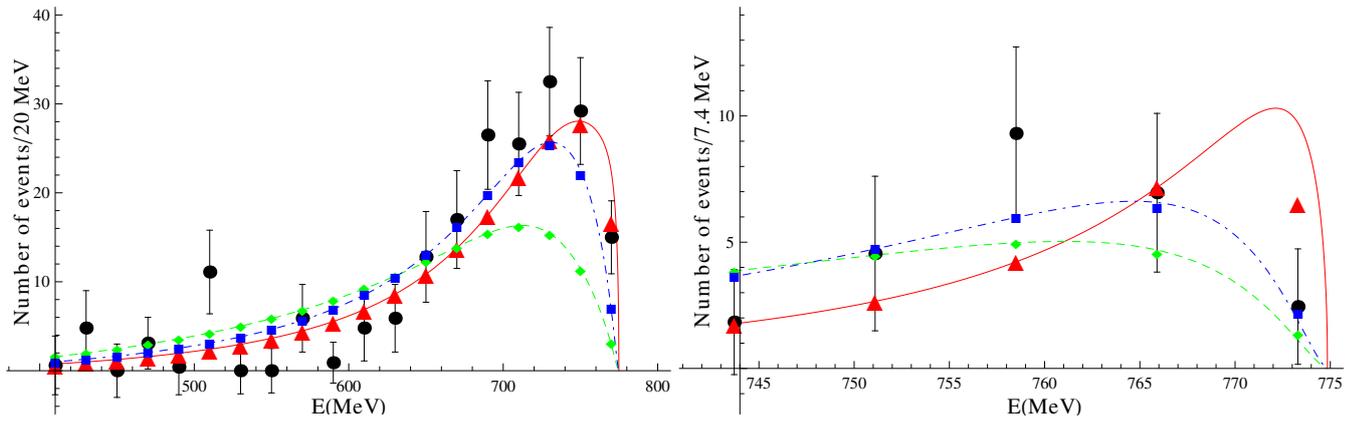


Рис. 4.2. Сравнение теоретических предсказаний с экспериментальными данными для двухпионной моды (левый график, данные взяты из работы [199]) и для трёхпионной моды (правый график, данные взяты из работы [209]). Фит  $S$  (см. таблицу 4.1) показан сплошной красной линией, фит  $P_1$  — штриховой зелёной линией, фит  $P_5$  — штрих-пунктирной голубой линией. Цвет теоретических точек (интегралов по бинам) совпадает с цветом соответствующей кривой.

Из таблицы 4.1 и рис. 4.2 видно, что наилучшее описание данных обеспечивается  $S$ -волновым фитом, отвечающим квантовым числам  $1^{++}$ . Дополнительным аргументом в пользу данного фита является возможность интерпретации большого нарушения изоспина (большой параметр  $R_X$ ) вкладом  $D$ -мезонных петель [122, 222]. В случае  $P$ -волновых фитов, как уже упоминалось выше, естественным отождествлением для  $X$  является истинный чармоний. В этом случае параметр  $R_X$  должен принимать характерные для чармониев значения, то есть  $R_X \sim 10^{-2}$ , что существенно меньше значений, извлечённых из данных [27]. Следовательно, к уже упоминавшимся выше проблемам с квантовыми числами  $2^{+-}$  добавилась ещё одна — невозможность интерпретировать большое нарушение изоспина в распадах  $X$ . Таким образом, вывод, с неизбежностью вытекающий из совместного теоретического анализа данных по двух- и трёхпионным модам распада  $X$ , состоит в предпочтительности квантовых чисел  $1^{++}$  по сравнению с квантовыми числами  $2^{+-}$ , что совпадает с заключением, сделанным коллаборацией LHCb на основании анализа данных по распаду  $X \rightarrow \pi\pi J/\psi$  [201].

Рассмотренный в данном разделе пример лишний раз подчёркивает важность проведения совместного анализа данных по всем известным модам рождения и распада окологорогового резонанса для надёжного установления его свойств.

### 4.3. Природа состояния $X(3872)$ из данных

Во второй главе диссертации была предложена параметризация общего вида, позволяющая одновременно описывать околопороговые явления во всех экспериментально измеренных каналах рождения и распада изучаемого резонанса (или системы резонансов). Данные по модам распада чармонийподобного состояния  $X(3872)$  описываются довольно простым частным случаем такой параметризации. Как уже упоминалось выше, наиболее реалистичной является модель волновой функции  $X(3872)$ , содержащей как короткодействующую, так и дальнодействующую части. В силу близости массы  $X$  к порогу  $D\bar{D}^*$  естественно предположить, что дальнодействующая часть его волновой функции описывается  $S$ -волновой мезонной компонентой  $D\bar{D}^*$ , тогда как короткодействующая часть даётся истинным кваркониумом, через который  $X$  может рождаться, а также распадаться по ряду каналов<sup>2</sup>. Более конкретно, физическая система содержит затравочный полюс, отождествляемый в дальнейшем с истинным  $\bar{c}c$  чармониумом  $\chi'_{c1}$  (радиально возбуждённым аксиально-векторным  $\bar{c}c$  состоянием), два упругих канала (заряженный и нейтральный каналы  $D\bar{D}^*$ , расщеплённые по энергии на величину  $\delta = M(D^+D^{*-}) - M(D^0\bar{D}^{*0}) \approx 8$  МэВ), а также набор неупругих каналов, два из которых ( $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$ ) учитываются явно, а остальные — эффективно, в виде дополнительной неупругости  $\Gamma_0$ . Для описания имеющихся в настоящий момент экспериментальных данных достаточно свести задачу к простому двухканальному обобщению стандартного одноканального распределения Флатте и учесть неупругие каналы с помощью эффективной ширины  $\Gamma(E)$  [24]:

$$\Gamma(E) = \Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi}(E) + \Gamma_{\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi}(E) + \Gamma_0, \quad (4.26)$$

$$\Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi}(E) = f_\rho \int_{2m_\pi}^{M-m_{J/\psi}} \frac{dm}{2\pi} \frac{q(m)\Gamma_\rho}{(m-m_\rho)^2 + \Gamma_\rho^2/4}, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi}(E) = f_\omega \int_{3m_\pi}^{M-m_{J/\psi}} \frac{dm}{2\pi} \frac{q(m)\Gamma_\omega}{(m-m_\omega)^2 + \Gamma_\omega^2/4}, \quad (4.28)$$

где

$$q(m) = \sqrt{\frac{(M^2 - (m + m_{J/\psi})^2)(M^2 - (m - m_{J/\psi})^2)}{4M^2}}, \quad M = M(D^0\bar{D}^{*0}) + E, \quad (4.29)$$

$f_\rho$  и  $f_\omega$  есть константы, а  $m_\rho$ ,  $m_\omega$  и  $\Gamma_\rho$ ,  $\Gamma_\omega$  есть массы и ширины  $\rho$  и  $\omega$  мезонов соответственно [89].

<sup>2</sup> Альтернативной моделью являются компактные тетракварки (см., например, работы [219, 223]). Расчёт масс тетракварков, содержащих тяжёлые кварки, можно найти, например, в работах [85–87]. Методы, изложенные в диссертации, применимы также и в случае отождествления компактной компоненты  $X(3872)$  с тетракварком при наличии соответствующих оценок и расчётов для последних.

Оценим величину  $\Gamma_0$ , то есть вклад в ширину  $X(3872)$  мод распада, за которые отвечает короткодействующая часть его волновой функции — чармониевая компонента  $\chi'_{c1}$ . К числу таких мод будем относить различные аннигиляционные моды распада в лёгкие адроны, радиационные распады<sup>3</sup>, двухпионные моды типа  $X \rightarrow \chi_{1c}(3515)\pi\pi$  и другие. Иными словами, речь идёт обо всех модах распада, кроме каналов  $\rho J/\psi$ ,  $\omega J/\psi$  и  $D\bar{D}^*$ , которые включены в модель явно. Тогда, если взять за основу известную полную ширину чармония  $\chi_{c1}(3515)$ , равную  $0.89 \pm 0.05$  МэВ [89], а также оценки для полной ширины  $\chi'_{c1}$ , сделанные в рамках кварковой модели и дающие величину 1.72 МэВ [210], то довольно естественно предположить, что параметр  $\Gamma_0$  должен принимать значения порядка 1-2 МэВ. Соотнеся эту оценку с верхним ограничением на ширину состояния  $X(3872)$  (4.3), зафиксируем данный параметр в виде:

$$\Gamma_0 = 1 \text{ МэВ.} \quad (4.30)$$

Небольшие вариации параметра  $\Gamma_0$  вблизи значения (4.30) приводят лишь к незначительным количественным изменениям параметров, извлечённых из фитов к данным, и никак не сказываются на качественных выводах относительно природы и свойств состояния  $X(3872)$ .

В результате для амплитуды рассеяния в первом упругом канале ( $D^0\bar{D}^{*0}$ ) можно записать:

$$F(E) = -\frac{1}{2k_1} \frac{g_1 k_1}{D(E)}, \quad (4.31)$$

$$D(E) = \begin{cases} E - E_f - \frac{1}{2}(g_1 \kappa_1 + g_2 \kappa_2) + \frac{i}{2}\Gamma(E), & E < 0 \\ E - E_f - \frac{1}{2}g_2 \kappa_2 + \frac{i}{2}(g_1 k_1 + \Gamma(E)), & 0 < E < \delta \\ E - E_f + \frac{i}{2}(g_1 k_1 + g_2 k_2 + \Gamma(E)), & E > \delta, \end{cases} \quad (4.32)$$

где

$$k_1 = \sqrt{2\mu_1 E}, \quad \kappa_1 = \sqrt{-2\mu_1 E}, \quad k_2 = \sqrt{2\mu_2(E - \delta)}, \quad \kappa_2 = \sqrt{2\mu_2(\delta - E)},$$

а  $\mu_1$  и  $\mu_2$  есть приведённые массы в упругих каналах. В изоспиновом пределе, который является хорошим приближением для рассматриваемой системы, можно положить  $g_1 = g_2 = g$  (при этом, разумеется, массы нейтральных и заряженных мезонов по-прежнему различаются).

Поскольку  $D^{*0}$  мезон нестабилен, то необходимо принять во внимание брэнчинги его распадов [89]:

$$Br(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) = (61.9 \pm 2.9)\%, \quad (4.33)$$

$$Br(D^{*0} \rightarrow D^0\gamma) = (38.1 \pm 2.9)\%, \quad (4.34)$$

<sup>3</sup> Предположение о том, что радиационные распады слабо чувствительны к дальнедействующей компоненте волновой функции  $X(3872)$  подтверждено расчётами, приведёнными в разделе 4.4.

а также учесть интерференцию сигнала и фона в канале  $DD^*$ , которая определяется двумя параметрами: величиной  $c$  и фазой  $\phi$ . Тогда окончательно находим для дифференциальных вероятностей рождения в упругом и в неупругом каналах:

$$\frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0)}{dE} = 0.62 \frac{k_1}{2\pi} \left[ \left( \operatorname{Re} \frac{\sqrt{g\mathcal{B}}}{D(E)} + c \cos \phi \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \frac{\sqrt{g\mathcal{B}}}{D(E)} + c \sin \phi \right)^2 \right], \quad (4.35)$$

$$\frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\gamma)}{dE} = 0.38\mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{gk_1}{|D(E)|^2}, \quad (4.36)$$

$$\frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^-J/\psi)}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{\pi^+\pi^-J/\psi}(E)}{|D(E)|^2}, \quad (4.37)$$

$$\frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^-\pi^0J/\psi)}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{\pi^+\pi^-\pi^0J/\psi}(E)}{|D(E)|^2}, \quad (4.38)$$

где общий нормировочный параметр  $\mathcal{B}$  учитывает короткодействующую динамику слабого перехода  $B \rightarrow KX$ . Поскольку типичные чармонии рождаются в распадах  $B$  мезонов с примерно одинаковой относительной вероятностью, например, [89]

$$\begin{aligned} Br(B^+ \rightarrow K^+J/\psi) &= (10.22 \pm 0.35) \times 10^{-4}, \\ Br(B^+ \rightarrow K^+\psi') &= (6.48 \pm 0.35) \times 10^{-4}, \\ Br(B^+ \rightarrow K^+\chi_{c1}) &= (5.1 \pm 0.5) \times 10^{-4}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

то довольно естественно предположить, что

$$\mathcal{B} \equiv Br(B \rightarrow K\chi'_{c1}) = (3 \div 6) \cdot 10^{-4}. \quad (4.40)$$

Заметим, что в работе [224] выполнена теоретическая (модельно зависимая) оценка брэнчинга рождение  $\chi'_{c1}$ :  $Br(B \rightarrow K\chi'_{c1}) = 2 \times 10^{-4}$ . Однако из сравнения других оценок в рамках той же модели с экспериментальными данными (4.39) видно, что модель систематически занижает оценку примерно в 2 раза. Таким образом, можно говорить и о некоторой теоретической обоснованности выбранного диапазона значений  $\mathcal{B}$  (4.40).

Для последнего ингредиента, необходимого для анализа данных, то есть для спектральной плотности нетрудно найти явное выражение:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi|D(E)|^2} (gk_1\Theta(E) + gk_2\Theta(E - \delta) + \Gamma(E)). \quad (4.41)$$

В соответствии с подходом, изложенным в разделе 1.4, интеграл от величины (4.41)

$$W = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} w(E)dE, \quad (4.42)$$

	$\Gamma(X \rightarrow \gamma J/\psi)$ [кэВ]	$\Gamma(X \rightarrow \gamma \psi')$ [кэВ]	$R$ (см. определение (4.14))
Работа [210]	11	64	5.8
Работа [212]	70	180	2.6
Работа [225]	50-70	50-60	$0.8 \pm 0.2$
Работа [226]	30.8-42.7	70.5-73.2	1.65-2.38

Таблица 4.2. Некоторые типичные примеры оценок ширин радиационных ширин распада  $2^3P_1$  чармония в рамках кварковой модели.

вычисленный по околопороговой области, определяет примесь истинного чармония  $\chi'_{c1}$  в волновой функции  $X(3872)$ . В рассматриваемой задаче естественным определением такой околопороговой области является интервал энергий  $-10 \text{ МэВ} \lesssim E \lesssim 10 \text{ МэВ}$ , покрывающий как нейтральный трёхчастичный порог при  $E_{D^0 \bar{D}^0 \pi^0} \approx -7 \text{ МэВ}$ , так и заряженный двухчастичный порог при  $E_{D^+ \bar{D}^{*-}} \equiv \delta \approx 8 \text{ МэВ}$ .

С помощью введённого выше параметра  $\mathcal{B}$  нетрудно оценить полный брэнчинг рождения  $X$  через чармониевую компоненту. Для этого необходимо домножить величину  $\mathcal{B}$  на вероятность обнаружения  $X(3872)$  в виде истинного чармония, то есть на величину  $W$  из формулы (4.42) (см. раздел 1.4 и, в частности, формулу (1.35)). Таким образом, приходим к следующему условию:

$$Br(B \rightarrow KX) = \mathcal{B}W < 3.2 \cdot 10^{-4}, \quad (4.43)$$

где было использовано экспериментальное ограничение (4.4).

Наконец, для дальнейшего использования необходимо оценить ширины радиационных распадов  $X(3872)$ . Как указывалось выше, такие распады в основном чувствительны к короткодействующей (кварковой) части волновой функции  $X$ . В таблице 4.2 приведены некоторые типичные значения ширин радиационных распадов  $2^3P_1$  чармония, полученные в рамках различных кварковых моделей. Резюмируя процитированные теоретические значения, а также имея ввиду экспериментально измеренное отношение (4.14), будем в дальнейшем использовать следующие оценки:

$$\Gamma(\chi'_{c1} \rightarrow \gamma J/\psi) \simeq 50 \text{ кэВ}, \quad \Gamma(\chi'_{c1} \rightarrow \gamma \psi') \simeq 100 \text{ кэВ}. \quad (4.44)$$

Таким образом, полученная модель описывается формулами (4.35)-(4.38) и задаётся набором 8 параметров:

$$\Gamma_0, \quad g, \quad E_f, \quad f_\rho, \quad f_\omega, \quad \mathcal{B}, \quad \phi, \quad c \quad (4.45)$$

и описывает форму линии  $X(3872)$  в области энергий вблизи нейтрального порога  $D\bar{D}^*$ .

Коллаборация	Канал	$N_{\text{tot}}$	$Br_{\text{tot}}$	$E_{\text{bin}}$ , МэВ	$\sigma$ , МэВ
Belle	$\pi^+\pi^- J/\psi$	131	$8.3 \cdot 10^{-6}$	2.5	3
Belle	$D^0\bar{D}^0\pi^0$	48.3	$0.73 \cdot 10^{-4}$	2.0	$0.172\sqrt{m - M(D\bar{D}^*)}$
BABAR	$\pi^+\pi^- J/\psi$	93.4	$8.4 \cdot 10^{-6}$	5	4.38
BABAR	$D\bar{D}^*$	33.1	$1.67 \cdot 10^{-4}$	2.0	1

Таблица 4.3. Параметры экспериментальных распределений, принадлежащих коллаборациям Belle [199, 204] и BABAR [198, 205].

Здесь следует сделать замечание относительно определения дифференциальных брэнчингов (4.35)-(4.38). Очевидно, что, тогда как брэнчинги (4.37) и (4.38) определены как при положительных, так и при отрицательных энергиях, брэнчинги (4.35) и (4.36) пропорциональны импульсу в канале  $D^0\bar{D}^{*0}$  и потому отличны от нуля лишь при  $E > 0$ . При этом однако следует иметь виду, что  $D^{*0}$  мезон нестабилен и может распадаться в конечные состояния  $D^0\pi$  и  $D^0\gamma$  [89] (см. формулы (4.33) и (4.34)). В разделе 3.2 подробно обсуждался вопрос о феноменологическом учёте конечной ширины конститuenta в форме линии околопорогового резонанса. В частности, был установлен параметр  $\lambda$  (см. формулу (3.41)), контролирующий влияние такой конечной ширины (и связанной с ней трёхчастичной динамики) на форму линии резонанса. В данном случае нетрудно найти, что

$$\lambda = \frac{\Gamma_*}{|E_{D^0\bar{D}^0\pi^0}|} = \frac{60 \text{ кэВ}}{7 \text{ МэВ}} \approx 10^{-2} \ll 1, \quad (4.46)$$

где для полной ширины  $D^{*0}$  мезона была использована оценка

$$\Gamma_* \approx 60 \text{ МэВ}, \quad (4.47)$$

которую можно получить с помощью экспериментально измеренной ширины заряженного  $D^*$  мезона  $83.4 \pm 1.8$  кэВ [89] (см. Приложение Г). Таким образом, как видно из рис. 3.4, при столь малом значении параметра  $\lambda$  форма линии выше порога, то есть в той области, в которой существуют экспериментальные данные, совершенно нечувствительна к конечной ширине конститuenta. Однако ниже порога может образоваться пик, если  $X(3872)$  является связанным состоянием. Данный вопрос, а также связанная с ним проблема учёта интерференции [125] подробно обсуждаются в конце этого раздела, а на данном этапе достаточно ограничиться пределом стабильного  $D^{*0}$  мезона.

Таким образом, постановка задачи состоит в одновременном анализе экспериментальных данных в каналах  $D\bar{D}^*$  и  $\rho J/\psi$  с помощью формул (4.35) и (4.37), причём параметры и предсказания модели должны подчиняться условиям (4.15), (4.40), (4.43), (4.30) и (4.44).

Анализируемые в этом разделе данные принадлежат коллаборациям Belle (см. работу [204]

Набор	$g$	$E_f$	$f_\rho \cdot 10^3$	$f_\omega \cdot 10^3$	$\mathcal{B} \cdot 10^4$	$\phi, ^\circ$	$W$	$\mathcal{B}W \cdot 10^4$	$\text{Re}(a)$	$\Gamma(\gamma\psi')$
Belle <sub>v</sub>	0.3	-12.8	7.7	40.7	2.7	180	0.19	0.5	-5.0	$\sim 10^3$
Belle <sub>b</sub>	0.137	-12.3	0.47	2.71	4.3	153	0.43	1.9	3.5	60
BABAR <sub>v</sub>	0.225	-9.7	6.5	36.0	3.9	113	0.24	1.8	-4.9	800
BABAR <sub>b</sub>	0.080	-8.4	0.2	1.0	5.7	0	0.58	3.3	2.2	25

Таблица 4.4. Наборы параметров для описания данных коллабораций Belle [199, 204] и BABAR [198, 205]. Нижний индекс в названии набора обозначает связанное состояние (b) или виртуальный уровень (v). Величины  $E_f$  и  $\Gamma(\gamma\psi')$  даны в МэВ, длина рассеяния  $a$  дана в Фм.

для канала  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  и работу [199] для канала  $\pi^+\pi^-J/\psi$  и BABAR (см. работу [205] для канала  $D^0\bar{D}^{*0}$ , являющегося суммой каналов  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  и  $D^0\bar{D}^0\gamma$ , и работу [198] для канала  $\pi^+\pi^-J/\psi$ ). При этом дифференциальные вероятности рождения можно перевести в распределения числа событий по энергии с помощью простого соотношения:

$$N(E) = E_{\text{bin}} \left( \frac{N_{\text{tot}}}{Br_{\text{tot}}} \right) \frac{dBr}{dE}, \quad (4.48)$$

где  $N_{\text{tot}}$  есть полное число событий,  $Br_{\text{tot}}$  есть полный брэнчинг, а  $E_{\text{bin}}$  есть размер бина. Наконец, распределение (4.48) необходимо свернуть с функцией разрешения детектора, которая является гауссовой функцией с параметром  $\sigma$ . В таблице 4.3 приведены экспериментальные параметры, входящие в распределение (4.48). Поскольку функция разрешения BABAR в канале  $D^0\bar{D}^{*0}$  имеет довольно сложную форму и при этом является закрытой информацией коллаборации, то в расчётах использовалась гауссова функция с параметром  $\sigma = 1$  МэВ. Таким образом, приходим к следующим распределениям числа событий по энергии:

$$N_{\text{Belle}}^{\pi\pi J/\psi}(E) = 2.5 [\text{МэВ}] \left( \frac{131}{8.3 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^-J/\psi)}{dE}, \quad (4.49)$$

$$N_{\text{Belle}}^{D^0\bar{D}^0\pi^0}(E) = 2.0 [\text{МэВ}] \left( \frac{48.3}{0.73 \cdot 10^{-4}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0)}{dE}, \quad (4.50)$$

$$N_{\text{BABAR}}^{\pi\pi J/\psi}(E) = 5 [\text{МэВ}] \left( \frac{93.4}{8.4 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^-J/\psi)}{dE}, \quad (4.51)$$

$$N_{\text{BABAR}}^{D^0\bar{D}^{*0}}(E) = 2.0 [\text{МэВ}] \left( \frac{33.1}{1.67 \cdot 10^{-4}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^{*0})}{dE}. \quad (4.52)$$

Процедура состоит в одновременной подгонке данных одной и той же коллаборации в каналах  $\pi^+\pi^-J/\psi$  и  $D^0\bar{D}^{*0}$ . При этом минимизируется величина

$$\chi^2(\pi^+\pi^-J/\psi)/N_{\text{tot}}(\pi^+\pi^-J/\psi) + \chi^2(D^0\bar{D}^{*0})/N_{\text{tot}}(D^0\bar{D}^{*0}).$$

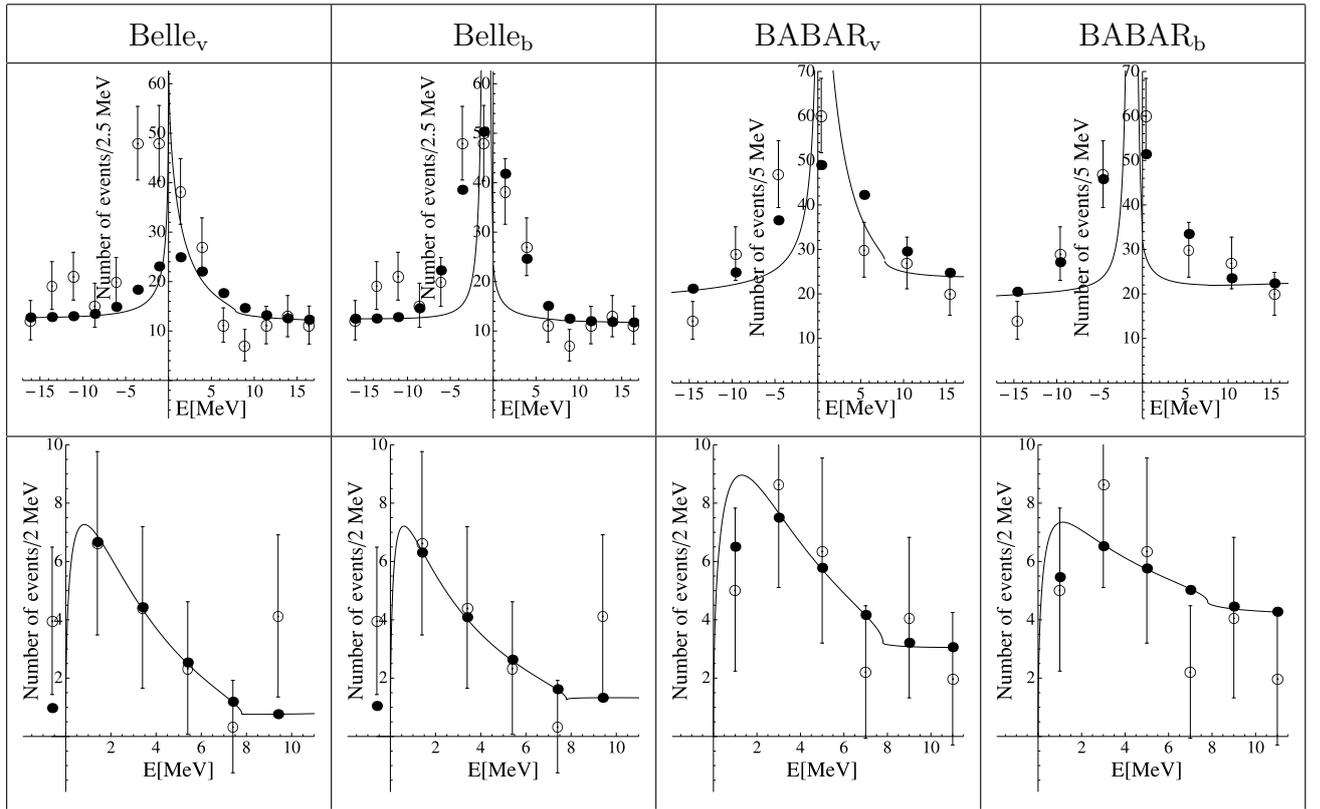


Рис. 4.3. Описание экспериментальных данных в каналах  $\pi^+\pi^-J/\psi$  (верхний ряд) и  $D^0\bar{D}^{*0}$  (нижний ряд) с помощью параметров, приведённых в таблице 4.4.

Необходимость использования такого подхода диктуется большой разницей в качестве данных в двух описываемых наборах — при использовании стандартного метода минимизации суммарного по двум каналам  $\chi^2$  влияние моды  $D^0\bar{D}^{*0}$  оказывается чрезвычайно слабым, что по сути сводит задачу к описанию лишь моды  $\pi^+\pi^-J/\psi$ . Нетрудно видеть, что используемый подход эквивалентен введению весового фактора

$$N_{\text{tot}}(\pi^+\pi^-J/\psi)/N_{\text{tot}}(D^0\bar{D}^{*0}) \simeq 3$$

(см. таблицу 4.3) перед вкладом в  $\chi^2$  моды  $D^0\bar{D}^{*0}$ .

Напомним, что в разделе 3.2 подробно обсуждались различия в форме линии связанного состояния и виртуального уровня и было отмечено, что отличить данные ситуации можно по знаку действительной части длины рассеяния, для которой нетрудно получить следующую формулу:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2\mu_2\delta} + (2E_f - i\Gamma(0))/g}. \quad (4.53)$$

Таким образом, для каждого набора данных рассматриваются две возможности: связанное состояние и виртуальный уровень. В таблице 4.4 приведены несколько наборов параметров, обеспечивающих наилучшее описание данных в соответствии с приведённым выше критерием. Название каждого набора содержит указание на коллаборацию, чьи данные обрабатываются, а также на вид

описания: связанное состояния (b) или виртуальный уровень (v). Длина рассеяния вычисляется по формуле (4.53), а для оценки ширины  $\Gamma(\gamma\psi')$  используется экспериментальное соотношение  $Br(\gamma\psi') \simeq Br(\pi^+\pi^- J/\psi)$  (см. формулу (4.12)), что даёт:

$$\Gamma(\gamma\psi') \simeq \Gamma_0 Br(\gamma\psi') \simeq \Gamma_0 Br(\pi^+\pi^- J/\psi) = \Gamma_0 \int \frac{dBr(\pi^+\pi^- J/\psi)}{dE} dE. \quad (4.54)$$

Заметим, что для набора параметров Belle<sub>v</sub> величина  $\Gamma_0$  взята равной 1.1 МэВ, что несколько превышает глобально принятое значение (4.30). Это сделано для того, чтобы обеспечить выполнение соотношения  $Br(\gamma\psi') \simeq Br(\pi^+\pi^- J/\psi)$ . На рис. 4.3 теоретические кривые формы линии резонанса для всех четырёх случаев (а также отвечающие им интегралы по бинам, показанные чёрными точками) сравниваются с экспериментальными данными (кружки с ошибками) [24, 25].

Полученные описания данных позволяют сделать некоторые выводы о природе состояния  $X(3872)$ . Во-первых, из проведённого анализа следует, что  $X(3872)$  является связанным состоянием. Действительно, описание данных виртуальным уровнем заметно уступает по качеству описанию связанным состоянием. Прежде всего, виртуальный уровень отвечает пороговому каспу в неупругом канале, что плохо согласуется с данными в канале  $\pi^+\pi^- J/\psi$  (это особенно заметно в данных Belle). Кроме того, оценка ширины распада  $\Gamma(\gamma\psi')$  для виртуального уровня выглядит неестественно большой по сравнению с ожидаемым значением, приведённым в формуле (4.44). При этом описание данных в предположении о том, что  $X$  есть связанное состояние, является достаточно хорошим как для данных коллаборации Belle, так и для данных BABAR, причём оценка ширины  $\Gamma(\gamma\psi')$  в этом случае также находится в хорошем качественном согласии с (4.44).

Вычисленные длины рассеяния позволяют оценить энергию связи  $X(3872)$ , причём для качественной оценки достаточно ограничиться действительной частью  $a$ , приведённой в таблице 4.4. Тогда для наиболее реалистического набора параметров Belle<sub>b</sub> нетрудно найти:

$$E_B \approx \frac{1}{2\mu(\text{Re}(a))^2} \simeq 0.8 \text{ МэВ}, \quad (4.55)$$

что совместимо с ожиданиями  $E_B \lesssim 1$  МэВ, хотя несколько превышает значение (4.2). Однако, имея ввиду недостаточно высокое качество данных для описания столь тонкого эффекта, как маленькая энергия связи  $X$ , данную оценку следует рассматривать исключительно в качестве оценки по порядку величины. В дальнейшем там, где это необходимо, для определённости будет использоваться значение энергии связи  $X(3872)$  равное

$$E_B = 0.5 \text{ МэВ}. \quad (4.56)$$

Во-вторых, значения интеграла по околопороговой области от спектральной плотности  $W$ , приведённые в таблице 4.4 для наборов параметров Belle<sub>b</sub> и BABAR<sub>b</sub> указывают на примерно

50-процентную примесь чармония  $\chi'_{c1}$  в волновой функции  $X$ . Такая картина хорошо согласуется с результатами работы [65], в которой в рамках модели связанных каналов предсказано возникновение в канале  $1^{++}$  структуры на нейтральном пороге  $D\bar{D}^*$ , а также с результатами работ [66, 67], в которых количественно описан процесс возникновения такой структуры за счёт сильной связи кварк-антикваркового чармония с адронным каналом.

В-третьих, как обсуждалось в разделе 3.2, в случае связанного состояния конечная ширина конstituента приводит к возникновению пика связанного состояния [12, 81, 124]. Ввиду малости ширины  $D^{*0}$  в формулах (4.35)-(4.38) этим эффектом было пренебрежено<sup>4</sup>. Следует однако оценить его величину более точно. Для этого воспользуемся простым рецептом включения конечной ширины конstituента, предложенным в работах [81, 123, 124], и произведём в формулах замену

$$\Theta(E)k_1(E) \rightarrow \sqrt{\mu_1} \sqrt{\sqrt{E^2 + \Gamma_*^2/4} + E}, \quad (4.57)$$

$$\Theta(-E)\kappa_1(E) \rightarrow \sqrt{\mu_1} \sqrt{\sqrt{E^2 + \Gamma_*^2/4} - E}, \quad (4.58)$$

где  $\Gamma_*$  есть ширина  $D^{*0}$  мезона (см. формулу (4.47)). В соответствии с результатами раздела 3.2, в данном случае такой подход полностью адекватен, поскольку пик связанного состояния разнесён достаточно далеко с трёхчастичным порогом (см. оценку (4.46), дающую  $\lambda \ll 1$ ). Таким образом, достаточно сравнить количество событий в первом и втором бинах в данных коллаборации Belle в канале  $D\bar{D}^*$  с учётом конечной ширины  $D^{*0}$  и в её пренебрежении:

$$\tilde{N}_1/N_1 = 4.31, \quad \tilde{N}_2/N_2 = 1.01, \quad (4.59)$$

где использованы параметры набора Belle<sup>b</sup>,  $N_i$  есть число событий в  $i$ -м бине в пределе нулевой ширины  $D^{*0}$ , а  $\tilde{N}_i$  — то же число событий, но с учётом конечной ширины  $D^{*0}$  (формулы (4.57) и (4.58)). Из приведённого вычисления видно, что, как и ожидалось, учёт конечной ширины  $D^{*0}$  затрагивает лишь первый (в основном подпороговый) бин, тогда как, начиная со второго бина, данный эффект совершенно незаметен. Полученный результат находится в полном согласии с выводами раздела 3.2. Для большей наглядности на рис. 4.4 число событий  $\tilde{N}_1$  показано одновременно с  $N_1$ . Как видно из рисунка, согласие с экспериментом при этом заметно улучшается, однако это не должно вводить в заблуждение — полноценный экспериментальный учёт подпороговых событий в настоящий момент не представляется возможным ввиду недостаточной статистики. По этой же причине, а также ввиду недостаточного энергетического разрешения непосредственное экспериментальное наблюдение подпорогового пика  $X(3872)$  также невозможно.

<sup>4</sup> Наличие в данных коллаборации Belle по моде  $D\bar{D}^*$  (см. рис. 4.3), а также в их теоретическом описании точки под порогом является тривиальным следствием того, что в использованной разбивке по бинам центр первого бина расположен ниже номинального порога  $D^0\bar{D}^{*0}$ .

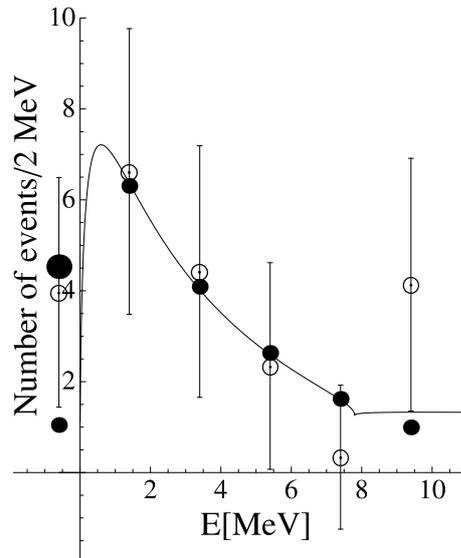


Рис. 4.4. Теоретическое описание данных коллаборации Belle в канале  $D\bar{D}^*$  (набор параметров Belle<sub>b</sub>). Жирная подпороговая точка отвечает учёту конечной ширины  $D^*$ .

Как уже обсуждалось выше, распад  $X \rightarrow D^0\bar{D}^0\pi^0$  может протекать двумя путями (см. формулу (3.61)), причём, в соответствии с результатами работы [125], интерференция между соответствующими амплитудами является конструктивной и может приводить к усилению сигнала под порогом. Такая интерференция подробно обсуждалась в разделе 3.2 выше. Её полноценный учёт возможен лишь при расширении базиса связанных каналов. Однако выше порога эффекты интерференции незаметны, поэтому пренебрежение ими при описании экспериментальных данных совершенно оправданно.

Таким образом, на основании совместного теоретического анализа экспериментальных данных по модам распада чармонийподобного состояния  $X(3872)$  сделан вывод о том, что оно является связанным состоянием, динамически сгенерённым за счёт сильной связи истинного чармония  $\chi'_{c1}$  с адронным каналом  $D\bar{D}^*$ . При этом примесь молекулярной компоненты  $D\bar{D}^*$  велика и составляет примерно 50% [24, 25, 34]. Примечательно, что до выхода обновленных данных, использованных в проведённом выше анализе, более старые данные, содержащиеся в работах [82, 203, 205], были совместимы друг с другом только в предположении о том, что  $X$  является виртуальным уровнем [23].

В заключение прокомментируем влияние параметра  $\Gamma_0$  на природу состояния  $X(3872)$ . Как обсуждалось выше, данный параметр интегрально учитывает вклад многочисленных мод распада чармония  $\chi'_{c1}$ . Рассмотрим отношение брэнчинга упругого канала к неупругим [23, 81]. В пределе  $\Gamma_0 = 0$  неупругие каналы исчерпываются модами  $\pi^+\pi^-J/\psi$  и  $\pi^+\pi^-\pi^0J/\psi$ . Поскольку брэнчинги

в этих модах примерно равны (см. формулу (4.15)), то достаточно рассмотреть отношение

$$\frac{Br(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{Br(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)}, \quad (4.60)$$

экспериментальное значение для которого можно оценить с помощью произведения брэнчингов [199]

$$Br(B^+ \rightarrow K^+ X) Br(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi) = (7 \div 10) \times 10^{-6} \quad (4.61)$$

а также значения (4.5). В итоге находим, что экспериментальное отношение (4.60) достаточно велико и равно приблизительно  $10 \div 15$ . Попытаемся воспроизвести такое отношение для связанного состояния. Поскольку дифференциальный брэнчинг в неупругих каналах даётся формулой

$$\mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(E)}{|D(E)|^2}, \quad (4.62)$$

причём при  $\Gamma_0 = 0$  полная ширина  $\Gamma(E)$  определяется лишь модами  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$  и поэтому весьма мала, то уместно рассмотреть предел  $\Gamma(E) \rightarrow 0$ . В этом пределе и при наличии связанного состояния (то есть нуля знаменателя) рейт (4.62) обращается в  $\delta$ -функцию

$$\mathcal{B} \left( \frac{\partial D(E)}{\partial E} \Big|_{E=E_B} \right)^{-1} \delta(E - E_B), \quad (4.63)$$

так что знаменатель в отношении (4.60) стремится к некоторой константе. В итоге нетрудно проверить, что отношение (4.60) в этом случае численно малó (см., например, работу [115]). В случае отказа от условия  $\Gamma_0 = 0$  неупругие моды уже не исчерпываются каналами  $\pi^+ \pi^- J/\psi$  и  $\pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi$ , так что отношение (4.60) трансформируется в отношение

$$\frac{Br(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{Br(X \rightarrow \text{non} D^0 \bar{D}^0 \pi^0)} \sim 1, \quad (4.64)$$

которое уже вполне достижимо. Таким образом, экспериментальные данные для  $X$  совместимы со связанным состоянием только при наличии ненулевого вклада в ширину, идущего от мод распада чармониевой компоненты  $\chi'_{c1}$ . Данный вывод хорошо согласуется с результатами анализа данных, проведённого выше в данном разделе, которые утверждают, что примесь чармониевой компоненты в волновой функции  $X(3872)$  составляет порядка 50%.

Заметим, что в случае виртуального уровня отношение (4.60) не накладывает на свойства  $X(3872)$  никаких ограничений даже в пределе  $\Gamma_0 = 0$ . Действительно, для виртуального уровня знаменатель распределения (4.62) не обращается в ноль, так что в пределе  $\Gamma(E) \rightarrow 0$  знаменатель отношения (4.60) может быть сколь угодно мал, а само отношение (4.60), соответственно, сколь угодно велико (например, в работе [23] в случае виртуального уровня это отношение получено равным 9.9). Впервые идея о том, что включение дополнительной неупругой ширины может позволить описать экспериментальные данные не только виртуальным уровнем, но также и связанным состоянием, была высказана в работе [227].

Таким образом, имеет место ситуация, упоминавшаяся во второй главе, а именно, существенно лучшее описание данных достигается при введении дополнительной неупругости, учитывающей вклады многочисленных неупругих каналов, пороги которых расположены далеко от интересующей нас области энергий вблизи нейтрального порога  $D\bar{D}^*$  [24]. Однако при обработке другого набора экспериментальных данных, сделанной в работе [23], введение дополнительной неупругости не потребовалось, поскольку её влияние на форму линии резонанса было минимальным. Таким образом, как и утверждалось во второй главе диссертации, необходимость введения дополнительной неупругости диктуется особенностями конкретного изучаемого набора данных.

#### 4.4. Радиационные распады $X(3872)$

В предыдущем разделе диссертации был проведён совместный анализ экспериментальных данных для состояния  $X(3872)$  в модах распада  $D\bar{D}^*$  и  $\rho J/\psi$ . В результате было установлено, что с имеющимися данными совместима картина  $X(3872)$  как связанного состояния с волновой функцией, содержащей кварковую и молекулярную компоненты примерно в равных долях. Как указывалось выше, в число экспериментально изученных процессов входят также радиационные моды распада  $X(3872)$  в конечные состояния  $\gamma J/\psi$  и  $\gamma\psi'$ . В частности, измерено отношение относительных вероятностей указанных радиационных распадов (см. формулу (4.14)). Качественно такие радиационные моды также учитывались в анализе данных, проведённом в предыдущем разделе. Так, на фит накладывалось требование соответствия ширины распада  $X \rightarrow \gamma\psi'$ , извлечённой из подгонки к данным, модельным оценкам для чармония  $\chi'_{c1}$ , приведённым в таблице 4.2 и резюмированным в уравнении (4.44). Таким образом, если предположить, что радиационные распады  $X(3872)$  протекают исключительно через кварковую компоненту его волновой функции, то экспериментальное отношение (4.14) может быть достаточно легко воспроизведено. При этом в литературе можно встретить мнение, что в молекулярной картине такое отношение (как и вообще сравнимое с единицей отношение  $R$ ) получить невозможно (см., например, работу [228]). С другой стороны, феноменологические оценки, сделанные в ряде работ (см., например, [229–231]), показывают, что уже небольшой примеси кваркония  $\bar{c}s$  (порядка 5-12%) в волновой функции  $X$  достаточно для объяснения экспериментальных данных. Таким образом, данный вопрос заслуживает более детального и систематического изучения, в связи с чем ниже в данном разделе приведён явный расчёт ширин указанных выше радиационных распадов в молекулярной картине и показано, что никакого противоречия с экспериментальными данными нет — при достаточно естественных предположениях о неизвестных параметрах модели (в частности, об отношении констант связи чармониев  $J/\psi$  и  $\psi'$  с  $D$  мезонами) экспериментальное отношение (4.14) может быть воспроиз-

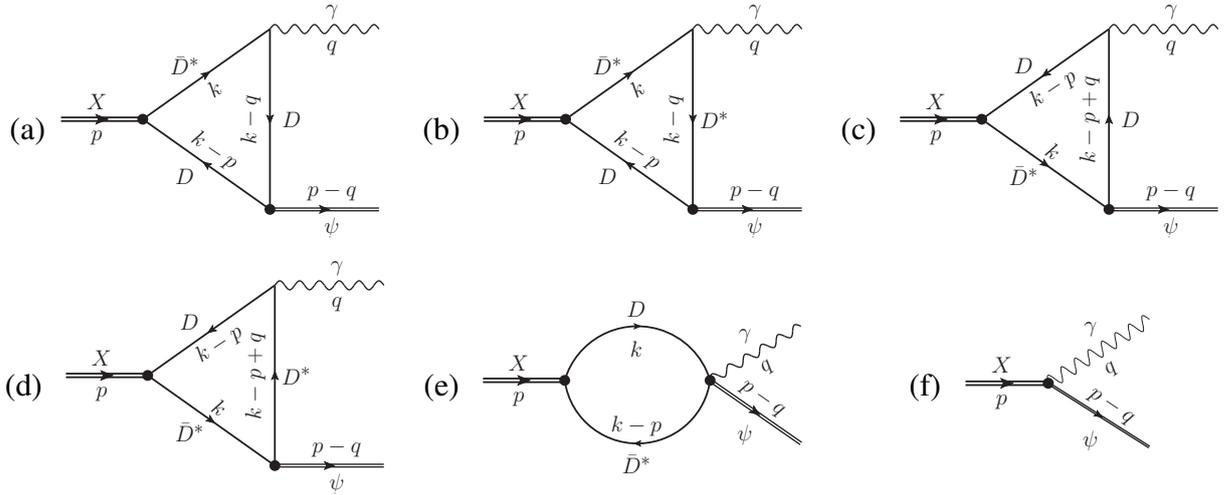


Рис. 4.5. Диаграммы ((a)-(e)), описывающие вклады в амплитуду радиационного распада  $X(3872) \rightarrow \gamma\psi$ , где  $\psi = J/\psi$  или  $\psi'$  в предположении о чисто молекулярной природе  $X$ . Аналогичные диаграммы для зарядово сопряжённых мезонов в петле дают идентичный вклад, который учтён в матричном элементе. Диаграмма (f) описывает вклад компактной компоненты волновой функции  $X$ , совместимой с кварк-антикварковой природой.

дено также и в молекулярной картине. Изложение раздела следует работе [33].

Предположим, что волновая функция  $X$  содержит лишь молекулярную компоненту, то есть имеет вид

$$|X(3872)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D\bar{D}^*\rangle + |\bar{D}D^*\rangle). \quad (4.65)$$

На рис. 4.5(a)-(e) приведены диаграммы, дающие вклад в амплитуду изучаемого радиационного распада  $X_\sigma(p) \rightarrow \gamma_\lambda(q)\psi_\mu(p')$  ( $p' = p - q$ ), где через  $\psi$  обозначены  $J/\psi$  и  $\psi'$ , а лоренцевы индексы указывают на поляризации (аксиально)векторных частиц. Аналогичные вклады для зарядово сопряжённых мезонов явно не изображены, но учитываются в матричном элементе.

Для написания матричного элемента по диаграммам на рис. 4.5(a)-(e) необходимо знание нескольких ингредиентов. Прежде всего, это лагранжиан взаимодействия  $X$  с  $D$  мезонами:

$$\mathcal{L}_X = \frac{x_0}{\sqrt{2}} X_\sigma^\dagger (D^{*0\sigma} \bar{D}^0 + D^0 \bar{D}^{*0\sigma}) + \frac{x_c}{\sqrt{2}} X_\sigma^\dagger (D^{*+\sigma} D^- + D^+ D^{*-\sigma}) + \text{h.c.}, \quad (4.66)$$

где константы связи  $X$  с заряженными и нейтральными мезонами с хорошей точностью совпадают [232, 233], так что в дальнейшем будем полагать  $x_c = x_0 = x$ . Удобно также ввести нерелятивистскую константу связи в виде

$$x = x_{\text{nr}} \sqrt{M_X m_* m}, \quad (4.67)$$

где  $m$ ,  $m_*$  и  $M_X$  есть соответственно массы  $D$  мезона,  $D^*$  мезона и  $X(3872)$ . Величину константы  $x^{\text{nr}}$  можно извлечь из энергии связи  $X(3872)$  [234], так что для вершины  $X_\sigma(p) \rightarrow D\bar{D}_\nu^*(k)$  находим

окончательно:

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{(X)}(p, k) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_{\text{nr}} \sqrt{M_X m_* m} g_{\sigma\nu}. \quad (4.68)$$

Вершины переходов векторного мезона  $\psi$  ( $\psi = J/\psi, \psi'$ ) в  $D$  и  $D^*$  мезоны могут быть получены из соответствующего лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi = & i g_{\bar{D}D} (\bar{D} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu D) \psi^{\mu\dagger} - i g_{\bar{D}^*D} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [(\partial^\alpha \bar{D}_\nu^*) (\partial^\beta D) - (\partial^\beta \bar{D}) (\partial^\alpha D_\nu^*)] \psi^{\mu\dagger} \\ & - i g_{\bar{D}^*D^*} \left( \bar{D}_\nu^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu D^{*\nu} + (\partial_\nu \bar{D}_\mu^*) D^{*\nu} - \bar{D}^{*\nu} (\partial_\nu D_\mu^*) \right) \psi^{\mu\dagger} + \text{э.с.}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

причём константы  $g$  связаны симметрией тяжёлого кварка, так что для них справедливы следующие соотношения [235–237]:

$$g_{\bar{D}D} = g_2 m \sqrt{m_\psi}, \quad g_{\bar{D}^*D} = g_2 \sqrt{\frac{m m_\psi}{m_*}}, \quad g_{\bar{D}^*D^*} = g_2 m_* \sqrt{m_\psi}, \quad (4.70)$$

где для нерелятивистской константы связи использовано обозначение  $g_2$  [236, 237]. Тогда для вершин переходов  $\psi_\mu(p) \rightarrow \bar{D}(k_1)D(-k_2)$ ,  $\psi_\mu(p) \rightarrow \bar{D}_\nu^*(k_1)D(-k_2)$  и  $\psi_\mu(p) \rightarrow \bar{D}_\alpha^*(k_1)D_\beta^*(-k_2)$  приходим к следующим выражениям:

$$V_\mu^{\bar{D}D}(k_1, -k_2) = g_2 \sqrt{m_\psi m} (k_1 + k_2)_\mu, \quad (4.71)$$

$$V_{\mu\nu}^{\bar{D}D^*}(k_1, -k_2) = 2g_2 \sqrt{\frac{m_\psi m}{m_*}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_2^\alpha k_1^\beta, \quad (4.72)$$

$$V_{\mu\alpha\beta}^{\bar{D}^*D^*}(k_1, -k_2) = g_2 \sqrt{m_\psi m_*} \left[ (k_1 + k_2)_\mu g_{\alpha\beta} - (k_1 + k_2)_\beta g_{\mu\alpha} - (k_1 + k_2)_\alpha g_{\mu\beta} \right]. \quad (4.73)$$

Следующим шагом необходимо установить вершины испускания фотона  $D$  мезонами. Для вершин электрического типа необходимые выражения нетрудно получить с помощью стандартной процедуры замены обычной производной на ковариантную в соответствующих членах лагранжиана взаимодействия. В результате находим для электрической вершины  $D^\pm(k_1) \rightarrow D^\pm(k_2)\gamma_\lambda(q)$  ( $k_1 = k_2 + q$ ) выражение

$$\Gamma_\lambda^{(e)}(k_1, k_2) = e(k_1 + k_2)_\lambda, \quad q = k_1 - k_2, \quad (4.74)$$

где  $e$  есть электрический заряд. Аналогично, для вершины  $D_\mu^{\pm}(k_1) \rightarrow D_\nu^{\pm}(k_2)\gamma_\lambda(q)$  ( $k_1 = k_2 + q$ ) имеем:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{(e)}(k_1, k_2) = e \left[ (k_1 + k_2)_\lambda g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\mu\lambda} - k_{2\mu} g_{\nu\lambda} \right]. \quad (4.75)$$

При этом обе вершины удовлетворяют соответствующим тождествам Уорда:

$$q^\lambda \Gamma_\lambda^{(e)}(k_1, k_2) = e \left[ S^{-1}(k_2) - S^{-1}(k_1) \right], \quad (4.76)$$

$$q^\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{(e)}(k_1, k_2) = e \left[ (S^{-1}(k_2))_{\mu\nu} - (S^{-1}(k_1))_{\mu\nu} \right],$$

где пропагатор  $D$  мезона есть

$$S(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i0}, \quad (4.77)$$

тогда как пропагатор  $D^*$  мезона и обратная к нему величина равны

$$S_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2 - m_*^2 + i0} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_*^2} \right), \quad (S^{-1}(p))_{\mu\nu} = -(p^2 - m_*^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu. \quad (4.78)$$

Наконец, после “удлинения” производной вершина (4.72) порождает четырёхточечное взаимодействие  $D\bar{D}^*\psi\gamma$  (см. диаграмму (е) на рис. 4.5).

Для построения магнитных вершин воспользуемся ковариантным обобщением нерелятивистского лагранжиана [238, 239]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & iem_* F_{\mu\nu} D_a^{*\mu\dagger} \left( \beta Q_{ab} - \frac{Q_c}{m_c} \delta_{ab} \right) D_b^{*\nu} \\ & + e\sqrt{mm_*} \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} v^\alpha \partial^\beta A^\lambda \left[ D_a^{*\mu\dagger} \left( \beta Q_{ab} + \frac{Q_c}{m_c} \delta_{ab} \right) D_b + \text{э.с.} \right], \end{aligned} \quad (4.79)$$

где  $v^\mu$  есть 4-скорость тяжёлого кварка ( $v^\mu v_\mu = 1$ ),  $Q = \text{diag}(2/3, -1/3)$  есть матрица зарядов лёгких кварков, а  $m_c$  и  $Q_c = 2/3$  есть масса и заряд  $c$ -кварка. Заметим, что в данном лагранжиане члены пропорциональные  $Q_c/m_c$  происходят от магнитного момента  $c$ -кварка, а члены пропорциональные  $\beta$  — от облака лёгких кварков в  $D$  мезоне.

Из лагранжиана (4.79) для переходов  $D_\mu^{*a}(k_1) \rightarrow D_\nu^{*b}(k_2)\gamma_\lambda(q)$  и  $D_\mu^{*a}(k_1) \rightarrow D^b(k_2)\gamma_\lambda(q)$  ( $k_1 = k_2 + q$ ) нетрудно извлечь вершины

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{(m)ab}(q) = em_*(q_\nu g_{\mu\lambda} - q_\mu g_{\nu\lambda}) \left( \beta Q_{ab} - \frac{Q_c}{m_c} \delta_{ab} \right), \quad (4.80)$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{(m)ab}(q) = e\sqrt{mm_*} \epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} v^\alpha q^\beta \left( \beta Q_{ab} + \frac{Q_c}{m_c} \delta_{ab} \right), \quad (4.81)$$

которые поперечны по импульсу фотона  $q^\lambda$  и, следовательно, являются калибровочно инвариантными по-отдельности.

С помощью выведенных выше выражений для вершин взаимодействия  $D$  мезонов с  $X(3872)$ , фотоном и векторным мезоном можно записать следующее полное выражение для амплитуды радиационного перехода  $X \rightarrow \gamma\psi$  через  $D$ -мезонные петли:

$$M^{\text{loop}} = \varepsilon^\mu(\psi)\varepsilon^\sigma(X)\varepsilon^\lambda(\gamma)M_{\mu\sigma\lambda}^{\text{loop}}, \quad (4.82)$$

где

$$M_{\mu\sigma\lambda}^{\text{loop}} = \frac{1}{\sqrt{2}} exg_2 m \sqrt{M_X m_\psi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_\sigma^\nu(k) S(k-p) J_{\mu\nu\lambda}(k), \quad (4.83)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}(k) = J_{\mu\nu\lambda}^{(a)m}(k) + J_{\mu\nu\lambda}^{(b)e}(k) + J_{\mu\nu\lambda}^{(b)m}(k) + J_{\mu\nu\lambda}^{(c)e}(k) + J_{\mu\nu\lambda}^{(d)m}(k) + J_{\mu\nu\lambda}^{(e)e}(k), \quad (4.84)$$

причём индивидуальные вклады диаграмм на рис. 4.5(a)-(e) в тензор  $J_{\mu\nu\lambda}(k)$  имеют вид (индексами  $e$  и  $m$  помечены электрические и магнитные вклады соответственно):

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(a)m}(k) = \frac{1}{3}m \left( \beta + \frac{4}{m_c} \right) \varepsilon_{\nu\lambda\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \frac{(2k-p-q)_\mu}{(k-q)^2 - m^2}, \quad (4.85)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(b)e}(k) = 2\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta} \frac{(k-p)^\alpha (k-q)^\beta}{(k-q)^2 - m_*^2} [(2k-q)_\lambda g_\nu^\rho - (k-q)_\nu g_\lambda^\rho - k^\rho g_{\nu\lambda}], \quad (4.86)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(b)m}(k) = \frac{2}{3}m_* \left( \beta - \frac{4}{m_c} \right) \varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta} \frac{(k-p)^\alpha (k-q)^\beta}{(k-q)^2 - m_*^2} [q_\nu g_\lambda^\rho - q^\rho g_{\nu\lambda}], \quad (4.87)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(c)e}(k) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k-p+q)^\alpha k^\beta \frac{(2k-2p+q)_\lambda}{(k-p+q)^2 - m^2}, \quad (4.88)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(d)m}(k) = \frac{1}{3}m_* \left( \beta + \frac{4}{m_c} \right) [(2k-p+q)_\mu g_{\beta\nu} - (2k-p+q)_\beta g_{\mu\nu} - (2k-p+q)_\nu g_{\beta\mu}] \\ \times \frac{\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma\delta} p^\gamma q^\delta}{(k-p+q)^2 - m_*^2} \left( -g^{\alpha\beta} + \frac{(k-p+q)^\alpha (k-p+q)^\beta}{m_*^2} \right), \quad (4.89)$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(e)e}(k) = -2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} p^\alpha. \quad (4.90)$$

В приведённых выше выражениях 4-скорость кварка заменена 4-скоростью  $X(3872)$ , а также явно учтён вклад петель с зарядово сопряжёнными  $D$  мезонами. Важно ещё раз подчеркнуть, что амплитуда (4.83) калибровочно инвариантна, что гарантируется поперечностью магнитных вершин (4.80) и (4.81), а также тождествами Уорда (4.76). При этом магнитные вклады калибровочно инвариантны каждый по-отдельности, тогда как электрические вклады калибровочно инвариантны только в сумме.

Нетрудно убедиться в том, что петлевой интеграл в амплитуде (4.83) расходится. Следовательно, в амплитуду необходимо ввести дополнительный вклад, происходящий от контактного  $X\gamma\psi$  взаимодействия (см. диаграмму (f) на рис. 4.5), вклад которого равен

$$M^{\text{cont}} = \lambda \varepsilon_{\mu\sigma\lambda\nu} \varepsilon^\mu(\psi) \varepsilon^\sigma(X) \varepsilon^\lambda(\gamma) q^\nu, \quad (4.91)$$

причём он также калибровочно инвариантен по построению. Перенормировка модели состоит в поглощении затравочной константой  $\lambda$  расходящейся части петлевого интеграла с образованием конечной перенормированной константы  $\lambda_r$ . Ниже будут приведены два способа оценки величины вклада контактной диаграммы (f) в амплитуду распада, а пока заметим лишь, что сам факт необходимости введения в теорию контактного члена уже в лидирующем порядке говорит о том, что данные радиационные распады чувствительны не только к далекодействующей части волновой функции  $X$ , но также и к её короткодействующей части.

Дальнейшие расчёты сводятся к численному интегрированию и вычислению ширины распада по стандартным формулам [89]. При этом используемая в расчётах масса  $X(3872)$  приведена в

	$\mu = M_X/2$	$\mu = M_X$	$\mu = 2M_X$
$\Gamma(X \rightarrow \gamma J/\psi)$ [кэВ]	$9.7(r_x r_g)^2$	$23.5(r_x r_g)^2$	$43.2(r_x r_g)^2$
$\Gamma(X \rightarrow \gamma \psi')$ [кэВ]	$3.8(r_x r'_g)^2$	$4.9(r_x r'_g)^2$	$6.0(r_x r'_g)^2$
$R = \frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma \psi')}{\Gamma(X \rightarrow \gamma J/\psi)}$	$0.39(g'_2/g_2)^2$	$0.21(g'_2/g_2)^2$	$0.14(g'_2/g_2)^2$

Таблица 4.5. Результаты вычисления ширин радиационных распадов  $\Gamma(X \rightarrow \gamma\psi)$  для  $\psi = J/\psi, \psi'$ , а также их отношение  $R$ . Константы  $g_2$  и  $g'_2$  определяют связь векторных мезонов  $J/\psi$  и  $\psi'$  с  $D$  мезонами (см. (4.70)), а отношения  $r_x$  и  $r_g^{(l)}$  даны в (4.93).

формуле (4.1), для масс остальных адронов используются следующие значения [89]:

$$m = 1865 \text{ МэВ}, \quad m_* = 2007 \text{ МэВ}, \quad m_{J/\psi} = 3097 \text{ МэВ}, \quad m_{\psi'} = 3686 \text{ МэВ},$$

а для  $\beta$  и  $m_c$  — значения [240]

$$\beta^{-1} = 379 \text{ МэВ}, \quad m_c = 1876 \text{ МэВ}. \quad (4.92)$$

Как указывалось выше, нерелятивистская константа связи  $x_{\text{nr}}$  может быть извлечена из энергии связи  $X(3872)$ , однако ввиду большой неопределённости в последней, значение  $x_{\text{nr}}$  также весьма неточно [234]:  $|x_{\text{nr}}| = 0.97_{-0.97}^{+0.40} \text{ ГэВ}^{-1/2}$ . Впрочем, из отношения ширин данная величина в любом случае выпадает. Основная проблема заключается в определении констант связи векторных мезонов  $J/\psi$  и  $\psi'$  с  $D$  мезонами (константы  $g_2$  и  $g'_2$  соответственно), которые не могут быть извлечены непосредственно из экспериментальных данных ввиду отсутствия фазового пространства для соответствующих реальных распадов.

В качестве отправной точки численных расчётов возьмём  $|x_{\text{nr}}^{(0)}| = 0.97 \text{ ГэВ}^{-1/2}$  [234], а также модельную оценку  $|g_2^{(0)}| = 2 \text{ ГэВ}^{-3/2}$  [235, 237] и введём отношения

$$r_x \equiv \left| \frac{x_{\text{nr}}}{x_{\text{nr}}^{(0)}} \right|, \quad r_g \equiv \left| \frac{g_2}{g_2^{(0)}} \right|, \quad r'_g \equiv \left| \frac{g'_2}{g_2^{(0)}} \right|. \quad (4.93)$$

Кроме того, положим равными нулю перенормированные константы  $\lambda$ , то есть  $\lambda_r^{(l)} = 0$ , а для регуляризации интегралов воспользуемся схемой  $\overline{\text{MS}}$  для трёх значений параметра регуляризации  $\mu$ :  $\mu = M_X/2$ ,  $\mu = M_X$  и  $\mu = 2M_X$ . Численные расчёты при этом выполнены с помощью пакетов FeynCalc [241] и LoopTools [242] для Wolfram Mathematica. Результаты вычислений приведены в таблице 4.5.

Из таблицы 4.5 видно, что неопределённость в константе  $x_{\text{nr}}$  не влияет на отношение  $R$ , поскольку она из этого отношения выпадает. Тем не менее, остаются ещё два источника неопределённости в  $R$ : 1) отношение констант  $g'_2/g_2$ , которое не имеет ничего общего с природой  $X(3872)$ ,

а также 2) вклад контактной диаграммы (f) на рис. 4.5, которая чувствительна лишь к короткодействующей части волновой функции  $X$ .

Заметим, что для  $\lambda_r^{(f)} = 0$  и  $g'_2/g_2 \simeq 1$  вычисленное отношение  $R$  хотя и оказывается меньше единицы, однако оно существенно превышает значение, полученное в работе [228]. При этом отношения  $g'_2/g_2 \simeq 3$  уже достаточно для того, чтобы воспроизвести экспериментальное отношение (4.14) в чисто молекулярной картине.

Вторым источником неопределённости в отношении  $R$  является величина перенормированного контактного взаимодействия  $\lambda_r^{(f)} = 0$ . Для его оценки можно прибегнуть к двум подходам. Во-первых, требование ренормализационной инвариантности окончательного результата означает, что вариация петлевого вклада в амплитуду по параметру  $\mu$  должна в точности компенсироваться аналогичной вариацией контактного члена. Из таблицы 4.5 видно, что вариация петлевого вклада весьма велика, так что для её компенсации вклад контактного члена должен быть, как минимум, того же порядка величины, то есть должен быть тоже большим. Следовательно, радиационные распады состояния  $X(3872)$  весьма чувствительны к короткодействующей части его волновой функции.

Другим подходом к определению вклада контактного члена является использование модельных оценок. Поскольку наиболее естественной природой короткодействующего вклада в волновую функцию  $X(3872)$  является истинное кварк-антикварковое состояние, то для оценки отношения  $R$  можно воспользоваться оценками радиационных ширин распадов  $2^3P_1 \bar{c}c$  чармония  $\chi'_{c1}$  в различных кварковых моделях. Характерные примеры таких оценок собраны в таблице 4.2, из которой видно, что, несмотря на значительный разброс предсказаний, в качестве естественных величин данных ширин можно взять  $\Gamma(X(\bar{c}c) \rightarrow \gamma J/\psi) \simeq 50$  кэВ и  $\Gamma(X(\bar{c}c) \rightarrow \gamma \psi') \simeq 100$  кэВ, что даёт отношение  $R \simeq 2$  (см. также формулу (4.44)).

В соответствии с анализом Вайнберга [43–45] относительные вклады кварковых и мезонных петель определяются множителями  $Z$  и  $1 - Z$  соответственно (см. подробное изложение вопроса в разделе 1.3 выше). Таким образом, если воспользоваться более реалистической моделью  $X(3872)$ , в которой волновая функция содержит заметную примесь чармония с  $Z \sim 0.4-0.5$  (см. результаты раздела 4.3), то экспериментальное отношение воспроизводится уже для  $g'_2/g_2 \simeq 2$ , что хорошо соотносится с оценками этого отношения, полученными в работе [231] в сочетании с анализом, сделанным в работе [235].

Таким образом, несмотря на то, что результаты вычислений, проведённых в данном разделе и собранных в таблице 4.5, можно рассматривать лишь в качестве оценок по порядку величины, из них следуют два важных вывода:

- Радиационные распады  $X(3872)$ , в частности, отношение ширин  $R$ , более чувствительно к короткодействующей части волновой функции  $X$ , чем к её далекодействующей части. Поэтому данные распады могут использоваться для определения природы  $X$  лишь опосредованно.
- Значения отношения ширин  $R$  порядка единицы и, в частности, экспериментально измеренное отношение  $R$  (4.14) не противоречат молекулярной картине  $X(3872)$ , несмотря на имеющееся в литературе предубеждение, основанное на ранних модельных оценках.

#### 4.5. Прямое рождение $X(3872)$ в $e^+e^-$ соударениях

В данном разделе диссертации рассмотрен вопрос о прямом рождении  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  соударениях, и сделаны оценки вероятности такого прямого рождения [31]. Несмотря на то, что экспериментальное измерение данного процесса само по себе не обещает прорыва в понимании свойств и природы  $X$ , тем не менее оно представляло бы определённый интерес. Так, для теоретиков оно позволило бы опосредованно протестировать многие предположения и гипотезы относительно природы и свойств состояния  $X(3872)$ , использованные при оценке вероятности такого рождения. С экспериментальной точки зрения ещё недавно наблюдение такого прямого рождения выглядело невозможным в силу недостаточной статистики. Однако в настоящий момент благодаря использованию ускорителей с большой светимостью (например, BEPC-II в Пекине) работающих в области энергий порядка 4 ГэВ, наблюдение прямого рождения  $X(3872)$  может оказаться достижимым (см., например, обсуждение в работе [243]). Проблема заключается в том, что в силу сохранения чётности рождение аксиально-векторного состояния в  $e^+e^-$  соударениях в лидирующем порядке по постоянной тонкой структуры  $\alpha$  возможно, начиная лишь с двухфотонного промежуточного состояния, то есть с процесса вида  $e^+e^- \rightarrow \gamma^*\gamma^* \rightarrow X$ . Заметим, что в данном случае теорема Ландау-Янга о невозможности нахождения системы двух фотонов в состоянии в полном моменте 1 не работает, поскольку фотоны являются виртуальными и, следовательно, одно из ключевых условий теоремы — поперечность — для них не выполнено.

Поскольку вероятность прямого рождения  $X$  в  $e^+e^-$  соударениях в единицу времени равна вероятности обратного процесса распада  $X$  в  $e^+e^-$  пару, то предметом изучения данного раздела является вычисление электронной ширины  $X(3872)$ . При этом для параметризации вершины перехода  $X \rightarrow \gamma^*\gamma^*$  будет использована модель векторной доминантности, в соответствии с которой один из виртуальных фотонов (или оба фотона) заменяется на векторный мезон. Соответствующие диаграммы изображена на рис. 4.6 (вторая и третья диаграммы), где пара векторных мезонов  $\{V_1, V_2\}$  есть  $\{\rho, J/\psi\}$ ,  $\{\omega, J/\psi\}$ ,  $\{\gamma^*, J/\psi\}$  или  $\{\gamma^*, \psi'\}$ . Распады  $X(3872)$  во все указанные конеч-

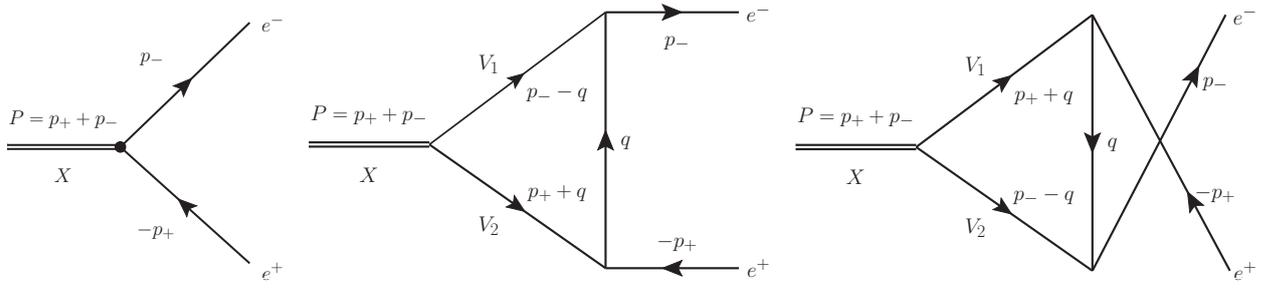


Рис. 4.6. Различные вклады в амплитуду процесса  $X \rightarrow e^+e^-$ : первая диаграмма учитывает вклады короткодействующих сил, тогда как остальные две описывают переходы  $X \rightarrow V_1V_2 \rightarrow e^+e^-$ , где  $\{V_1, V_2\}$  есть пары векторных состояний  $\{\rho, J/\psi\}$ ,  $\{\omega, J/\psi\}$ ,  $\{\gamma^*, J/\psi\}$  и  $\{\gamma^*, \psi'\}$ .

ные состояния измерены экспериментально, что позволяет с хорошей точностью зафиксировать параметры модели непосредственно из данных. Кроме того, ввиду наличия в волновой функции  $X(3872)$  компактной компоненты, следует также рассмотреть амплитуду распада через данную компоненту, что на диаграммном языке означает контактную диаграмму — первая диаграмма на рис. 4.6. Таким образом, производимые в данном разделе вычисления не апеллируют ни к какой модели  $X(3872)$ , что позволяет сделать модельно независимые оценки, которые могут затем использоваться для тестирования различных микроскопических моделей.

В расчётах используется значение массы  $X(3872)$ , приведённое в формуле (4.1), следующие значения масс остальных мезонов [89]:

$$\begin{aligned}
 m_{\pi^0} &= 135.0 \text{ МэВ}, & m_{\pi^\pm} &= 139.6 \text{ МэВ}, & m_\rho &= 775.5 \text{ МэВ}, & m_\omega &= 782.7 \text{ МэВ}, \\
 m_{J/\psi} &= 3096.9 \text{ МэВ}, & m_{\psi'} &= 3686.1 \text{ МэВ}, & M_X &= 3871.7 \text{ МэВ},
 \end{aligned}
 \tag{4.94}$$

а также их полных ширин [89]:

$$\Gamma_\rho = 146.2 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_\omega = 8.5 \text{ МэВ}
 \tag{4.95}$$

и парциальных лептонных ширин [89]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-) &= 7.0 \text{ кэВ}, & \Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) &= 0.6 \text{ кэВ}, \\
 \Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-) &= 5.6 \text{ кэВ}, & \Gamma(\psi' \rightarrow e^+e^-) &= 2.4 \text{ кэВ}.
 \end{aligned}
 \tag{4.96}$$

Для оценок ширина  $X$  принимается равной

$$\Gamma_X = 1.0 \text{ МэВ},
 \tag{4.97}$$

что совместимо как с верхним пределом (4.3), так и с ранее использованным значением (4.30).

Кроме того, с учётом верхнего предела на полный брэнчинг рождения  $X(3872)$  (4.4) для парциальных брэнчингов представляющих интерес распадов можно получить следующие оценки:

$$Br(X \rightarrow \rho J/\psi) > 2.6\%, \quad Br(X \rightarrow \omega J/\psi) > 1.9\%, \quad (4.98)$$

а также

$$Br(X \rightarrow \gamma J/\psi) > 0.7\%, \quad Br(X \rightarrow \gamma \psi') > 1.7\%, \quad (4.99)$$

где в последнем случае для оценки брэнчинга распада  $X \rightarrow \gamma \psi'$  было использовано значение [89]

$$Br(B^\pm \rightarrow K^\pm X) Br(X \rightarrow \gamma J/\psi) = 2.1 \times 10^{-6}, \quad (4.100)$$

полученное усреднением по измерениям коллабораций BABAR (4.10) и Belle (4.13). Кроме того, было использовано отношение (4.14). Такой подход позволяет обойти уже обсуждавшуюся выше несогласованность результатов измерения величины  $Br(X \rightarrow \gamma \psi')$  коллаборациями BABAR и Belle (см. формулы (4.10) и (4.13)).

Переходя к вычислению матричных элементов по диаграммам, изображённым на рис. 4.6, начнём с вершины перехода  $X$  в два векторных мезона  $V_1$  и  $V_2$ . Поскольку масса  $X$  очень близка к порогам  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$ , то соответствующие вершины можно записать в нерелятивистском приближении в виде:

$$v_{ijk}(X \rightarrow V J/\psi) = \lambda_V \varepsilon_{ijk}, \quad V = \rho, \omega, \quad (4.101)$$

где по индексам  $i, j$  и  $k$  данная вершина сворачивается с трёхмерными векторами поляризации  $X, V$  и  $J/\psi$  соответственно.

Однако, если одной из векторных частиц является фотон, то нерелятивистский подход уже неприменим. В этом случае релятивистская калибровочно инвариантная форма вершины имеет вид:

$$v^{\nu\alpha\beta}(X \rightarrow \gamma \psi) = \lambda_\psi \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\mu, \quad \psi = J/\psi, \psi', \quad (4.102)$$

где лоренцевы индексы  $\nu, \alpha$  и  $\beta$  сворачиваются соответственно с векторами поляризации фотона,  $X$  и  $\psi$ , а через  $q^\mu$  обозначен 4-вектор импульса фотона.

Константы связи  $\lambda_V$  и  $\lambda_\psi$  могут быть извлечены из соответствующих парциальных ширин распадов  $X(3872)$ . Действительно, с одной стороны, нетрудно вычислить, что ( $\psi = J/\psi, \psi'$ )

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma \psi) = \frac{\lambda_\psi^2 \omega^3}{6\pi M_X^2}, \quad \omega = \frac{M_X^2 - m_\psi^2}{2M_X}, \quad (4.103)$$

тогда как, с другой стороны,

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma \psi) = \Gamma_X Br(X \rightarrow \gamma \psi), \quad (4.104)$$

где экспериментальные брэнчинги  $Br(X \rightarrow \gamma J/\psi)$  и  $Br(X \rightarrow \gamma \psi')$  приведены в формуле (4.99), а для полной ширины  $X$  использована оценка (4.97).

Ситуация с модами распада  $\rho J/\psi$  и  $\omega J/\psi$  несколько сложнее, поскольку реально измеряемыми являются конечные состояния  $\pi^+\pi^- J/\psi$  и  $\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$ . Тогда с помощью вершины (4.101) можно записать амплитуду процесса  $X \rightarrow V J/\psi \rightarrow n\pi J/\psi$  ( $n = 2, 3$ ) в виде:

$$T(X \rightarrow n\pi J/\psi) = \lambda_V \varepsilon_{ijk} \varepsilon_i(X) \varepsilon_j(J/\psi) G_V(m) v_k(V \rightarrow n\pi), \quad (4.105)$$

где  $v(V \rightarrow n\pi)$  есть вершина перехода  $V \rightarrow n\pi$ , чей явный вид знать не обязательно, и

$$G_V(m) = \frac{1}{m^2 - m_V^2 + im_V \Gamma_V}.$$

Тогда для ширины нетрудно найти:

$$\Gamma(X \rightarrow n\pi J/\psi) = \frac{1}{3} \int \sum_{\text{polarisations}} |T(X \rightarrow n\pi J/\psi)|^2 d\tau, \quad (4.106)$$

где для  $X$  в состоянии покоя, а также для нерелятивистских  $\rho$  и  $\omega$  мезонов суммы по поляризациям дают трёхмерные символы Кронеккера. Далее, дифференциальный фазовый объём конечного состояния можно записать в виде:

$$d\tau = d\tau_{n\pi} d\tau_{J/\psi} \frac{dm^2}{2\pi}, \quad d\tau_{J/\psi} = \frac{p(m)}{4\pi^2 M_X}, \quad p(m) = \frac{1}{2M_X} \lambda^{1/2}(M_X^2, m^2, m_{J/\psi}^2), \quad (4.107)$$

где  $d\tau_{n\pi}$  есть фазовый объём пионов, а  $\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)$  есть треугольная функция (см. Приложение Б). Наконец, принимая во внимание, что

$$\Gamma(V \rightarrow n\pi) = \frac{1}{3} \int \sum_{\text{polarisations}} |v(V \rightarrow n\pi)|^2 d\tau_{n\pi}, \quad (4.108)$$

и определяя безразмерный интеграл по массовому распределению пионов (см. рис. 4.2)

$$I_V \equiv \int_{nm_\pi}^{M_X - m_{J/\psi}} \Gamma(V \rightarrow n\pi) p(m) |G_V(m)|^2 m dm, \quad (4.109)$$

приходим к соотношению

$$\Gamma(X \rightarrow n\pi J/\psi) = \Gamma_X Br(X \rightarrow n\pi J/\psi) = \frac{\lambda_V^2 I_V}{2\pi^3 M_X}, \quad (4.110)$$

которое может использоваться для извлечения констант  $\lambda_\rho$  и  $\lambda_\omega$  из экспериментальных брэнчингов  $Br(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi) \approx Br(X \rightarrow \rho J/\psi)$  и  $Br(X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi) \approx Br(X \rightarrow \omega J/\psi)$ , приведённых в формуле (4.98).

С помощью формул раздела 4.2 [27] и экспериментальных данных, содержащихся в работах [199, 209], можно прийти к следующим численным значениям интегралов (4.109):

$$I_\rho \approx 0.2, \quad I_\omega \approx 0.02, \quad (4.111)$$

разница на порядок между которыми естественным образом объясняется малой шириной  $\omega$  мезона, а также тем, что номинальный порог  $\omega J/\psi$  лежит за пределами области интегрирования в  $I_\omega$ .

Теперь единственным отсутствующим ингредиентом является вершина перехода  $V \rightarrow e^+e^-$  с  $V = \rho, \omega, J/\psi$  и  $\psi'$ . Для установления вида этой вершины можно воспользоваться моделью векторной доминантности, записав соответствующий калибровочно инвариантный лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L}_{V\gamma} = g_V(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu)F_{\mu\nu}, \quad (4.112)$$

где  $F_{\mu\nu}$  есть тензор электромагнитного поля (подробное обсуждения различных формулировок для векторного мезона можно найти в работе [244]). Лагранжиан (4.112) приводит к вершине перехода векторного мезона в фотон пропорциональной  $k^2$  ( $k_\mu$  есть 4-импульс фотона). Этот множитель сокращает пропагатор фотона в амплитуде  $V \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^+e^-$ , так что эффективной константой связи для перехода  $V \rightarrow e^+e^-$  является произведение  $2eg_V$ , где константу  $g_V$  можно определить из соответствующей лептонной ширины  $\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)$  (см. экспериментальные значения ширин, собранные в формуле (4.96)), выведенной непосредственно из лагранжиана (4.112):

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{4}{3}\alpha g_V^2 m_V. \quad (4.113)$$

Таким образом, в используемом подходе полная амплитуда перехода  $X \rightarrow e^+e^-$  записывается в виде

$$T(X \rightarrow e^+e^-) = \bar{u}(p_-)V_\mu(p_+, p_-)u(-p_+)\varepsilon^\mu(X), \quad (4.114)$$

где  $\varepsilon^\mu(X)$  есть 4-вектор поляризации  $X$ , а полная вершина  $V_\mu(p_+, p_-)$  даётся суммой

$$V_\mu(p_+, p_-) = v_\mu^{(0)} + v_\mu(X \rightarrow \gamma^* J/\psi) + v_\mu(X \rightarrow \gamma^* \psi'). \quad (4.115)$$

В последнем выражении член  $v_\mu^{(0)}$  описывает контактное взаимодействие, а остальные два члена даются однопетлевыми диаграммами с  $\{V_1, V_2\} = \{\gamma^*, J/\psi\}, \{\gamma^*, \psi'\}$  (см. рис. 4.6). Ввиду слабой зависимости от энергии, аналогичные амплитуды с обоими массивными векторами, то есть с  $\{V_1, V_2\} = \{\rho, J/\psi\}, \{\omega, J/\psi\}$  дают вклад в  $v_\mu^{(0)}$  (см. обсуждение ниже). Размерный анализ показывает, что амплитуды  $v_\mu(X \rightarrow \gamma^* J/\psi)$  и  $v_\mu(X \rightarrow \gamma^* \psi')$  расходятся, поскольку требование калибровочной инвариантности приводит к дополнительной степени импульса фотона в вершине (см. выражение (4.102)). Для работы с интегралами используется размерная регуляризация со схемой вычитаний  $\overline{\text{MS}}$ , причём их расходящаяся часть поглощается в контактный член  $v_\mu^{(0)}$  с образованием перенормированного конечного контактного члена  $v_\mu^{\text{reg}}$ . Как и в предыдущем разделе, для оценки величины перенормированного контактного взаимодействия воспользуемся двумя приёмами. С одной стороны, проварьируем вспомогательный масштаб, даваемый параметром регуляризации

$\mu$ , в широких пределах: как и в предыдущем разделе, в качестве центрального значения выберем  $\mu = M_X$ , а в качестве интервала варьирования — интервал от  $M_X/2$  до  $2M_X$ . С другой стороны, прибегнем к модели насыщения контактного взаимодействия вкладами более высоких резонансов, в частности амплитудами переходов  $X \rightarrow \rho J/\psi \rightarrow e^+e^-$  и  $X \rightarrow \omega J/\psi \rightarrow e^+e^-$ , которые содержат лишь конечные интегралы.

Начнём со второй оценки. Для векторного мезона  $V$  ( $V = \rho, \omega$ ) петлевые вклады в амплитуду  $X \rightarrow V J/\psi \rightarrow e^+e^-$  даются второй и третьей диаграммами на рис. 4.6. Соответствующие амплитуды равны:

$$\begin{aligned} T_V^{(1)} &= 2eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \gamma_j \hat{q} \gamma_k u(-p_+) G_0(q) G_V(p_- - q) G_{J/\psi}(p_+ + q) \\ &= 2eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} \bar{u}(p_-) \gamma_j \gamma_\mu \gamma_k u(-p_+) I_{1\mu}(p_+, p_-), \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} T_V^{(2)} &= 2eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \gamma_k \hat{q} \gamma_j u(-p_+) G_0(q) G_V(p_+ + q) G_{J/\psi}(p_+ - q) \\ &= -2eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} \bar{u}(p_-) \gamma_j \gamma_\mu \gamma_k u(-p_+) I_{2\mu}(p_+, p_-), \end{aligned} \quad (4.117)$$

где пропагаторы имеют вид (шириной  $J/\psi$  и массой электрона пренебрегаем):

$$G_0(p) = \frac{1}{p^2 + i0}, \quad G_{J/\psi}(p) = \frac{1}{p^2 - m_{J/\psi}^2 + i0}, \quad G_V(p) = \frac{1}{p^2 - m_V^2 + im_V \Gamma_V}. \quad (4.118)$$

Тогда, используя легко устанавливаемое свойство симметрии  $I_{2\mu}(p_+, p_-) = -I_{1\mu}(p_-, p_+)$ , для интегралов  $I_{1\mu}(p_+, p_-)$  и  $I_{2\mu}(p_+, p_-)$  можно записать:

$$\begin{aligned} I_{1\mu}(p_+, p_-) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q_\mu G_0(q) G_V(p_- - q) G_{J/\psi}(p_+ + q) = \frac{1}{M_X^2} (A_V k_\mu + B_V P_\mu), \\ I_{2\mu}(p_+, p_-) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q_\mu G_0(q) G_V(p_+ + q) G_{J/\psi}(p_- - q) = \frac{1}{M_X^2} (A_V k_\mu - B_V P_\mu), \end{aligned} \quad (4.119)$$

где  $P = p_+ + p_-$ ,  $k = p_+ - p_-$ . Следовательно, полная амплитуда определяется лишь коэффициентом  $B_V$ :

$$\begin{aligned} T_V &= T_V^{(1)} + T_V^{(2)} = \frac{4B_V}{M_X^2} eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} \bar{u}(p_-) \gamma_j (\hat{p}_+ + \hat{p}_-) \gamma_k u(-p_+) \\ &= \frac{16B_V}{M_X^2} eg_V g_{J/\psi} \lambda_V \varepsilon_i(X) \varepsilon_{ijk} p_k \bar{u}(p_-) \gamma_j u(-p_+), \end{aligned}$$

где для электронной и позитронной биспинорных амплитуд было использовано уравнение Дирака с нулевой массой:  $\bar{u}(p_-) \hat{p}_- = \hat{p}_+ u(-p_+) = 0$ . Тогда для ширины  $\Gamma(X \rightarrow V J/\psi \rightarrow e^+e^-)$  находим окончательно:

$$\Gamma(X \rightarrow V J/\psi \rightarrow e^+e^-) = \frac{16|B_V|^2}{3\pi M_X} \alpha g_V^2 g_{J/\psi}^2 \lambda_V^2, \quad (4.120)$$

где безразмерный коэффициент  $B_V$  даётся петлевым интегралом

$$B_V = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (qP) G_0(q) G_V(p_- - q) G_{J/\psi}(p_+ + q) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(x-y)dy}{a_V^2 x + b^2 y - xy}, \quad (4.121)$$

$$a_V^2 = \frac{m_V^2 - im_V \Gamma_V}{M_X^2}, \quad b = \frac{m_{J/\psi}^2}{M_X^2} - i0. \quad (4.122)$$

Численный расчёт приводит к следующей оценке для ширины:

$$\Gamma(X \rightarrow \rho J/\psi \rightarrow e^+ e^-) \simeq \Gamma(X \rightarrow \omega J/\psi \rightarrow e^+ e^-) \simeq 10^{-7} \text{ эВ}. \quad (4.123)$$

Перейдём теперь к вычислению регуляризованных амплитуд  $v_\mu(X \rightarrow \gamma^* J/\psi \rightarrow e^+ e^-)$  и  $v_\mu(X \rightarrow \gamma^* \psi' \rightarrow e^+ e^-)$ . В полной аналогии с вычисленной выше амплитудой перехода  $T_V(X \rightarrow V J/\psi \rightarrow e^+ e^-)$ , для данного векторного мезона  $\psi$  ( $\psi = J/\psi, \psi'$ ) для двух вкладов в амплитуду  $T_\psi(X \rightarrow \gamma^* \psi \rightarrow e^+ e^-)$  запишем:

$$\begin{aligned} T_\psi^{(1)} &= \lambda_\psi e g_\psi 0_\alpha(X) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \gamma_\nu \hat{q} \gamma_\beta u(-p_+) (p_- - q)_\mu G_0(q) G_0(p_- - q) G_\psi(p_+ + q) \\ &= \lambda_\psi e g_\psi 0_\alpha(X) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{u}(p_-) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\beta u(-p_+) I_{1\mu\lambda}(p_+, p_-), \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} T_\psi^{(2)} &= \lambda_\psi e g_\psi 0_\alpha(X) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_-) \gamma_\beta \hat{q} \gamma_\nu u(-p_+) (p_+ + q)_\mu G_0(q) G_0(p_+ + q) G_\psi(p_- - q) \\ &= \lambda_\psi e g_\psi 0_\alpha(X) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{u}(p_-) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\beta u(-p_+) I_{2\mu\lambda}(p_+, p_-), \end{aligned} \quad (4.125)$$

где

$$G_0(p) = \frac{1}{p^2 + i0}, \quad G_\psi(p) = \frac{1}{p^2 - M_X^2 a_\psi^2 + i0}, \quad a_\psi^2 = \frac{m_\psi^2}{M_X^2}, \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} I_{1\mu\lambda}(p_+, p_-) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} q_\lambda (p_- - q)_\mu G_0(q) G_0(p_- - q) G_\psi(p_+ + q), \\ I_{2\mu\lambda}(p_+, p_-) &= I_{1\mu\lambda}(p_-, p_+). \end{aligned}$$

После несложных преобразований находим:

$$T_\psi = T_\psi^{(1)} + T_\psi^{(2)} = \lambda_\psi e g_\psi \varepsilon_\alpha \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{u}(p_-) \gamma_\nu \left[ I_1 \gamma_\mu \gamma_\beta + I_2 \frac{p_-^\mu p_+^\beta}{M_X^2} \right] u(-p_+), \quad (4.127)$$

где безразмерные интегралы  $I_1$  и  $I_2$  даются выражениями ( $D = 4 - 2\epsilon$ ):

$$I_1 = \frac{4i}{D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{[q^2 - M_X^2 x(a_\psi^2 - y)]^3}, \quad (4.128)$$

$$I_2 = 8i M_X^2 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-2y) dy \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - M_X^2 x(a_\psi^2 - y)]^3}. \quad (4.129)$$

Непосредственным вычислением находим:

$$I_1^{\text{reg}} = \frac{1}{32\pi^2} \left[ \ln \frac{M_X^2}{\mu^2} - 3 + a_\psi^2 + \ln a_\psi^2 + (1 - a_\psi^2)^2 \left( \ln (a_\psi^{-2} - 1) - i\pi \right) \right], \quad (4.130)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi^2} (1 - a_\psi^2) \left[ 2 + (2a_\psi^2 - 1) \left( \ln (a_\psi^{-2} - 1) - i\pi \right) \right], \quad (4.131)$$

где, как указывалось выше, интеграл  $I_1$  вычислен в размерной регуляризации в схеме вычитаний  $\overline{\text{MS}}$ . Тогда окончательно приходим к простой формуле для ширины  $\Gamma(X \rightarrow \gamma^* \psi \rightarrow e^+ e^-)$ :

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma^* \psi \rightarrow e^+ e^-) = \frac{36\pi\alpha I_\psi}{m_\psi (1 - m_\psi^2/M_X^2)^3} \Gamma(X \rightarrow \gamma\psi) \Gamma(\psi \rightarrow e^+ e^-), \quad (4.132)$$

где

$$I_\psi = 48 \left[ |I_1^{\text{reg}}|^2 + \frac{1}{144} |I_2|^2 + \frac{1}{6} \text{Re}(I_1^{\text{reg}} I_2^*) \right], \quad (4.133)$$

и, в частности,

$$I_{J/\psi} \approx 3.0 \times 10^{-3}, \quad I_{\psi'} \approx 2.4 \times 10^{-3}. \quad (4.134)$$

Численные оценки с помощью формулы (4.132) приводят к следующим результатам:

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma^* J/\psi \rightarrow e^+ e^-) \gtrsim 10^{-3} \text{ эВ}, \quad (4.135)$$

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma^* \psi' \rightarrow e^+ e^-) \gtrsim 0.03 \text{ эВ}. \quad (4.136)$$

Поскольку на полный брэнчинг рождения  $X(3872)$  существует только верхняя граница (см. формулы (4.4) и (4.99)), то выражения (4.135) и (4.136) дают оценки снизу. По мере поступления более точных данных по рождению  $X(3872)$  полученные результаты также могут быть уточнены.

Из сравнения результата (4.123) с (4.135) и (4.136) видно, что вклад процессов  $X \rightarrow \rho J/\psi \rightarrow e^+ e^-$  и  $X \rightarrow \omega J/\psi \rightarrow e^+ e^-$  в контактное взаимодействие пренебрежимо мал. С другой стороны, как пояснялось выше, для оценки точности метода масштаб  $\mu$  варьируется в интервале от  $M_X/2$  до  $2M_X$ , что приводит к неопределённости порядка самого центрального значения. Таким образом, полученные результаты следует рассматривать в качестве надёжных оценок по порядку величины.

Заметим также, что, поскольку способ извлечения констант связи из экспериментально измеренных ширин распадов не позволяет определять их знак, дополнительная неопределённость происходит из интерференции амплитуд  $\gamma J/\psi$  и  $\gamma\psi'$ . Однако, ввиду существенного различия величин (4.135) и (4.136) данной интерференцией можно пренебречь, как и вообще всей шириной (4.135). Таким образом, окончательная оценка для искомой ширины лептонного распада  $X(3872)$  следует из формулы (4.136):

$$\Gamma(X \rightarrow e^+ e^-) \gtrsim 0.03 \text{ эВ}. \quad (4.137)$$

В качестве независимой проверки полученного результата применим использованный метод для оценки лептонной ширины другого аксиально-векторного состояния — истинного чармония

$\chi_{c1}$ . Для этого заметим, что в рамках данного подхода распад  $\chi_{c1} \rightarrow e^+e^-$  преимущественно протекает через промежуточное состояние  $\gamma^* J/\psi$ , так что его ширина может вычисляться по формуле (4.132), в которой  $X$  заменяется на  $\chi_{c1}$ . Тогда с помощью данных для  $\chi_{c1}$  [89]:

$$m_{\chi_{c1}} = 3511 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{\chi_{c1}} = 0.86 \text{ МэВ}, \quad Br(\chi_{c1} \rightarrow \gamma J/\psi) \approx 34.8\% \quad (4.138)$$

нетрудно получить для искомой ширины оценку 0.1 эВ. Этот результат находится в качественном согласии с оценкой  $\Gamma(\chi_{c1} \rightarrow e^+e^-) \simeq 0.46 \text{ эВ}$ , полученной в работах [245, 246] и лежит выше унитарного нижнего предела 0.044 эВ [245]. Заметим, что результат 0.46 эВ, по мнению самих авторов работ [245, 246], является оптимистичной оценкой, тогда как, вообще говоря, он варьируется в довольно широком диапазоне: от 0.1 до 0.5 эВ.

Объединяя результаты (4.137) и (4.138), можно прийти к соотношению

$$\Gamma(X \rightarrow e^+e^-) : \Gamma(\chi_{c1} \rightarrow e^+e^-) \gtrsim 1 : 3, \quad (4.139)$$

в котором часть неопределённостей может сократиться, так что есть основания рассчитывать на его бóльшую точность, нежели точность вычисления каждой из ширин в отдельности. Таким образом, вероятность прямого рождения состояния  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  столкновениях может оказаться того же порядка величины, что и вероятность прямого рождения чармония  $\chi_{c1}$  и быть доступным для экспериментального измерения. В частности, такие измерения являются частью научной программы эксперимента BESIII. На данный момент лучшее экспериментальное ограничение на вероятность прямого рождения  $X(3872)$  поставлено в работе [243] и составляет  $\Gamma(X \rightarrow e^+e^-) \lesssim 0.13 \text{ эВ}$ , что совместимо с полученными выше теоретическими оценками.

Заметим в заключение, что приведённые выше расчёты и, в частности, величина ширины лептонного распада  $\Gamma_{\chi_{c1}}$ , а также доминирование вклада мягких фотонов в данную ширину подтверждены независимыми микроскопическими расчётами, выполненными в рамках нерелятивистской КХД [247].

## 4.6. Непертурбативный учёт трёхчастичной динамики в $X(3872)$

В данном разделе диссертации трёхчастичная динамика в околопороговом резонансе учитывается непертурбативно, посредством расширения базиса связанных каналов и включения в него трёхчастичных состояний [28]. Поскольку как вывод, так и явный вид трёхчастичных уравнений существенно зависят от деталей рассматриваемой системы (соотношения масштабов, квантовых чисел и т.д.), то в данном разделе будет рассмотрен конкретный случай околопорогового состояния  $X(3872)$ .

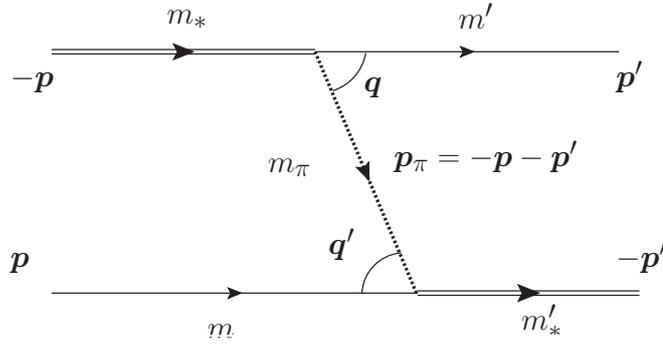


Рис. 4.7. Кинематика рассеяния  $D^*$  мезона на  $D$  мезоне за счёт однопионного обмена. Двойная сплошная линия обозначает  $D^*$  мезоны, сплошная одинарная линия обозначает  $D$  мезоны. Пион обозначен пунктирной линией.

Как уже упоминалось ранее, трёхчастичная динамика в  $X(3872)$  обусловлена переходами  $D\bar{D}^* \leftrightarrow D\bar{D}\pi$  и  $\bar{D}D^* \leftrightarrow D\bar{D}\pi$ , так что в базис модели связанных каналов следует включить три канала:

$$|2\rangle = D\bar{D}^*, \quad |\bar{2}\rangle = \bar{D}D^*, \quad |3\rangle = D\bar{D}\pi, \quad (4.140)$$

связанные между собой однопионным обменом (см. диаграмму на рис. 4.7). Поскольку на данном этапе изоспиновая степень свободы не рассматривается, то  $m' = m$  и  $m'_* = m_*$ , где  $m$  и  $m_*$  есть массы  $D(\bar{D})$  и  $D^*(\bar{D}^*)$  мезонов соответственно. Аналогичные динамические уравнения для однопионного обмена между нуклонами изучаются в работе [248].

В системе центра инерции импульсы в двухчастичных системах  $D\bar{D}^*$  и  $\bar{D}D^*$  определены в виде:

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_{\bar{D}^*} = -\mathbf{p}, \quad (4.141)$$

$$\mathbf{p}_{\bar{D}} = \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}_{D^*} = -\bar{\mathbf{p}}, \quad (4.142)$$

тогда как в трёхчастичной системе  $D\bar{D}\pi$  относительные импульсы удобно определить с помощью двух наборов переменных Якоби,  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  и  $\{\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}\}$ :

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_{\bar{D}} = -\mathbf{q} - \frac{m}{m + m_\pi}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_\pi = \mathbf{q} - \frac{m_\pi}{m + m_\pi}\mathbf{p} \quad (4.143)$$

или

$$\mathbf{p}_D = -\bar{\mathbf{q}} - \frac{m}{m + m_\pi}\bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}_{\bar{D}} = \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}_\pi = \bar{\mathbf{q}} - \frac{m_\pi}{m + m_\pi}\bar{\mathbf{p}}. \quad (4.144)$$

При этом приведённые выше переменные Якоби, принадлежащие разным наборам, связаны друг с другом соотношениями

$$\bar{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p}, \quad (4.145)$$

$$\mathbf{q} = \alpha\bar{\mathbf{q}} + \beta\bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p} = -\bar{\mathbf{q}} - \alpha\bar{\mathbf{p}}, \quad (4.146)$$

где

$$\alpha = \frac{m}{m + m_\pi}, \quad \beta = \alpha^2 - 1 = -\frac{(2m + m_\pi)m_\pi}{(m + m_\pi)^2}. \quad (4.147)$$

Определим вершину  $D^* D\pi$  в виде

$$v_{D^* D\pi}(\mathbf{q}) = g \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q}, \quad (4.148)$$

где  $\boldsymbol{\epsilon}$  есть вектор поляризации  $D^*$  мезона,  $\mathbf{q}$  есть импульс в системе  $D\pi$ , а  $g$  есть константа связи. Строго говоря, вместо константы следовало ввести формфактор, однако в околороговой области изменение формфактора было бы крайне малым, и оно не влияло бы на свойства изучаемой системы. Константу  $g$  можно зафиксировать с помощью ширины распада  $D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0$  в виде:

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = \frac{8\pi^2}{3} g^2 \mu_q(D^0 \pi^0) [2\mu_q(D^0 \pi^0)(m_{*0} - m_0 - m_{\pi^0})]^{3/2}, \quad (4.149)$$

где приведённая масса определена как

$$\mu_q(XY) = \frac{m_X m_Y}{m_X + m_Y}. \quad (4.150)$$

Таким образом, за переходы между двухчастичными и трёхчастичным каналами отвечают потенциалы

$$V_{32}^m(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p}') = gq_m \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad V_{3\bar{2}}^m(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}; \bar{\mathbf{p}}') = g\bar{q}_m \delta(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}'), \quad (4.151)$$

а также аналогичные потенциалы  $V_{23}^m$  и  $V_{\bar{2}\bar{3}}^m$ .

При этом обратные двух- и трёхчастичные пропагаторы можно определить в виде:

$$D_2(\mathbf{p}) = m + m_* + \frac{p^2}{2\mu_*} - M, \quad D_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2m + m_\pi + \frac{p^2}{2\mu_p} + \frac{q^2}{2\mu_q} - M, \quad (4.152)$$

где  $M$  есть полная масса системы, а приведённые массы определены как

$$\mu_* = \frac{mm_*}{m + m_*}, \quad \mu_p = \frac{m(m + m_\pi)}{2m + m_\pi}, \quad \mu_q \equiv \mu_q(D\pi) = \frac{mm_\pi}{m + m_\pi}, \quad (4.153)$$

причём в нерелятивистском пределе можно положить  $\mu_* = \mu_p$ .

Наконец, собственно-энергетическую часть  $\Sigma(p)$  за счёт виртуальной петли  $D\pi$  можно записать как

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{3} \int \frac{q^2 d^3 q}{D_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})}. \quad (4.154)$$

Тогда систему уравнений Липпмана-Швингера для  $t$ -матрицы  $t_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , где  $i, k = 2, \bar{2}, 3$ , а  $m$  и  $n$  есть лоренцевы индексы, можно схематично предствить в виде:

$$t = V - V\mathcal{G}_0 t, \quad (4.155)$$

где  $\mathcal{G}_0$  есть диагональная матрица “голых” пропагаторов, а потенциал взаимодействия  $V$  имеет всего две отличные от нуля компоненты, приведённые в уравнении (4.151). Записанная покомпонентно полученная система из девяти уравнений (4.155) распадается на три “расцепленные” подсистемы:

$$\begin{cases} t_{22} = -V_{23}D_3^{-1}t_{32} \\ t_{\bar{2}\bar{2}} = -V_{\bar{2}3}D_3^{-1}t_{3\bar{2}} \\ t_{32} = V_{3\bar{2}} - V_{32}D_2^{-1}t_{22} - V_{3\bar{2}}D_2^{-1}t_{\bar{2}\bar{2}}, \end{cases} \quad (4.156)$$

$$\begin{cases} t_{2\bar{2}} = -V_{23}D_3^{-1}t_{3\bar{2}} \\ t_{\bar{2}2} = -V_{\bar{2}3}D_3^{-1}t_{32} \\ t_{3\bar{2}} = V_{3\bar{2}} - V_{32}D_2^{-1}t_{2\bar{2}} - V_{3\bar{2}}D_2^{-1}t_{\bar{2}2}, \end{cases} \quad (4.157)$$

$$\begin{cases} t_{23} = V_{23} - V_{23}D_3^{-1}t_{33} \\ t_{\bar{2}3} = V_{\bar{2}3} - V_{\bar{2}3}D_3^{-1}t_{33} \\ t_{33} = -V_{32}D_2^{-1}t_{23} - V_{3\bar{2}}D_2^{-1}t_{\bar{2}3}. \end{cases} \quad (4.158)$$

Дальнейший вывод уравнений сделаем схематично (подробности приведены в приложении В), опуская аргументы функций и не различая  $V_{\bar{2}3}$  и  $V_{23}$ , а также  $V_{3\bar{2}}$  и  $V_{32}$ .

Исключая третье уравнение в системах (4.156) и (4.157) и используя определение собственно-энергетической части (4.154), находим:

$$\begin{cases} t_{22} = -\Sigma + \Sigma D_2^{-1}t_{22} + V_{23}D_3^{-1}V_{32}D_2^{-1}t_{\bar{2}\bar{2}} \\ t_{\bar{2}\bar{2}} = -V_{\bar{2}3}D_3^{-1}V_{32} + \Sigma D_2^{-1}t_{\bar{2}\bar{2}} + V_{\bar{2}3}D_3^{-1}V_{32}D_2^{-1}t_{22}, \end{cases} \quad (4.159)$$

а также аналогичную систему уравнений для компонент  $t_{2\bar{2}}$  и  $t_{\bar{2}2}$ . Связь между  $t_{23}$ ,  $t_{\bar{2}3}$  и двухчастичными компонентами  $t_{2\bar{2}}$ ,  $t_{\bar{2}2}$  также дана в приложении В.

Поскольку взаимодействие в системе является  $C$ -чётным, то удобно перейти к комбинациям амплитуд, обладающим определённой  $C$ -чётностью:

$$t_{\pm} = t_{22} \pm t_{\bar{2}\bar{2}} \quad (4.160)$$

и удовлетворяющим следующим уравнениям:

$$\Delta D_2^{-1}t_{\pm} = -\Sigma \mp V_{23}D_3^{-1}V_{32} \pm V_{23}D_3^{-1}V_{32}D_2^{-1}t_{\pm}, \quad (4.161)$$

где введён обратный “одетый” пропагатор  $D^*$  мезона  $\Delta(p)$ :

$$\Delta(p) = m_* + m + \frac{p^2}{2\mu_*} - M - \Sigma(p). \quad (4.162)$$

Тогда с помощью подстановки

$$t_{\pm} = -\frac{\Sigma D_2}{\Delta} + \frac{D_2}{\Delta} a_{\pm} \frac{D_2}{\Delta} \quad (4.163)$$

приходим к следующему уравнению для новой функции  $a_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ :

$$a_{\pm} = V_{\pm} - V_{\pm} \Delta^{-1} a_{\pm}, \quad (4.164)$$

которое в полном виде (см. приложение В) выглядит как

$$a_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \int d^3 s V_{\pm}^{mp}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \Delta^{-1}(s) a_{\pm}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}'). \quad (4.165)$$

Здесь потенциал однопионного обмена имеет вид (см. диаграмму на рис. 4.7):

$$V_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \mp g^2 \frac{(\mathbf{p}' + \alpha \mathbf{p})_m (\mathbf{p} + \alpha \mathbf{p}')_n}{D_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}, \quad \alpha = \frac{m}{m_{\pi} + m}. \quad (4.166)$$

Ограничиваясь в дальнейшем лишь состояниями с положительной  $C$ -чётностью, рассмотрим амплитуду  $a_{+}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv a^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  и соответствующий ей потенциал  $V_{+}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv V^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ .

Уравнение (4.165) было выведено в пренебрежении изоспином, однако его включение в рассмотрение представляется необходимым, поскольку нейтральный и заряженный двухчастичные пороги  $D^0 \bar{D}^{*0} + \text{с.с.}$  и  $D^+ D^{*-} + \text{с.с.}$  разнесены всего на величину порядка 8 МэВ, так что они оба могут оказывать влияние на свойства состояния  $X(3872)$ . Таким образом, уравнение (4.165) следует соответствующим образом модифицировать.

Воспользуемся, как и ранее, определением (2.68) для операции зарядового сопряжения и таким образом придём к следующему набору интерполирующих токов для пионов, а также для  $D$  и  $D^*$  мезонов:

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d), \quad \pi^+ = \bar{d}\gamma_5 u, \quad \pi^- = \bar{u}\gamma_5 d, \quad (4.167)$$

$$D^0 = \bar{u}\gamma_5 c, \quad \bar{D}^0 = \bar{c}\gamma_5 u, \quad D^+ = \bar{d}\gamma_5 c, \quad D^- = \bar{c}\gamma_5 d, \quad (4.168)$$

$$D^{*0} = \bar{u}\gamma_{\mu} c, \quad \bar{D}^{*0} = -\bar{c}\gamma_{\mu} u, \quad D^{*+} = \bar{d}\gamma_{\mu} c, \quad D^{*-} = -\bar{c}\gamma_{\mu} d. \quad (4.169)$$

Изоспиновая структура однопионного обмена (4.166) даётся оператором  $\tau_1 \cdot \tau_2$ , а соответствующие изоспиновые коэффициенты следуют из матричных элементов вида  $\langle i | \tau_1 \cdot \tau_2 | k \rangle$  для  $i, k = 0, \bar{0}, c$  и  $\bar{c}$ , причём изоспиновые состояния определены следующим образом:

$$|0\rangle = D^0 \bar{D}^{*0}, \quad |\bar{0}\rangle = \bar{D}^0 D^{*0}, \quad |c\rangle = D^+ D^{*-}, \quad |\bar{c}\rangle = D^- D^{*+}. \quad (4.170)$$

Тогда нетрудно найти, что

$$\langle i | \tau_1 \cdot \tau_2 | \bar{k} \rangle = \langle \bar{i} | \tau_1 \cdot \tau_2 | k \rangle, \quad i, k = 0, c, \quad (4.171)$$

$$\lambda_0 \equiv \langle 0 | \tau_1 \cdot \tau_2 | \bar{0} \rangle = \langle c | \tau_1 \cdot \tau_2 | \bar{c} \rangle = 1 \quad (\text{обмен нейтральным пионом}), \quad (4.172)$$

$$\lambda_c \equiv \langle 0 | \tau_1 \cdot \tau_2 | \bar{c} \rangle = \langle c | \tau_1 \cdot \tau_2 | \bar{0} \rangle = 2 \quad (\text{обмен заряженным пионом}).$$

Следовательно, отличны от нуля следующие компоненты потенциала однопионного обмена (см. рис. 4.7):

$$V_{00}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{00}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \text{ где } m = m' = m_0, m_\pi = m_{\pi^0}, \quad (4.173)$$

$$V_{c\bar{c}}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{c\bar{c}}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \text{ где } m = m' = m_c, m_\pi = m_{\pi^0}, \quad (4.174)$$

$$V_{c0}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{c0}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \text{ где } m = m_0, m' = m_c, m_\pi = m_{\pi^c}, \quad (4.175)$$

$$V_{0\bar{c}}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{0\bar{c}}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \text{ где } m = m_c, m' = m_0, m_\pi = m_{\pi^c}, \quad (4.176)$$

где  $m_0, m_c, m_{\pi^0}$  и  $m_{\pi^c}$  есть соответственно массы нейтральных и заряженных  $D$  мезонов и пионов. При этом множитель 2 для обменов заряженным пионом (см. уравнение (4.172)) будет учтён в уравнениях явно.

Таким образом, приходим к следующему окончательному виду потенциала однопионного обмена:

$$V_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = (\mathbf{p}' + \alpha_{ik}\mathbf{p})^m (\mathbf{p} + \alpha'_{ik}\mathbf{p}')^n F_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad F_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{g^2}{D_{3ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}, \quad (4.177)$$

где коэффициенты  $\alpha$  равны

$$\begin{aligned} \alpha_{00} = \alpha'_{00} &= \frac{m_0}{m_{\pi^0} + m_0}, & \alpha_{cc} = \alpha'_{cc} &= \frac{m_c}{m_{\pi^0} + m_c}, \\ \alpha_{0c} = \alpha'_{c0} &= \frac{m_c}{m_{\pi^c} + m_c}, & \alpha_{c0} = \alpha'_{0c} &= \frac{m_0}{m_{\pi^c} + m_0}, \end{aligned} \quad (4.178)$$

а обратные трёхчастичные пропагаторы даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} D_{300}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= 2m_0 + m_{\pi^0} + \frac{p^2}{2m_0} + \frac{p'^2}{2m_0} + \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2}{2m_{\pi^0}} - M - i0, \\ D_{3cc}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= 2m_c + m_{\pi^0} + \frac{p^2}{2m_c} + \frac{p'^2}{2m_c} + \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2}{2m_{\pi^0}} - M - i0, \\ D_{30c}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= m_c + m_0 + m_{\pi^c} + \frac{p^2}{2m_0} + \frac{p'^2}{2m_c} + \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2}{2m_{\pi^c}} - M - i0, \\ D_{3c0}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= m_c + m_0 + m_{\pi^c} + \frac{p^2}{2m_c} + \frac{p'^2}{2m_0} + \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2}{2m_{\pi^c}} - M - i0. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Строго говоря, 16-компонентный потенциал  $V_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  должен приводить к системе уравнений для 16 компонент  $t$ -матрицы рассеяния в  $D\bar{D}^*$  системе. Между тем, ввиду достаточно высокой симметрии потенциала (см. формулы (4.173)-(4.176)) многие компоненты  $t$ -матрицы совпадают друг с другом. В частности,

$$a_{ik}^{mn} = a_{ik}^{\bar{m}\bar{n}}, \quad a_{ik}^{mn} = a_{ik}^{\bar{m}\bar{n}}, \quad i, k = 0, c, \quad (4.180)$$

так что независимыми остаются лишь 8 компонент  $t$ -матрицы, которые к тому же распадаются на две подгруппы, уравнения для которых “расцепляются”. Имея ввиду изучение процессов с нейтральным каналом в конечном состоянии, из указанных выше подгрупп достаточно ограничиться

лишь одной, приходя таким образом к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{00}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \lambda_0 V_{00}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \lambda_0 \int \frac{d^3 s}{\Delta_0(s)} V_{00}^{mp}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) a_{00}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}') - \lambda_c \int \frac{d^3 s}{\Delta_c(s)} V_{0c}^{mp}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) a_{c0}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}') \\ a_{c0}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \lambda_c V_{c0}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \lambda_c \int \frac{d^3 s}{\Delta_0(s)} V_{c0}^{mp}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) a_{00}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}') - \lambda_0 \int \frac{d^3 s}{\Delta_c(s)} V_{cc}^{mp}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) a_{c0}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}'). \end{cases} \quad (4.181)$$

Амплитуду  $a$  и потенциал  $V$  удобно разложить по сферическим векторам  $\mathbf{Y}_{JLM}(\mathbf{n})$ :

$$a_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_J \sum_{L_1 L_2} a_{ik}^{J, L_1, L_2}(p, p') \sum_M (\mathbf{Y}_{JL_1 M}(\mathbf{n}))^m (\mathbf{Y}_{JL_2 M}^*(\mathbf{n}'))^n, \quad (4.182)$$

$$V_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_J \sum_{L_1 L_2} V_{ik}^{J, L_1, L_2}(p, p') \sum_M (\mathbf{Y}_{JL_1 M}(\mathbf{n}))^m (\mathbf{Y}_{JL_2 M}^*(\mathbf{n}'))^n, \quad (4.183)$$

где через  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  обозначены единичные векторы в направлении импульсов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Поскольку квантовые числа  $X(3872)$  равны  $1^{++}$ , то вклад в амплитуду рассеяния вносят две парциальные волны:  $S$ -волна и  $D$ -волна, так что имеем  $J = 1$  и  $L_1, L_2 = 0, 2$ . Для упрощения обозначений индекс  $J = 1$  будет повсеместно опускаться. Кроме того, рассматривая  $S$ -волну в конечном состоянии, достаточно ограничиться лишь компонентами амплитуды  $a_{ik}^{SS}$  и  $a_{ik}^{DS}$  и воспользоваться следующим разложением:

$$a_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = a_{ik}^{SS}(p, p') T_{SS}^{mn} + a_{ik}^{DS}(p, p') T_{DS}^{mn}, \quad (4.184)$$

где с помощью свойств сферических векторов нетрудно найти явный вид проекторов:

$$T_{SS}^{mn} = \delta_{mn}, \quad T_{DS}^{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}} (3n_m n_n - \delta_{mn}), \quad (4.185)$$

а также четырёх отличных от нуля компонент потенциала:

$$\begin{aligned} V_{ik}^{SS}(p, p') &= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 F_{ik}(p, p', x) (\alpha_{ik} p^2 + \alpha'_{ik} p'^2 + (\alpha_{ik} \alpha'_{ik} + 1) p p' x) dx, \\ V_{ik}^{SD}(p, p') &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_{-1}^1 F_{ik}(p, p', x) \left( \alpha'_{ik} p'^2 + \alpha_{ik} p^2 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) + (\alpha_{ik} \alpha'_{ik} + 1) p p' x \right) dx, \\ V_{ik}^{DS}(p, p') &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_{-1}^1 F_{ik}(p, p', x) \left( \alpha_{ik} p^2 + \alpha'_{ik} p'^2 \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) + (\alpha_{ik} \alpha'_{ik} + 1) p p' x \right) dx, \\ V_{ik}^{DD}(p, p') &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_{ik}(p, p', x) \left( \frac{2}{3} (\alpha_{ik} p^2 + \alpha'_{ik} p'^2) \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{10\alpha_{ik} \alpha'_{ik} + 1}{15} p p' x \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{5} p p' \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) \right) dx, \end{aligned} \quad (4.186)$$

где  $x = \cos \theta$ , причём  $\theta$  есть угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Таким образом, окончательно приходим к системе четырёх связанных уравнений, отвечающих квантовым числам  $X(3872)$ , для амплитуды

рассеяния с учётом изоспина, а также зарядовой чётности и парциального разложения:

$$\begin{aligned}
a_{00}^{SS}(p, p') &= V_{00}^{SS}(p, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{00}^{SS}(p, s) a_{00}^{SS}(s, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{00}^{SD}(p, s) a_{00}^{DS}(s, p') \\
&- 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{0c}^{SS}(p, s) a_{c0}^{SS}(s, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{0c}^{SD}(p, s) a_{c0}^{DS}(s, p') \\
a_{00}^{DS}(p, p') &= V_{00}^{DS}(p, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{00}^{DS}(p, s) a_{00}^{SS}(s, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{00}^{DD}(p, s) a_{00}^{DS}(s, p') \\
&- 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{0c}^{DS}(p, s) a_{c0}^{SS}(s, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{0c}^{DD}(p, s) a_{c0}^{DS}(s, p')
\end{aligned} \tag{4.187}$$

$$\begin{aligned}
a_{c0}^{SS}(p, p') &= 2V_{c0}^{SS}(p, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{c0}^{SS}(p, s) a_{00}^{SS}(s, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{c0}^{SD}(p, s) a_{00}^{DS}(s, p') \\
&- \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{cc}^{SS}(p, s) a_{c0}^{SS}(s, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{cc}^{SD}(p, s) a_{c0}^{DS}(s, p')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{c0}^{DS}(p, p') &= 2V_{c0}^{DS}(p, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{c0}^{DS}(p, s) a_{00}^{SS}(s, p') - 2 \int \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} V_{c0}^{DD}(p, s) a_{00}^{DS}(s, p') \\
&- \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{cc}^{DS}(p, s) a_{c0}^{SS}(s, p') - \int \frac{s^2 ds}{\Delta_c(s)} V_{cc}^{DD}(p, s) a_{c0}^{DS}(s, p').
\end{aligned}$$

При этом обратные пропагаторы  $\Delta_0$  и  $\Delta_c$ , входящие в систему уравнений (4.187), принимают вид :

$$\Delta_0(p) = m_{*0} + m_0 + \frac{p^2}{2\mu_{0*}} - M - \frac{i}{2}\Gamma_0(p), \quad \Delta_c(p) = m_{*c} + m_c + \frac{p^2}{2\mu_{c*}} - M - \frac{i}{2}\Gamma_c(p), \tag{4.188}$$

где приведённые массы определены как

$$\mu_{0*} = \frac{m_0 m_{*0}}{m_0 + m_{*0}}, \quad \mu_{c*} = \frac{m_c m_{*c}}{m_c + m_{*c}}, \tag{4.189}$$

а петлевой оператор (см. формулу (4.162)) заменён “бегущей” шириной  $\Gamma(p)$ , включающей в себя как собственную энергию  $\Sigma(p)$ , так и вклады других каналов распада  $D^*$  мезона, в частности, ширину его радиационного распада:

$$\Gamma_0(p) = \Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \gamma) + \frac{8\pi^2}{3} g^2 \sum_{k=0,c} \lambda_k \mu_{qkk} (q_{0kk}^3 + i\tilde{\kappa}_{0kk}^3), \tag{4.190}$$

$$\Gamma_c(p) = \frac{8\pi^2}{3} g^2 \sum_{j,k=0,c \text{ \& } j \neq k} \lambda_k \mu_{qjk} (q_{cjk}^3 + i\tilde{\kappa}_{cjk}^3), \tag{4.191}$$

где  $\mu_{qjk} \equiv \mu_q(D^j \pi^k)$ , а импульсы

$$q_{ijk} \equiv \sqrt{2\mu_{qjk} \left( M - m_i - m_j - m_{\pi^k} - \frac{p^2}{2\mu_{*i}} \right)}, \quad i, j, k = 0, c \tag{4.192}$$

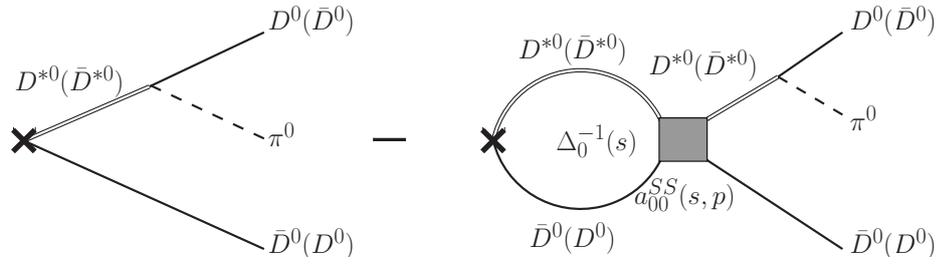


Рис. 4.8. Амплитуда рождения состояния  $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  в  $S$ -волне. Крестиком обозначен точечный источник.

аналитически продолжают ниже соответствующих порогов по правилу  $q_{ijk} \rightarrow i\kappa_{ijk}$ , что обеспечивает аналитичность амплитуды. При этом в выражении для  $\Gamma_c(p)$  отброшен пренебрежимо малый вклад радиационной ширины заряженного  $D^*$  мезона. Постоянные сдвиги

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \sqrt{2\mu_{qjk}(m_j + m_{\pi^k} - m_{*i})} \Theta(m_j + m_{\pi^k} - m_{*i}) \quad (4.193)$$

сокращают вклады  $\kappa_{ijk}$  на порогах и, следовательно, обеспечивают обращение в ноль вещественных частей обратных пропагаторов (4.188) в массах нейтрального и заряженного  $D^*$  мезонов.

Поскольку измеримой в эксперименте является дифференциальная вероятность рождения конечного состояния  $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ , то соответствующий матричный элемент можно записать по диаграммам, изображённым на рис. 4.8, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{dBr}{dE} &= \frac{\mathcal{B}}{2\pi} \frac{m_{\pi^0} \Gamma_*}{\mu_p (2\mu_q (D^0 \pi^0) E_*)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\mu_p(E+E_*)}} pdp \int_{\bar{p}_{\min}}^{\bar{p}_{\max}} \bar{p} d\bar{p} \\ &\times \left\{ \left( E + E_* - \frac{p^2}{2\mu_p} \right) \left| \frac{J(p, E)}{\Delta_0(p)} \right|^2 + \left( E + E_* - \frac{\bar{p}^2}{2\mu_p} \right) \left| \frac{J(\bar{p}, E)}{\Delta_0(\bar{p})} \right|^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{\alpha} \left[ (\alpha^2 + 1) (E + E_*) - \frac{p^2 + \bar{p}^2}{2\mu_p} \right] \text{Re} \left[ \frac{J(p, E)}{\Delta_0(p)} \left( \frac{J(\bar{p}, E)}{\Delta_0(\bar{p})} \right)^* \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.194)$$

где

$$J(p, E) = 1 - \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta_0(s)} a_{00}^{SS}(s, p),$$

$$\bar{p}_{\max, \min} = \left| \sqrt{2\mu_q (D^0 \pi^0) \left( E + E_* - \frac{p^2}{2\mu_p} \right) \pm \alpha p} \right|,$$

$$E_* = m_{*0} - m_0 - m_{\pi^0}, \quad \mu_p = \frac{m_0(m_0 + m_{\pi^0})}{2m_0 + m_{\pi^0}}, \quad \alpha = \alpha_{00} = \frac{m_0}{m_{\pi^0} + m_0},$$

а также определена энергия, отсчитываемая от нейтрального двухчастичного порога:

$$M = m_{*0} + m_0 + E. \quad (4.195)$$

Общий коэффициент  $\mathcal{B} = |\mathcal{F}|^2$  содержит информацию о короткодействующей динамике, отвечающей за рождение  $X(3872)$  — как и раньше, его влияние ограничивается лишь общей нормировкой формы линии. Последний член в фигурных скобках в формуле (4.194) учитывает интерференцию амплитуд рождения пиона  $D^{*0}$  и  $\bar{D}^{*0}$  мезоном, которая оказывает существенное влияние на форму линии связанного состояния ниже порога  $D^0 \bar{D}^{*0}$  (см. работу [125] и подробное обсуждение данного эффекта в разделе 3.2 выше).

Система уравнений (4.187) является основным результатом данного раздела диссертации и позволяет исследовать различные аспекты природы состояния  $X(3872)$ . В частности, в разделе 4.8 ниже подробно изучается вопрос о роли трёхчастичной динамики в  $X$ , а затем (в главе 5) строится киральная экстраполяция энергии связи  $X$  для нефизически больших масс пиона, используемых в решёточных расчётах. Однако прежде всего следует остановиться на вопросе о связывающих силах, приводящих к образованию  $X(3872)$  как слабосвязанного состояния. В следующем разделе обсуждается вопрос о возможности связывания  $X$  за счёт однопионного обмена, для чего также используется система уравнений (4.187).

#### 4.7. Однопионный обмен в $X(3872)$

В разделе 4.3 выше был проведён теоретический анализ данных по различным модам рождения и распада состояния  $X(3872)$  и был сделан вывод о том, что оно является связанным состоянием, так что возникает естественный вопрос о связывающих его механизмах. Достаточно давно в качестве такого механизма в чармониевых системах был предложен однопионный обмен [114, 215], так что неудивительно, что после открытия  $X(3872)$  эта идея была озвучена вновь [115, 217]. В частности, был предпринят ряд попыток описания однопионного обмена в  $X(3872)$  с помощью статического потенциала, по аналогии с дейтроном. При этом, поскольку распад  $D^*$  в  $D\pi$  происходит в  $P$ -волне, то соответствующая вершина содержит лишнюю степень импульса, а сам потенциал однопионного обмена стремится к константе в пределе больших импульсов пиона, то есть он содержит короткодействующую физику, а интегралы в петлевых амплитудах расходятся (см. вид потенциала в формуле (4.177)). В качестве выхода из ситуации было предложено ввести в статическом однопионном потенциале обрезание по импульсам  $\Lambda$  (например, с помощью формфактора) и исследовать вопрос о существовании в таком потенциале слабо связанного состояния в зависимости от величины обрезания. Появление связанного состояния с необходимой энергией связи при относительно небольших  $\Lambda \lesssim 1$  ГэВ позволило бы дать утвердительный ответ на вопрос о возможности однопионного обмена связать  $X(3872)$ , поскольку такие обрезания совместимы с кварковой моделью и, следовательно, могут быть естественным образом объяснены в её рамках. Напротив,

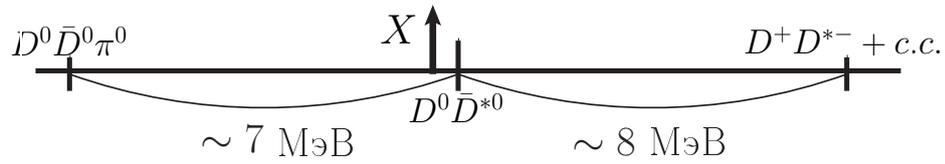


Рис. 4.9. Схематичное изображение расположения  $X(3872)$  относительно двух и трёхчастичных порогов.

необходимость использования бóльших обрезаний следует интерпретировать как невозможность образования  $X$  за счёт однопионного обмена. Соответствующие расчёты были проделаны в работах [249, 250], причём в первой из них были учтены лишь обмены нейтральными пионами, что привело к росту обрезания  $\Lambda$ , совместимого со связанным состоянием, до величин порядка 6-8 ГэВ, тогда как во второй работе в расчёт были приняты также и заряженные обмены (вклад которых весьма велик (см. изоспиновые коэффициенты  $\lambda_0$  и  $\lambda_c$ , приведённые в формуле (4.172)), что позволило получить связанное состояние уже для  $\Lambda \simeq 0.6-0.8$  ГэВ. Таким образом, вывод, сделанный в работе [250], состоит в том, что  $X(3872)$  может связываться однопионным обменом. В данном разделе диссертации этот вывод ставится под сомнение и показано, что при более аккуратном рассмотрении проблемы ограничиться столь малыми обрезаниями не удаётся, так что вновь приходится выйти за пределы применимости кварковой модели. Неизбежный при этом вывод состоит в том, что  $X(3872)$  не может связываться однопионным обменом. Более того, показано, что сам потенциальный подход не применим к системе  $D\bar{D}^*$  ввиду её существенного отличия от дейтрона. Действительно, поскольку разность масс нейтрона и протона мала по сравнению с массой пиона, соответствующий трёхчастичный порог далеко (приблизительно на массу пиона) отстоит от двухчастичного порога, ввиду чего соответствующий трёхчастичный разрез не может оказывать заметного влияния на динамику системы, и использование статического приближения является адекватным. Напротив, в случае  $X(3872)$  разность масс  $D^*$  и  $D$  мезонов с точностью лишь до примерно 7 МэВ совпадает с массой пиона, ввиду чего трёхчастичный порог подходит близко к двухчастичному (см. схему на рис. 4.9). Следовательно, использование статического потенциала для описания однопионного обмена в  $X(3872)$  неизбежно сопряжено с трудностями [122].

Для разрешения вопроса о возможности связать  $X(3872)$  однопионным обменом воспользуемся тем же приёмом с оценкой величины обрезания  $\Lambda$ , необходимого для обеспечения заданной энергии связи  $X$ , однако рассмотрим полную трёхчастичную систему уравнений, не прибегая к статическому приближению. Данный подход полностью аналогичен тому, что использовался выше, в разделе 3.3, так что в нём явно учитываются, во-первых, как нейтральные, так и заряженные обмены, а также удерживаются все мнимые части и члены, ответственные за отдачу — в статическом приближении все такие члены отбрасываются. Соответствующая система уравнений выведе-

на в предыдущем разделе (см. формулу (4.187)).

Для упрощения сравнения результатов с предыдущими работами выразим константу связи  $D^* D\pi$  через эффективный параметр  $V_0$ , использованный в работах [250, 251]. Для этого определим  $P$ -волновую вершину перехода  $D^* \rightarrow D\pi$  в виде

$$v_\mu = g_f \bar{u}_\alpha^* (\tau^a)^\alpha_\beta u^\beta \pi^a p_{\pi\mu}, \quad (4.196)$$

где  $p_{\pi\mu}$  есть 4-импульс пиона, а  $u^*$ ,  $u$  и  $\pi$  есть изоспиновые волновые функции соответственно  $D^*$ ,  $D$  и пиона. С помощью построенной вершины нетрудно вычислить ширины различных распадов  $D^*$  мезонов:

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = \frac{g_f^2 q_{00}^3}{24\pi m_{*0}^2}, \quad (4.197)$$

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0) = \frac{g_f^2 q_{c0}^3}{24\pi m_{*c}^2}, \quad (4.198)$$

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{g_f^2 q_{0c}^3}{12\pi m_{*c}^2}, \quad (4.199)$$

где через  $q_{00}$ ,  $q_{c0}$  и  $q_{0c}$  обозначены соответствующие импульсы в конечных состояниях  $D^0 \pi^0$ ,  $D^+ \pi^0$  и  $D^0 \pi^+$ . Здесь и в дальнейшем для масс нейтральных и заряженных мезонов приняты следующие значения [89]:

$$\begin{aligned} m_{\pi^0} &= 134.98 \text{ МэВ}, & m_{\pi^c} &= 139.57 \text{ МэВ}, \\ m_0 &= 1864.84 \text{ МэВ}, & m_c &= 1869.62 \text{ МэВ}, \\ m_{*0} &= 2006.97 \text{ МэВ}, & m_{*c} &= 2010.27 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Параметр  $V_0$  вводится теперь в соответствии с определением [250, 251]

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = 2V_0 \frac{q_{0c}^3}{m_\pi^3}, \quad (4.200)$$

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = V_0 \frac{q_{00}^3}{m_\pi^3}, \quad (4.201)$$

и, следовательно,

$$\frac{g_f^2}{4m_*^2} = \frac{6\pi V_0}{m_\pi^3}, \quad (4.202)$$

где различием масс между заряженными и нейтральными мезонами пренебрежено.

Для оценки численного значения константы  $V_0$  можно воспользоваться известным экспериментальным значением для полной ширины  $D^{*+}$  мезона [89]:

$$\Gamma_c = (83.4 \pm 1.8) \text{ кэВ}, \quad (4.203)$$

а также известными брэнчингами [89]

$$B(D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0) = (30.7 \pm 0.5)\%, \quad (4.204)$$

$$B(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = (67.7 \pm 0.5)\%. \quad (4.205)$$

В частности, использованная в работе [250] величина  $V_0 = 1.3$  МэВ как раз отвечает распаду заряженного  $D^*$  мезона.

Резюмируя всё вышесказанное, можно переопределить  $D^* D\pi$  вершину (4.148) в виде

$$v_{D^* D\pi}(\mathbf{q}) = \varepsilon \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = g\mathbf{q} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mathbf{q}^2}, \quad g = \frac{\sqrt{6\pi V_0}}{m_\pi^{3/2}}, \quad (4.206)$$

где, как и раньше,  $\mathbf{q}$  есть импульс пиона в системе покоя распадающегося  $D^*$  мезона, а также введён формфактор, обеспечивающий сходимость петлевых интегралов, как было объяснено выше. При этом численное значение константы  $V_0$  совместимое с шириной (4.47) равно<sup>5</sup>  $V_0 = 1.3$  МэВ.

Прежде, чем переходить к численным расчётам с вершиной (4.206), сделаем несколько замечаний относительно статического приближения и обобщения потенциала (4.177), выведенного в предыдущем разделе.

Если пренебречь разницей масс заряженных и нейтральных мезонов, то статический потенциал, даваемый произведением пропагатора пиона и двух вершин перехода  $D^* D\pi$ , принимает вид (см. подробный вывод аналогичного выражения в формуле (3.76)):

$$V_{\text{stat}}^{mn}(\mathbf{q}) = -\frac{3}{(2\pi)^3} \frac{g_m(\mathbf{q})g_n(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + [m_\pi^2 - (m - m_*)^2]}, \quad (4.207)$$

где множитель 3 учитывает вклады как нейтральных, так и заряженных обменов, а по индексам  $m$  и  $n$  данный потенциал сворачивается с векторами поляризации начального и конечного  $D^*$  мезонов. Полученный потенциал (4.207) можно представить в виде:

$$V_{\text{stat}}^{mn}(\mathbf{q}) = -\frac{3}{(2\pi)^3} g_m(\mathbf{q})g_n(\mathbf{q}) \left( V_1^{\text{stat}}(\mathbf{q}) + V_2^{\text{stat}}(\mathbf{q}) \right),$$

$$V_1^{\text{stat}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2E_\pi(E_\pi + m - m_*)}, \quad (4.208)$$

$$V_2^{\text{stat}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2E_\pi(E_\pi + m_* - m)}, \quad (4.209)$$

где  $E_\pi = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}$ , что отвечает двум различным упорядочениям (вкладам промежуточных состояний  $D\bar{D}\pi$  и  $D^*\bar{D}^*\pi$ ) в рамках упорядоченной по времени теории возмущений (см. диаграммы на рис. 4.10).

<sup>5</sup> Следует отметить, что в работе [250] использована величина  $V_0 = 2.6$  МэВ, которая в 2 раза превышает значение, следующее из ширины (4.47).

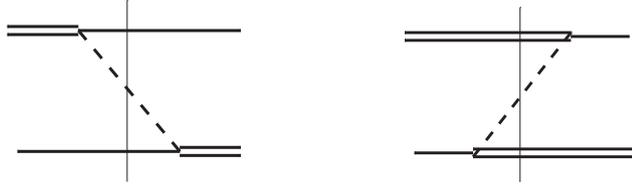


Рис. 4.10. Диаграммы, дающие вклад в потенциал однопионного обмена между  $D$  и  $D^*$  мезонами. Двойная, одинарная и пунктирная линии обозначают соответственно  $D^*$ ,  $D$  и  $\pi$  мезоны. Тонкая вертикальная линия выделяет промежуточное состояние (см. также рис. 3.7) для аналогичного рассмотрения однопионного потенциала взаимодействия в системе  $D_1\bar{D}^*$ .

Поскольку  $m_* \approx m + m_\pi$ , то нетрудно видеть, что для импульсов  $q$  порядка массы пиона или меньше  $V_2 \ll V_1$ . Однако в этом случае пренебрежение отдачей  $D$  мезонов в знаменателе потенциала  $V_1^{\text{stat}}$  является незаконной процедурой, так что статическое приближение для потенциала (4.177) не является адекватным. С другой стороны, при больших импульсах  $q$  (в частности, при  $q \sim \Lambda$ ) нет оснований для пренебрежения вторым упорядочением (4.209), что, в свою очередь, открывает ящик Пандорры, поскольку само ограничение однопионным взаимодействием становится необоснованным, и необходим полноценный учёт всех возможных промежуточных состояний типа

$$\bar{D}^*D^*\pi \leftrightarrow \bar{D}D^*\pi\pi \leftrightarrow \bar{D}D\pi\pi\pi \dots \quad (4.210)$$

Таким образом, формулировка проблемы связывания  $X(3872)$  за счёт однопионного взаимодействия с помощью статического потенциала с введённым формфактором для обрезания петлевых интегралов выглядит необоснованной. Вместо этого сформулируем проблему иначе [30]. Ограничимся сначала лишь первым упорядочением (4.208), но рассмотрим для него полную трёхчастичную задачу (см. вид потенциала (4.177) и систему уравнений (4.187)). Найдём те значения обрезаний, при которых связанное состояние образуется строго на пороге  $D^0\bar{D}^{*0}$ . Затем включим в рассмотрение второе упорядочение (4.209) и проверим, насколько сильно оно влияет на динамику системы, в частности, насколько изменится пограничное обрезание  $\Lambda$ , совместимое с существованием в системе связанного состояния. Вывод о том, что однопионный обмен действительно может отвечать за образование  $X(3872)$ , как утверждается в работе [250], можно будет сделать лишь в том случае, если необходимое обрезание  $\Lambda$  будет принимать значения не более нескольких сотен МэВ (примерно до 1 ГэВ), и при этом включение второго упорядочения будет слабо влиять на него. Во всех остальных случаях неизбежным будет вывод о том, что ответственными за образование  $X$  являются другие силы.

Заметим также, что для обрезаний  $\Lambda \simeq 1$  ГэВ ограничение нерелятивистской кинематикой (в первую очередь, для пиона) выглядит неадекватным приближением, в связи с чем будет использо-

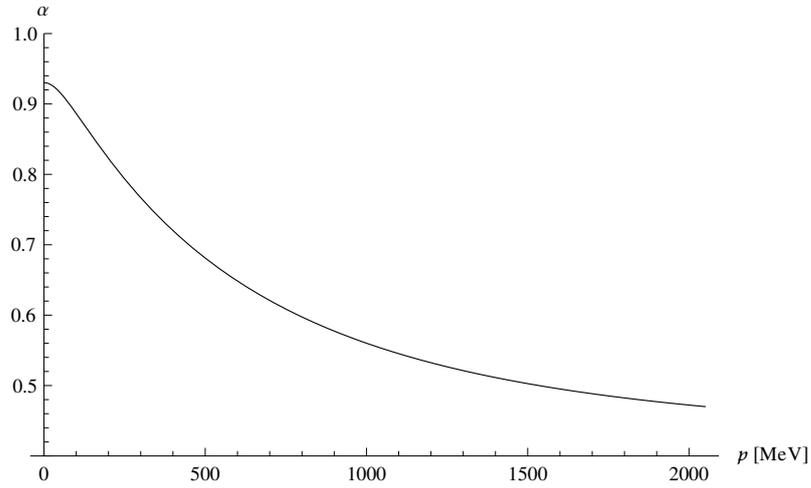


Рис. 4.11. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от импульса  $p$  ( $p' = p$ ).

ваться релятивизованная версия потенциала (4.177) вида:

$$V_{ik}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_m(\mathbf{p}' + \alpha_{ik}\mathbf{p})g_n(\mathbf{p} + \alpha_{ik}\mathbf{p}')}{D_{3ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}, \quad (4.211)$$

где вершина  $g(\mathbf{q})$  приведена в формуле (4.206) выше, а  $i, k$  обозначают каналы ( $i, k = 0, c, \bar{0}, \bar{c}$ ).

При этом трёхчастичный пропагатор имеет релятивизованный вид:

$$D_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 2E_\pi(E_\pi - \mu - i0), \quad (4.212)$$

где

$$\mu = m_{*0} + m_0 + E - \sqrt{m^2 + p^2} - \sqrt{m'^2 + p'^2} \quad (4.213)$$

и

$$E_\pi = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 + m_\pi^2}. \quad (4.214)$$

Здесь, как и раньше, энергия  $E$  отсчитывается от нейтрального двухчастичного порога  $D^0\bar{D}^{*0}$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha'$  можно найти с помощью стандартных формул по релятивистской кинематике (см., например, [252, 253]):

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2 - p'^2}} \left[ \sqrt{m'^2 + p'^2} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}'}{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 - p'^2}} \right], \quad (4.215)$$

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}} \left[ \sqrt{m^2 + p^2} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}'}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - p^2}} \right],$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 + p^2} + E_\pi, \quad \varepsilon' = \sqrt{m'^2 + p'^2} + E_\pi.$$

Данные формулы описывают эффект буста из системы покоя распадающегося  $\bar{D}^*$  мезона в систему центра инерции пары  $D\bar{D}^*$ . В пределе  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$  формулы (4.215) естественным образом

воспроизводят нерелятивистское выражение для  $\alpha$ , содержащееся в формуле (4.147). В статическом пределе часто дополнительно пренебрегают массой пиона по сравнению с массой  $D$  мезона в формулах (4.147), принимая  $\alpha = \alpha' = 1$ .

Зависимость коэффициентов  $\alpha$  от импульса проиллюстрирована на рис. 4.11, из которого можно видеть, что с ростом  $p$  величина  $\alpha$  достаточно быстро убывает. В частности, при значениях импульса  $p \simeq \Lambda \simeq 1$  ГэВ можно ожидать почти двукратного уменьшения  $\alpha$  и  $\alpha'$  по сравнению со статическим пределом, то есть с  $\alpha = \alpha' = 1$ . Как видно из явных выражений для парциальных компонент потенциала (4.186), это приводит к эффективному подавлению однопионного взаимодействия.

Таким образом, можно выделить следующие отличия полных вычислений, производимых в данном разделе диссертации, от вычислений в статическом пределе, содержащихся в работе [250]:

- Удерживаются как мнимая часть потенциала, возникающая из трёхчастичных пропагаторов  $D_{zik}$  (см. формулу для потенциала (4.177)), так мнимая часть двухчастичных пропагаторов  $\Delta_i$  (см. уравнения (4.187)), а также в потенциале удерживаются все члены, отвечающие за отдачу  $D$  мезонов. Только в этом случае соблюдены все требования как двухчастичной, так и трёхчастичной унитарности.
- Вместо нерелятивистской кинематики используется релятивистская кинематика.
- Вместо предела  $\alpha = \alpha' = 1$  используются точные релятивистские выражения.
- Вместо значения 2.6 МэВ для константы  $V_0$  используется значение 1.3 МэВ, совместимое с ширинами (4.200) и (4.201).

Дальнейшая процедура состоит в вычислении дифференциальной вероятности рождения  $X$  по формуле (4.194). Если в системе существует связанное состояние, оно проявляется в виде подпорогового пика в форме линии (см. подробное обсуждение данного вопроса в разделе 3.2 выше). При этом рассматриваются несколько случаев: 1) удерживается только первое упорядочение в статическом приближении, 2) рассматривается сумма двух упорядочений в статическом приближении, 3) удерживается только первое упорядочение вне статического приближения и 4) рассматривается сумма двух упорядочений, причём первое упорядочение учитывается точно, а второе — в статическом приближении. Для установления лучшего контакта с работой [250] расчёты проведены для двух значений параметра  $V_0$ . В таблице 4.6 приведены результаты для минимальных значений обрезания  $\Lambda_{\min}$  совместимых с существованием в системе связанного состояния на пороге  $D^0 \bar{D}^{*0}$ , то есть с нулевой энергией связи.

	$V_1^{\text{stat}}$	$V_1^{\text{stat}} + V_2^{\text{stat}}$	$V_1$	$V_1 + V_2^{\text{stat}}$
$V_0=1.3$ МэВ	2750	1650	3800	2100
$V_0=2.6$ МэВ	1350	950	2400	1050

Таблица 4.6. Минимальные значения обрезания  $\Lambda_{\min}$  (в МэВ) совместимые с существованием в системе связанного состояния на пороге  $D^0 \bar{D}^{*0}$ .

Из таблицы 4.6 видно, что при использовании двух упорядочений (то есть полного потенциала (4.207)) и завышенного значения параметра  $V_0 = 2.6$  МэВ воспроизводится результат работы [250], поскольку связанное состояние в системе возникает при обрезании меньше 1 ГэВ. Однако при использовании феноменологически адекватного значения  $V_0 = 1.3$  МэВ и  $\Lambda \sim 1$  ГэВ связанное состояние в системе отсутствует. При увеличении обрезания такое связанное состояние появляется, но даже в случае статического предела минимальное обрезание уже превышает 1.6 ГэВ, а в случае полного расчёта только с первым упорядочением и вовсе приближается к 4 ГэВ. При этом учёт второго упорядочения (для простоты взятого в статическом пределе), с одной стороны, меняет результат существенным образом ( $\Lambda_{\min}$  уменьшается в 2 раза), однако, с другой стороны, результирующее значение  $\Lambda_{\min}$  всё равно оказывается чрезвычайно большим — превышает 2 ГэВ.

Из проведённого расчёта можно сделать два вывода. Во-первых, однопионный обмен является недостаточно притягивающим для того, чтобы обеспечить связанное состояние в системе  $D\bar{D}^*$ . Следовательно, за образование  $X(3872)$  отвечают другие, короткодействующие, силы. Во-вторых, сама квантовомеханическая постановка задачи, предложенная в работах [249, 250] и использованная в данном разделе, является плохо определённой, поскольку в ней отсутствует чёткая иерархия масштабов, позволяющая контролировать сделанные приближения. В частности, большой вклад второго упорядочения означает, что, как обсуждалось выше, нет оснований для пренебрежения более высокими порядками в упорядоченной по времени теории возмущений. Неизбежный вывод состоит в том, что адекватным подходом к описанию системы является теоретико-полевой подход, причём однопионное взаимодействие является хорошо определённым только в совокупности с контактными членами, описывающими короткодействующую часть взаимодействия (включая короткодействующую часть самого однопионного обмена) и фиксированным, например, на заданное значение энергии связи  $X(3872)$  [32]. В сформулированной таким образом задаче импульсы порядка большой шкалы (порядка обрезания) уже не играют роли, поскольку они поглощены в перенормировку контактного члена, а вся динамика системы разворачивается на импульсах порядка характерной шкалы связанного состояния  $k_B \simeq \sqrt{E_B m}$ , то есть на импульсах порядка нескольких десятков МэВ. В этом случае совершенно обоснованными являются использование нерелятивист-

ской кинематики для всех частиц (включая пионы), а также ограничение постоянными значениями  $\alpha$  и  $\alpha'$ , причём их отклонением от единицы, вообще говоря, также можно пренебречь. Следует помнить, однако, что самосогласованный учёт трёхчастичной динамики по-прежнему является крайне важным, что диктуется близостью трёхчастичного порога к двухчастичному. Данный вопрос подробно исследуется в следующем разделе диссертации.

#### 4.8. Учёт короткодействующих сил и перенормировка модели

В разделе 4.6 выше была сформулирована система уравнений связанных каналов, непertурбативным образом учитывающая трёхчастичный канал  $D\bar{D}\pi$  (см. формулу (4.187)). В предыдущем разделе полученная система уравнений решалась для модифицированного потенциала (4.186), включающего формфактор, регулирующий поведение потенциала на больших импульсах (см. формулу (4.206)). В результате был сделан вывод о необходимости развития теоретико-полевого подхода к проблеме взаимодействий в  $X(3872)$ . Основополагающая идея такого подхода состоит в разделении короткодействующей и дальнедействующей частей потенциала взаимодействия в  $D\bar{D}^*$  системе, при этом однопионный обмен даёт вклад в обе части [28]. Таким образом, систему уравнений (4.187) следует рассматривать с модифицированным потенциалом

$$V_{ik}^{SS}(p, p') = C_0(\Lambda) + \frac{1}{6} \int_{-1}^1 F_{ik}(p, p', x) (\alpha_{ik}p^2 + \alpha'_{ik}p'^2 + (\alpha_{ik}\alpha'_{ik} + 1)pp'x) dx, \quad (4.216)$$

где через  $\Lambda$  обозначен регулятор (для простоты используется обрезание трёхмерных импульсов в интегралах ступенчатой функцией  $\theta(\Lambda - |\mathbf{p}|)$ ), а  $C_0(\Lambda)$  есть суммарный короткодействующий потенциал (в дальнейшем называемый также контрчленом), включающий как вклад однопионного обмена, так и дополнительное короткодействующее взаимодействие, изучение природы которого является одной из важных задач физики чармонийподобного состояния  $X(3872)$ . Для каждого заданного значения обрезания  $\Lambda$  контактный член фиксируется величиной энергии связи  $X(3872)$ , которая, как обсуждалось выше, для определённости принята равной 0.5 МэВ. При этом  $C_0(\Lambda)$  поглощает основную зависимость предсказаний модели от обрезания, а остаточная зависимость ожидается достаточно слабой (количественные оценки такой зависимости, а также способы её уменьшения подробно обсуждаются ниже). Наличие сильной остаточной зависимости от  $\Lambda$  указывало бы на необходимость введения дополнительных контрчленов более высокого порядка по импульсам. Как будет видно в дальнейшем, в рассматриваемой задаче необходимость введения контрчленов высоких порядков не возникает.

Прежде, чем переходить к решению полной задачи, обратимся к простой и точно решаемой модели, потенциал в которой исчерпывается контактным взаимодействием  $C_0$ . Тогда в однока-

нальном случае система уравнений (4.187) сводится к одному уравнению с  $V_{00}^{SS} = C_0$ :

$$a_{00} = C_0 - C_0 I_0 a_{00}, \quad (4.217)$$

где для упрощения обозначений положено  $a_{00} \equiv a_{00}^{SS}$ , а петлевой интеграл есть

$$I_0(E) = \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{q^2/(2\mu_{0*}) - E - i0} = 2\mu_{0*} \left( \Lambda + \frac{k}{2} \left( i\pi + \log \frac{\Lambda - k}{\Lambda + k} \right) \right) \quad (4.218)$$

с  $k^2 = 2\mu_{0*}E$ .

Как уже упоминалось выше, величина потенциала  $C_0$  фиксирована заданной энергией связи  $E_B$  ( $E_B > 0$ ):

$$C_0^{-1} = -I_0(-E_B), \quad a_{00}^{-1} = I_0(E) - I_0(-E_B). \quad (4.219)$$

При этом величина обрезания  $\Lambda$  должна быть достаточно большой, чтобы превышать характерные импульсы в системе. В данной простой задаче это условие эквивалентно требованию  $\Lambda \gg \kappa_0(E_B) = \sqrt{2\mu_{0*}E_B}$  и, в частности, оно подразумевает возможность разложить интеграл  $I_0$  по степеням отношения  $k/\Lambda$ :

$$I_0 \approx 2\mu_{0*} \left( \Lambda + \frac{i}{2}\pi k - \frac{k^2}{\Lambda} \right) + O\left(\frac{k^4}{\Lambda^3}\right), \quad (4.220)$$

что соответствует разложению эффективного радиуса амплитуды рассеяния:

$$a_{00}^{-1} = -\mu_{0*}\pi \left( -a^{-1} - ik + \frac{1}{2}r_{\text{eff}}k^2 \right), \quad (4.221)$$

где длина рассеяния и эффективный радиус принимают вид:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\mu_{0*}E_B}} \frac{1}{1 - \sqrt{2\mu_{0*}E_B}r_{\text{eff}}/2}, \quad r_{\text{eff}} = \frac{4}{\pi\Lambda}. \quad (4.222)$$

Тогда вблизи полюса амплитуда рассеяния  $a_{00}$  представима в виде

$$a_{00} = \frac{\text{Res } a_{00}}{E + E_B} \equiv \frac{g_{\text{eff}}^2}{E + E_B}, \quad (4.223)$$

где вычет равен

$$\text{Res } a_{00} = \frac{\kappa_0(E_B)}{\mu_{0*}^2\pi} \left( 1 - \frac{4}{\pi\Lambda}\kappa_0(E_B) \right)^{-1} = \frac{\sqrt{2\mu_{0*}E_B}}{\mu_{0*}^2\pi(1 - r_{\text{eff}}\sqrt{2\mu_{0*}E_B})}. \quad (4.224)$$

Как нетрудно видеть из формулы (4.224), поскольку

$$g_{\text{eff}}^2 \propto \sqrt{E_B}, \quad (4.225)$$

то квадрат вычета является почти линейной функцией энергии связи  $E_B$ , причём отклонение от линейного поведения возникает в силу ненулевого (но численно маленького) эффективного радиуса  $r_{\text{eff}}$  (см. красную пунктирную линию на рис. 4.12).

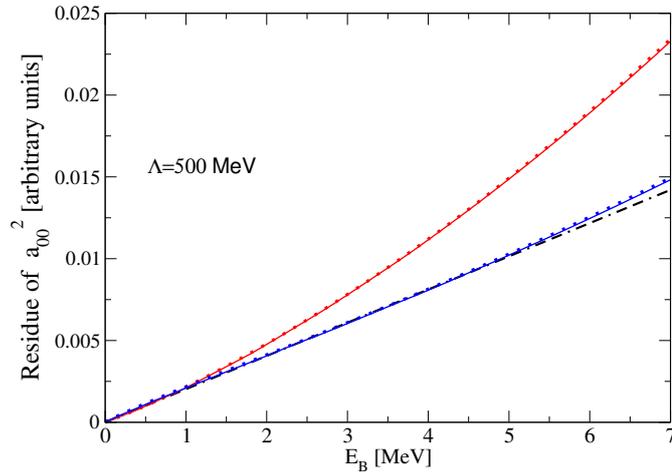


Рис. 4.12. Поведение квадрата вычета амплитуды рассеяния  $D^0\bar{D}^{*0}$  как функции энергии связи в системе  $D^0\bar{D}^{*0}$ . Красным цветом показаны линии, отвечающие одноканальному случаю, синим — двухканальному. Полные расчёты с учётом динамических пионов даны сплошными линиями, а расчёты без пионов (с учётом только контактного взаимодействия) — пунктирными линиями. Чёрная штрих-пунктирная прямая приведена для визуализации слабой нелинейности синих кривых. Расчёты выполнены для  $\Lambda = 500$  МэВ.

У амплитуды  $a_{00}$  имеется два полюса в комплексной  $k$  плоскости:

$$k_1 = i\sqrt{2\mu_{0*}E_B}, \quad k_2 = i\left(\frac{2}{r_{\text{eff}}} - \sqrt{2\mu_{0*}E_B}\right). \quad (4.226)$$

В частности, для  $E_B = 0.5$  МэВ и  $\Lambda = 500$  МэВ находим численно:

$$a = 6.6 \text{ Фм}, \quad r_{\text{eff}} = 0.5 \text{ Фм}, \quad k_1 = i31.1 \text{ МэВ}, \quad k_2 = i754.3 \text{ МэВ}. \quad (4.227)$$

Полученные результаты допускают простую интерпретацию в терминах подхода Вайнберга, обсуждавшегося в разделе 1.3 выше. Действительно, в системе имеется один окологороговый полюс ( $k_1$ ) и большая длина рассеяния, а квадрат вычета длины рассеяния в полюсе с хорошей точностью является линейной функцией энергии связи. Следовательно, описываемая система имеет динамическую молекулярную природу.

Аналогичным образом можно рассмотреть двухканальную задачу, более точно отвечающую случаю  $X(3872)$ . Для амплитуд  $a_{00} \equiv a_{00}^{SS}$  и  $a_{c0} \equiv a_{c0}^{SS}$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{00} = C_0 - C_0 a_{00} I_0 - 2C_0 a_{c0} I_c \\ a_{c0} = 2C_0 - 2C_0 a_{00} I_0 - C_0 a_{c0} I_c, \end{cases} \quad (4.228)$$

решение которой для  $a_{00}$  даётся формулой

$$a_{00} = \frac{C_0(1 - 3C_0 I_c)}{(1 + C_0 I_0)(1 + C_0 I_c) - 4C_0^2 I_0 I_c}. \quad (4.229)$$

Как и в одноканальном случае, для петлевых интегралов можно использовать разложения:

$$I_0 = \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{q^2/(2\mu_{0*}) - E - i0} \approx 2\mu_{0*} \left( \Lambda + \frac{i}{2}\pi k_0 - \frac{k_0^2}{\Lambda} \right) + O\left(\frac{k_0^4}{\Lambda^3}\right), \quad (4.230)$$

$$I_c = \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{q^2/(2\mu_{c*}) + \Delta M - E - i0} \approx 2\mu_{c*} \left( \Lambda + \frac{i}{2}\pi k_c - \frac{k_c^2}{\Lambda} \right) + O\left(\frac{k_c^4}{\Lambda^3}\right), \quad (4.231)$$

где  $k_0^2 = 2\mu_{0*}E$ ,  $k_c^2 = 2\mu_{c*}(E - \delta)$  и  $\delta = (m_{*c} + m_c) - (m_{*0} + m_0) \approx 8$  МэВ.

Требование существования у амплитуды рассеяния (4.229) полюса при  $E = -E_B$  приводит к квадратному уравнению для фиксации контактного члена  $C_0$ :

$$\left(1 + C_0 I_0(-E_B)\right) \left(1 + C_0 I_c(-E_B)\right) - 4C_0^2 I_0(-E_B) I_c(-E_B) = 0, \quad (4.232)$$

которое имеет два решения разного знака. В частности, для  $\Lambda = 500$  МэВ и  $E_B = 0.5$  МэВ имеем численные решения  $C_0 = 13.442 \times 10^{-7}$  МэВ<sup>-2</sup> и  $C_0 = -4.425 \times 10^{-7}$  МэВ<sup>-2</sup>. Данные решения отвечают различным значениям изоспина, так что для случая изоскалярного состояния  $X(3872)$  следует выбрать отрицательное значение  $C_0$ . При этом система по-прежнему имеет один модельно независимый околопороговый полюс  $k_1 = i31.1$  МэВ, то есть присутствие второго канала не оказало влияния на положение этого полюса (см. формулу (4.227)). Остальные полюса модельно зависимы, но они располагаются далеко от порога, за пределами области применимости модели.

Вычет амплитуды рассеяния  $a_{00}$  в полюсе  $E = -E_B$  имеет вид

$$\text{Res } a_{00} \approx \frac{\text{const}(\Lambda)}{\pi\mu_{0*}^2} \frac{\kappa_c(E_B)\kappa_0(E_B)}{\kappa_c(E_B) + \kappa_0(E_B)} \left(1 - \frac{8}{\pi\Lambda} \frac{\kappa_c(E_B)\kappa_0(E_B)}{\kappa_c(E_B) + \kappa_0(E_B)}\right)^{-1}, \quad (4.233)$$

где  $\kappa_0(E_B) = \sqrt{2\mu_{0*}E_B}$ ,  $\kappa_c(E_B) = \sqrt{2\mu_{c*}(E_B + \delta)}$ , а  $\text{const}(\Lambda)$  есть константа порядка единицы. В пределе слабо связанной системы, то есть для  $E_B \ll \delta$ , имеет место неравенство  $\kappa_0(E_B) \ll \kappa_c(E_B)$ , так что формула (4.233) для вычета упрощается:

$$\text{Res } a_{00} \approx \text{const} \cdot \frac{\kappa_0(E_B)}{\pi\mu_{0*}^2} \left(1 - \frac{8}{\pi\Lambda} \kappa_0(E_B)\right)^{-1} \quad (4.234)$$

и (с точностью до численного множителя) принимает такой же вид, как и в одноканальном случае. Зависимость квадрата вычета от энергии связи для данного двухканального случая приведена на рис. 4.12 и, аналогично одноканальному случаю, она также демонстрирует почти линейное поведение. Следует отметить, что сохранение линейности зависимости в области  $E_B \sim \delta$  является случайным и возникает в силу взаимного сокращения поправок (в частности, за счёт вклада  $\kappa_c(E_B)$ ) к формуле (4.234).

Перейдём к рассмотрению полной задачи, помимо контактного взаимодействия включающей также дальнедействующую часть однопионного обмена. Как указывалось выше, величина контактного взаимодействия  $C_0$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить существование связанного

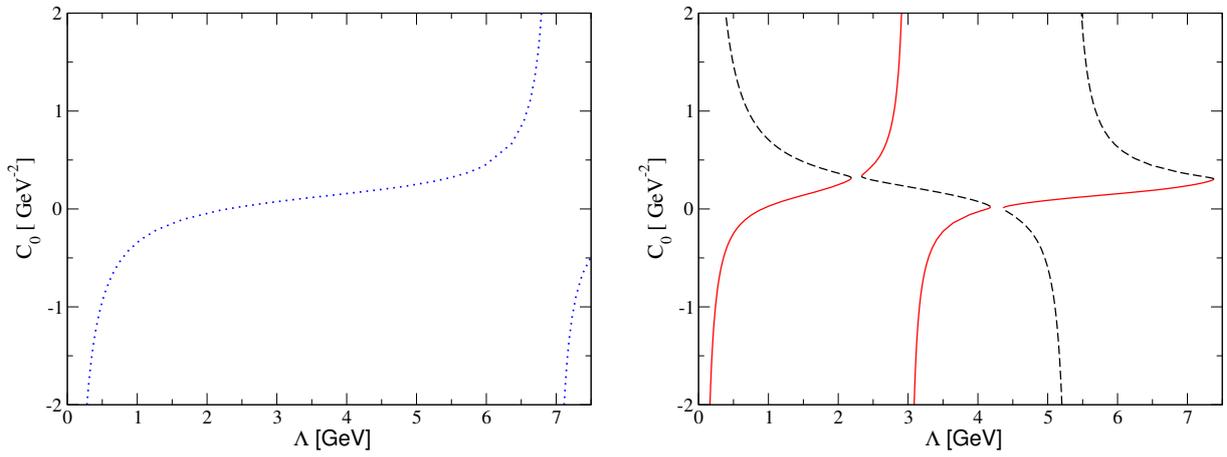


Рис. 4.13. Поведение контактного члена  $C_0$  в зависимости от выбранной величины обрезания  $\Lambda$  в полной задаче с учётом пионов для одноканального (левый график) и двухканального (правый график) случаев. Энергия связи выбрана в виде  $E_B = 0.5$  МэВ.

состояния с заданной энергией связи (если не оговорено иначе, энергия связи принимается равной 0.5 МэВ). Возникающая при этом зависимость  $C_0(\Lambda)$  весьма нетривиальна — она изображена на рис. 4.13. Таким образом, как в одноканальном, так и в двухканальном случае имеет место так называемый предельный цикл. Данное поведение весьма характерно для такого рода расчётов (см., например, работы [124, 254–257], где аналогичное поведение контактного взаимодействия получено в нуклонных системах). Действительно, с ростом обрезания  $\Lambda$  дальнедействующее взаимодействие меняется, так что для компенсации этого изменения и удержания связанного состояния на прежнем месте требуется новое значение контактного члена. По мере приближения к точке разрыва кривой  $C_0(\Lambda)$  небольшим изменениям обрезания отвечают всё большие изменения  $C_0$ . Затем, при некотором критическом обрезании, подобрать  $C_0$  становится невозможно, поэтому рассматривавшийся до этого уровень “тонет”, а на заданную энергию связи фиксируется следующий уровень — происходит “перескок” на следующую ветвь функции  $C_0(\Lambda)$ . Далее ситуация повторяется. Как пояснялось выше, наличие двух решений для  $C_0$  при каждом  $\Lambda$  отвечает двум значениям изоспина системы. Для случая  $X(3872)$  необходимо рассматривать случай  $I = 0$ , что отвечает красной кривой на правом графике на рис. 4.13.

Здесь следует сделать два замечания относительно выбора величины обрезания  $\Lambda$ . Первое замечание касается выбора  $\Lambda \simeq 0.9$  ГэВ, при котором контактный член обращается в ноль (см. правый график на рис. 4.13). Данная ситуация ни в коем случае не может интерпретироваться как отсутствие в системе короткодействующих сил — в этом случае короткодействующая динамика лишь “спрятана” за счёт конкретного выбора модели обрезания.

Второе замечание связано с тем, что, как видно из правого графика на рис. 4.13, при неко-

торых значениях обрезания  $\Lambda$  решения для  $C_0$  отсутствуют, причём происходит это вблизи предполагаемых точек пересечения кривых. Такое поведение является следствием хорошо известного квантовомеханического явления расталкивания уровней. Действительно, пересечение красной и чёрной кривых означало бы совпадение контактных взаимодействий в изосинглетном и изотриплетном каналах и, следовательно, наличие в одном и том же уравнении двух вырожденных уровней, отвечающих разным изоспинам. При несовпадающих значениях контактных членов системы уравнений для разных изоспинов различаются, поэтому пересечения уровней не происходит. Очевидно, что не следует выбирать значения обрезания вблизи таких точек разрыва. Таким образом, для полной двухканальной задачи приходим к ограничению  $\Lambda \lesssim 2$  ГэВ или  $2$  ГэВ  $\lesssim \Lambda \lesssim 4.5$  ГэВ.

Наконец, с чисто технической точки зрения (для повышения точности вычислений) удобно выбирать значения обрезания в районе “плато” в центральной части кривой, так что наиболее разумным выбором для полной двухканальной задачи являются диапазоны  $300$  МэВ  $\lesssim \Lambda \lesssim 1700$  МэВ или  $2500$  МэВ  $\lesssim \Lambda \lesssim 3800$  МэВ. В обсуждавшихся выше расчётах фиксировалось значение обрезания  $\Lambda = 500$  МэВ, лежащее внутри первого из упомянутых выше диапазонов. Это же значение будет использоваться и в дальнейшем. Строго говоря, после перенормировки модели зависимость от обрезания должна полностью уйти из наблюдаемых величин. В реальности некоторая остаточная зависимость от обрезания всё же присутствует. Тем не менее, ввиду её слабости (см. ниже), введение в данной задаче дополнительных контактных членов (в частности, в следующем порядке  $O(p^2)$ ) не представляется необходимым.

В расчётах использованы следующие значения масс [89]:

$$\begin{aligned} m_0 &= m(D^0) = 1864.84 \text{ МэВ}, & m_c &= m(D^\pm) = 1869.62 \text{ МэВ}, \\ m_{*0} &= m(D^{*0}) = 2006.97 \text{ МэВ}, & m_{*c} &= m(D^{*\pm}) = 2010.27 \text{ МэВ}, \\ m_{\pi^0} &= m(\pi^0) = 134.98 \text{ МэВ}, & m_{\pi^c} &= m(\pi^\pm) = 139.57 \text{ МэВ} \end{aligned} \quad (4.235)$$

и ширин (см. приложение Г):

$$\Gamma_* = \Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = 40 \text{ кэВ}, \quad \Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \gamma) = 20 \text{ кэВ}, \quad (4.236)$$

из которых нетрудно извлечь значение константы связи  $g$  (см. определение (4.149)):

$$g = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ МэВ}^{-3/2}. \quad (4.237)$$

## 4.9. Форма линии $X(3872)$ в упругом канале с учётом трёхчастичной динамики

В данном разделе производится расчёт формы линии  $X(3872)$  в упругом канале в области энергий между нейтральными двух- и трёхчастичными порогами с помощью модели, построенной

в предыдущем разделе.

Рассматриваются и сравниваются следующие три ситуации:

1. Одноканальная задача в статическом приближении, то есть система уравнений (4.187) решается для  $V_{c0}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{0c}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = V_{cc}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$ , а также для статического потенциала однопионного обмена, даваемого формулой (4.177), но с  $\alpha_{00} = \alpha'_{00} = 1$  и с выражением

$$D_{300}^{\text{static}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 2m_0 + m_{\pi^0} + \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2}{2m_{\pi^0}} - (m_{*0} + m_0) - i0 \quad (4.238)$$

для обратного трёхчастичного пропагатора. Кроме того, вместо “бегущей” ширины (4.190) в двухчастичном пропагаторе  $\Delta_0$  (см. определение (4.188)) используется постоянное значение (см. приложение Г)

$$\Gamma_0 = 60 \text{ кэВ}. \quad (4.239)$$

Заметим, что в отсутствие трёхчастичной динамики мнимая часть потенциала и ширина  $D^*$  мезона отвечают одному и тому же распаду  $D^* \rightarrow D\pi$ , так что учёт только одного эффекта из двух приводил бы к нарушению двухчастичной унитарности.

2. Полная динамическая задача в одноканальном приближении, включая промежуточные трёхчастичные состояния  $D\bar{D}\pi$ , а также динамическую ширину  $D^*$  (формула (2.52) с отброшенным вкладом заряженных пионов).
3. Полная динамическая двухканальная задача с учётом трёхчастичной динамики  $D\bar{D}\pi$  и динамической ширины  $D^*$ .

На рис. 4.14 представлены результаты расчёта дифференциальной вероятности наблюдения  $X(3872)$  в нейтральном канале  $D\bar{D}\pi$  (см. формулу 4.194) для всех трёх перечисленных выше случаев: зелёной штрих-пунктирной линией показан результат для одноканальной задачи в статическом приближении, синей пунктирной линией показан результат для одноканальной задачи с динамическими пионами, тогда как сплошной красной линией показан результат полного расчёта в двухканальном случае. Во всех случаях обрезание  $\Lambda = 500$  МэВ, а величина контактного члена  $C_0$  подобрана таким образом, чтобы обеспечить наличие пика в дифференциальном брэнчинге (см. рис. 4.14), расположенном при фиксированной энергии, для которой выбрано значение  $E = -E_B = -0.5$  МэВ. Для удобства сравнения все три кривые одинаково нормированы вблизи трёхчастичного порога  $D^0\bar{D}^0\pi^0$ , расположенного в  $E = -7.15$  МэВ. При этом основная разница между кривыми имеет место в области пика, в частности, пик имеет разную высоту и ширину в зависимости от использованной модели (см. рис. 4.14). Для количественной оценки этих различий

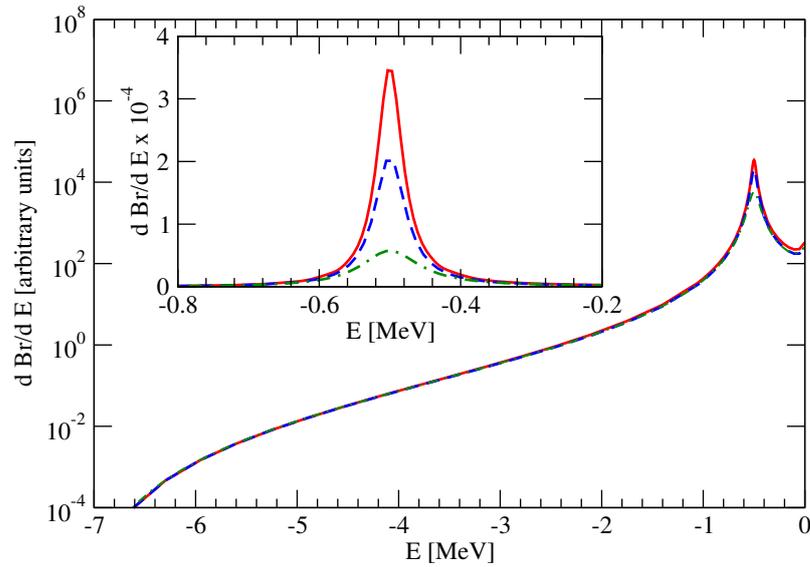


Рис. 4.14. Дифференциальная вероятность (в логарифмическом масштабе) наблюдения  $X(3872)$  в канале  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  для трёх случаев: 1) одноканальный случай в статическом приближении (зелёная штрих-пунктирная линия); 2) одноканальный динамический случай (синяя пунктирная линия); 3) полная двухчастичная динамическая задача (красная сплошная кривая). Все кривые нормированы вблизи трёхчастичного порога  $D^0\bar{D}^0\pi^0$ , расположенного при  $E = -7.15$  МэВ. Область вблизи пика увеличена и показана в линейном масштабе.

воспользуемся следующим приёмом. Заметим, что вблизи пика амплитуда рассеяния  $a_{00}$  в канале  $D\bar{D}^*$  с хорошей точностью представима в следующем сепарабельном виде:

$$a_{00}^{SS}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{1}{\mu_{0*}\pi} f(E)\phi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{p}'), \quad (4.240)$$

где вид формфактора  $\phi$  не влияет на энергетическое поведение амплитуды, даваемое функцией  $f(E)$ . Таким образом, если использовать для  $f(E)$  параметризацию Брейта-Вигнера<sup>6</sup>, то с помощью формулы (4.194) нетрудно найти следующее простое выражение для дифференциального рефта:

$$\left(\frac{dBr}{dE}\right)_{\text{BW}} = \frac{\text{const}}{(E + E_B)^2 + \Gamma_X^2/4} \hat{k}_{\text{eff}}(E), \quad (4.241)$$

где через  $\hat{k}_{\text{eff}}(E)$  обозначен интеграл по фазовому объёму в формуле (4.194), вычисленный при  $J(p, E) = 1$ . За исключением области вблизи порога величина  $\hat{k}_{\text{eff}}(E)$  представляет собой плавную функцию энергии. Следовательно, выражение (4.241) может быть использовано для извлечения величины  $\Gamma_X$ . В таблице 4.7 приведены соответствующие значения, извлечённые из кривых, отвечающих всем трём упомянутым выше случаям.

<sup>6</sup> Использование формулы Брейта-Вигнера для данной формы линии обосновано вблизи пика, поскольку его ширина  $\Gamma_X$  существенно меньше расстояния до ближайшего порога.

Случай	$E_B$ , МэВ	$\Gamma_X$ , кэВ	$\gamma_1$ , МэВ	$\gamma_2$ , МэВ
1	0.5	102	31.1	1.58
2	0.5	53	31.1	0.82
3	0.5	44	31.1	0.68

Таблица 4.7. Параметры распределений (4.241) и (4.242), извлечённые из подгонки к форме пика на рис. 4.14.

Из таблицы 4.7 нетрудно видеть, что разница между случаями 2 и 3 весьма невелика, что легко объяснить расположением заряженных трёхчастичных порогов  $D^+ \bar{D}^0 \pi^-$ ,  $D^- D^0 \pi^+$  и  $D^+ D^- \pi^0$  достаточно далеко от пика. Действительно, указанные трёхчастичные пороги лежат примерно на 2.5-3 МэВ выше нейтрального двухчастичного порога  $D^0 \bar{D}^{*0}$ , то есть существенно вне пределов пика.

В то же время, разница между случаями 1 и 2 достаточно велика и подчёркивает роль трёхчастичной динамики в  $X(3872)$  — включение трёхчастичных эффектов уменьшает видимую ширину пика в 2 раза. Или, формулируя иначе, переход к статическому пределу для пиона приводит к двукратной переоценке видимой ширины пика.

Для проверки последнего наблюдения проведём дополнительное исследование пика связанного состояния  $X(3872)$ . В молекулярном сценарии для  $X$  ожидается маленькая величина эффективного радиуса в соответствующем низкоэнергетическом разложении амплитуды вблизи порога (дополнительным подтверждением этому является практически линейное поведение вычета как функции энергии (см. рис. 4.12). Следовательно, вблизи двухчастичного порога для амплитуды достаточно ограничиться приближением длины рассеяния, приходя к следующему приближённому выражению для дифференциальной вероятности:

$$\left( \frac{dBr}{dE} \right)_{\text{дл.расс.}} = \text{const} \times |f(E)|^2 \hat{k}_{\text{eff}}(E), \quad f(E) = \frac{1}{-\gamma_1 - i\gamma_2 - i\sqrt{2\mu_{0*}}(E + i0)}. \quad (4.242)$$

В последней формуле пренебрегается вкладами неупругих каналов, а величина  $\gamma_2$  (из условия унитарности следует, что  $\gamma_2 > 0$ ) эффективно учитывает сдвиг полюса в комплексную плоскость за счёт трёхчастичных эффектов. Аналогичный подход к анализу формы линии в канале  $D\bar{D}\pi$  применялся в работе [81]. Величины параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , извлечённые из фита к резонансной структуре на рис. 4.14, приведены в таблице 4.7.

Вблизи пика (то есть в области  $|E + E_B| \ll E_B$ ) формула в приближении длины рассеяния (4.242) эквивалентна распределению Брейта-Вигнера (4.241) при следующем отождествлении параметров:

$$E_B = \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{2\mu_{0*}}, \quad \Gamma_X = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\mu_{0*}}. \quad (4.243)$$

Более того, для узкого резонанса ( $\Gamma_X \ll E_B$ ) последние соотношения можно разрешить относительно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , что даёт:

$$\gamma_1 \approx \sqrt{2\mu_{0*}E_B}, \quad \gamma_2 \approx \frac{\mu_{0*}\Gamma_X}{\sqrt{2\mu_{0*}E_B}}. \quad (4.244)$$

Таким образом, уменьшение видимой ширины пика связанного состояния в 2 раза должно приводить к аналогичному уменьшению параметра  $\gamma_2$ , что действительно можно видеть из таблицы 4.7, где приведены параметры фитов для всех трёх описанных выше сценариев. Следует отметить, что выражение (4.242) обеспечивает весьма хорошее описание формы линии вблизи порога, причём в довольно широкой окрестности полюса — вплоть до  $|E + E_B| \sim E_B$ .

Следует подчеркнуть, что эффект пионной динамики сильно зависит от взаимного расположения резонанса и порогов. На рис. 4.15 приведены результаты расчёта зависимости видимой ширины пика  $\Gamma_X$  от энергии связи  $E_B$ . Из левого графика на рис. 4.15 видно, что, если увеличивать энергию связи  $X$ , то по мере приближения резонанса к трёхчастичному порогу соответствующая (то есть определяемая трёхчастичной динамикой) мнимая часть потенциала взаимодействия убывает, так что ширина пика стремиться к константе, определяемой величиной ширины распада  $D^{0*} \rightarrow D^0\gamma$ . И наоборот, с уменьшением энергии связи, то есть с приближением пика к двухчастичному порогу  $D^0\bar{D}^{*0}$ , ширина растёт. При этом в статическом приближении ширина остаётся постоянной вне зависимости от близости порогов и испытывает лишь небольшое изменение вблизи двухчастичного порога. При этом следует иметь ввиду, что сам метод извлечения ширины пика перестаёт работать вблизи двухчастичного порога, поскольку условием применимости формулы (4.241) является выполнение сильного неравенства  $E_B \gg \Gamma_X$ .

В наиболее реалистичном диапазоне энергий связи от  $0.1 \lesssim E_B \lesssim 2$  МэВ зависимость ширины от  $E_B$  можно параметризовать в следующем аналитическом виде:

$$\Gamma_X(E_B) = \frac{\Gamma_1\beta_1^2}{E_B^2 + \beta_1^2} + \frac{\Gamma_2\beta_2^2}{E_B^2 + \beta_2^2}, \quad (4.245)$$

где  $\Gamma_1 = 35.5$  кэВ,  $\beta_1 = 2.369$  МэВ,  $\Gamma_2 = 28.7$  кэВ и  $\beta_2 = 0.364$  МэВ.

Интересно также сравнить результаты вычислений в полной динамической двухканальной задаче с результатами других подходов, известных в литературе. В частности, существуют аналогичные вычисления в рамках пертурбативного описания пионов — так называемой эффективной теории поля для  $X(3872)$  (X-EFT) [112, 125]. Так, в лидирующем порядке X-EFT пионы полностью отынтегрированы, и волновая функция  $X$  (связанного состояния с заданной энергией связи) выбирается в универсальном виде, отвечающем контактному взаимодействию в системе  $D\bar{D}^*$ . Затем ширина  $X$  вычисляется как интеграл по трёхчастичному фазовому пространству от квадрата модуля амплитуды, даваемой произведением волновой функции и вершины распада  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$ . Соответствующий результат приведён на рис. 4.15 чёрной штрих-пунктирной линией. В работе

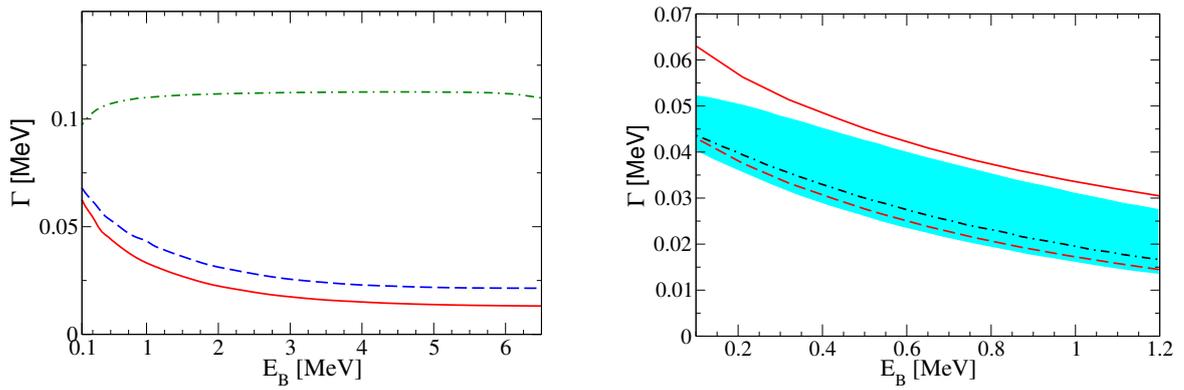


Рис. 4.15. Зависимость ширины  $X$  от энергии связи  $E_B$ . На левом графике представлены результаты вычислений для трёх случаев, описанных в тексте: 1) одноканальный случай в статическом приближении (зелёная штрихпунктирная линия); 2) одноканальный динамический случай (синяя пунктирная линия); 3) полная двухчастичная динамическая задача (красная сплошная кривая). На правом рисунке приведено сравнение результата полного динамического расчёта (красная пунктирная линия) с аналогичными результатами, полученными в рамках теории возмущений по пионам (так называемой X-EFT) в лидирующем порядке (чёрная штрих-пунктирная линия (см. работу [125]) и в следующем за лидирующим порядке (голубая полоса (см. работу [112])). Сплошной красной линией показана полная ширина с учётом вклада распада  $D^* \rightarrow D\gamma$ .

[112] данный результат улучшен посредством пертурбативного учёта пионов на фоне полного непертурбативного вклада контактного взаимодействия — естественного обобщения подхода к нуклон-нуклонным системам, развитого в работе [258]. Соответствующий результат (взятый из рис. 7 работы [112]) показан на правом графике рис. 4.15 голубой полосой. Для непосредственного сравнения с вышеупомянутыми расчётами необходимо из полной ширины  $\Gamma_X$ , вычисленной выше и приведённой на левом графике рис. 4.15 (а также сплошной красной линией на правом графике), вычесть вклад канала распада  $D\bar{D}\gamma$ . Полученная при этом ширина, показанная на правом графике рис. 4.15 чёрной штрих-пунктирной линией, находится в хорошем согласии с результатами расчётов в X-EFT как в лидирующем, так и следующем за лидирующим порядке. При этом следует отметить, что расчёты в X-EFT возможны лишь в том случае, если  $X$  является связанным состоянием. В случае же виртуального уровня необходимо использовать метод, описанный в данном разделе диссертации. Важно также, что использованный выше непертурбативный подход имеет меньшую неопределённость, чем X-EFT. Иными словами, как любой непертурбативный метод, предложенный в диссертации подход к учёту пионной динамики в  $X$  потенциально обладает более широкой областью применимости по сравнению с аналогичными пертурбативными подходами. Кроме того, предложенный метод допускает непосредственное обобщение на другие околопороговые состояния, в том числе и такие, для которых расстояние до порогов не столь мало, как для  $X(3872)$ . В

этом случае возможность рассмотрения пионов по теории возмущений оказывается под вопросом. Примерами таких систем могут служить  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  и  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ , единообразный подход к которым, основанный на симметрии спина тяжёлого кварка, был предложен в работе [113] и развит в последующих работах с участием тех же авторов (см., например, работы [101, 233, 259]). Всестороннее изучение таких адронных систем открывает широкие возможности для применения развитого в диссертации метода учёта пионной динамики в околопороговых резонансах.

Прежде, чем переходить к киральным экстраполяциям — ещё одному важному приложению метода исследования околопороговых резонансов, изложенного в данном разделе, — сделаем несколько заключительных замечаний.

Прежде всего заметим, что влияние выбора обрезания на полученные результаты весьма невелико. Действительно, приведённые выше результаты получены для обрезания  $\Lambda = 500$  МэВ, однако вариация обрезания в довольно широких пределах (тестовые вычисления проводились для  $300 \text{ МэВ} \lesssim \Lambda \lesssim 1700 \text{ МэВ}$ ) приводит к изменениям в ширине на уровне лишь нескольких процентов, что сравнимо с ошибкой вычислений. Тем не менее, основываясь на выводах предыдущего раздела, заметим, что имеет смысл рассматривать не слишком большие обрезания с тем, чтобы характерные импульсы в перенормированной теории были малы по сравнению с массами частиц, то есть чтобы гарантированно и с высокой точностью работало нерелятивистское приближение и можно было использовать дополнительные упрощения (например, при выборе значений параметров  $\alpha$  и  $\alpha'$  (см. формулы (4.178) и (4.215))).

Второе замечание касается вкладов в ширину  $X(3872)$  от других, не связанных с пионами, каналов. Как подробно обсуждалось выше, основной вклад в ширину  $X$  дают многочисленные адронные моды распада чармониевой компоненты  $\chi'_{c1}$ . В данном разделе они не рассматривались, поскольку изучаемый эффект состоит в учёте трёхчастичной динамики, которая играет роль лишь в том случае, когда трёхчастичный порог лежит ниже двухчастичного, причём отстоит от него не слишком далеко. В этом смысле состояние  $X(3872)$  предоставляет уникальную возможность исследования данного вопроса.

Ещё одним важным замечанием является вывод, который с неизбежностью следует из произведённых выше вычислений. Напомним, что решалась система уравнений для связанных каналов, которая является хорошо определённой лишь после регуляризации и перенормировки. В зависимости от выбранной величины обрезания по импульсам контактное взаимодействие может принимать значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , причём идентифицировать в нём вклад короткодействующей части однопионного обмена представляется принципиально невозможным. Таким образом, в рамках эффективной теории поля вопрос о вкладе однопионного обмена в формирование  $X$  (см., например, уже обсуждавшиеся выше работы [217, 250]) в принципе не может быть сформулирован модельно-

и схемо-независимым образом, так что обратное утверждение, встречающееся в литературе [260], является в корне ошибочными [32].

Из полученных выше результатов видно, что двухчастичный заряженный канал оказывает не очень большое влияние на свойства  $X$ . Действительно, различия между полными динамическими одно- и двухканальными вычислениями отчётливо видны, однако численно они невелики. Причина этого состоит в том, что как величина энергии связи  $E_B$ , так и ширина пика  $\Gamma_X$  принимают значения существенно меньшие расстояния между заряженным и нейтральным порогами  $\delta$ .

Наконец, ещё раз сформулируем основной вывод данного раздела: использование наивного статического приближения для пионной динамики в  $X(3872)$  приводит к существенной (двукратной при энергии связи  $E_B = 0.5$  МэВ) переоценке её вклада в ширину  $X$ . Поскольку, как следует из анализа данных,  $X$  является связанным состоянием, то важной частью формы линии резонанса является подпороговая область, то есть сигнал, лежащий между нейтральными двух- и трёхчастичными порогами — именно в той области, где трёхчастичный разрез  $D\bar{D}\pi$  играет важную роль. Следовательно, полноценный учёт трёхчастичной динамики крайне важен для описания свойств  $X(3872)$ .

#### 4.10. Выводы к четвёртой главе

В четвёртой главе диссертации подробно обсуждались свойства одного из наиболее характерных и наиболее экспериментально изученных околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков — чармонийподобного состояния  $X(3872)$ .

Идея одновременной обработки экспериментальных данных для всех известных каналов рождения и распада околопорогового резонанса, подробно обсуждавшаяся и аргументированная во второй главе диссертации, воплощена на примере обработки данных по  $X(3872)$ . В частности, продемонстрировано, как одновременная обработка данных по двух- и трёхпионным модам распада  $X$  позволяет зафиксировать его квантовые числа. Кроме того, одновременная обработка данных для каналов распада  $X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$  и  $X \rightarrow D^0\bar{D}^0\pi^0$  позволила установить такие ключевые свойства  $X$ , как его природа, а также оценить примесь  $\bar{c}s$  чармония в его волновой функции. В частности, было показано, что  $X(3872)$  является связанным состоянием (описание данных в терминах виртуального уровня также возможно, но оно существенно уступает по качеству описанию реальным уровнем), и что его волновая функция содержит чармониевую и молекулярную компоненты примерно в равных долях. К сожалению, возможности дальнейшего извлечения свойств состояния  $X(3872)$  из экспериментальных данных сильно ограничены качеством последних. В частности, использование параметризации, предложенной во второй главе диссертации для описания околопо-

роговых состояний, на данный момент не даёт преимуществ по сравнению с анализом данных на основании простых обобщений формулы Флатте, использованных в данной главе. Тем не менее, с появлением в будущем более точных данных их обработка может быть проведена с использованием предложенных выше методов и параметризаций.

Также, в данной главе сделан расчёт вероятностей радиационных распадов  $X(3872)$  в молекулярной модели, что позволило опровергнуть встречающееся в литературе предубеждение о несовместимости экспериментальных данных по таким распадам, в частности, по отношению брэнчингов  $R = Br(X \rightarrow \gamma\psi')/Br(X \rightarrow \gamma J/\psi)$ , с молекулярной картиной  $X$ . Сделанные оценки позволили заключить, что отношения  $R \gtrsim 1$  вполне достижимы в рамках предложенной модели  $X(3872)$  при естественных предположениях о неизвестных константах связи векторных чармониев  $J/\psi$  и  $\psi'$  с  $D$  мезонами. На текущий момент экспериментальная ситуация с указанными радиационными распадами является не до конца разрешённой, поскольку между данными различных коллабораций имеются существенные расхождения. Сделанные выше теоретические оценки могут также сыграть свою роль в разрешении сложившейся ситуации.

Далее, была оценена вероятность прямого рождения состояния  $X(3872)$  в  $e^+e^-$  соударениях, что представляет потенциальный интерес для экспериментальной программы фабрик чарма, в частности, для коллаборации BESIII. Оцененная вероятность оказалась сравнимой по порядку величины (всего примерно в 3 раза меньше) с аналогичной вероятностью прямого рождения чармония  $\chi_{c1}$ , причём экспериментальное изучение процесса  $e^+e^- \rightarrow \chi_{c1}$  уже включено в экспериментальную программу коллаборации BESIII. В зависимости от полученных результатов и на основании соответствующих теоретических оценок, в том числе сделанной выше, ожидается принятие решения о включении в будущую экспериментальную программу коллаборации BESIII изучения процесса прямого рождения  $e^+e^- \rightarrow X(3872)$ .

Важным шагом вперёд в изучении свойств состояния  $X(3872)$  является использование непертурбативного подхода к учёту пионной динамики в нём, основанного на трёхчастичных уравнениях типа уравнений Фаддеева. Такой подход также был сформулирован в данной главе диссертации. Одним из основных ингредиентов указанного подхода является потенциал однопионного обмена между  $D^*$  и  $D$  мезонами в  $X(3872)$ , в связи с чем было проведено исследование свойств такого обмена и установлено, что одного его недостаточно для образования  $X$  как связанного состояния. В результате был сформулирован эффективный теоретико-полевой подход к учёту однопионного обмена в  $X$ , позволяющий исследовать широкий круг вопросов, связанных со свойствами состояния  $X(3872)$ . В частности, показано, что учёт динамических пионов крайне важен при описании формы линии  $X(3872)$  — использование статического приближения для пионов приводит к сильному искажению свойств  $X$ .

## Киральная экстраполяция энергии связи $X(3872)$

### 5.1. Введение

В четвёртой главе диссертации был развит непертурбативный подход к описанию свойств состояния  $X(3872)$ , основанный на задаче связанных каналов, описываемых трёхчастичными уравнениями типа уравнений Фаддеева. Как неоднократно упоминалось выше, такой подход позволяет удовлетворить всем требованиям унитарности и аналитичности матрицы рассеяния. Он также позволяет исследовать такие тонкие, но крайне важные для физики околопороговых резонансов вопросы, как трёхчастичная динамика в них. В частности, в четвёртой главе было показано, что полноценный учёт трёхчастичной динамики  $D\bar{D}\pi$  в  $X(3872)$  приводит к заметным последствиям для формы линии резонанса.

Ещё одним возможным применением развитого в четвёртой главе подхода является интерпретация результатов решёточных вычислений. Действительно, как известно, решёточные расчёты, выполняемые, исходя из первых принципов КХД, являются альтернативным по отношению к эксперименту источником информации об адронных состояниях. Благодаря быстрому росту мощности современных компьютеров, а также благодаря появлению большого числа компьютерных кластеров, обладающих высокой производительностью, современные решёточные расчёты в состоянии ответить на многие вопросы, относящиеся к физике сильных взаимодействий. Недавно стали появляться первые результаты расчётов свойств экзотических состояний в спектре чармония, в частности, состояния  $X(3872)$  [80, 118, 119]. Для определённости в дальнейшем будем ссылаться на результат расчёта энергии связи  $X(3872)$ , полученный в работе [80]:

$$E_B = 11 \pm 7 \text{ МэВ}, \quad (5.1)$$

при этом результаты работ [118, 119] полностью аналогичны. К сожалению, все такие расчёты обладают рядом недостатков, устранение которых в настоящий момент, по-видимому, не представляется возможным. Прежде всего, точность расчётов весьма невелика. Например, ошибка в энергии связи оказывается порядка самой энергии связи (см. формулу (5.1)). Кроме того, используемый размер решётки  $L \simeq 2$  Фм явно недостаточен для надёжного описания околопороговых состояний, волновая функция которых содержит “рыхлую” молекулярную компоненту [261]. Наконец, все подобные расчёты выполнены для достаточно большой токовой массы  $u$  и  $d$  кварков (вместо массы кварка удобно иметь дело с массой пиона, которая однозначно связана с ней соотношением Гелл-Манна-Окса-Реннера [181]). Большинство указанных недостатков может быть исправлено

исключительно улучшением методики вычислений и увеличением вычислительной мощности используемых компьютеров. Однако проблема нефизической массы пиона на решётке может быть, если не снята полностью, то существенно нивелирована с помощью подхода, развиваемого в диссертации. Действительно, масса пиона встречается во всех проведённых выше вычислениях исключительно в виде параметра, что позволяет практически произвольно изменять её (сохраняя лишь иерархию масштабов, которая важна при формулировании и решении задачи связанных каналов), в том числе увеличивать до значения  $m_\pi = 266$  МэВ, использованного в решёточных расчётах в работах [80, 118, 119]. Важным условием возможности такого изменения массы пиона в уравнениях является полноценный (желательно непертурбативный) учёт в них трёхчастичной динамики, которая претерпевает существенные изменения при увеличении массы пиона. В частности, при  $m_\pi > m_* - m$  (как и раньше, здесь  $m_*$  и  $m$  обозначают массы  $D^*$  и  $D$  мезонов) исчезает трёхчастичный разрез. Выведенные выше уравнения для системы связанных каналов (4.181) полностью удовлетворяют указанному требованию, что позволяет решить с их помощью задачу о киральной экстраполяции энергии связи  $X(3872)$  от физической массы пиона до нефизически большой массы, используемой на решётке. При этом все входящие в уравнения величины (массы, константы связи, ширины и т.п.) рассматриваются как функции массы пиона. Для того, чтобы отличать “бегущую” массу пиона от её физического значения, для последнего используется индекс “ph”. Аналогично будем поступать и с физическими (то есть взятыми при физической массе пиона) значениями других параметров. Так, физическая масса пиона будет обозначаться через  $m_\pi^{\text{ph}}$ , а через  $m_\pi$  — его масса, которая может принимать произвольные значения. В расчётах используются следующие физические значения масс [89]:

$$\begin{aligned} m_{\pi_0}^{\text{ph}} &= 134.98 \text{ МэВ}, & m_0^{\text{ph}} &= 1864.84 \text{ МэВ}, & m_{*0}^{\text{ph}} &= 2006.97 \text{ МэВ}, \\ m_{\pi_c}^{\text{ph}} &= 139.57 \text{ МэВ}, & m_c^{\text{ph}} &= 1869.62 \text{ МэВ}, & m_{*c}^{\text{ph}} &= 2010.27 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Далее, считая отклонение  $\delta m_\pi = m_\pi - m_\pi^{\text{ph}}$  малым по сравнению с характерной адронной шкалой  $M \sim 1$  ГэВ, будем производить разложение всех величин по малому отношению  $\delta m_\pi/M$ . Поскольку разложение делается по целым степеням массы лёгкого кварка, которая в силу соотношения Гелл-Манна-Окса-Реннера пропорциональна квадрату массы пиона, то реальным параметром разложения является отношение  $\delta m_\pi^2/M^2$ . Для достижения поставленных целей достаточно ограничиться лидирующим порядком такого разложения для всех физических величин. При этом по-прежнему будем ограничиваться лидирующим членом кирального разложения потенциала взаимодействия  $D\bar{D}^*$ , избегая таким образом явной импульсной зависимости контактного члена. Такой подход справедлив вплоть до отклонений  $\delta m_\pi \sim m_\pi^{\text{ph}}$ , что оказывается достаточным для того, чтобы “дотянуться” до массы пиона, используемой на решётке [80, 118, 119]. Однако можно ожи-

дать, что с достаточной точностью такое приближение будет работать и для несколько бóльших  $m_\pi$ , в частности, для значений  $m_\pi \simeq 300\text{-}400$  МэВ, также часто используемых в решёточных расчётах чармониевых систем (см., например, работу [262]).

## 5.2. Свойства состояния $X(3872)$ при нефизической массе пиона

В данном разделе киральная экстраполяция энергии связи  $X(3872)$  строится с помощью системы нерелятивистских трёхчастичных уравнений (4.187) [38]. Как было объяснено выше, при этом учитываются поправки порядка  $\delta m_\pi^2/M^2$  ко всем физическим параметрам задачи, где величина  $M$  определяется массами  $D$  и  $D^*$  мезонов или масштабом спонтанного нарушения киральной симметрии  $4\pi f_\pi$ , то есть, как уже упоминалось выше, имеет характерный масштаб порядка 1 ГэВ.

Для удобства перейдём от размерной константы связи  $g$  (см., определение вершины (4.148)) к безразмерной константе связи  $g_c$ , которая входит в стандартный лагранжиан взаимодействия  $D^*D\pi$  [112]:

$$\mathcal{L} = \frac{g_c}{2f_\pi} \left( D^{*\dagger} \cdot \nabla \pi^a \tau^a D + D^\dagger \tau^a \nabla \pi^a \cdot D^* \right) \quad (5.3)$$

и может быть зафиксирована из ширины распада  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$  (см. также формулу (4.197), в которой  $g_f = g_c \sqrt{m_{*0}m_0}/f_\pi$ ):

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) = \frac{g_c^2 m_0 q_{00}^3}{24\pi f_\pi^2 m_{*0}}, \quad (5.4)$$

где импульс в системе центра масс  $q_{00}$  стандартным образом определяется через треугольную функцию  $\lambda$  (см., например, формулу (Б.6)) в виде  $q_{00} = \lambda^{1/2}(m_{*0}^2, m_0^2, m_{\pi^0}^2)/(2m_*)$ , а численные значения масс приведены в формуле (5.2). Тогда нетрудно установить связь констант  $g$  и  $g_c$  в виде (как и раньше,  $\mu_q(XY) = m_X m_Y / (m_X + m_Y)$ ):

$$g = \frac{g_c}{(4\pi)^{3/2} f_\pi} \left( \frac{m_0}{m_{*0} \mu_q(D^0\pi^0)} \right)^{1/2}, \quad (5.5)$$

а также, с помощью численного значения (4.237), получить величину константы  $g_c$  в физическом пределе (то есть при физической массе пиона):

$$g_c^{\text{ph}} = 0.57. \quad (5.6)$$

Для упрощения записи воспользуемся вспомогательной величиной  $\xi$ , которую определим как отношение текущей массы пиона к её физическому значению:

$$\xi = \frac{m_\pi}{m_\pi^{\text{ph}}} \quad (5.7)$$

и приведём явные выражения для зависимости параметров задачи от  $\xi$ .

Для масс  $D$  и  $D^*$  мезонов такая зависимость изучалась в работе [263] в рамках унитаризованной киральной теории возмущений. В частности, древесные выражения для  $m(\xi)$  и  $m_*(\xi)$ , соответствующие разложению вблизи кирального предела для группы  $SU(2)$ , имеют вид:

$$m(\xi) = m^{\text{ph}} \left[ 1 + h_1 \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{m^{\text{ph}}} \right)^2 (\xi^2 - 1) \right], \quad (5.8)$$

$$m_*(\xi) = m_*^{\text{ph}} \left[ 1 + h_1 \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{m_*^{\text{ph}}} \right)^2 (\xi^2 - 1) \right] + \Delta m_*, \quad (5.9)$$

где  $h_1 \approx 0.42$ , а сдвиги  $\Delta m_*$  выражаются через ширины (4.190) и (4.191) как

$$\begin{aligned} \Delta m_{*0} &= \frac{1}{2} \text{Im} [\Gamma_0(p, m_\pi^{\text{ph}}) - \Gamma_0(p, m_\pi)] |_{p=0, E=0}, \\ \Delta m_{*c} &= \frac{1}{2} \text{Im} [\Gamma_c(p, m_\pi^{\text{ph}}) - \Gamma_c(p, m_\pi)] |_{p=0, E=m_*-m}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

причём в поправках пренебрежено разностью масс заряженных и нейтральных мезонов.

Далее, для константы распада пиона можно воспользоваться однопетлевым результатом, полученным в рамках киральной теории возмущений (см., например, работу [264]):

$$f_\pi(\xi) = f_\pi^{\text{ph}} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{f}{f_\pi^{\text{ph}}} \right) (\xi^2 - 1) - \frac{(m_\pi^{\text{ph}})^2}{8\pi^2 f^2} \xi^2 \ln \xi \right], \quad (5.11)$$

где  $f_\pi^{\text{ph}} = 92.4$  МэВ, и низкоэнергетическая константа  $l_4$  выражена через значение  $f_\pi$  в киральном пределе  $f$ , значение которого взято из работы [265]:

$$f_\pi(m_\pi = 0) \equiv f = 85 \text{ МэВ}. \quad (5.12)$$

Зависимость от массы пиона константы распада  $g$  можно установить из решёточных данных [265] (в данном случае используется фит ChPT-II из процитированной работы, включающий однопетлевые поправки). Во избежание путаницы в обозначениях в дальнейшем некоторые величины, взятые из решёточной работы [265], будут помечаться индексом “lat”. Кроме того, переопределим использованную в работе [265] константу распада пиона с тем, чтобы она удовлетворяла нормировке (5.12). Тогда нетрудно прийти к следующей формуле для зависимости  $g(\xi)$  (см. связь констант  $g$  и  $g_c$  в уравнении (5.5)):

$$g = g^{\text{ph}} \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{m_\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{m_*^{\text{ph}}}{m_*} \right)^{1/2} \left( \frac{m + m_\pi}{m^{\text{ph}} + m_\pi^{\text{ph}}} \right)^{1/2} \left( \frac{f_\pi^{\text{ph}}}{f_\pi} \right) \left( \frac{g_c}{g_c^{\text{ph}}} \right), \quad (5.13)$$

где извлечённое из работы [265] отношение  $g_c/g_c^{\text{ph}}$  как функция  $\xi$  равно:

$$\begin{aligned} \frac{g_c}{g_c^{\text{ph}}} &= 1 + C_1 (\xi^2 - 1) + C_2 \xi^2 \ln \xi, \\ C_1 &= 1 - \left( 1 - \frac{(1 + 2g_0^2)}{8\pi^2} \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{f} \right)^2 \ln \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{\mu_{\text{lat}}} + \alpha_{\text{lat}} (m_\pi^{\text{ph}})^2 \right)^{-1}, \\ C_2 &= -\frac{(1 + 2g_0^2)}{8\pi^2} \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{f} \right)^2 \left( 1 - \frac{(1 + 2g_0^2)}{8\pi^2} \left( \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{f} \right)^2 \ln \frac{m_\pi^{\text{ph}}}{\mu_{\text{lat}}} + \alpha_{\text{lat}} (m_\pi^{\text{ph}})^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

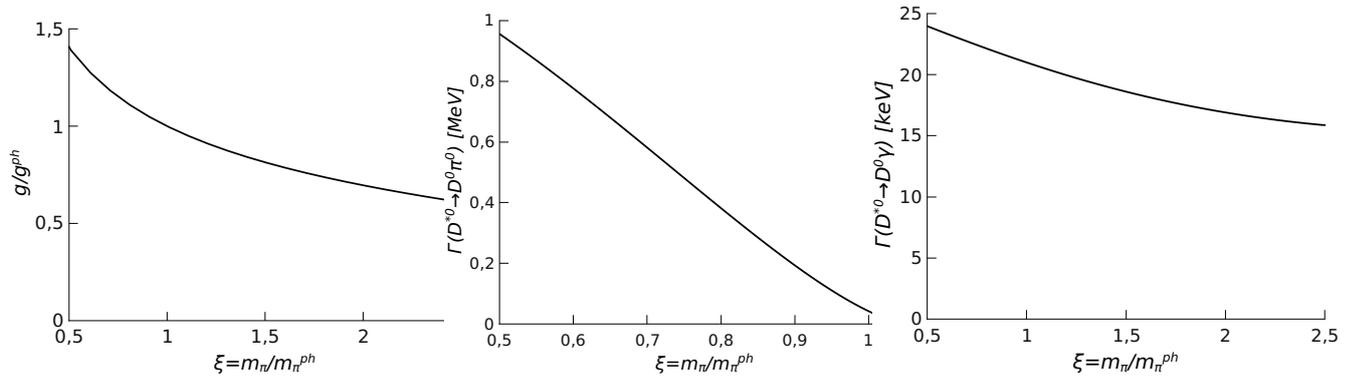


Рис. 5.1. Зависимость от  $\xi = m_\pi/m_\pi^{\text{ph}}$  отношения констант связи  $g/g^{\text{ph}}$  (левый график), а также ширины распадов  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$  (средний график) и  $D^{*0} \rightarrow D^0\gamma$  (правый график).

а соответствующие решёточные параметры принимают значения [265]:

$$g_0 = 0.46, \quad \alpha_{\text{lat}} = -0.16 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \mu_{\text{lat}} = 1 \text{ ГэВ}. \quad (5.15)$$

На левом графике рис. 5.1 приведена кривая зависимости отношения  $g/g^{\text{ph}}$  от  $\xi$  в исследуемом диапазоне масс пиона.

Знание константы распада  $g$  позволяет по формуле (5.4) вычислить ширину распада  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$  и, тем самым, установить её зависимость от  $m_\pi$  — соответствующая кривая изображена на среднем графике рис. 5.1. Нетрудно видеть, что ширина  $\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0)$  обращается в ноль при  $m_\pi/m_\pi^{\text{ph}} \approx 1.05$  из-за закрывающегося в этой точке фазового пространства. Между тем, как видно из левого графика на рис. 5.1, константа связи в этой точке в ноль не обращается и определяет аналитическое продолжение петлевого оператора под порог (см. формулы (4.190) и (4.191)). Также важно отметить, что обсуждаемая особенность является трёхчастичной, то есть интегрируемой. В связи с этим никакого нерегулярного поведения кривой  $E_B(\xi)$  в точке  $\xi \approx 1.05$  не ожидается.

Что касается ширины распада  $D^* \rightarrow D\gamma$ , то достаточно воспользоваться результатами работы [238]:

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\gamma) \equiv \Gamma_\gamma = \frac{1}{3} \alpha_{\text{EM}} |\mu_1|^2 k_\gamma^3, \quad (5.16)$$

где  $\alpha_{\text{EM}} = 1/137$  есть постоянная тонкой структуры,  $k_\gamma$  есть импульс фотона, а вся динамика процесса сосредоточена в величине, обозначенной через  $\mu_1$  и имеющей смысл магнитного момента перехода. В работе [238] учтены также эффекты каонных петель, которыми в интересующем нас порядке можно пренебречь. Результирующая зависимость ширины  $D^{*0} \rightarrow D^0\gamma$  от массы пиона показана на правом графике рис. 5.1, причём значение данной ширины в физической точке может быть извлечено из ширины распада заряженного  $D^*$  мезона (см. приложение Г) и принимает значение  $\Gamma_\gamma^{\text{ph}} = 20$  кэВ.

Последней величиной, зависимость которой от  $m_\pi$  необходимо определить, является контактный член  $C_0$ . Поскольку он описывает короткодействующее взаимодействие в  $X(3872)$ , природа которого неизвестна, то и зависимость  $C_0(m_\pi)$  может быть установлена лишь на основании соображений естественности. Исходными постулатами для такого рассмотрения контактного члена являются утверждения о том, что 1)  $X(3872)$  есть связанное состояние, 2) величина энергии связи  $E_B(m_\pi)$  не зависит от параметра обрезания  $\Lambda$ , 3) разложение идёт по целым степеням массы лёгкого кварка, что соответствует разложению по чётным степеням массы пиона. Как подробно обсуждалось в предыдущей главе, пункт 2) выше означает, что теория с динамическими пионами может быть перенормирована, по крайней мере, в смысле поглощения контактным членом лидирующей зависимости от обрезания  $\Lambda$ . Таким образом, “бег” контактного члена с массой пиона постулируется в следующем наиболее общем виде:

$$C_0(\Lambda, \xi) = C_0^{\text{ph}} + \delta C_0 = C_0^{\text{ph}}(\Lambda) \left( 1 + f(\Lambda) \frac{\delta m_\pi^2}{M^2} \right) = C_0^{\text{ph}}(\Lambda) \left( 1 + f(\Lambda) \frac{(m_\pi^{\text{ph}})^2}{M^2} (\xi^2 - 1) \right), \quad (5.17)$$

где, как пояснялось выше, удержаны лидирующий член и первая поправка к нему в разложении по отношению  $\delta m_\pi^2/M^2$ . Здесь и в дальнейшем величина параметра  $M$ , задающего жёсткую шкалу задачи, фиксируется значением  $M \sim m_\rho \sim 800$  МэВ. Обрезание  $\Lambda$  не должно превышать эту жёсткую шкалу. С другой стороны, оно не может быть меньше шкалы, задаваемой массой пиона, причём для последней предполагается рассматривать значения порядка  $m_\pi \lesssim 300$  МэВ. Таким образом, диапазон допустимых значений обрезания принимает вид  $400 \dots 700$  МэВ.

Перенормировка теории состоит в том, что лидирующая зависимость от обрезания поглощается контактным членом в физической точке  $C_0^{\text{ph}}(\Lambda)$ , величина которого фиксируется из требования равенства энергии связи  $X(3872)$  заданному значению (как и раньше, в качестве такого значения выбирается  $E_B = 0.5$  МэВ). В качестве простого примера см. обсуждение перенормировки амплитуды в чисто контактной теории, описываемой уравнением Липпмана-Швингера (4.217). При отклонении массы пиона от физического значения возникает дополнительная зависимость от обрезания, которая поглощается безразмерной функцией  $f(\Lambda)$ , а для её фиксации накладывается требование независимости от обрезания наклона энергии связи в физической точке  $(\partial E_B / \partial m_\pi) \big|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}}$ .

Прежде, чем переходить к рассмотрению полной задачи, включающей пионную динамику, рассмотрим её упрощённый и потому доступный для аналитического исследования вариант, ограничившись лишь контактным взаимодействием [28]. Это позволит получить представление о поведении функции  $C_0(\Lambda, \xi)$  и, в частности, оценить естественное поведение функции  $f(\Lambda)$  [38]. Для простоты ограничимся точным изоспиновым пределом и заметим, что система уравнений Липпмана-Швингера (4.181) распадается на два уравнения для амплитуд  $a_0 = (a_{00} - a_{c0})/2$  и

$a_1 = (a_{00} + a_{c0})/2$ , отвечающих изосинглету и изотриплету. Тогда для изосинглетной амплитуды, описывающей  $X(3872)$ , приходим к уравнению (в отличие от уравнения (4.217) выше, здесь явно учтён знак контактного члена, отвечающий изосинглетному каналу в выбранном диапазоне обрезаний (см. красную кривую на правом графике рис. 4.13 в области обрезаний  $\Lambda \in [400, 700]$  МэВ):

$$a_0 = -C_0 + C_0 I(E) a_0, \quad (5.18)$$

где

$$I(E) = \int_0^\Lambda dq \frac{q^2}{q^2/(2\mu) - E} \approx 2\mu\Lambda - \pi\mu\sqrt{-2\mu E} + O\left(\frac{\sqrt{-2\mu E}}{\Lambda}\right), \quad \mu = \frac{mm_*}{m + m_*}. \quad (5.19)$$

В рассматриваемом изосинглетном канале имеется связанное состояние при  $E = -E_B$ , если выполнено условие

$$C_0 I(-E_B) = 1, \quad (5.20)$$

то есть если амплитуда (5.18) имеет в этой точке полюс. Таким образом, как отмечалось выше, хотя и  $C_0$ , и  $I(-E_B)$  сильно зависят от обрезания  $\Lambda$ , их произведение является ренормгрупповым инвариантом. Тогда при заданной энергии связи контактное взаимодействие фиксируется в виде  $C_0(\Lambda) = I^{-1}(-E_B, \Lambda)$ .

При отклонении массы пиона от своего физического значения контактный член также приобретает добавку, которую нетрудно вычислить явно:

$$\begin{aligned} C_0 = I^{-1}(-E_B) &\approx I^{-1}(-E_B^{\text{ph}}) + \frac{\partial I^{-1}(-E_B^{\text{ph}})}{\partial \mu^{\text{ph}}} \frac{\partial \mu^{\text{ph}}}{\partial m_\pi^2} \delta m_\pi^2 + \frac{\partial I^{-1}(-E_B^{\text{ph}})}{\partial E_B^{\text{ph}}} \frac{\partial E_B^{\text{ph}}}{\partial m_\pi^2} \delta m_\pi^2 \\ &= C_0^{\text{ph}} \left[ 1 - \left( \frac{\partial \ln I(-E_B^{\text{ph}})}{\partial \mu^{\text{ph}}} \frac{\partial \mu^{\text{ph}}}{\partial m_\pi^2} + \frac{\partial \ln I(-E_B^{\text{ph}})}{\partial E_B^{\text{ph}}} \frac{\partial E_B^{\text{ph}}}{\partial m_\pi^2} \right) \delta m_\pi^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Тогда, если записать полученное выражение в виде формулы (5.17), то нетрудно найти:

$$\frac{f(\Lambda)}{M^2} = -\frac{h_1}{(m^{\text{ph}})^2} + \frac{\pi\mu^{\text{ph}}}{2\Lambda\sqrt{2\mu^{\text{ph}} E_B^{\text{ph}}}} \frac{\partial E_B^{\text{ph}}}{\partial m_\pi^2}, \quad (5.22)$$

где было использовано, что

$$\frac{\partial \ln I(-E_B)}{\partial E_B} \approx -\frac{\pi\mu}{2\Lambda\sqrt{2\mu E_B}}, \quad \frac{\partial \ln I(-E_B)}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial m_\pi^2} = h_1 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{mm_*} + \frac{1}{m_*^2} \right) \approx \frac{h_1}{m^2}, \quad (5.23)$$

а также было пренебрежено разностью масс  $m_*$  и  $m$ . Константа  $h_1$  определена в уравнениях (5.8) и (5.9) выше. Таким образом, требование независимости наклона  $(\partial E_B / \partial m_\pi)|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}}$  от обрезания определяет, через соотношение (5.22), вид функции  $f(\Lambda)$  в чисто контактной теории. Как и ожидалось, данная зависимость оказывается достаточно слабой.

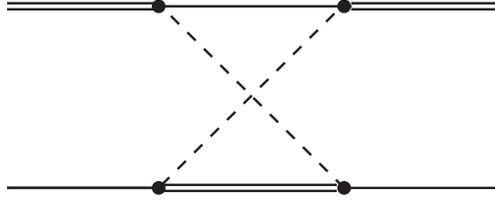


Рис. 5.2. Диаграмма двухпионного обмена “не лестничного” типа. Двойные (одинарные) линии обозначают  $D^*$  ( $D$ ) мезоны, тогда как пунктирные линии обозначают пионы.

В полной теории с непертурбативными динамическими пионами аналитические выкладки уже не могут быть проделаны, однако с чисто идеологической точки зрения картина остаётся ровно той же: требование независимости наклона  $(\partial E_B / \partial m_\pi)|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}}$  от параметра обрезания позволяет численно зафиксировать поведение функции  $f(\Lambda)$ .

Последним ещё не разрешённым вопросом остаётся вопрос о величине коэффициента  $f(\Lambda)$ . Для того, чтобы зафиксировать его точно, необходимо знать природу короткодействующих сил в  $X$  (3872). Поскольку такой информации на сегодняшний день нет, то возможны два альтернативных подхода к проблеме. Можно использовать решёточные данные для зависимости энергии связи  $X$  от массы пиона и извлечь величину  $f$  из них. Однако для реализации такого подхода требуется наличие нескольких решёточных расчётов, проведённых при одних и тех же параметрах решётки, но при разных массах пиона. К сожалению, таких данных на сегодняшний день также нет. Кроме того, для извлечения параметров контактного взаимодействия из решёточных данных лучше приспособлен релятивизованный подход к киральным экстраполяциям для  $X$  [121]. Поэтому здесь воспользуемся альтернативным приёмом и зафиксируем величину (точнее, диапазон изменения) коэффициента  $f$ , исходя из “естественности”. Основным соображением, на котором основана идея естественности, состоит в том, что в перенормированной теории все масштабы учтены должным образом, так что все численные коэффициенты должны не слишком сильно отклоняться от единицы. Появление же неестественно больших численных коэффициентов означало бы, что эффективная теория построена несамосогласованным образом.

Заметим, что уравнения Липпмана-Швингера (4.181) учитывают однопионный обмен непертурбативно, то есть в них точно просуммированы все диаграммы “лестничного” типа. Следовательно, вся зависимость от массы пиона, идущая от таких диаграмм автоматически учтена в контактном члене  $C_0$  и, как обсуждалось выше, она имеет естественный вид, то есть приводит к  $|f| \sim 1$ .

Сделаем независимую оценку величины коэффициента  $f$ , рассмотрев диаграммы, которые не “ухватываются” уравнениями (4.181). В лидирующем порядке такой диаграммой является диа-

грамма со скрещенными пионными линиями, изображённая на рис. 5.2. Соответствующий матричный элемент имеет вид  $M_{\text{ТРЕ}} \sim (g_c \sqrt{mm_*}/f_\pi)^4 \times I_{\text{ТРЕ}}$ , где

$$I_{\text{ТРЕ}} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{q}^4}{(q^2 - m_\pi^2 + i0)^2 ((p-q)^2 - m_*^2 + i0) ((p_*-q)^2 - m^2 + i0)}, \quad (5.24)$$

причём для оценки все начальные и конечные  $D$  и  $D^*$  мезоны рассматриваются в покое, то есть  $p = p' = (m, \mathbf{0})$  и  $p_* = p'_* = (m_*, \mathbf{0})$ . Воспользовавшись упорядоченной по времени теорией возмущений и ограничиваясь лидирующим упорядочением, для интеграла (5.24) находим:

$$I_{\text{ТРЕ}} \approx -i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\omega)(2\omega_*)(2\omega_\pi)^2} \frac{\mathbf{q}^4}{(m + m_* - 2\omega_\pi - \omega - \omega_*)(m_* - \omega - \omega_\pi + i0)^2}, \quad (5.25)$$

где  $\omega_i = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_i^2}$  есть энергии  $\pi$ ,  $D$  и  $D^*$  мезонов. Вклад в интеграл дают три диапазона петлевого импульса: 1)  $q \sim \Lambda$ , 2)  $q \sim m_\pi$  и 3)  $q \sim \sqrt{2m_\pi(m_* - m - m_\pi)}$  (благодаря разрезу  $\pi DD$  — последний множитель в знаменателе). При этом вклад в короткодействующую часть потенциала пропорциональный  $m_\pi^2$  дают только первая (после разложения интеграла в порядке  $m_\pi^2/\Lambda^2$ ) и вторая области. В обоих случаях соответствующий вклад имеет вид  $m_\pi^2/[(4\pi)^2 mm_*]$ . Тогда справедлива следующая оценка:

$$\frac{\delta C_0^{\text{ph}}}{C_0^{\text{ph}}} \sim \frac{M_{\text{ТРЕ}}}{M_{\text{ОРЕ}}} \sim g_c^2 \frac{\delta m_\pi^2}{(4\pi f_\pi)^2} \sim \left( g_c^2 \frac{M^2}{(4\pi f_\pi)^2} \right) \frac{\delta m_\pi^2}{M^2}, \quad (5.26)$$

где было использовано, что при больших импульсах контактный член  $C_0^{\text{ph}}$  насыщается однопионным обменом, то есть  $M_{\text{ОРЕ}} \sim (g_c \sqrt{mm_*}/f_\pi)^2$ . Сравнивая выражения (5.26) и (5.17) и приняв  $M \sim 4\pi f_\pi$  и  $g_c \sim 1$ , нетрудно найти, что  $f(\Lambda) \sim 1$ , что, как пояснялось выше, соответствует естественным ожиданиям для коэффициента  $f$ .

Полученная оценка для величины  $f(\Lambda)$  задаёт разрешённый диапазон наклонов энергии связи  $(\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}}$  совместимых с соображениями естественности. В частности, также в соответствии с ожиданиями, естественным является изменение энергии связи порядка самой себя,  $\delta E_B \sim E_B$ , при вариации массы пиона порядка самой  $m_\pi^{\text{ph}}$ . На рис. 5.3 штриховыми линиями показана полоса значений  $f$ , ограниченная кривыми, отвечающими наклонам  $(\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}} = \pm E_B^{\text{ph}}/m_\pi^{\text{ph}} = \pm 0.4 \times 10^{-2}$ . Внутри данной полосы  $f(\Lambda) \sim 1$ , так что оценки  $f(\Lambda) \sim 1$  и  $\delta E_B/\delta m_\pi \sim E_B/m_\pi$  оказываются согласованными.

Имея ввиду, что другие, не рассматриваемые здесь явно, механизмы также могут давать вклад в изменение контактного члена с  $m_\pi$ , следует расширить диапазон естественных значений  $f(\Lambda)$ , в качестве которого для весьма консервативной оценки выберем  $-5 \dots +5$  — на рис. 5.3 этому диапазону соответствует широкая заштрихованная полоса. Отвечающие таким  $f(\Lambda)$  наклоны лежат в диапазоне  $-2.2 \times 10^{-2} \lesssim (\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}} \lesssim 0.7 \times 10^{-2}$ . При этом варьирование массы

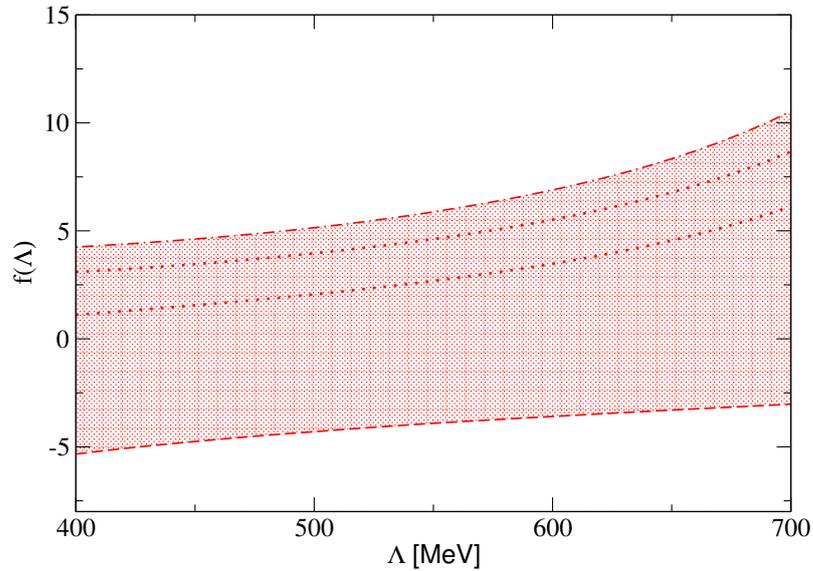


Рис. 5.3. Зависимость  $f(\Lambda)$  для различных значений наклона  $(\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}}$ . Красная полоса задаёт диапазон значений  $f$ , трактуемый как естественный. Узкая полоса, ограниченная штриховыми линиями, задаёт диапазон  $f$ , ограниченный кривыми  $(\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}} = \pm E_B^{\text{ph}}/m_\pi^{\text{ph}} = \pm 0.4 \times 10^{-2}$ .

пиона в диапазоне  $m_\pi^{\text{ph}} \leq m_\pi \leq 2m_\pi^{\text{ph}}$  приводит к вариации контактного члена  $\delta C_0$  в формуле (5.17) в пределах 50% от  $C_0^{\text{ph}}$ , что также хорошо согласуется с идеей “естественного” поведения.

Таким образом, использование формулы (5.17) для зависимости контактного члена от массы пиона и фиксирование функции  $f(\Lambda)$  с помощью требования независимости наклона  $E_B(m_\pi)$  в физической точке от параметра обрезания  $\Lambda$  представляет собой численную реализацию ренорм-групповых требований для рассматриваемой системы в интервале обрезаний  $\Lambda \in [400, 700]$  МэВ. При этом в качестве естественной принимается консервативная оценка для  $f(\Lambda)$  в виде  $|f(\Lambda)| \lesssim 5$ .

Результаты вычислений приведены на рис. 5.4. На левом графике предсказания полной теории с динамическими пионами сравниваются с аналогичными результатами для чисто контактной теории. В частности, для красной и для чёрной (очень узкой) полос наклоны в полной теории принимают максимальное допустимое положительное и максимальное (по модулю) допустимое отрицательное значения, при которых не нарушается условие естественности для  $f(\Lambda)$ , то есть при которых последняя лежит в диапазоне  $[-5, 5]$  (см. рис. 5.3). Красная штрих-пунктирная и чёрная пунктирная линии отвечают аналогичным результатам в чисто контактной теории. Из данного графика можно сделать несколько выводов. Во-первых, предсказания контактной теории и теории с динамическими пионами отличаются друг от друга, что особенно заметно при положительных наклонах  $(\partial E_B/\partial m_\pi)|_{m_\pi=m_\pi^{\text{ph}}}$ . Во-вторых, для положительных наклонов предсказания полной теории совместимы с решёточным результатом (5.1), то есть увеличение энергии связи с ростом массы пиона действительно возможно, если с увеличением  $m_\pi$  короткодействующая часть потенциала

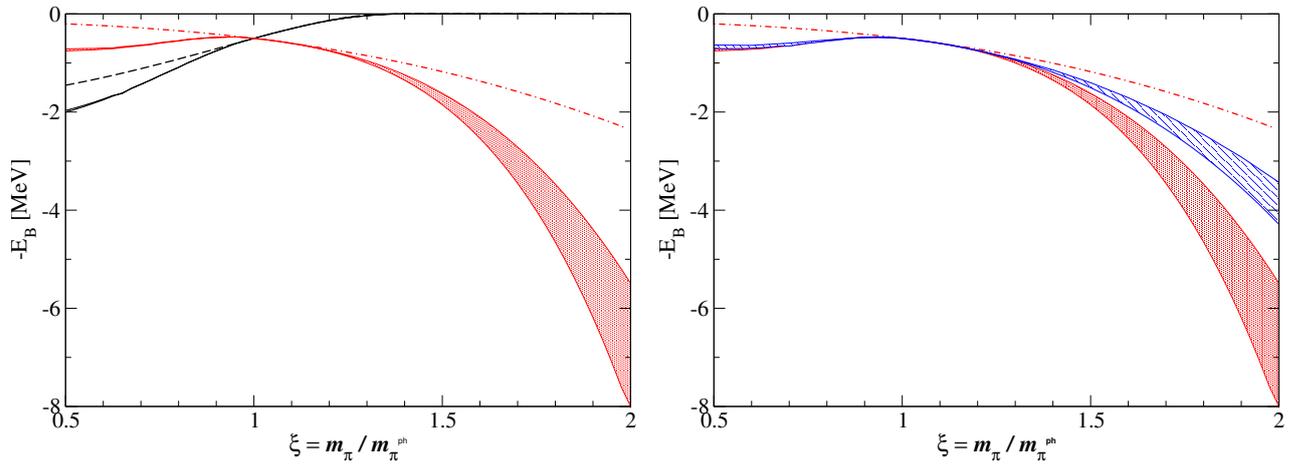


Рис. 5.4. Зависимость энергии связи  $X$  от массы пиона. Левый график: красная полоса отвечает наклону  $(\partial E_B / \partial m_\pi)|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}} = 0.7 \times 10^{-2}$ , а узкая чёрная полоса — наклону  $(\partial E_B / \partial m_\pi)|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}} = -1.5 \times 10^{-2}$ . В обоих случаях параметр обрезания лежит в диапазоне  $\Lambda \in [400, 700]$  МэВ. Правый график: красная полоса тождественна красной полосе на левом графике, а синяя полоса отвечает тому же наклону  $(\partial E_B / \partial m_\pi)|_{m_\pi = m_\pi^{\text{ph}}} = 0.7 \times 10^{-2}$ , однако параметр обрезания принимает неестественно маленькие значения  $\Lambda \in [150, 250]$  МэВ. Красная штрих-пунктирная линия на обоих графиках и чёрная пунктирная линия на левом графике отвечают результатам чисто контактной теории при тех же наклонах.

становится более притягивающей. Напротив, отрицательные наклоны энергии связи, соответствующие ослаблению притягивающего короткодействующего потенциала с ростом  $m_\pi$ , приводят к быстрому убыванию энергии связи, так что полюс  $X$  приближается к порогу, а затем связанное состояние превращается в виртуальный уровень. В этом случае динамика системы доминируется короткодействующим взаимодействием. Отличие теории с динамическими пионами от чисто контактной теории проявляются лишь при маленьких массах пиона, отвечающих отношению  $\xi \lesssim 0.9$ .

Правый график на рис. 5.4 демонстрирует непрерывный переход от теории с динамическими пионами к статической теории. Для этой цели параметр обрезания  $\Lambda$  фиксируется на неестественно малых значениях, что отвечает интегрированию пионных степеней свободы с их эффективным “перерабатыванием” в контактное взаимодействие. Предсказания полной теории должны в этом случае приближаться к предсказаниям контактной теории. Действительно, правый график на рис. 5.4 демонстрирует именно такое поведение: синяя полоса, отвечающая  $\Lambda \in [150, 250]$ , уже, и она лежит ближе к результату статической теории (красная штрих-пунктирная линия), чем красная полоса, для которой  $\Lambda \in [400, 700]$ .

### 5.3. Выводы к пятой главе

В пятой главе диссертации метод исследования свойств состояния чармония  $X(3872)$  с помощью системы трёхчастичных уравнений типа уравнений Фаддеева был использован для построения киральной экстраполяции энергии связи  $X$  по массе пиона. Такие экстраполяции позволяют совместить решёточные расчёты, традиционно выполняемые при нефизически больших массах пиона, и экспериментальные данные, доступные только в физической точке. Полученные экстраполяционные кривые имеют нетривиальный нелинейный вид. Кроме того, влияние на них пионной динамики является крайне существенным — любое упрощение последней (ограничение чисто контактным взаимодействием в системе или статическое приближение для пионов) приводит к сильным изменениям экстраполяционных кривых и, как результат, к потенциально неверной интерпретации результатов решёточных расчётов.

Как неоднократно отмечалось выше, в силу объективных причин, решёточные расчёты околопороговых состояний выполняются при нефизически больших массах пиона. Однако при наличии теории, допускающей рассмотрение массы пиона в качестве параметра, данный недостаток может обратиться достоинством, поскольку он позволяет получать информацию об изучаемой системе в области параметров, недоступной в реальном эксперименте. Так, сопоставив теоретические и решёточные расчёты при нескольких значениях массы пиона, можно рассчитывать извлечь полезную информацию о короткодействующих силах в  $X(3872)$ , необходимую для построения микроскопических моделей, призванных объяснить и описать такие силы. Очевидно, аналогичным образом могут изучаться и другие околопороговые состояния. Таким образом, предложенный в пятой главе метод позволяет при наличии необходимых решёточных данных извлекать из них информацию о природе экзотических состояний в спектре тяжёлых кварков.

## Заключение

**Выводы.** Данная диссертация посвящена методам исследования свойств околопороговых и экзотических адронных состояний. Перечислим основные полученные в ней результаты и сделанные на их основании выводы:

- В подходе связанных каналов получены явные выражения для формы линии околопорогового резонанса с учётом таких эффектов, как конечная ширина конститuenta, наличие неупругих каналов, взаимное влияние кварковых и мезонных степеней свободы.
- Построена параметризация формы линии околопорогового резонанса (резонансов), которая совместима со всеми требованиями унитарности и аналитичности. Полученная реалистическая, однако достаточно простая и допускающая естественную физическую интерпретацию, параметризация пригодна для непосредственного использования в анализе экспериментальных данных и для извлечения информации о природе резонанса и взаимодействиях в нём.
- С помощью предложенной параметризации формы линии проведён совместный анализ данных для экспериментально измеренных мод распада околопороговых состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония. Получено хорошее описание данных, а с помощью извлечённых из фита значений параметров сделаны выводы о природе указанных состояний — оба  $Z_b$  являются виртуальными уровнями, лежащими в пределах примерно 1 МэВ под соответствующими порогами.
- Проведено всестороннее исследование свойств экзотического состояния в спектре чармония  $X(3872)$ . Из теоретического анализа экспериментальных данных сделан вывод о том, что данное состояние имеет квантовые числа  $1^{++}$  и является связанным состоянием с большой примесью истинного  $c\bar{c}$  чармония. Вычислены вероятности его радиационных распадов, а также прямого рождения в  $e^+e^-$  соударениях.
- Детально изучен вопрос об учёте трёхчастичной динамики в околопороговом резонансе. Отождествлён параметр, количественно учитывающий роль такой трёхчастичной динамики, и получены выражения для формы линии околопорогового резонанса с феноменологическим учётом трёхчастичной динамики.
- Получена система трёхчастичных уравнений, непертурбативным образом описывающая динамику (включая трёхчастичную пионную динамику) в околопороговом экзотическом состоянии чармония  $X(3872)$ .

- Построен теоретико-полевой подход, основанный на трёхчастичных динамических уравнениях, для описания свойств состояния  $X(3872)$  как в физической точке по массе пиона, так и для нефизически больших масс пиона. Полученный подход допускает обобщение на другие околопороговые состояния в спектре тяжёлых кварков.
- С использованием предложенного подхода построена киральная экстраполяция энергии связи  $X(3872)$  по массе пиона и найдено согласие с решёточными расчётами.

Важно отметить, что предложенные в диссертации методы исследования свойств экзотических околопороговых состояний являются взаимно дополняющими. Действительно, предложенная параметризация формы линии околопороговых резонансов позволяет извлекать из подгонки к экспериментальным данным параметры, имеющие непосредственную физическую интерпретацию, например, потенциалы короткодействующего прямого взаимодействия между адронами, содержащими тяжёлый кварк, и константы связи каналов. Данные параметры могут непосредственно использоваться в качестве входных данных для системы трёхчастичных уравнений связанных каналов. И наоборот, информация о природе и связывающих взаимодействиях, извлечённая из решёточных расчётов с помощью предложенного метода экстраполяции по массе пиона, может использоваться для предсказания формы линии как уже известных, так и ещё не обнаруженных околопороговых состояний, например, спиновых партнёров состояния  $X(3872)$  в спектре чармония, партнёров заряженных состояний  $Z_b(10610)$  и  $Z_b(10650)$  в спектре боттомония, а также многих других.

Ключевым свойством совокупности методов и подходов, предложенных в диссертации, является заполнение “пропасти” между экспериментом и микроскопическими теоретическими подходами, а также расчётами на решётках, основанными на фундаментальной теории сильных взаимодействия. В диссертации рассмотрены конкретные примеры наиболее хорошо изученных околопороговых состояний в спектре чармония и боттомония, однако важно отметить возможность непосредственного обобщения предложенных методов на другие околопороговые состояния в спектре тяжёлых кварков.

**Заключение.** В диссертации исследован широкий круг вопросов, связанных с описанием пороговых явлений и экзотических адронных состояний, а также разработан комплексный метод исследования околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков. В основу метода легли два оригинальных подхода, предложенных в данной диссертации. С одной стороны, разработанная в диссертации параметризация формы линии околопорогового резонанса пригодна для непосредственного использования в анализе экспериментальных данных и для извлечения информации о природе

исследуемых околопороговых состояний. С другой стороны, развитый в диссертации теоретико-полевой метод описания околопороговых состояний на основе системы трёхчастичных уравнений связанных каналов является комплементарным по отношению к методу параметризации формы линии околопороговых резонансов. Таким образом, предложенный и обоснованный в диссертации комплексный метод изучения околопороговых состояний в спектре тяжёлых кварков интересен и полезен применительно как к теоретическим, так и к экспериментальным исследованиям, включая планирование и обработку результатов последних.

**Благодарности.** В заключение хотелось бы поблагодарить тех, без чьей помощи и чьего участия эта диссертация никогда не была бы написана. В первую очередь нужно упомянуть коллег и соавторов из теоротдела ИТЭФ Юлию Сергеевну Калашникову и Вадима Бару. Их энтузиазм, постоянный интерес к работе и готовность прийти на помощь невозможно переоценить. Я благодарен им за многие мысли и идеи, которые они выдвигали и которыми делились со мной, за то, с каким упорством они двигались к цели, не позволяя мне отставать. За то, что ни один наш совместный результат не был опубликован до его всесторонней проверки и полного осмысления. Я многому у них научился и надеюсь учиться и дальше.

Мне хотелось бы выразить искреннюю благодарность Юрию Антоновичу Симонову, Алле Михайловне Бадалян и Александру Евгеньевичу Кудрявцеву, совместная работа с которыми оказала существенное влияние на моё мировоззрение и на формирование моего научного кругозора. Особую благодарность хотелось бы выразить экспериментаторам Алексею Друцкому, Роме Мизюку, Паше и Гале Пахловым. Результатом нашего тесного общения и многочисленных обсуждений стало существенное углубление моего понимания экспериментальной физики высоких энергий. Впрочем, и теоретической тоже, ибо одно не существует без другого. Особенно приятно осознавать их переход из разряда просто коллег в разряд коллег-соавторов.

Многие публикации, на которых основана данная диссертация, выполнены в соавторстве с коллегами из зарубежных научных центров: из института ядерной физики исследовательского центра г.Юлих, университетов Бонна, Бохума и Майнца (Германия), института теоретической физики (Пекин, Китай), лиссабонского технического университета (Португалия), университета г.Грац (Австрия), комплутентского университета (Мадрид, Испания), университета штата Индиана (США). Это было очень плодотворное и интересное сотрудничество, крайне полезное для меня. Тешу себя надеждой, что оно было хотя бы немного таковым и для них тоже. Это (в алфавитном порядке) Педро Бикудо, Чан Ванг, Ян-Лукас Винен, Леонид Глозман, Фенг-Кун Гуо, Ахим Дениг, Фелипе Янес-Эстрада, Патрик Матушек, Ульф Мейсснер, Эмилио Рибейро, Хуан Торрес-Рикон, Арсений Филин, Йоханн Хайденбауэр, Ханс-Вернер Хаммер, Кристоф Ханхарт, Адам Шпаньяк,

Евгений Эпельбаум. Хотел бы выразить отдельную благодарность Арсению Филину за численные расчёты, виртуозно выполненные им для наших совместных публикаций.

Я очень признателен всем тем, с кем мне посчастливилось обсуждать физику и у кого я многому научился. Таких людей очень много, перечислить их всех не представляется возможным, но всё же некоторых из них я хотел бы упомянуть отдельно. Это, в первую очередь, Леонид Глозман из университета г.Грац (Австрия) и Эмилио Рибейро из технического университета Лиссабона (Португалия). Я искренне завидую их глубокому пониманию, даже чувству, физики и горд тем, что эти люди входят в число моих соавторов.

Отдельная благодарность оппонентам, взявшим на себя нелёгкий труд прочитать диссертацию и составить на неё отзывы.

И конечно же, я хотел бы от всей души поблагодарить моих родителей и мою семью за неподдельный интерес к моей работе и за постоянную поддержку, которую я всегда чувствовал и чувствую. Без неё всё это было бы невозможно и напрасно.

## Словарь терминов

Поясним смысл некоторых понятий, использованных в диссертации.

- **Резонанс** — за исключением раздела 2.5 термин “резонанс” используется исключительно в качестве синонима слова “состояние”. В разделе 2.5 термин “резонанс” использован в смысле положения полюса в комплексной плоскости энергии вне вещественной оси на нефизическом листе поверхности Римана.
- **Упругий канал** — канал сильного распада резонанса в конечное состояние с открытым ароматом. Соответствующий порог также называется упругим. В диссертации все упругие пороги предполагаются  $S$ -волновыми.
- **Неупругий канал** — канал сильного распада резонанса в конечное состояние со скрытым ароматом. Соответствующий порог также называется неупругим. В диссертации не предполагается никаких ограничений на относительную волну в неупругом канале (см., например, формулу (2.53), в которой явно учтён произвольный угловой момент в неупругих каналах).
- **Околопороговый резонанс** — адронное состояние, расположенное вблизи сильного  $S$ -волнового порога.
- **Околопороговая область** — область масс (энергии) вблизи сильного порога. Размер такой области определяется отдельно для каждой конкретной рассматриваемой задачи, но во всех случаях данная область ограничена соседними упругими и неупругими порогами.
- **Элементарное состояние** — состояние, структура которого не оказывает влияния на рассматриваемый эффект, например, на форму линии околопорогового резонанса. В большинстве случаев под элементарным состоянием может пониматься компактное кварковое образование, например, истинный кварконий, тетракварк, гибрид и т.п.
- **Молекулярное состояние, молекула** — большая вероятность обнаружения исследуемого околопорогового резонанса в адронном канале с открытым ароматом. Природа молекулярного состояния при этом не конкретизируется — допустим весь диапазон возможностей, от связанного или виртуального уровня до резонанса (в смысле положения полюса на нефизическом листе многолистной поверхности Римана вне вещественной оси энергии). Аналогично, удерживающие силы молекулы не ограничиваются  $t$ -канальными обменами, а могут иметь совершенно разное происхождение — установление природы таких сил является одной из важных задач феноменологии околопороговых состояний.

- **Обратный радиус действия сил** — жёсткая шкала, определяющая поведение формфакторов перехода между различными каналами реакции и определяемая силами, ответственными за образование соответствующего состояния. Например, обратный радиус действия сил  $\beta$  в задаче о связи элементарного состояния с адронным каналом определяется сильным межкварковым взаимодействием, ответственным за образование элементарного состояния. Если не оговорено иначе, то предполагается, что  $\beta \sim 1$  ГэВ и превышает все характерные импульсы задачи, причём соответствующая эффективная теория строится в лидирующем порядке в разложении по обратному радиусу действия сил.
- **Статическое приближение** — приближение, в рамках которого полностью пренебрежено энергетической зависимостью взаимодействия между конститuentами. В данной диссертации для более точного соответствия подходам, встречающимся в литературе, в потенциале статического однопионного обмена дополнительно пренебрегается всеми мнимыми частями, а также эффектом отдачи тяжёлых мезонов. В результате однопионный обмен в статическом приближении сводится к потенциалу аналогичному потенциалу Юкавы в дейтроне, однако с характерным радиусом спадания, задаваемым определённой комбинацией масс участвующих во взаимодействии адронов (см., например, формулу (4.207)).

## Список литературы

1. Baru V., Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., **Nefediev, A. V.** Interplay of quark and meson degrees of freedom in a near-threshold resonance // *Eur. Phys. J.* — 2010. — Vol. A44. — P. 93–103. — 1001.0369.
2. Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Interplay of quark and meson degrees of freedom in a near-threshold resonance: multi-channel case // *Eur. Phys. J.* — 2011. — Vol. A47. — P. 101–110. — 1106.1185.
3. **Nefediev, A. V.** Line shapes of near-threshold resonances // 2nd SuperB Collaboration Meeting, 13-16 December 2011, Frascati, Italy. — 2011.
4. Drutskoy A. G., Guo F.-K., Llanes-Estrada F. J., **Nefediev, A. V.**, Torres-Rincon J. M. Hadron physics potential of future high-luminosity B-factories at the  $\Upsilon(5S)$  and above // *Eur. Phys. J.* — 2013. — Vol. A49. — P. 7–32. — 1210.6623.
5. Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Matuschek P., Mizuk R. V., **Nefediev, A. V.**, Wang Q. A practical parametrization for line shapes of near-threshold states // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115. — P. 202001. — 1507.00382.
6. Guo F. K., Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Matuschek P., Mizuk R. V., **Nefediev, A. V.**, Wang Q., Wynen J. L. Interplay of quark and meson degrees of freedom in near-threshold states: A practical parametrisation for line shapes // *Phys. Rev.* — 2016. — Vol. D93, no. 7. — P. 074031. — 1602.00940.
7. Hanhart C., Kalashnikova Y. S., Matuschek P., Mizuk R. V., **Nefediev, A. V.**, Wang Q. A practical parametrisation of line shapes of near-threshold resonances // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 675, no. 2. — P. 022016.
8. **Nefediev, A. V.** Physics of near-threshold resonances: phenomenology and applications // *Bethe Forum: "Exotic Hadrons"*, 23 April — 4 May 2012, Bonn, Germany. — 2012.
9. **Nefediev, A. V.** Interplay of quark and meson degrees of freedom in a near-threshold resonance // 8th International Workshop on Heavy Quarkonium QWG 2011, 4-7 October 2011, Darmstadt, Germany. — 2011.
10. **Nefediev, A. V.** Phenomenology of near-threshold states // 1st International Workshop on Exotic Hadrons, 3-5 September 2015, Istanbul, Turkey. — 2012.
11. **Nefediev, A. V.** Phenomenology of near-threshold resonances // International Moscow School of Physics (ITEP Winter School), 16-23 February 2016, Moscow, Russia. — 2016.
12. Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Lineshapes for composite particles with unstable constituents // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 094028. — 1002.4097.

13. Filin A. A., Romanov A., Baru V., Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., Meissner U. G., **Nefediev, A. V.** Comment on ‘Possibility of Deeply Bound Hadronic Molecules from Single Pion Exchange’ // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 019101. — 1004.4789.
14. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Mesonic states and vacuum replicas in potential quark models for QCD // *Phys. Rev.* — 2004. — Vol. D70. — P. 094020. — hep-ph/0409112.
15. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Mesonic states in the generalised Nambu-Jona-Lasinio theories // *AIP Conf. Proc.* — 2005. — Vol. 756. — P. 333–335. — hep-ph/0411141.
16. Glazman L. Y., **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Chiral symmetry restoration in excited hadrons, quantum fluctuations, and quasiclassics // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D72. — P. 094002. — hep-ph/0510012.
17. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Confinement and parity doubling in heavy-light mesons // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D72. — P. 034020. — hep-ph/0507330.
18. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Parity doublers in chiral potential quark models // *AIP Conf. Proc.* — 2007. — Vol. 892. — P. 289–292. — hep-ph/0611081.
19. Bicudo P. J. A., **Nefediev, A. V.** Chiral symmetry breaking solutions for QCD in the truncated Coulomb gauge // *Phys. Rev.* — 2003. — Vol. D68. — P. 065021. — hep-ph/0307302.
20. Bicudo P. J. A., **Nefediev, A. V.** Vacuum replicas in two-dimensional QCD // *Phys. Lett.* — 2003. — Vol. B573. — P. 131–137. — hep-ph/0308273.
21. Glazman L. Y., **Nefediev, A. V.** On goldstone bosons decoupling from high-lying hadrons // *Phys. Rev.* — 2006. — Vol. D73. — P. 074018. — hep-ph/0603025.
22. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T., Szczepaniak A. P. Microscopic derivation of the pion coupling to heavy-light mesons // *Phys. Rev.* — 2007. — Vol. D75. — P. 036001. — hep-ph/0610430.
23. Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., **Nefediev, A. V.** Reconciling the X(3872) with the near-threshold enhancement in the  $D^0\bar{D}^{*0}$  final state // *Phys. Rev.* — 2007. — Vol. D76. — P. 034007. — 0704.0605.
24. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Nature of X(3872) from data // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D80. — P. 074004. — 0907.4901.
25. Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., **Nefediev, A. V.** Quark and meson degrees of freedom in the X(3872) charmonium // *Phys. Atom. Nucl.* — 2010. — Vol. 73. — P. 1592–1611.
26. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** X(3872) as a  $^1D_2$  charmonium state // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D82. — P. 097502. — 1008.2895.
27. Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., **Nefediev, A. V.** Remarks on the quantum numbers of X(3872) from the invariant mass distributions of the  $\rho J/\psi$  and  $\omega J/\psi$  final states // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D85. — P. 011501. — 1111.6241.

28. Baru V., Filin A. A., Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., **Nefediev, A. V.** Three-body  $D\bar{D}\pi$  dynamics for the X(3872) // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 074029. — 1108.5644.
29. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** X(3872) as the  $^1D_2$  charmonium // Phys. Atom. Nucl. — 2013. — Vol. 76. — P. 1533–1540.
30. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** One-pion exchange in the X(3872) revisited // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2013. — Vol. 97. — P. 76–81. — [JETP Lett.97,70(2013)]. 1212.2004.
31. Denig A., Guo F.-K., Hanhart C., **Nefediev, A. V.** Direct X(3872) production in  $e^+e^-$  collisions // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B736. — P. 221–225. — 1405.3404.
32. Baru V., Epelbaum E., Filin A. A., Guo F. K., Hammer H. W., Hanhart C., Meissner U. G., **Nefediev, A. V.** Remarks on study of X(3872) from effective field theory with pion-exchange interaction // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 3. — P. 034002. — 1501.02924.
33. Guo F.-K., Hanhart C., Kalashnikova Yu. S., Meissner U.-G., **Nefediev, A. V.** What can radiative decays of the X(3872) teach us about its nature? // Phys. Lett. — 2015. — Vol. B742. — P. 394–398. — 1410.6712.
34. **Nefediev, A. V.** X(3872): Charmonium or molecule? // AIP Conf. Proc. — 2011. — Vol. 1343. — P. 394–396.
35. **Nefediev, A. V.** Nature of X(3872) from data // 447th Wilhelm and Else Heraeus Seminar: Charmed Exotics Bad Honnef, Germany, August 10-12, 2009. — 2009. — P. 20. — 0910.3165.
36. **Nefediev, A. V.** Some aspects of the X(3872) phenomenology // 1st International Workshop on Exotic Hadrons, 3-5 September 2015, Istabbul, Turkey. — 2012.
37. **Nefediev, A. V.** Direct X(3872) production in  $e^+e^-$  collisions // International Workshop "New Hadrons", 25 September 2014, Moscow, Russia. — 2014.
38. Baru V., Epelbaum E., Filin A. A., Hanhart C., Meissner U. G., **Nefediev, A. V.** Quark mass dependence of the X(3872) binding energy // Phys. Lett. — 2013. — Vol. B726. — P. 537–543. — 1306.4108.
39. Baru V., Epelbaum E., Filin A. A., Gegelia J., **Nefediev, A. V.** Chiral extrapolation of the X(3872) binding energy // J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — Vol. 675, no. 2. — P. 022017.
40. Flatte S. M. Coupled - Channel Analysis of the pi eta and K anti-K Systems Near K anti-K Threshold // Phys. Lett. — 1976. — Vol. B63. — P. 224.
41. Morgan D. Pole counting and resonance classification // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. A543. — P. 632–644.
42. Baru V., Haidenbauer J., Hanhart C., Kudryavtsev A. E., Meissner U.-G. Flatte-like distributions and the  $a_0(980)/f_0(980)$  mesons // Eur. Phys. J. — 2005. — Vol. A23. — P. 523–533. — nucl-th/0410099.

43. Weinberg S. Elementary particle theory of composite particles // *Phys. Rev.* — 1963. — Vol. 130. — P. 776–783.
44. Weinberg S. Quasiparticles and the Born Series // *Phys. Rev.* — 1963. — Vol. 131. — P. 440–460.
45. Weinberg S. Evidence That the Deuteron Is Not an Elementary Particle // *Phys. Rev.* — 1965. — Vol. 137. — P. B672–B678.
46. Baru V., Haidenbauer J., Hanhart C., Kalashnikova Yu., Kudryavtsev A. E. Evidence that the  $a_0(980)$  and  $f_0(980)$  are not elementary particles // *Phys. Lett.* — 2004. — Vol. B586. — P. 53–61. — hep-ph/0308129.
47. Bogdanova L. N., Hale G. M., Markushin V. E. Analytical structure of the S matrix for the coupled channel problem  $d + t \rightarrow n + \alpha$  and the interpretation of the  $J^\pi = 3/2^+$  resonance in He-5 // *Phys. Rev.* — 1991. — Vol. C44. — P. 1289–1295.
48. Barnes T., Swanson E. S. Hadron loops: General theorems and application to charmonium // *Phys. Rev.* — 2008. — Vol. C77. — P. 055206. — 0711.2080.
49. van Beveren E., Bugg D. V., Kleefeld F., Rupp G. The Nature of  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $a_0(980)$  and  $f_0(980)$  // *Phys. Lett.* — 2006. — Vol. B641. — P. 265–271. — hep-ph/0606022.
50. Kerbikov B. O., Ksenzov V. G., Kudryavtsev A. E., Markushin V. E., Shapiro I. S. A coupled channel model for the influence of annihilation of the nucleon-antinucleon interaction at low energies // ITEP preprint. — 1978. — Vol. 61.
51. Hammer I. K., Hanhart C., **Nefediev, A. V.** Remarks on meson loop effects on quark models. — 2016. — 1607.06971.
52. van Beveren E., Dullemond C., Rupp G. Spectrum and Strong Decays of Charmonium // *Phys. Rev.* — 1980. — Vol. D21. — P. 772. — [Erratum: *Phys. Rev.*D22,787(1980)].
53. Tornqvist N. A., Roos M. Resurrection of the sigma meson // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 1575–1578. — hep-ph/9511210.
54. Boglione M., Pennington M. R. Unquenching the scalar glueball // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — P. 1998–2001. — hep-ph/9703257.
55. van Beveren E., Rupp G. Reconciling the light scalar mesons with Breit-Wigner resonances as well as the quark model // *Int. J. Theor. Phys. Group Theor. Nonlin. Opt.* — 2006. — Vol. 11. — P. 179–206. — hep-ph/0304105.
56. van Beveren E., Rupp G. Meson-meson interactions and Regge propagators // *Annals Phys.* — 2009. — Vol. 324. — P. 1620–1633. — 0809.1149.
57. Rupp G., van Beveren E., Coito S. No serious meson spectroscopy without scattering // *Acta Phys. Polon. Supp.* — 2015. — Vol. 8, no. 1. — P. 139–144. — 1502.05250.
58. Rupp G., Coito S., van Beveren E. Meson spectroscopy: too much excitement and too few excita

- tions // *Acta Phys. Polon. Supp.* — 2012. — Vol. 5. — P. 1007–1014. — 1209.1475.
59. Wolkanowski T., Giacosa F., Rischke D. H.  $a_0(980)$  revisited // *Phys. Rev.* — 2016. — Vol. D93, no. 1. — P. 014002. — 1508.00372.
  60. Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T., Lane K. D., Yan T.-M. Charmonium: The Model // *Phys. Rev.* — 1978. — Vol. D17. — P. 3090. — [Erratum: *Phys. Rev.*D21,313(1980)].
  61. Ortega P. G., Segovia J., Entem D. R., Fernandez F. Coupled channel approach to the structure of the X(3872) // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 054023. — 1001.3948.
  62. Entem D. R., Ortega P. G., Fernandez F. Partners of the X(3872) and HQSS breaking // *AIP Conf. Proc.* — 2016. — Vol. 1735. — P. 060006. — 1601.03901.
  63. Cincioglu E., Nieves J., Ozpineci A., Yilmazer A. U. Quarkonium Contribution to Meson Molecules. — 2016. — 1606.03239.
  64. Badalian A. M., Kok L. P., Polikarpov M. I., Simonov Yu. A. Resonances in Coupled Channels in Nuclear and Particle Physics // *Phys. Rept.* — 1982. — Vol. 82. — P. 31.
  65. Kalashnikova Yu. S. Coupled-channel model for charmonium levels and an option for X(3872) // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D72. — P. 034010. — hep-ph/0506270.
  66. Danilkin I. V., Simonov Yu. A. Channel coupling in heavy quarkonia: Energy levels, mixing, widths and new states // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 074027. — 0907.1088.
  67. Danilkin I. V., Simonov Yu. A. Dynamical origin and the pole structure of X(3872) // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 102002. — 1006.0211.
  68. Dubin A. Yu., Kaidalov A. B., Simonov Yu. A. The QCD string with quarks. 1. Spinless quarks // *Phys. Atom. Nucl.* — 1993. — Vol. 56. — P. 1745–1759. — [Yad. Fiz.56,213(1993)]. hep-ph/9311344.
  69. Dubin A. Yu., Kaidalov A. B., Simonov Yu. A. Dynamical regimes of the QCD string with quarks // *Phys. Lett.* — 1994. — Vol. B323. — P. 41–45.
  70. Di Giacomo A., Dosch H. G., Shevchenko V. I., Simonov Yu. A. Field correlators in QCD: Theory and applications // *Phys. Rept.* — 2002. — Vol. 372. — P. 319–368. — hep-ph/0007223.
  71. Danilkin I. V., Orlovsky V. D., Simonov Yu. A. Hadron interaction with heavy quarkonia // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D85. — P. 034012. — 1106.1552.
  72. Danilkin I. V., Orlovsky V. D., Simonov Yu. A. Hadro-quarkonia dynamics and  $Z_b$  states // *Phys. Atom. Nucl.* — 2013. — Vol. 76. — P. 1135–1143.
  73. Simonov Yu. A., Veselov A. I. Bottomonium dipion transitions // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D79. — P. 034024. — 0804.4635.
  74. Simonov Yu. A., Veselov A. I. Strong decays and dipion transitions of  $\Upsilon(5S)$  // *Phys. Lett.* — 2009. — Vol. B671. — P. 55–59. — 0805.4499.

75. Guo F.-K., Hanhart C., Wang Q., Zhao Q. Could the near-threshold  $XYZ$  states be simply kinematic effects? // *Phys. Rev.* — 2015. — Vol. D91, no. 5. — P. 051504. — 1411.5584.
76. Dudek J. J., Edwards R. G., Peardon M. J., Richards D. G., Thomas C. E. Highly excited and exotic meson spectrum from dynamical lattice QCD // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 262001. — 0909.0200.
77. Dudek J. J., Edwards R. G., Mathur N., Richards D. G. Charmonium excited state spectrum in lattice QCD // *Phys. Rev.* — 2008. — Vol. D77. — P. 034501. — 0707.4162.
78. Luscher M. Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 2. Scattering States // *Commun. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 105. — P. 153–188.
79. Guo F.-K., Hanhart C., Meissner U.-G. Interactions between heavy mesons and Goldstone bosons from chiral dynamics // *Eur. Phys. J.* — 2009. — Vol. A40. — P. 171–179. — 0901.1597.
80. Prelovsek S., Leskovec L. Evidence for  $X(3872)$  from  $D\bar{D}^*$  scattering on the lattice // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111. — P. 192001. — 1307.5172.
81. Braaten E., Stapleton J. Analysis of  $J/\psi\pi^+\pi^-$  and  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  Decays of the  $X(3872)$  // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 014019. — 0907.3167.
82. Choi S. K. et al. Observation of a narrow charmonium-like state in exclusive  $B^\pm \rightarrow K^\pm\pi^+\pi^- J/\psi$  decays // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 262001. — hep-ex/0309032.
83. Bondar A. et al. Observation of two charged bottomonium-like resonances in  $Y(5S)$  decays // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 122001. — 1110.2251.
84. Esposito A., Guerrieri A. L., Piccinini F., Pilloni A., Polosa A. D. Four-Quark Hadrons: an Updated Review // *Int. J. Mod. Phys.* — 2015. — Vol. A30. — P. 1530002. — 1411.5997.
85. Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. Masses of heavy tetraquarks in the relativistic quark model // *Phys. Lett.* — 2006. — Vol. B634. — P. 214–219. — hep-ph/0512230.
86. Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O., Lucha W. Masses of tetraquarks with two heavy quarks in the relativistic quark model // *Phys. Rev.* — 2007. — Vol. D76. — P. 114015. — 0706.3853.
87. Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. Masses of tetraquarks with open charm and bottom // *Phys. Lett.* — 2011. — Vol. B696. — P. 241–245. — 1011.2677.
88. Liu L., Lin H.-W., Orginos K. Charmed Hadron Interactions // *PoS.* — 2008. — Vol. LAT-TICE2008. — P. 112. — 0810.5412.
89. Olive K. A. et al. Review of Particle Physics // *Chin. Phys.* — 2014. — Vol. C38. — P. 090001.
90. Bondar A. E., Garmash A., Milstein A. I., Mizuk R., Voloshin M. B. Heavy quark spin structure in  $Z_b$  resonances // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D84. — P. 054010. — 1105.4473.
91. Voloshin M. B. Radiative transitions from  $\Upsilon(5S)$  to molecular bottomonium // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D84. — P. 031502. — 1105.5829.

92. Mehen T., Powell J. Line shapes in  $\Upsilon(5S) \rightarrow B^{(*)}B^{(*)}\pi$  with  $Z_b(10610)$  and  $Z_b(10650)$  using effective field theory // *Phys. Rev.* — 2013. — Vol. D88, no. 3. — P. 034017. — 1306.5459.
93. Ali A., Hambroek C., Mishima S. Tetraquark-based analysis and predictions of the cross sections and distributions for the processes  $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(1S)(\pi^+\pi^-, K^+K^-, \eta\pi^0)$  near  $\Upsilon(5S)$  // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 092002. — 1011.4856.
94. Ali A., Hambroek C., Wang W. Tetraquark Interpretation of the Charged Bottomonium-like states  $Z_b^{+-}(10610)$  and  $Z_b^{+-}(10650)$  and Implications // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D85. — P. 054011. — 1110.1333.
95. Chen Y.-H., Daub J. T., Guo F.-K., Kubis B., Meissner U.-G., Zou B.-S. The effect of  $Z_b$  states on  $\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$  decays. — 2015. — 1512.03583.
96. Pakhlov P. Charged charmonium-like states as rescattering effects in  $B \rightarrow D_{sJ}D^{(*)}$  decays // *Phys. Lett.* — 2011. — Vol. B702. — P. 139–142. — 1105.2945.
97. Pakhlov P., Uglov T. Charged charmonium-like  $Z^+(4430)$  from rescattering in conventional  $B$  decays // *Phys. Lett.* — 2015. — Vol. B748. — P. 183–186. — 1408.5295.
98. Szczepaniak A. P. Triangle Singularities and XYZ Quarkonium Peaks // *Phys. Lett.* — 2015. — Vol. B747. — P. 410–416. — 1501.01691.
99. Achasov N. N., Kozhevnikov A. A. On the Nature of C(1480) Resonance // *Z. Phys.* — 1990. — Vol. C48. — P. 121–130.
100. AlFiky M. T., Gabbiani F., Petrov A. X(3872): Hadronic molecules in effective field theory // *Phys. Lett.* — 2006. — Vol. B640. — P. 238–245. — hep-ph/0506141.
101. Nieves J., Valderrama M. P. The Heavy Quark Spin Symmetry Partners of the X(3872) // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D86. — P. 056004. — 1204.2790.
102. Adachi I. et al. Study of Three-Body Y(10860) Decays. — 2012. — 1209.6450.
103. Garmash A. et al. Observation of  $Z_b(10610)$  and  $Z_b(10650)$  Decaying to B Mesons // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116, no. 21. — P. 212001. — 1512.07419.
104. Cleven M., Guo F.-K., Hanhart C., Meissner U.-G. Bound state nature of the exotic  $Z_b$  states // *Eur. Phys. J.* — 2011. — Vol. A47. — P. 120. — 1107.0254.
105. Guo F.-K., Meissner U.-G., Shen C.-P. Enhanced breaking of heavy quark spin symmetry // *Phys. Lett.* — 2014. — Vol. B738. — P. 172–177. — 1406.6543.
106. Ali A., Hambroek C., Aslam M. J. A Tetraquark interpretation of the BELLE data on the anomalous  $\Upsilon(1S)\pi^+\pi^-$  and  $\Upsilon(2S)\pi^+\pi^-$  production near the  $\Upsilon(5S)$  resonance // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 162001. — [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*107,049903(2011)]. 0912.5016.
107. Voloshin M. B. Enhanced mixing of partial waves near threshold for heavy meson pairs and properties of  $Z_b(10610)$  and  $Z_b(10650)$  resonances // *Phys. Rev.* — 2013. — Vol. D87, no. 7. —

- P. 074011. — 1301.5068.
108. Sun Z.-F., He J., Liu X., Luo Z.-G., Zhu S.-L.  $Z_b(10610)^\pm$  and  $Z_b(10650)^\pm$  as the  $B^*\bar{B}$  and  $B^*\bar{B}^*$  molecular states // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 054002. — 1106.2968.
  109. Voloshin M. B. Light Quark Spin Symmetry in  $Z_b$  Resonances? — 2016. — 1601.02540.
  110. Kato M. // Annals Phys. — 1965. — Vol. 31. — P. 130.
  111. Bondar A. E., Mizuk R. V., Voloshin M. B. Bottomonium-like states: physics case for energy scan above the  $B\bar{B}$  threshold at Belle-II. — 2016. — 1610.01102.
  112. Fleming S., Kusunoki M., Mehen T., van Kolck U. Pion interactions in the X(3872) // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 034006. — hep-ph/0703168.
  113. Nieves J., Valderrama M. P. Deriving the existence of  $B\bar{B}^*$  bound states from the X(3872) and Heavy Quark Symmetry // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 056015. — 1106.0600.
  114. Tornqvist N. A. Possible large deuteron-like meson meson states bound by pions // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 556–559.
  115. Swanson E. S. Short range structure in the X(3872) // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B588. — P. 189–195. — hep-ph/0311229.
  116. Voloshin M. B. Modification by pion exchange of near threshold resonance line shape in open heavy flavor channel // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 11. — P. 114003. — 1507.02639.
  117. Cleven M., Guo F.-K., Hanhart C., Wang Q., Zhao Q. Employing spin symmetry to disentangle different models for the XYZ states // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 1. — P. 014005. — 1505.01771.
  118. Lee S.-h., DeTar C., Na H., Mohler D. Searching for the X(3872) and  $Z_c^+(3900)$  on HISQ Lattices. — 2014. — 1411.1389.
  119. Padmanath M., Lang C. B., Prelovsek S. X(3872) and Y(4140) using diquark-antidiquark operators with lattice QCD // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 3. — P. 034501. — 1503.03257.
  120. Jansen M., Hammer H. W., Jia Y. Light quark mass dependence of the X(3872) in an effective field theory // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D89, no. 1. — P. 014033. — 1310.6937.
  121. Baru V., Epelbaum E., Filin A. A., Gegelia J., **Nefediev, A. V.** Binding energy of the X(3872) at unphysical pion masses // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92. — P. 114016. — 1509.01789.
  122. Suzuki M. The X(3872) boson: Molecule or charmonium // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D72. — P. 114013. — hep-ph/0508258.
  123. Nauenberg M., Pais A. Peaks in mesonic systems. — 1964.
  124. Braaten E., Phillips D. The Renormalization group limit cycle for the  $1/r^2$  potential // Phys. Rev. — 2004. — Vol. A70. — P. 052111. — hep-th/0403168.
  125. Voloshin M. B. Interference and binding effects in decays of possible molecular component of

- X(3872) // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B579. — P. 316–320. — hep-ph/0309307.
126. Close F., Downum C. On the possibility of Deeply Bound Hadronic Molecules from single Pion Exchange // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 242003. — 0905.2687.
127. Close F., Downum C., Thomas C. E. Novel Charmonium and Bottomonium Spectroscopies due to Deeply Bound Hadronic Molecules from Single Pion Exchange // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 074033. — 1001.2553.
128. Nambu Y., Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II // Phys. Rev. — 1961. — Vol. 124. — P. 246–254.
129. Adler S. L. Axial vector vertex in spinor electrodynamics // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 177. — P. 2426–2438.
130. Bell J. S., Jackiw R. A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the sigma model // Nuovo Cim. — 1969. — Vol. A60. — P. 47–61.
131. Fujikawa K. Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 42. — P. 1195–1198.
132. Cohen T. D., Glozman L. Y. Chiral multiplets versus parity doublets in highly excited baryons // Phys. Rev. — 2001. — Vol. D65. — P. 016006. — hep-ph/0102206.
133. Cohen T. D., Glozman L. Y. Does one observe chiral symmetry restoration in baryon spectrum? // Int. J. Mod. Phys. — 2002. — Vol. A17. — P. 1327–1354. — hep-ph/0201242.
134. Glozman L. Y. Parity doublets and chiral symmetry restoration in baryon spectrum // Phys. Lett. — 2000. — Vol. B475. — P. 329–334. — hep-ph/9908207.
135. Glozman L. Y. SU(2)(L)xSU(2)(R) and U(1)(A) restorations high in the hadron spectrum and what it tells us about // Phys. Lett. — 2002. — Vol. B539. — P. 257–265. — hep-ph/0205072.
136. Glozman L. Y. Chiral multiplets of excited mesons // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B587. — P. 69–77. — hep-ph/0312354.
137. Glozman L. Y. Chiral symmetry restoration and the string picture of hadrons // Phys. Lett. — 2002. — Vol. B541. — P. 115–120. — hep-ph/0204006.
138. Glozman L. Y., Nefediev, A. V. Chiral symmetry and the string description of excited hadrons // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 096004. — 0704.2673.
139. Nowak M. A., Rho M., Zahed I. Chiral doubling of heavy light hadrons: BABAR 2317 MeV/c<sup>2</sup> and CLEO 2463 MeV/c<sup>2</sup> discoveries // Acta Phys. Polon. — 2004. — Vol. B35. — P. 2377–2392. — hep-ph/0307102.
140. Beane S. R. Constraining quark hadron duality at large  $N_c$  // Phys. Rev. — 2001. — Vol. D64. — P. 116010. — hep-ph/0106022.
141. Golterman M., Peris S. On the use of the operator product expansion to constrain the hadron spec'

- trum // Phys. Rev. — 2003. — Vol. D67. — P. 096001. — hep-ph/0207060.
142. Afonin S. S., Andrianov A. A., Andrianov V. A., Espriu D. Matching Regge theory to the OPE // JHEP. — 2004. — Vol. 04. — P. 039. — hep-ph/0403268.
143. Swanson E. S. Parity doubling in the meson spectrum // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B582. — P. 167–171. — hep-ph/0309296.
144. DeGrand T. A. Eigenvalue decomposition of meson correlators // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D69. — P. 074024. — hep-ph/0310303.
145. Shifman M. Highly excited hadrons in QCD and beyond // ECT\* Workshop on Highly Excited Hadrons Trento, Italy, July 4-9, 2005. — 2005. — P. 171–191. — hep-ph/0507246.
146. Denissenya M., Glozman L. Y., Lang C. B. Symmetries of mesons after unbreaking of chiral symmetry and their string interpretation // Phys. Rev. — 2014. — Vol. D89, no. 7. — P. 077502. — 1402.1887.
147. Glozman L. Ya. SU(4) $\times$ SU(4) bilocal symmetry of Coulombic confinement and emergent symmetry in QCD. — 2015. — 1511.05857.
148. Glozman L. Y. SU(4) symmetry of the dynamical QCD string and genesis of hadron spectra // Eur. Phys. J. — 2015. — Vol. A51, no. 3. — P. 27. — 1407.2798.
149. Amer A., Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O., Raynal J. c. Instability of the chiral invariant vacuum for a confining potential // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 50. — P. 87–90.
150. Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O., Raynal J. C. Chiral Noninvariant Solutions of the Gap Equation for a Confining Potential // Phys. Lett. — 1984. — Vol. B134. — P. 249.
151. Le Yaouanc A., Oliver L., Pene O., Raynal J. C. Spontaneous Breaking of Chiral Symmetry for Confining Potentials // Phys. Rev. — 1984. — Vol. D29. — P. 1233–1257.
152. Le Yaouanc A., Oliver L., Ono S., Pene O., Raynal J. C. A Quark Model of Light Mesons with Dynamically Broken Chiral Symmetry // Phys. Rev. — 1985. — Vol. D31. — P. 137–159.
153. Bicudo P. J. d. A., Ribeiro J. E. F. T. Current Quark Model in a  $p$  Wave Triplet Condensed Vacuum. 1. The Dynamical Breaking of Chiral Symmetry // Phys. Rev. — 1990. — Vol. D42. — P. 1611–1624.
154. Bicudo P. J. d. A., Ribeiro J. E. F. T. Current Quark Model in a  $p$  Wave Triplet Condensed Vacuum. 2. Salpeter Equations:  $\pi$ ,  $K$ ,  $\rho$ ,  $\phi$  as  $q\bar{q}$  Bound States // Phys. Rev. — 1990. — Vol. D42. — P. 1625–1634.
155. Bicudo P. J. d. A., Ribeiro J. E. F. T. Current Quark Model in  $p$  Wave Triplet Condensed Vacuum. 3. Generalized R.G.M. Equations: The  $\phi$  and  $\rho$  Resonances // Phys. Rev. — 1990. — Vol. D42. — P. 1635–1650.
156. Bicudo P. J. d. A. Nuclear matter may enhance chiral symmetry breaking // Phys. Rev. Lett. —

1994. — Vol. 72. — P. 1600–1603.
157. Bicudo P. J. A. A New perspective on the scalar meson puzzle, from spontaneous chiral symmetry breaking beyond BCS // *Phys. Rev.* — 1999. — Vol. C60. — P. 035209. — nucl-th/9802058.
158. Bicudo P. J. A., Ribeiro J. E. F. T., **Nefediev, A. V.** Vacuum replicas in QCD // *Phys. Rev.* — 2002. — Vol. D65. — P. 085026. — hep-ph/0201173.
159. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Field theory description of vacuum replicas // *Phys. Rev.* — 2003. — Vol. D67. — P. 034028. — hep-ph/0212371.
160. Nefedev A. V. Sigma state and vacuum replica // *AIP Conf. Proc.* — 2004. — Vol. 717. — P. 342–346.
161. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Quantum field theory approach to the vacuum replica in QCD // *Quark confinement and the hadron spectrum. Proceedings, 5th International Conference, Gargnano, Italy, September 10-14, 2002.* — 2002. — P. 378–380. — hep-ph/0212104.
162. Nefedev A. V., Ribeiro J. E. F. T. Are light hadronic coherent-like states possible? // *AIP Conf. Proc.* — 2007. — Vol. 892. — P. 526.
163. **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Real-time approach to quark confined systems at finite temperatures // *JETP Lett.* — 2009. — Vol. 90. — P. 417–422. — [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*90,461(2009)]. 0906.1288.
164. Antonov D. V., **Nefediev, A. V.**, Ribeiro J. E. F. T. Dark quark domains // *JETP Lett.* — 2010. — Vol. 92. — P. 721–725. — [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*92,803(2010)]. 1011.3036.
165. 't Hooft G. A Two-Dimensional Model for Mesons // *Nucl. Phys.* — 1974. — Vol. B75. — P. 461.
166. Bars I., Green M. B. Poincare and Gauge Invariant Two-Dimensional QCD // *Phys. Rev.* — 1978. — Vol. D17. — P. 537.
167. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Strong hadronic decays in QCD in two-dimensions // 18th CFIF Autumn School: Topology of Strongly Correlated Systems Lisbon, Portugal, October 8-13, 2000. — 2000. — hep-ph/0012147.
168. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Strong decays and Adler selfconsistency condition in two-dimensional QCD // *Phys. Lett.* — 2000. — Vol. B487. — P. 371–378. — hep-ph/0006070.
169. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** QCD<sub>2</sub> in the axial gauge revisited // 10th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics Moscow, Russia, August 23-29, 2001. — 2001. — hep-ph/0110058.
170. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** Two-dimensional QCD in the Coulomb gauge // *Phys. Usp.* — 2002. — Vol. 45. — P. 347–368. — [*Usp. Fiz. Nauk*172,378(2002)]. hep-ph/0111225.
171. Adler S. L., Davis A. C. Chiral Symmetry Breaking in Coulomb Gauge QCD // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B244. — P. 469.

172. Kalinovsky Yu. L., Kaschluhn L., Pervushin V. N. A New QCD Inspired Version of the Nambu-Jona-Lasinio Model // Phys. Lett. — 1989. — Vol. B231. — P. 288.
173. Bicudo P., Ribeiro J. E., Rodrigues J.  $K - NS$  channel  $I=1, 0$  phase shifts as a direct measure of chiral condensation // Phys. Rev. — 1995. — Vol. C52. — P. 2144–2157.
174. Horvat R., Kekez D., Palle D., Klabucar D. Bilocal effective theory with the instantaneous funnel interaction and its renormalization // Z. Phys. — 1995. — Vol. C68. — P. 303–313.
175. Simonov Yu. A. Theory of light quarks in the confining vacuum // Phys. Atom. Nucl. — 1997. — Vol. 60. — P. 2069–2093. — [Yad. Fiz.60,2252(1997)]. hep-ph/9704301.
176. Brambilla N., Vairo A. Nonperturbative dynamics of the heavy - light quark system in the nonrecoil limit // Phys. Lett. — 1997. — Vol. B407. — P. 167–173. — hep-ph/9703377.
177. Simonov Yu. A., Tjon J. A. String formation and chiral symmetry breaking in the heavy light quark - anti-quark system in QCD // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D62. — P. 014501. — hep-ph/0001075.
178. Bicudo P., Brambilla N., Ribeiro E., Vairo A. Confinement and chiral symmetry breaking in heavy light quark systems // Phys. Lett. — 1998. — Vol. B442. — P. 349–358. — hep-ph/9807460.
179. Llanes-Estrada F. J., Cotanch S. R. Meson structure in a relativistic many body approach // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84. — P. 1102–1105. — hep-ph/9906359.
180. Bicudo P. Chiral symmetry breaking in the truncated Coulomb Gauge. II. Non-confining power law potentials // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 094030. — 0811.0407.
181. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B. Behavior of current divergences under  $SU(3) \times SU(3)$  // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 175. — P. 2195–2199.
182. Goldberger M. L., Treiman S. B. Form-factors in Beta decay and muon capture // Phys. Rev. — 1958. — Vol. 111. — P. 354–361.
183. Bicudo P. Analytic proof that the quark model complies with partially conserved axial current theorems // Phys. Rev. — 2003. — Vol. C67. — P. 035201. — hep-ph/0311277.
184. Adler S. L. Consistency conditions on the strong interactions implied by a partially conserved axial vector current // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 137. — P. B1022–B1033.
185. Weinberg S. Pion scattering lengths // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Vol. 17. — P. 616–621.
186. Bicudo P., Cotanch S., Llanes-Estrada F. J., Maris P., Ribeiro E., Szczepaniak A. Chirally symmetric quark description of low-energy pi pi scattering // Phys. Rev. — 2002. — Vol. D65. — P. 076008. — hep-ph/0112015.
187. Kalashnikova Yu. S., **Nefediev, A. V.** QCD<sub>2</sub> in the modified Fock-Schwinger gauge // Phys. Atom. Nucl. — 1999. — Vol. 62. — P. 323–327. — [Yad. Fiz.62,359(1999)]. hep-ph/9711347.
188. Glozman L. Y. Chiral and U(1)(A) restorations high in the hadron spectrum, semiclassical approximation and large  $N_c$  // Int. J. Mod. Phys. — 2006. — Vol. A21. — P. 475–486. — hep-ph/0411281.

189. Balitsky I. I. Wilson loop for the stretched contours in vacuum fields and the small distance behavior of the interquark potential // Nucl. Phys. — 1985. — Vol. B254. — P. 166–186.
190. Simonov Yu. A. Chiral Lagrangian with confinement from the QCD Lagrangian // Phys. Rev. — 2002. — Vol. D65. — P. 094018. — hep-ph/0201170.
191. Kalashnikova Yu. S., Nefediev, A. V. Potential regime for heavy quarks dynamics and Lorentz nature of confinement // Phys. Lett. — 1997. — Vol. B414. — P. 149–156. — hep-ph/9707490.
192. Jaffe R. L., Pirjol D., Scardicchio A. Pion decoupling and SU(2)<sub>L</sub> x SU(2)<sub>R</sub> restoration in the hadron spectrum // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 057901.
193. Jaffe R. L., Pirjol D., Scardicchio A. Parity doubling and SU(2)(L)xSU(2)(R) restoration in the hadron spectrum // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 121601. — hep-ph/0511081.
194. Jaffe R. L., Pirjol D., Scardicchio A. Parity doubling among the baryons // Phys. Rept. — 2006. — Vol. 435. — P. 157–182. — hep-ph/0602010.
195. Cohen T. D., Glozman L. Y. A simple toy model for effective restoration of chiral symmetry in excited hadrons // Mod. Phys. Lett. — 2006. — Vol. A21. — P. 1939–1945. — hep-ph/0512185.
196. Aubert B. et al. Measurements of CP-violating asymmetries and branching fractions in  $B$  decays to  $\omega K$  and  $\omega\pi$  // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D74. — P. 011106. — hep-ex/0603040.
197. Abe K. et al. Evidence for  $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$  and the sub-threshold decay  $X(3872) \rightarrow \omega J/\psi$  // Lepton and photon interactions at high energies. Proceedings, 22nd International Symposium, LP 2005, Uppsala, Sweden, June 30-July 5, 2005. — 2005. — hep-ex/0505037.
198. Aubert B. et al. A Study of  $B \rightarrow X(3872)K$ , with  $X(3872) \rightarrow J/\Psi\pi^+\pi^-$  // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D77. — P. 111101. — 0803.2838.
199. Adachi I. et al. Study of X(3872) in  $B$  meson decays // Proceedings, 34th International Conference on High Energy Physics (ICHEP 2008). — 2008. — 0809.1224.
200. Abulencia A. et al. Analysis of the quantum numbers  $J^{PC}$  of the X(3872) // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — P. 132002. — hep-ex/0612053.
201. Aaij R. et al. Determination of the X(3872) meson quantum numbers // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — P. 222001. — 1302.6269.
202. Aaij R. et al. Quantum numbers of the X(3872) state and orbital angular momentum in its  $\rho^0 J\psi$  decay // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D92, no. 1. — P. 011102. — 1504.06339.
203. Gokhroo G. et al. Observation of a Near-threshold  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  Enhancement in  $B \rightarrow D^0\bar{D}^0\pi^0 K$  Decay // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 162002. — hep-ex/0606055.
204. Aushev T. et al. Study of the  $B \rightarrow X(3872)(D^{*0}\bar{D}^0)K$  decay // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 031103. — 0810.0358.
205. Aubert B. et al. Study of Resonances in Exclusive  $B$  Decays to  $\bar{D}^{(*)}D^{(*)}K$  // Phys. Rev. — 2008. —

- Vol. D77. — P. 011102. — 0708.1565.
206. Aubert B. et al. Evidence for  $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$  in  $B^\pm \rightarrow X(3872)K^\pm$  decays, and a study of  $B \rightarrow c\bar{c}\gamma K$  // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 132001. — 0809.0042.
207. Bhardwaj V. et al. Observation of  $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$  and search for  $X(3872) \rightarrow \psi'\gamma$  in B decays // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107. — P. 091803. — 1105.0177.
208. Aaij R. et al. Evidence for the decay  $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$  // Nucl. Phys. — 2014. — Vol. B886. — P. 665–680. — 1404.0275.
209. del Amo Sanchez P. et al. Evidence for the decay  $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega$  // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D82. — P. 011101. — 1005.5190.
210. Barnes T., Godfrey S. Charmonium options for the X(3872) // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D69. — P. 054008. — hep-ph/0311162.
211. Badalian A. M., Morgunov V. L., Bakker B. L. G. Fine structure splittings of excited P and D states in charmonium // Phys. Atom. Nucl. — 2000. — Vol. 63. — P. 1635–1639. — [Yad. Fiz.63,1722(2000)]. hep-ph/9906247.
212. Barnes T., Godfrey S., Swanson E. S. Higher charmonia // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D72. — P. 054026. — hep-ph/0505002.
213. Eichten E. J., Lane K., Quigg C. Charmonium levels near threshold and the narrow state  $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$  // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D69. — P. 094019. — hep-ph/0401210.
214. Jia Y., Sang W.-L., Xu J. Is the  $J^P = 2^-$  assignment for the X(3872) compatible with the radiative transition data? — 2010. — 1007.4541.
215. Voloshin M. B., Okun L. B. Hadron Molecules and Charmonium Atom // JETP Lett. — 1976. — Vol. 23. — P. 333–336. — [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.23,369(1976)].
216. De Rujula A., Georgi H., Glashow S. L. Molecular Charmonium: A New Spectroscopy? // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38. — P. 317.
217. Tornqvist N. A. Isospin breaking of the narrow charmonium state of Belle at 3872 MeV as a deuson // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B590. — P. 209–215. — hep-ph/0402237.
218. Wong C.-Y. Molecular states of heavy quark mesons // Phys. Rev. — 2004. — Vol. C69. — P. 055202. — hep-ph/0311088.
219. Maiani L., Piccinini F., Polosa A. D., Riquer V. Diquark-antidiquarks with hidden or open charm and the nature of X(3872) // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D71. — P. 014028. — hep-ph/0412098.
220. Dubynskiy S., Voloshin M. B. Hadro-Charmonium // Phys. Lett. — 2008. — Vol. B666. — P. 344–346. — 0803.2224.
221. Dubynskiy S., Gorsky A., Voloshin M. B. Holographic Hadro-Quarkonium // Phys. Lett. — 2009. — Vol. B671. — P. 82–86. — 0804.2244.

222. Gamermann D., Oset E. Axial resonances in the open and hidden charm sectors // Eur. Phys. J. — 2007. — Vol. A33. — P. 119–131. — 0704.2314.
223. Bigi I., Maiani L., Piccinini F., Polosa A. D., Riquer V. Four-quark mesons in non-leptonic B decays: Could they resolve some old puzzles? // Phys. Rev. — 2005. — Vol. D72. — P. 114016. — hep-ph/0510307.
224. Meng C., Gao Y.-J., Chao K.-T.  $B \rightarrow \chi_{c1}(1P, 2P)K$  decays in QCD factorization and X(3872) // Phys. Rev. — 2013. — Vol. D87, no. 7. — P. 074035. — hep-ph/0506222.
225. Badalian A. M., Orlovsky V. D., Simonov Yu. A., Bakker B. L. G. The ratio of decay widths of X(3872) to  $\psi'\gamma$  and  $J/\psi\gamma$  as a test of the X(3872) dynamical structure // Phys. Rev. — 2012. — Vol. D85. — P. 114002. — 1202.4882.
226. Badalian A. M., Simonov Yu. A., Bakker B. L. G.  $c\bar{c}$  interaction above threshold and the radiative decay  $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$  // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91, no. 5. — P. 056001. — 1501.01168.
227. Bugg D. V. How Resonances can synchronise with Thresholds // J. Phys. — 2008. — Vol. G35. — P. 075005. — 0802.0934.
228. Swanson E. S. Diagnostic decays of the X(3872) // Phys. Lett. — 2004. — Vol. B598. — P. 197–202. — hep-ph/0406080.
229. Dong Y.-b., Faessler A., Gutsche T., Lyubovitskij V. E. Estimate for the  $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$  decay width // Phys. Rev. — 2008. — Vol. D77. — P. 094013. — 0802.3610.
230. Dong Y., Faessler A., Gutsche T., Kovalenko S., Lyubovitskij V. E. X(3872) as a hadronic molecule and its decays to charmonium states and pions // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 094013. — 0903.5416.
231. Dong Y., Faessler A., Gutsche T., Lyubovitskij V. E.  $J/\psi\gamma$  and  $\psi(2S)\gamma$  decay modes of the X(3872) // J. Phys. — 2011. — Vol. G38. — P. 015001. — 0909.0380.
232. Gamermann D., Oset E. Isospin breaking effects in the X(3872) resonance // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D80. — P. 014003. — 0905.0402.
233. Guo F.-K., Hidalgo-Duque C., Nieves J., Ozpineci A., Valderrama M. P. Detecting the long-distance structure of the X(3872) // Eur. Phys. J. — 2014. — Vol. C74, no. 5. — P. 2885. — 1404.1776.
234. Guo F.-K., Hanhart C., Meissner U.-G., Wang Q., Zhao Q. Production of the X(3872) in charmonia radiative decays // Phys. Lett. — 2013. — Vol. B725. — P. 127–133. — 1306.3096.
235. Colangelo P., De Fazio F., Pham T. N. Nonfactorizable contributions in B decays to charmonium: The Case of  $B^- \rightarrow K^- h_c$  // Phys. Rev. — 2004. — Vol. D69. — P. 054023. — hep-ph/0310084.
236. Guo F.-K., Hanhart C., Meissner U.-G. On the extraction of the light quark mass ratio from the decays  $\psi' \rightarrow J/\psi\pi^0(\eta)$  // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — P. 082003. — [Erratum: Phys. Rev. Lett.104,109901(2010)]. 0907.0521.

237. Guo F.-K., Hanhart C., Li G., Meissner U.-G., Zhao Q. Effect of charmed meson loops on charmonium transitions // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 034013. — 1008.3632.
238. Amundson J. F., Boyd C. G., Jenkins E. E., Luke M. E., Manohar A. V., Rosner J. L., Savage M. J., Wise M. B. Radiative  $D^*$  decay using heavy quark and chiral symmetry // *Phys. Lett.* — 1992. — Vol. B296. — P. 415–419. — hep-ph/9209241.
239. Cheng H.-Y., Cheung C.-Y., Lin G.-L., Lin Y. C., Yan T.-M., Yu H.-L. Chiral Lagrangians for radiative decays of heavy hadrons // *Phys. Rev.* — 1993. — Vol. D47. — P. 1030–1042. — hep-ph/9209262.
240. Hu J., Mehen T. Chiral Lagrangian with heavy quark-diquark symmetry // *Phys. Rev.* — 2006. — Vol. D73. — P. 054003. — hep-ph/0511321.
241. Mertig R., Bohm M., Denner A. FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes // *Comput. Phys. Commun.* — 1991. — Vol. 64. — P. 345–359.
242. Hahn T., Perez-Victoria M. Automated one loop calculations in four-dimensions and D-dimensions // *Comput. Phys. Commun.* — 1999. — Vol. 118. — P. 153–165. — hep-ph/9807565.
243. Ablikim M. et al. An improved limit for  $\Gamma_{ee}$  of X(3872) and  $\Gamma_{ee}$  measurement of  $\psi(3686)$  // *Phys. Lett.* — 2015. — Vol. B749. — P. 414–420. — 1505.02559.
244. Meissner U. G. Low-Energy Hadron Physics from Effective Chiral Lagrangians with Vector Mesons // *Phys. Rept.* — 1988. — Vol. 161. — P. 213.
245. Kuhn J. H., Kaplan J., Safiani E. G. O. Electromagnetic Annihilation of  $e^+e^-$  Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation // *Nucl. Phys.* — 1979. — Vol. B157. — P. 125.
246. Kühn J. H. — Proceedings of the International Workshop on  $e^+e^-$  collisions from  $\Phi$  to  $\Psi$ , Rome, Italy. — 2013.
247. Kivel N., Vanderhaeghen M.  $\chi_{cJ} \rightarrow e^+e^-$  decays revisited. — 2015. — 1509.07375.
248. Aaron R., Amado R. D., Young J. E. Relativistic three-body theory with applications to pi-minus n scattering // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 174. — P. 2022–2032.
249. Liu Y.-R., Liu X., Deng W.-Z., Zhu S.-L. Is X(3872) Really a Molecular State? // *Eur. Phys. J.* — 2008. — Vol. C56. — P. 63–73. — 0801.3540.
250. Thomas C. E., Close F. E. Is X(3872) a molecule? // *Phys. Rev.* — 2008. — Vol. D78. — P. 034007. — 0805.3653.
251. Tornqvist N. A. From the deuteron to deusons, an analysis of deuteron - like meson meson bound states // *Z. Phys.* — 1994. — Vol. C61. — P. 525–537. — hep-ph/9310247.
252. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. — Москва : Наука, 1972.
253. Kalashnikova Yu. S., Nefediev, A. V. Relativistic quantum mechanics in the einbein field formalism // *Phys. Atom. Nucl.* — 1997. — Vol. 60. — P. 1389–1394. — [Yad. Fiz.60,1529(1997)].

hep-ph/9611361.

254. Nogga A., Timmermans R. G. E., van Kolck U. Renormalization of one-pion exchange and power counting // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. C72. — P. 054006. — nucl-th/0506005.
255. Kudryavtsev A. E., Markushin V. E., Shapiro I. S. Nuclear Level Shift of the  $(p\bar{p})$  Atom // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1978. — Vol. 74. — P. 432–444.
256. Kudryavtsev A. E., Popov V. S. On the nuclear shift theory of proton–anti-proton atomic levels (in Russian) // *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1979. — Vol. 29. — P. 311–316.
257. Beane S. R., Bedaque P. F., Savage M. J., van Kolck U. Towards a perturbative theory of nuclear forces // *Nucl. Phys.* — 2002. — Vol. A700. — P. 377–402. — nucl-th/0104030.
258. Kaplan D. B., Savage M. J., Wise M. B. Two nucleon systems from effective field theory // *Nucl. Phys.* — 1998. — Vol. B534. — P. 329–355. — nucl-th/9802075.
259. Albaladejo M., Guo F. K., Hidalgo-Duque C., Nieves J., Valderrama M. P. Decay widths of the spin-2 partners of the X(3872) // *Eur. Phys. J.* — 2015. — Vol. C75, no. 11. — P. 547. — 1504.00861.
260. Wang P., Wang X. G. Study on X(3872) from effective field theory with pion exchange interaction // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111, no. 4. — P. 042002. — 1304.0846.
261. Jansen M., Hammer H. W., Jia Y. Finite volume corrections to the binding energy of the X(3872) // *Phys. Rev.* — 2015. — Vol. D92, no. 11. — P. 114031. — 1505.04099.
262. Liu L., Moir G., Peardon M., Ryan S. M., Thomas C. E., Vilaseca P., Dudek J. J., Edwards R. G., Joo B., Richards D. G. Excited and exotic charmonium spectroscopy from lattice QCD // *JHEP.* — 2012. — Vol. 07. — P. 126. — 1204.5425.
263. Cleven M., Guo F.-K., Hanhart C., Meissner U.-G. Light meson mass dependence of the positive parity heavy-strange mesons // *Eur. Phys. J.* — 2011. — Vol. A47. — P. 19. — 1009.3804.
264. Gasser J., Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory to One Loop // *Annals Phys.* — 1984. — Vol. 158. — P. 142.
265. Becirevic D., Sanfilippo F. Theoretical estimate of the  $D^* \rightarrow D\pi$  decay rate // *Phys. Lett.* — 2013. — Vol. B721. — P. 94–100. — 1210.5410.

## Приложение А

### Структура полюсов в двухканальной задаче

В случае наличия двух каналов, пороги которых разнесены на величину  $\delta$ , требуется обобщение одноканальной комплексной  $k$ -плоскости, которое позволило бы изучать поведение полюсов матрицы рассеяния. Такое обобщение, обеспечивающее удобную визуализацию четырёхлистной поверхности Римана в комплексной плоскости энергии, предложено в работе [110]. Идея состоит в совершении конформного преобразования, переводящего комплексную плоскость энергии в свободную от унитарных разрезов комплексную плоскость вспомогательного параметра  $\omega$ . В частности, для заданной энергии  $E$  вместо двух импульсов  $k_1$  и  $k_2$ , по одному на каждый канал, определённых условиями

$$E = \frac{k_1^2}{2\mu_1}, \quad E = \frac{k_2^2}{2\mu_2} + \delta, \quad (\text{A.1})$$

удобно ввести одну комплексную величину  $\omega$ , определённую следующим образом:

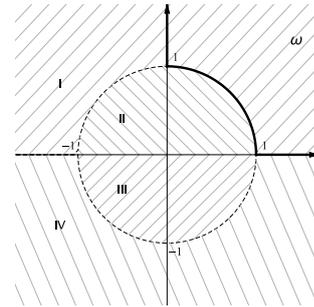
$$k_1 = \sqrt{\frac{\mu_1\delta}{2}} \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right), \quad k_2 = \sqrt{\frac{\mu_2\delta}{2}} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right), \quad (\text{A.2})$$

что для энергии даёт выражение

$$E = \frac{\delta}{4} \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + 2 \right).$$

Действительно, по построению, комплексная  $\omega$ -плоскость не имеет разрезов, а взаимно однозначное соответствие листов поверхности Римана (обозначены как RS-X, где X=I,II,III,IV) в комплексной плоскости энергии и областей в комплексной плоскости  $\omega$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{RS - I :} & \quad \text{Im } k_1 > 0, \quad \text{Im } k_2 > 0, \\ \text{RS - II :} & \quad \text{Im } k_1 < 0, \quad \text{Im } k_2 > 0, \\ \text{RS - III :} & \quad \text{Im } k_1 > 0, \quad \text{Im } k_2 < 0, \\ \text{RS - IV :} & \quad \text{Im } k_1 < 0, \quad \text{Im } k_2 < 0. \end{aligned}$$



(A.3)

Нетрудно видеть, что околороговой области на диаграмме (A.3) отвечают значения  $|\omega| \simeq 1$ , при этом порогу при  $E = 0$  отвечают точки  $\omega = \pm i$ , а порогу при  $E = \delta$  отвечают точки  $\omega = \pm 1$ . Жирная линия соответствует вещественным значениям энергии  $E$ , лежащим на первом листе комплексной  $E$ -плоскости.

## Приложение Б

### Вычисление неупругой матрицы $G_{\alpha\beta}$

Вычисления неупругостей (2.51) и (2.52) полностью аналогично, поэтому рассмотрим лишь одну из них, например, неупругую матрицу (2.52):

$$G_{\alpha\beta} = \sum_i \int \varphi_{i\alpha}(\mathbf{q}) S_i(\mathbf{q}) \varphi_{i\beta}(\mathbf{q}) d^3q. \quad (\text{Б.1})$$

Для углового момента  $l_i$  в  $i$ -м неупругом канале имеем

$$\varphi_{i\alpha}(\mathbf{q}) = g_{i\alpha} |\mathbf{q}|^{l_i} \quad (\text{Б.2})$$

и, соответственно, после отбрасывания действительных частей петель приходим к выражению

$$G_{\alpha\beta} = \sum_i g_{i\alpha} g_{i\beta} \text{Im} \int |\mathbf{q}|^{2l_i} S_i(\mathbf{q}) d^3q. \quad (\text{Б.3})$$

Определим релятивистский петлевой интеграл для скалярных частиц разных масс  $m_1$  и  $m_2$  с точечными вершинами:

$$I_2(m_1, m_2, p) = \mu^{4-D} \frac{1}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(m_1^2 - k^2)(m_2^2 - (k-p)^2)}, \quad (\text{Б.4})$$

где, ввиду расходимости интеграла в  $D = 4$  измерениях, он определён в пониженной размерности  $D = 4 - 2\epsilon$  с  $\epsilon > 0$ . Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} I_2(m_1, m_2, p) = & -(C(m_1) + C(m_2)) - \frac{1}{16\pi^2} \left( -1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{p^2} \ln \frac{m_2}{m_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^{1/2}(p^2, m_1^2, m_2^2)}{p^2} \ln \frac{m_1^2 + m_2^2 - p^2 - \lambda^{1/2}(p^2, m_1^2, m_2^2)}{2m_1 m_2} \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

где

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (\text{Б.6})$$

есть стандартная треугольная функция, а величина  $C(m)$  содержит регулятор  $\epsilon$ :

$$C(m) = -\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \gamma_E - 1, \quad \gamma_E \approx 0.577. \quad (\text{Б.7})$$

Для мнимой части интеграла  $I_2(m_1, m_2, p)$  имеем:

$$\text{Im} I_2(m_1, m_2, p) = \frac{\pi^2}{\sqrt{s}} k, \quad s = p^2, \quad (\text{Б.8})$$

где импульс  $k$  даётся стандартным выражением:

$$k = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2). \quad (\text{Б.9})$$

Тогда для вычисления искомой величины (Б.3) в формуле (Б.8) необходимо учесть дополнительный множитель  $k^{2l_i}$ , проистекающий из множителя  $|\mathbf{q}|^{2l_i}$  под интегралом в (Б.3), а также дополнительный множитель  $(\sqrt{2m_1})^2(\sqrt{2m_2})^2 = 4m_1m_2$ , обеспечивающий согласование размерностей релятивистских и нерелятивистских полей. В итоге находим:

$$\text{Im} \int |\mathbf{q}|^{2l_i} S_i(\mathbf{q}) d^3q = \frac{m_{th_i}}{\sqrt{s}} (2\pi)^2 \mu_i^{in} k_i^{2l_i+1}, \quad (\text{Б.10})$$

где были введены величины  $m_{th_i}$  и  $\mu_i^{in}$  для порога и приведённой массы  $i$ -го неупругого канала, так что

$$m_1m_2 = (m_1 + m_2) \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = m_{th} \mu^{in}. \quad (\text{Б.11})$$

В результате приходим к окончательному выражению для матрицы (2.52) в виде:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{(2\pi)^2}{\sqrt{s}} \sum_i g_{i\alpha} g_{i\beta} m_{th_i} \mu_i k_i^{2l_i+1}. \quad (\text{Б.12})$$

Если для неупругих каналов применимо нерелятивистское приближение, то формула (Б.12) допускает упрощение. Действительно, в нерелятивистском пределе  $\sqrt{s} \approx m_1 + m_2 = m_{th}$ , так что можно записать:

$$G_{\alpha\beta} = (2\pi)^2 \sum_i g_{i\alpha} g_{i\beta} \mu_i k_i^{2l_i+1}, \quad (\text{Б.13})$$

что также можно было получить непосредственно с помощью следующего нерелятивистского вычисления:

$$\text{Im} \int |\mathbf{q}|^{2l_i} S_i(\mathbf{q}) d^3q = \text{Im} \int \frac{|\mathbf{q}|^{2l_i} d^3q}{\mathbf{q}^2 / (2\mu_i) - E - i0} = (2\pi)^2 \mu_i k_i^{2l_i+1}, \quad k_i = \sqrt{2\mu_i E}. \quad (\text{Б.14})$$

## Приложение В

### Вывод трёхчастичного уравнения (4.165)

После исключения третьего уравнения системы (4.156) и (4.157) принимают вид:

$$\left\{ \begin{aligned} t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) &= -\Sigma(p)\delta^{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \frac{\Sigma(p)}{D_2(\mathbf{p})}t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) \\ &+ g^2 \int d^3q \frac{q_m(\alpha q_p + \beta p_p)}{D_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})D_2(-\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p})} t_{22}^{pn}(-\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) \\ t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) &= -g^2 \frac{(\alpha p_m + p'_m)(\alpha p'_n + p_n)}{D_3(\mathbf{p}, -\alpha\mathbf{p} - \mathbf{p}')} + \frac{\Sigma(p)}{D_2(\mathbf{p})}t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) \\ &+ g^2 \int d^3q \frac{q_m(\alpha q_p + \beta p_p)}{D_3(\mathbf{p}, \mathbf{q})D_2(-\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p})} t_{22}^{pn}(-\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p}, \mathbf{p}', E), \end{aligned} \right. \quad (\text{B.1})$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E) &= -\Sigma(\bar{p})\delta^{mn}\delta(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') + \frac{\Sigma(\bar{p})}{D_2(\bar{\mathbf{p}})}t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E) \\ &+ g^2 \int d^3\bar{q} \frac{\bar{q}_m(\alpha \bar{q}_p + \beta \bar{p}_p)}{D_3(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})D_2(-\bar{\mathbf{q}} - \alpha\bar{\mathbf{p}})} t_{22}^{pn}(-\bar{\mathbf{q}} - \alpha\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E) \\ t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E) &= -g^2 \frac{(\alpha \bar{p}_m + \bar{p}'_m)(\alpha \bar{p}'_n + \bar{p}_n)}{D_3(\bar{\mathbf{p}}, -\alpha\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}')} + \frac{\Sigma(\bar{p})}{D_2(\bar{\mathbf{p}})}t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E) \\ &+ g^2 \int d^3\bar{q} \frac{\bar{q}_m(\alpha \bar{q}_p + \beta \bar{p}_p)}{D_3(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})D_2(-\bar{\mathbf{q}} - \alpha\bar{\mathbf{p}})} t_{22}^{pn}(-\bar{\mathbf{q}} - \alpha\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E). \end{aligned} \right. \quad (\text{B.2})$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что  $t_{23}^m(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{q}')$  и  $t_{23}^m(\bar{\mathbf{p}}; \bar{\mathbf{p}}', \bar{\mathbf{q}}')$  вида

$$\begin{aligned} t_{23}^m(\mathbf{p}; \mathbf{p}', \mathbf{q}'; E) &= gq'_m\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{g}{D_2(\mathbf{p}')}t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E)q'_n \\ &- \frac{g}{D_2(-\mathbf{q}' - \alpha\mathbf{p}')}t_{22}^{mn}(\mathbf{p}, -\mathbf{q}' - \alpha\mathbf{p}', E)(\alpha q'_n + \beta p'_n), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} t_{23}^m(\bar{\mathbf{p}}; \bar{\mathbf{p}}', \bar{\mathbf{q}}'; E) &= g\bar{q}'_m\delta(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') - \frac{g}{D_2(\bar{\mathbf{p}}')}t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}', E)\bar{q}'_n \\ &- \frac{g}{D_2(-\bar{\mathbf{q}}' - \alpha\bar{\mathbf{p}}')}t_{22}^{mn}(\bar{\mathbf{p}}, -\bar{\mathbf{q}}' - \alpha\bar{\mathbf{p}}', E)(\alpha \bar{q}'_n + \beta \bar{p}'_n) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

удовлетворяют системе уравнений (4.158).

При этом уравнения для  $C$ -чётных и  $C$ -нечётных матричных элементов  $t_{\pm} = t_{22} \pm t_{22}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} t_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) &= -\frac{\Sigma(p)D_2(\mathbf{p})}{\Delta(p)}\delta^{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mp g^2 \frac{(\alpha p_m + p'_m)(\alpha p'_n + p_n)}{D_3(\mathbf{p}, -\alpha\mathbf{p} - \mathbf{p}')} \frac{D_2(\mathbf{p})}{\Delta(p)} \\ &\pm g^2 \frac{D_2(\mathbf{p})}{\Delta(p)} \int d^3s \frac{(s_m + \alpha p_m)(\alpha s_p + p_p)}{D_3(\mathbf{p}, -\mathbf{s} - \alpha\mathbf{p})D_2(\mathbf{s})} t_{\pm}^{pn}(\mathbf{s}, \mathbf{p}', E), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

что с помощью подстановки

$$t_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) = -\frac{\Sigma(p)D_2(\mathbf{p})}{\Delta(p)}\delta^{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \frac{D_2(\mathbf{p})}{\Delta(p)}a_{\pm}^{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E)\frac{D_2(\mathbf{p}')}{\Delta(\mathbf{p}')} \quad (\text{B.6})$$

сводится к окончательному виду (4.165).

## Приложение Г

### Парциальные ширины распадов $D^{*0}$ мезона

Найдём соотношение между полными ширинами нейтрального и заряженного  $D^*$  мезонов. Для этого используем легко проверяемые изоспиновые соотношения между амплитудами распадов  $D^* \rightarrow D\pi$  (соответствующие множители даются коэффициентами Клебша-Гордана  $C_{11\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ ,  $C_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ ,  $C_{10\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$  и  $C_{1-1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ ):

$$\begin{aligned} D^{*+} &= \sqrt{\frac{2}{3}}D^0\pi^+ - \sqrt{\frac{1}{3}}D^+\pi^0, \\ D^{*0} &= \sqrt{\frac{1}{3}}D^0\pi^0 - \sqrt{\frac{2}{3}}D^+\pi^- \end{aligned}$$

и запишем с их помощью следующее соотношение между ширинами:

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) = \Gamma(D^{*+} \rightarrow D^+\pi^0) \left(\frac{p_0}{p_+}\right)^3 = \frac{1}{3}\Gamma_{\text{tot}}(D^{*+}) \left(\frac{p_0}{p_+}\right)^3, \quad (\text{Г.1})$$

где  $p_0$  и  $p_+$  есть импульсы мезонов в конечном состоянии, третья степень импульса возникает в силу  $P$ -волновой вершины распада  $D^* \rightarrow D\pi$ , а также было использовано, что полная ширина заряженного  $D^*$  мезона насыщается однопионными распадами (вкладом радиационного распада  $D^{*+} \rightarrow D^+\gamma$  можно пренебречь, поскольку его брэнчинг составит всего 1.6%).

В силу соотношения 2:1 между парциальными ширинами распада  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$  и  $D^{*0} \rightarrow D^0\gamma$  (см. формулы (4.33) и (4.34)) [89] можно записать:

$$\Gamma_{\text{tot}}(D^{*0}) \equiv \Gamma_* = \frac{3}{2}\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) = \frac{1}{2}\Gamma_{\text{tot}}(D^{*+}) \left(\frac{p_0}{p_+}\right)^3 \approx 60 \text{ кэВ}, \quad (\text{Г.2})$$

где были использованы табличные значения [89]

$$\Gamma_{\text{tot}}(D^{*+}) = (83.4 \pm 1.8) \text{ кэВ}, \quad p_0 = 43 \text{ МэВ}, \quad p_+ = 38 \text{ МэВ}. \quad (\text{Г.3})$$

Тогда с помощью соотношений (4.33) и (4.34) находим окончательно:

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) \approx 40 \text{ кэВ}, \quad (\text{Г.4})$$

$$\Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0\gamma) \approx 20 \text{ кэВ}. \quad (\text{Г.5})$$