НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Садофьев Андрей Владимирович

Макроскопические проявления киральной аномалии

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
В.И. Захаров

Москва, 2015

Оглавление

Памяти Чернова Андрея Владимировича

Глава 1

Введение

Современная квантовая теория поля по большей части полагается на пертурбативное разложение по малости константы связи или иного параметра. Вследствие этого каждый точно вычисляемый результат привлекает пристальное внимание и активно обсуждается в литературе. Среди прочих примеров выделяется случай аксиальной аномалии квантовой теории поля - нарушение классической симметрии на квантовом уровне. Как было показано, данное явление оказывается точным уже в одной петле [1] и не подвержено старшим поправкам по взаимодействию. Более того, недавний анализ [2, 3, 4, 5, 6] предсказывает существование явлений переноса, тесно связанных с аномалией, что даёт новый пример макроскопического проявления квантовых эффектов. Данная работа посвящена изучению соответствующей физической картины и анализу свойств макроскопического описания теории киральных сред.

Теория безмассовых фермионов, взаимодействующих с калибровочными полями, обладает дополнительной классической симметрией - сохранением киральности (также называемой аксиальной симметрией). Киральность - квантовое число, отвечающее проекции спина безмассовой частицы на направление её импульса. Релятивистская природа безмассовых частиц допускает всего две возможные проекции - вдоль направления движения и против, соответствующие частицы принято называть правыми и левыми киральными частицами. Изучение квантового действия показывает тем не менее, что мера интеграла по путям неинвариантна относительно соответствующих преобразований. Следовательно, существует форма спонтанного квантового нарушения аксиальной симметрии, называемая аксиальной аномалией и отвечающая ненулевой дивергенции соответствующего нёторовского тока:

$$\partial_\mu j_5^\mu = C\vec{E}\cdot\vec{B}, \tag{1.1}$$

где индекс 5 связан с γ_5 участвующей в генерации аксиальной симметрии для фермионов и C - коэффициент перед аномалией. Правая сторона уравнения (1.1) отвечает вычислению треугольной диаграммы Фейнмана с одним аксиальным и двумя векторными токами в вершинах, и является точным однопетлевым результатом [1].

Неперенормируемость аномалии значительно упрощает вычисления, которые во многом сводятся к анализу симметрий рассматриваемой теории. В длинноволновом пределе, после соответствующего усреднения, возмущения вокруг равновесного состояния могут быть описаны уравнениями сохранения зарядов и тензора энергии импульса (ТЭИ) в гидродинамическом пределе. Рассмотрение гидродинамических уравнений, модифицированных аномалией, позволяет предсказать существование новых вкладов в векторный (электрический) и аксиальный токи - киральных эффектов, и вычислить соответствующие транспортные коэффициенты. Более того, часть аномальных вкладов остаётся в токах при выключенных внешних полях - следовательно в отсутствии аномалии:

$$\delta j_5^\mu = \mu^2\omega^\mu + O(\mu^3), \tag{1.2}$$

где δ обозначает аномальную поправку к гидродинамическому аксиальному току, μ - химический потенциал в системе, а $\omega_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u^\nu\partial^\alpha u^\beta$ - завихрённость, релятивистское обобщение угловой скорости. Фиксация коэффициента в (1.2) аномалией наводит на мысль о возможной неперенормируемости киральных эффектов.

В данной диссертации рассматриваются различные пути вычисления аномальных кинетических коэффициентов. Обсуждаются свойства аномального транспорта, такие как (не)перенормируемость и зависимость от инфракрасных параметров теории, а также детали связи с аксиальной аномалией. Кратко обсуждается отношение теоретических изысканий к реально существующим системам, обладающим киральным спектром. Большая часть работы построена в виде обзора недавних результатов в данной области.

1.1 Киральные эффекты

Со стороны теории поля, аномальные проводимости были получены значительное время назад [7, 8]. В теории киральных фермионов во внешних электромагнитных полях и на фоне локальных гидродинамических возмущений среды киральные эффекты имеют форму равновесных ($\omega = 0$) токов

$$\begin{aligned}\vec{J}_5(x) &= \frac{\mu}{2\pi^2}\vec{B} + \left(\frac{\mu^2+\mu_5^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right)\vec{\Omega} \\ \vec{J}(x) &= \frac{\mu_5}{2\pi^2}\vec{B} + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2}\vec{\Omega},\end{aligned} \tag{1.3}$$

где μ_5 обозначает аксиальный химический потенциал, сопряжённый с аксиальным зарядом $Q_5 = N_R - N_L$ равным разнице числа правых и левых частиц в среде, $\vec{B}$ - внешнее магнитное поле, а $\vec{\Omega}$ локальная угловая скорость вращения среды. Заметим, что Ω и ω^μ переходят друг в друга в нерелятивистском пределе.

С другой стороны, интерес к физике киральных эффектов во многом мотивирован экспериментальным подтверждением существования кварк-глюонной плазмы (КГП) [9], представляющей из себя почти идеальную жидкость, состоящую из лёгких кварков, массами которых в пределе высокой температуры среды, можно пренебречь. Для неаномального взаимодействия между фермионами (независимо от силы взаимодействия) сохраняющийся аномальный аксиальный заряд имеет вид

$$Q_5 = Q_5^0 + \frac{1}{4\pi^2}\int \vec{A}\cdot\vec{B}d^3x. \tag{1.4}$$

Известно, что средние от операторов в гидродинамическом приближении могут быть получены заменой (см. [4, 10])

$$A_\mu \to A_\mu + \mu u_\mu, \tag{1.5}$$

где u_μ - 4-скорость элемента жидкости. Легко увидеть, что после данной подстановки аксиальный заряд (6.13) принимает форму

$$Q_5 = Q_5^0 + \frac{1}{4\pi^2}\int_x \vec{A}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2\pi^2}\int_x \mu(\vec{v}\cdot\vec{B}) + \frac{1}{2\pi^2}\int_x \mu^2\omega^0. \tag{1.6}$$

Введём в теорию аксиальный химпотенциал μ_5, что отвечает сдвигу гамильтониана

$$H_0 \to H_0 - \mu_5 Q_5 \tag{1.7}$$

или переходя к модифицированному действию получим

$$\delta S = \int dt d^3x\ \mu_5 \left(\frac{1}{4\pi^2}\vec{A}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2\pi^2}\mu(\vec{v}\cdot\vec{B})\right). \tag{1.8}$$

Заметим, что вариация (1.8) по отношению к векторному потенциалу воспроизводит векторный ток в (1.3). Таким образом, существует явный признак независимости аномальных кинетических коэффициентов от силы взаимодействия фермионов. Такая универсальность киральных эффектов крайне интересна сама по себе и, более того, это позволяет изучать аномальный транспорт в ситуациях, когда прочие вычисления крайне осложнены режимом сильной связи.

1.2 Инфракрасные свойства аномального транспорта

Как будет показано далее, аномалия действительно фиксирует киральные кинетические коэффициенты в ультрафиолетовом (УФ) пределе. Тем не менее, киральные эффекты оказываются незащищёнными от перенормировок и могут значительно зависеть от инфракрасного (ИК) доопределения системы.

Так рассмотрение реализации кирального вихревого эффекта (КВЭ) на сверхтекучих вихрях (см. глава 5) приводит к ответу, вдвое отличающемуся от соответствующего члена в (1.3) (см. [11]). Этот результат является следствием существования дополнительной компоненты среды - нулевых мод, живущих на вихрях и реализующих КВЭ. Нулевые моды не термализованы с гидродинамической средой и всегда движутся со скоростью света, в то время как элемент жидкости имеет конечную 4-скорость.

Другой пример ИК особенностей киральных эффектов может быть получен из анализа статических уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \sigma\vec{B}, \tag{1.9}$$

где σ - кинетический коэффициент в киральном магнитном эффекте (КМЭ) для векторного тока. Двойное применение оператора rot самого к себе, позволяет получить соотношение

$$\Delta\vec{B} + \sigma^2\vec{B} = 0, \tag{1.10}$$

которое отвечает нестабильности однородного магнитного поля в системе с киральной асимметрией $\sigma \sim \mu_5$ (см. глава 5). Более того, анализ динамического поведения теории показывает наличие неограниченно растущего решения для возмущения электромагнитного поля [12]. Тем самым, масштаб развития нестабильности $l \sim \frac{1}{\alpha\mu_5}$ ставит ограничение на применимость (1.3). Более того, прямое вычисление в теории поля с динамическими фотонами [13] позволяет показать перенормируемость КМЭ и обращение в ноль в строгом ИК пределе.

Таким образом, оказывается, что аномальные кинетические коэффициенты действительно перенормируются и неуниверсальны. Тем не менее, в пределе больших температур часть инфракрасных параметров подавляется и система переходит в эффективно киральный предел. Следовательно - при наложении дополнительных условий киральные эффекты могут быть фиксированы аномалией и рассматриваться универсальными.

Реальные системы, допускающие существование киральных эффектов такие как КГП [9], Вейлевские и Дираковские металлы [14, 15], оказываются в разном положении по отношению к шкале ИК параметров. Так, в случае КГП, высокая температура позволяет рассматривать киральные эффекты в большой степени в их оригинальной форме (1.3) на расстояниях, меньших масштаба киральной нестабильности. В то время как в топологических системах твёрдого тела ИК сектор скорее регулируется параметрами решётки и может зависеть от ИК свойств конкретного образца, такими как линейные размеры и чистота.

1.3 Физика киральной жидкости

Неперенормируемость аксиальной аномалии тесно связана с топологическими свойствами калибровочных теорий поля. Эта связь сохраняется и на макроскопическом уровне, что видно уже из формы киральных эффектов (1.3). Так магнитное поле, как известно из классической электродинамики, не производит работу, и, следовательно, можно предположить недиссипативность электрического тока КМЭ. Такая возможность также поддерживается самим фактом существования равновесного тока. Тем не менее, наивное рассмотрение аномальных проводимостей не накладывает дополнительных ограничений на степень когерентности системы. Существование такого безотносительно недиссипативного транспорта выглядит более чем странно.

Изучение физики киральных сред и модифицированного аномалией аксиального заряда, позволяет найти ограничения на диссипативные свойства системы [10, 16, 17], что в свою очередь накладывает желаемое ограничение на недиссипативный транспорт. Как мы покажем в главе 6, существование классической диссипации в системе приводит к нарушению сохранения аксиального заряда на классическом уровне и, следовательно, запрещает существование равновесных аномальных токов.

Таким образом, в теории киральных сред предсказывается возможность существования нового вида квантовых макроскопических эффектов, аналогичных сверхтекучести и сверхпроводимости. Тем не менее изучение ограничений на степень когерентности системы требует детального микроскопического вывода киральных эффектов с учётом квантовой природы среды. Примеры реализации аномального транспорта в таких ситуациях изучались в связи с физикой сверхтекучего p-волнового гелия (He III) (см. [18]). Расширение соответствующего рассмотрения с учётом последних результатов теоретико-полевого описания безусловно является следующим необходимом шагом в построении полноценной теории киральных сред.

1.4 Эксперимент

На данный момент, помимо теоретических предсказаний существования аномального транспорта в системах физики высоких энергий и твёрдого тела, было получено экспериментальное подтверждение наблюдения КМЭ в дираковском металле [15]. Также существуют косвенные наблюдения киральных магнитных волн - возбуждений осцилляции плотностей аксиального и электрического зарядов, на экспериментах по соударению тяжёлых ионов [19]. Вместе эти экспериментальные результаты открывают новую стадию в изучении макроскопических проявлений аксиальной аномалии квантовой теории поля, допускающую не только теоретическое обсуждение, но также конкретную экспериментальную проверку.

1.5 Содержание диссертации

В **главе 2** обсуждается получение киральных эффектов для невзаимодействующего газа фермионов. Рассматриваются два режима сильных и слабых внешних полей. Все аномальные кинетические коэффициенты воспроизводятся в линейном отклике после получения соответствующих корреляторов в статической формуле Кубо. На примере кирального магнитного эффекта производится вычисление в сильных полях, сводящееся к суммированию вкладов нулевых уровней Ландау. Обсуждается универсальность ответа вне зависимости от рассматриваемого режима. Показана связь кирального магнитного эффекта с аксиальной аномалией теории поля.

В **главе 3** рассматривается возможность построения эффективной теории поля, описывающей фермионные поля на фоне гидродинамической среды. Производится анализ аномалий в построенной теории поля. Показана связь между киральными эффектами и аномалиями эффективной теории. Обсуждаются симметрии фундаментальной и эффективной теории поля и соответствующие законы сохранения в гидродинамическом приближении. Приведён пример аномалии эффективной теории поля, отсутствующей в фундаментальной теории. Показана возможность существования кирального возбуждения в среде - киральной магнитной волны, рассмотрены её простейшие свойства.

В **главе 4** подробно обсуждается аномальная гидродинамика. Приведён пример перехода от микроскопической сильновзаимодействующей теории к гидродинамическому пределу в терминах дуальных моделей. В ходе анализа аномальной гидродинамики построен модифицированный ток энтропии. Из требования сохранения энтропии в идеальном пределе получены ограничения на аномальные вклады и показана универсальность аномальных кинетических коэффициентов. Также изучена связь аномальных проводимостей с коэффициентом перед аномалией и обсуждается их неперенормируемость.

В **главе 5** обсуждаются инфракрасные свойства теории киральных эффектов в некоторых системах. Приведены примеры нарушения универсальной формы аномальных проводимостей. Полученная перенормируемость показывает, что аксиальная аномалия фиксирует лишь ультрафиолетовую часть теории, в то время как инфракрасные свойства киральных эффектов зависят от деталей конкретной постановки задачи. Обсуждается генерация характерных масштабов, на которых универсальная форма аномального транспорта значительно нарушается. В частности, приведён пример перенормировки кирального магнитного эффекта в ноль динамическими фотонами в строгом ИК пределе.

В **заключении** обсуждаются полученные результаты и возможные направления дальнейшего развития физики аномального транспорта.

1.6 Результаты выносимые на защиту диссертации

- Произведено обобщение гидродинамического вывода киральных эффектов на систему с двумя плотностями. В данном подходе получен результат для транспортного коэффициента, отвечающего киральному магнитному эффекту [20].

- Построена эффективная теория поля киральных фермионов на фоне гидродинамической среды. Изучена связь аксиальной аномалии теории поля и киральных эффектов [4].

- Получен пример аномалии, существующей лишь в эффективной теории поля и отсутствующей в фундаментальной. Произведён анализ соответствующих симметрий [4].

- Предложен механизм генерации старших поправок по химпотенциалам в киральных кинетических коэффициентах в эффективной теории поля [4].

- Проведён анализ (не)перенормируемости аномальных кинетических коэффициентов [11, 13]. Приведен конкретный пример перенормировки кирального магнитного эффекта в присутствии динамического поля фотона [13]. Приведён пример отклонения кирального вихревого транспорта от универсальной формы (1.3) [11].

- Предсказана зависимость киральных эффектов от инфракрасных свойств теории [4, 11, 13]. Получен характерный масштаб, определяющий аномальную проводимость, отвечающую киральному магнитному эффекту [13].

- Предложен нетривиальный кандидат на конечную точку развития киральной нестабильности в виде самосогласованной конфигурации магнитного поля, удовлетворяющей уравнению Бертлами [13].

- Качественно предсказан новый класс киральных нестабильностей, по отношению к переходу микроскопической киральности в макроскопическое движение среды [16].

- Представлены ограничения необходимые для классического сохранения аксиального заряда, модифицированного средой. Показана тесная связь между диссипативными свойствами среды и недиссипативным поведением киральных эффектов [16].

- Предложен механизм реализации кирального вихревого эффекта в системах твёрдого тела с нетривиальной структурой импульсного пространства [21].

По теме диссертационного исследования в ведущих реферируемых журналах опубликованы статьи [4, 11, 20, 21].

Благодарности

Я хотел бы особо поблагодарить своего научного руководителя В.И. Захарова за научные задачи и обсуждения, важность которых невозможно переоценить. Я очень признателен ему за помощь и внимание к моей работе и росту моего понимания в области теоретической физики.

Я выражаю благодарность своим соавторам - А.С. Авдошкину, М.В. Исаченкову, В.П. Кирилину, З.В. Хайдукову, В.И. Шевченко, а также признательность за полезные обсуждения Г.А. Аминову, С.Б Аратомонову, Э.Т. Ахмедову, В.В. Брагуте, П.В. Буйвидовичу, К.М. Булычевой, Г.Е. Воловику, А.С. Горскому, Ф.В. Губареву, С.В. Гуцу, К. Енсену, М.А. Зубкову, Т.К. Калайджяну, А.Ю. Котову, О.А. Кочеткову, А.А. Крикуну, Л.С. Левитову, М.И. Поликарпову, К. Раджагопалу, Э. Сперанза, М. Стефанову, О.В. Теряеву, Д.Э. Харзееву, А.В. Штыку, Н. Ямамото и многим другим. Отдельно я хотел бы поблагодарить мою жену Майю за её поддержку.

Глава 2

Киральные эффекты для свободных фермионов

Несмотря на то, что наиболее интересным является случай взаимодействующих систем (в особенности со стороны физики элементарных частиц) для академического понимания рассматриваемых явлений крайне важно изучить их реализацию в наиболее простых моделях. Также, избегая запутанного анализа ИК особенностей теории киральных эффектов, удобно начать их изучение с точного кирального предела в бесконечных системах. По этой причине необходимым шагом является анализ аномального транспорта в пределе пренебрежения взаимодействием между безмассовыми фермионами. Тем не менее заметим, что свободные киральные фермионы крайне нестабильны, и данная теория страдает от многочисленных ИК расходимостей, которых в этой главе мы будем всячески избегать, оставляя для последующего анализа (см. глава 5).

Исторически аномальные транспортные явления для невзаимодействующих фермионов впервые рассматривались в [7, 8]. Данные вычисления многократно повторялись (см. [3, 6]), расширяя понимание явления киральных эффектов и их связи с аксиальной аномалией. Также существует широкое обсуждение возможных феноменологических следствий. Позже мы подробно обсудим связь киральных эффектов с аномалией в теории поля (см глава 3) и вопросы их перенормируемости (см. глава 5), концентрируясь в этой главе на простейшем выводе аномальных проводимостей.

Отметим, что вероятно наиболее значимую роль в резком росте интереса к киральным эффектам сыграло открытие кварк-глюонной плазмы [9], которая, как было показано экспериментально, с хорошей точностью описывается как почти идеальная жидкость. Малая масса лёгких кварков и высокая температура допускают рассмотрение кирального предела, тем самым создавая плацдарм для поиска киральных эффектов на эксперименте. Однако кварк-глюонная плазма представляет из себя сильновзаимодействующую систему. К более последовательному изучению режима сильной связи мы вернёмся позднее.

Стоит отметить, что некоторые реальные киральные системы допускают описание в терминах слабовзаимодействующих безмассовых фермионов, в частности так называемые Вейлевские и Дираковские металлы [14, 15], обладающие соответствующими спектрами квазичастиц. Более того, вычисления для невзаимодействующего фермионного газа, могут быть расширены рассмотрением кинетического уравнения данной модели [22, 23, 24]. Как известно из физики твёрдого тела, после последовательного учёта всех значимых вкладов в интеграл столкновений, кинетическое уравнение может быть достаточно универсальным и применимым для описания реальных систем.

Вычисления в режиме слабой связи могут быть разделены на два независимых типа - сильного и слабого внешнего воздействия на систему. В режиме слабых внешних полей и малых локальных угловых скоростей вращения среды, КМЭ и КВЭ оказываются весьма похожи. Вычисление соответствующих аномальных кинетических коэффициентов может быть выполнено в приближении линейного отклика по формуле Кубо [7, 8]. Анализ отклика на сильные поля приводит к необходимости учёта перестройки вакуума. Так, в случае сильных магнитных полей, теория свободного фермионного газа переходит в эффективно 2х-мерное состояние, описывающееся уровнями Ландау. В случае же рассмотрения КВЭ для больших угловых скоростей ситуация оказывается значительно сложнее и изучена не до конца. Квантовая теория поля в неинерциальной системе отсчёта также испытывает значительную перестройку вакуума, что приводит к таким явлениям, как эффект Унру [25]. По этой причине, в случае сильных внешних воздействий мы ограничимся рассмотрением примера магнитного поля, где перестройка вакуума теории хорошо изучена, оставляя анализ отклика на быстрое вращения для будущих изысканий.

2.1 Слабые поля и формула Кубо

Вычисление кинетических коэффициентов в приближении линейного отклика на внешнее взаимодействие широко используется в квантовой теории поля и статистической физике. Основополагающий принцип данного приближения может быть выражен так называемой формулой Кубо [26], которая связывает среднее оператора во внешнем поле с запаздывающим коррелятором оператора и тока, соответствующего данному взаимодействию. Таким образом, отклик системы (среднее оператора $\hat{O}$) на достаточно слабое внешнее воздействие A_μ определяется коррелятором тока J_μ, сопряжённого с A_μ, и оператора $\hat{O}$:

$$G^{ret}(x,y) = \langle O(x_\mu) J_\alpha(y_\nu) \rangle \theta(t_y - t_x), \tag{2.1}$$

где среднее вычисляется при выключенном внешнем воздействии. И в приближении линейного отклика, для интересующего нас среднего имеем

$$\langle O(x_\mu) \rangle = \int G^{ret}(x,y) A^\alpha(y) d^d y, \tag{2.2}$$

где индекс коррелятора соответствует запаздыванию. Заметим, что формула Кубо обычно понимается в более узком смысле, и мы будем пользоваться приведённой расширенной формой.

Следовательно, для невзаимодействующей системы вычисление электромагнитного (аксиального) тока во внешнем поле сводится к однопетлевой диаграмме, отвечающей коррелятору электромагнитного (аксиального) тока и соответствующего тока, сопряжённого воздействию. Так, во внешнем электромагнитном поле, взаимодействие сопряжено с электромагнитным током, а для локального вращения среды с ТЭИ. Заметим, что петлевая структура связана здесь с квадратичностью рассматриваемых токов по фермионным операторам, в то время как учёт взаимодействия между фермионами требует вычисления точного коррелятора. Тем не менее будем предполагать константу связи малой и пренебрегать этим классом поправок.

2.1.1 Внешнее магнитное поле

Вычисление аномальных кинетических коэффициентов в случае слабых полей удобно начать на примере отклика системы безмассовых фермионов на внешнее магнитное поле. Для этого рассмотрим систему, состоящую только из левых киральных частиц, число которых задаётся соответствующим химпотенциалом μ_L, и позже восстановим верный результат в теории без нарушения чётности. Дальнейший вывод в большой степени следует работе [7], где впервые получен пример кирального эффекта.

Взаимодействие киральных фермионов с внешним калибровочным полем описывается действием

$$S = \int i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - iA_{\mu}\right)P_L\psi, \tag{2.3}$$

где введён киральный проектор $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$, гарантирующий наличие только левой компоненты спинора, и электрический заряд поглощён в определение калибровочного поля в наших обозначениях. Из (2.3) легко убедиться, что оператором, отвечающим взаимодействию с внешним электромагнитным полем, является оператор электромагнитного тока, ограниченный в случае левых фермионов киральным током, и формула Кубо принимает вид

$$j_L^{\mu}(x) = \int \langle j_L^{\mu}(x) j_L^{\nu}(y)\rangle A_{\nu}(y) d^4y, \tag{2.4}$$

а индекс L напоминает о рассмотрении одной киральности. В данной задаче оказывается удобным использовать температурную или так называемую Мацубаровскую диаграммную технику [26], что с одной стороны позволяет обобщить задачу на случай ненулевой температуры $T = \beta^{-1}$, а с другой избавляет от необходимости иметь дело с возможными расходимостями теории поля, в значительной мере регуляризуя петлевой интеграл, входящий в коррелятор двух токов. Таким образом, переходя в импульсное пространство и делая евклидов поворот, мы получаем

$$j_L^{\mu}(q) = -\Pi_L^{\mu\nu}(q) A_{\nu}(q), \tag{2.5}$$

где коррелятор двух токов имеет вид

$$\Pi_L^{\mu\nu}(q) = -\frac{\beta^{-1}}{(2\pi)^3}\sum_{p_0}\int d^3p\ \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu S_L(p)\gamma^\nu S_L(p-q)\} \tag{2.6}$$

и введено обозначение $S_L(p) = -\frac{1}{2}\frac{\gamma^\mu p_\mu}{p^2}(1+\gamma_5)$ для пропагатора левого фермионного поля. В соответствии с общепринятым переходом к температурной технике, нулевые компоненты 4-импульса в евклидовом пространстве должны быть заменены дискретным набором комплексных значений $p_0 = \mu_L + i\pi(2l+1)\beta^{-1}$, отвечающим антипериодическим граничным условиям для фермионов. Запаздывающая форма коррелятора выбирается соответствующим обходом полюсов пропагаторов в корреляторе, тем не менее в интересующем нас случае статического поля запаздывающий коррелятор совпадает с фейнмановским, и дополнительные комментарии про упорядоченность времён не требуются.

Мы заинтересованы в отклике на внешнее однородное постоянное магнитное поле, вычисление коррелятора может быть значительно упрощено за счёт разложения по степеням импульса в статическом пределе ($\omega = 0$). Заметим, что порядок взятия пределов значительно меняет картину в рассматриваемой задаче. Так, при вычислении вкладов в равновесные токи теории, статический предел должен предшествовать переходу к однородному $\omega < q$, $q \to 0$. В этом пределе коррелятор двух токов принимает вид:

$$\Pi_L^{\mu\nu}(\vec{q}) = -\frac{2i}{\beta(2\pi)^3}\epsilon^{\mu\sigma\nu\tau}q_\tau\sum_{p_0}\int d^3p\frac{p_\sigma}{(p^2)^2}. \tag{2.7}$$

В то время как в случае обратного порядка пределов, коррелятор отвечает также наличию внешнего электрического поля. Суммирование по частотам с учётом антипериодичности фермионных полей может быть заменено на контурный интеграл в комплексной плоскости

$$\beta^{-1}\sum_l F(\zeta_l) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\zeta f(\zeta)F(\zeta) \tag{2.8}$$

где полюсная функция является ничем иным, как распределением Ферми $f(\zeta) = (e^{\beta\zeta} + 1)^{-1}$, а контур γ обходит все полюса распределения против часовой стрелки, не захватывая полюсов функции $F(\zeta)$. Подставляя в (2.8) подынтегральную функцию из (2.7), получим контурный интеграл на комплексной плоскости, который может быть вычислен явно, давая

$$\Pi^{ij}_L(\vec{q}) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\epsilon^{ijk}q_k \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|}\left(f'(|\vec{p}| - \mu_L) - f'(|\vec{p}| + \mu_L)\right), \tag{2.9}$$

в то время, как все компоненты содержащие временной индекс обнуляются. Таким образом, мы показали прямым вычислением отклика в линейном приближении, что внешнее постоянное магнитное поле приводит к появлению тока левых фермионов

$$\vec{j} = -\frac{\mu_L}{4\pi^2}\vec{B}. \tag{2.10}$$

Данный результат легко обобщить на случай зеркально отражённой теории. Учитывая сохранение киральности во внешнем магнитном поле (при отсутствии электрического), вычисление элементарно обобщается на случай системы правых фермионов, что отвечает смене знака и замене левого химпотенциала правым. Учитывая отсутствие взаимодействия между двумя секторами теории, электрический и аксиальный токи имеют вид $j = j_R + j_L$, $j_5 = j_R - j_L$. Таким образом, мы воспроизвели ответы для КМЭ в векторном (электрическом) и аксиальном токах соответственно, окончательно получим

$$\vec{j} = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\vec{B} \quad , \quad \vec{j}_5 = \frac{\mu}{2\pi^2}\vec{B}, \tag{2.11}$$

где мы перешли к векторному $\mu = \frac{\mu_R+\mu_L}{2}$ и аксиальному $\mu_5 = \frac{\mu_R-\mu_L}{2}$ химпотенциалам, отвечающим полному числу частиц и аксиальной асимметрии в системе.

Полученный результат для аномальных кинетических коэффициентов воспроизводят магнитную часть киральных эффектов, которые были приведены во введении (см (1.3)). Стоит отметить, что полученные отклики оказываются линейны по химпотенциалам системы, несмотря на наличие нелинейной зависимости в (2.9). Как следствие, соответствующие двухточечные корреляторы могут быть разложены по малости химпотенциалов, превращаясь в треугольные диаграммы, отвечающие аксиальной аномалии. Тем не менее, необходимо сделать два дополнительных замечания: во-первых, имеется существенное отличие в кинематическом режиме вычисления треугольных графиков для КМЭ и аномалии [27, 28]; во-вторых, задача оказывается неаналитической по массе фермионов и данное разложение становится неприменимо в этом случае [29].

2.1.2 Локальное вращение среды

Приступая к изучению вихревых киральных эффектов в приближении линейного отклика [6], необходимо найти ток, сопряжённый с гидродинамическим возмущением среды. Заметим, что наличие среды играло так же ключевую роль и в случае КМЭ, где аномальные проводимости оказались пропорциональны химпотенциалам ($\mu, \mu_5 \neq 0$).

Последовательными локальными лоренцевыми поворотами любое течение жидкости (в гидродинамическом приближении) может быть описано как покоящаяся жидкость в некоторой криволинейной системе координат, что согласуется с принципом относительности. Достаточным условием для возможности такого перехода с необходимой точностью является некоторая гладкость движения среды. Пользуясь этим, рассмотрим систему киральных фермионов, помещённую в эффективное гравитационное поле, которое описывается, в лидирующем порядке по градиентам скоростей, метрическим тензором

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 + 2\vec{A}_g d\vec{x}dt \tag{2.12}$$

где мы ввели гравимагнитное поле, прямо связанное с 4-скоростью $u_\mu = (1, \vec{A}_g)$ и, соответственно, тождественно равное скорости гидродинамического возбуждения среды $\vec{v} = \vec{A}_g$. Следовательно, локальное поле скоростей может рассматриваться как гравитационное возмущение, которое возбуждает смешанную компоненту ТЭИ T^{0i}, играющую в данном случае роль тока в формуле Кубо.

Связь пространственно-временной компоненты ТЭИ с фермионными операторами может быть легко получена варьированием действия (2.3) по метрике пространства времени:

$$T_L^{0i} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\left(\gamma^0\partial^i + \gamma^i\partial^0\right)P_L\psi, \tag{2.13}$$

где снова предполагается, что жидкость состоит из частиц одной киральности (ψ_L). Собирая компоненты воедино и выделяя интересующий нас вклад в формуле Кубо, получим

$$j_L^i(x) = \int \langle j_L^i(x)T_L^{0j}(y)\rangle v_j(y)d^4y \tag{2.14}$$

как и прежде, здесь подразумевается запаздывающий коррелятор, что равносильно введению под интеграл $\theta(t_y - t_x)$. Переходя в импульсное представление и пользуясь мацубаровской диаграммной техникой перепишем отклик тока как

$$j_L^i(q) = -\Pi_{ij}^{\Omega}(q)v_j(q), \tag{2.15}$$

где коррелятор имеет форму

$$\Pi_{ij}^{\Omega}(q) = -\frac{1}{2\beta}\sum_{p_0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\left(S(p)\gamma^iS(p-q)(\gamma^0p^j+\gamma^jp^0)\right). \tag{2.16}$$

Здесь суммирование по мацубаровским частотам снова отвечает антипериодическим граничным условиям для фермионов и $p_0 = \mu_L + i\pi(2l+1)\beta^{-1}$. Выделяя интересующую нас аксиальную часть в статическом пределе, получим

$$\Pi_{ij}^{\Omega}(\vec{q}) = \frac{i}{\beta}\epsilon^{ijl}q_l\sum_{p_0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{(p^2)^2}\left(p_0^2+\frac{1}{3}\vec{p}^{\,2}\right). \tag{2.17}$$

В отличие от случая КМЭ, где мы получили конечный ответ для петли, данный интеграл оказывается расходящимся. Тем не менее, система свободных фермионов при нулевой температуре и плотности, не может проявлять КВЭ без явного нарушения пространственной чётности. Как следствие, интеграл в (2.17) может быть регуляризован вычитанием своего значения при нулевой температуре и химпотенциале. И, после вычисления суммы, данная процедура сводится к вычитанию вклада $\sim f_{T=0}(-p)p$ под интегралом по импульсам. Конечная часть коррелятора принимает форму

$$\Pi^{\Omega}_{ij}(\vec{q}) = -\frac{i\epsilon_{ijk}q_k}{2\pi^2}\int dp\ p\ \ (f(p-\mu_L)+f(p+\mu_L))\,. \tag{2.18}$$

Пользуясь известными ответами для значения интегралов от распределения Фурье в (2.18) для отклик тока получим

$$\vec{j}_L = \frac{1}{4\pi^2}\left(\mu_L^2 + \frac{\pi^2}{3}T^2\right)\vec{\Omega} \tag{2.19}$$

или окончательно, равновесные векторный и аксиальный токи принимают вид

$$\vec{j} = \frac{\mu\mu_5}{\pi^2}\vec{\Omega}\ \ ,\ \ \vec{j}_5 = \left(\frac{\mu_5^2+\mu^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right)\vec{\Omega}, \tag{2.20}$$

что воспроизводит вихревую часть киральных эффектов, приведённых выше (см (1.3)).

2.2 Уровни Ландау. Нулевые моды.

Вычисление аномальных кинетических коэффициентов в сильных внешних полях, оказывается за пределами применимости методов линейного отклика. В частности, теория испытывает глубокую перестройку вакуума, что в случае магнитного поля отвечает появлению уровней Ландау [30], в то время как для глобального вращения требует изучения квантовой теории поля в неинерциальной системе отсчёта. Во втором случае вакуум теории также становится нетривиальным, что в частности приводит к существованию эффекта Унру [25], который заключается в появлении термального излучения для наблюдателя движущегося с постоянным ускорением. Многие вопросы в этой области до сих пор остаются открытыми, и по этой причине мы в основном сконцентрируемся на случае сильного магнитного поля, где перестройка вакуума значительно проще.

Рассматривая систему свободных киральных фермионов в сильном магнитном поле, мы не можем пренебречь прямой зависимостью волновых функций состояний системы от поля, и задача должна быть решена точно по $\vec{B}$. Как известно, в этом случае динамика системы становится эффективно 2х-мерной. И следовательно, задача вычисления аномальной проводимости КМЭ сводится к изучению спектра гамильтониана теории и дальнейшему суммированию ожидания оператора тока по соответствующим модам с учётом температурного распределения [7, 29]. Мы снова будем предполагать наличие в системе фермионов только одной киральности, для определённости левых, и обобщим ответ на симметричный случай позже.

Рассмотрим уравнение Дирака для безмассовых левых фермионов во внешнем электромагнитном поле, которое принимает вид

$$\gamma^\mu(i\partial_\mu - A_\mu)\psi = 0 \tag{2.21}$$

с дополнительным условием $P_R\psi = 0$, где $P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$. Пользуясь калибровочной инвариантностью выберем вектор-потенциал для постоянного однородного внешнего магнитного поля, как

$$A_0 = A_x = A_z = 0 \ \ , \ \ A_y = Bx,$$

предполагая поле направленным вдоль оси z. Мы не будем приводить детали вычисления волновых функций, отвечающих уровням Ланадау безмассовых фермионов, рассматривая данную задачу, как широко известную. Прямая проверка показывает, что следующее 4-х фермионное поле, отвечающее n-му уровню Ландау и удовлетворяющее дополнительному условию, решает поставленную задачу:

$$\psi = \frac{1}{4\pi\sqrt{\epsilon_n}} \begin{pmatrix} (\epsilon_n - p_z)^{1/2} v_n(\xi) \\ i(\epsilon_n + p_z) v_{n-1}(\xi) \\ -(\epsilon_n - p_z)^{1/2} v_n(\xi) \\ -i(\epsilon_n + p_z) v_{n-1}(\xi) \end{pmatrix} e^{ip_y y + ip_z z} \tag{2.22}$$

для $n \neq 0$ и

$$\psi = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_0(\xi) \\ 0 \\ -v_0(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_y y + ip_z z} \tag{2.23}$$

для $n = 0$, где энергия n-того уровня Ланаду $\epsilon_n^2 = p_z^2 + 2nB$, является собственным значением гамильтониана. Выше так же были использованы нормированные полиномы

$$v_n(\xi) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi) \tag{2.24}$$

где $H_n(\xi)$ обычные полиномы Эрмита, а смешанное координатно-импульсное представление, определено как $\xi = \sqrt{B}\,(x - p_y/B)$. Базис собственных функций гамильтониана нормирован так, что

$$\int \psi^\dagger(x|np_yp_z)\psi(x|n'p'_yp'_z)d^3x = \delta_{nn'}\delta(p_y - p'_y)\delta(p_z - p'_z). \tag{2.25}$$

Приступим к вычислению z-компоненты оператора тока, для которой мы и ожидаем увидеть ненулевое равновесное среднее,

$$J_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dp_y\int_{-\infty}^{\infty}dp_z f(\epsilon_{np_z} - \mu_L)j_z(x|np_yp_z), \tag{2.26}$$

где

$$j_z(x|np_yp_z) = \bar{\psi}(x|np_yp_z)\gamma^3\psi(x|np_yp_z). \tag{2.27}$$

Подставим явное выражение для собственных функций (2.22) и (2.23) в (2.27), после элементарных преобразований, получим

$$j_z(x|np_yp_z) = -(8\pi^2\epsilon_n)^{-1}[(\epsilon_n - p_z)v_n^2(\xi) - (\epsilon_n + p_z)v_{n-1}^2] \tag{2.28}$$

для $n \neq 0$ и

$$j_z(x|0p_yp_z) = -(4\pi^2)^{-1}v_0^2(\xi) \tag{2.29}$$

для $n = 0$.

Вследствие структуры интегралов по p_z и p_y, вклады с $n \neq 0$ взаимно сокращаются и

$$J_z = -\frac{B}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z f(|p_z| - \mu_L) = -\frac{\mu_L}{4\pi^2}B \tag{2.30}$$

или добавляя в рассмотрение вторую киральность и переписывая в зеркально-симметричной форме найдём

$$\vec{J} = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\vec{B} \quad , \quad \vec{J}_5 = \frac{\mu}{2\pi^2}\vec{B}, \tag{2.31}$$

что тождественно воспроизводит результат вычисления в слабой связи (2.11) и совпадает с (1.3).

2.3 Связь с аномалией

Такое совпадение не может не показаться странным, так как явных причин для строгого сохранения формы ответа в сильных (2.31) и слабых (2.11) полях на первый взгляд нет. Это поведение весьма похоже на случай вычисления аксиальной аномалии, которая одновременно является и УФ [1] и ИК [31] феноменом, сохраняя единую форму как в приближении слабых полей и вычислении по теории возмущений, так и в случае реализации нулевыми модами [32], которые являются сугубо ИК объектами и предполагают рассмотрение внешних полей, как сильных.

Рассмотрим простой способ позволяющий увидеть связь между аномалией и киральными эффектами [3] - требование сохранения энергии при изменении элементарного аксиального заряда в системе с ненулевым μ_5. Для этого вычислим энергию, необходимую для создания дополнительного дисбаланса правых и левых частиц внешними параллельными электрическим и магнитным полями в системе

$$\mu_5 \frac{dN_5}{dt} = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\int \vec{E}\cdot\vec{B} d^3x \tag{2.32}$$

и предположим, что компенсирующий механизм связан с производством работы электрическим полем над током, текущим через систему

$$\int \vec{J}\cdot\vec{E} d^3x = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\int \vec{E}\cdot\vec{B} d^3x. \tag{2.33}$$

Таким образом, вследствие произвольности направления электрического поля в (2.33) мы можем приравнять подынтегральные выражения, что приводит к

$$\vec{J} = \frac{\mu_5}{2\pi^2}\vec{B}. \tag{2.34}$$

Этот результат тождественно воспроизводит электрический ток КМЭ (1.3). Тем не менее, данное рассмотрение оставляет значительный произвол в форме тока, так как допускает множество модификаций. В частности, существование постоянного тока в бесконечной среде ненаблюдаемо и требует рассмотрения границ системы.

Заметим также, что корреляторы с точностью до знака допускают перестановку операторов в них. Таким образом, существуют аномальные вклады в ТЭИ, отвечающие переносу энергии и импульса вдоль магнитного поля и угловой скорости локального вращения среды киральных фермионов. Единственным ещё не вычисленным коррелятором такого типа остаётся $\langle T^{0i}T^{0j}\rangle$. Тем не менее мы не будем приводить соответствующее вычисление в этой главе, избегая загромождения текста. Подробный анализ киральных вкладов в ТЭИ в слабой связи может быть найден в [6].

Глава 3

Аксиальная аномалия в эффективной теории поля

Как будет показано в следующей главе, киральные эффекты могут быть полностью воспроизведены в терминах релятивистской гидродинамики, модифицированной аномалиями теории поля [2, 20, 33], что необходимо для обобщения на случай киральных сред. В этой связи появляется вопрос о том, как переносятся имеющиеся сведения о микроскопической теории на макроскопический уровень. Удобным инструментом для подобного анализа может послужить эффективная теория поля, описывающая киральные эффекты и развитая в [4].

Киральная среда - среда состоящая из безмассовых фермионов и, так как для безмассовых частиц определено понятие киральности, в ней существует два сохраняющихся заряда Q и Q_5, с которыми сопряжены два химпотенциала μ и μ_5. В стандартном гидродинамическом приближении все заряды в среде термализованы и могут перемещаться лишь с элементом среды, как следствие векторный и аксиальные токи в нулевом порядке по градиентам равны

$$J^\mu = nu^\mu \quad , \quad J_5^\mu = n_5 u^\mu, \tag{3.1}$$

где n и n_5 векторная и аксиальная плотности заряда в среде соответственно, в то время как u^μ обозначает 4-скорость элемента жидкости. Как было впервые показано в [2], в присутствии аномалии токи должны быть модифицированы вкладами киральных эффектов, в частности КВЭ

$$\delta J_5^\mu = c_\omega \omega^\mu, \tag{3.2}$$

где $\omega^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu\partial_\alpha u_\beta$ - поле завихрённости, которое является релятивистским аналогом угловой скорости Ω. Примечательным фактом является полная фиксация кинетического коэффициента в этом токе из требования неубывания энтропии, что будет подробно рассмотрено в следующей главе. Более того, коэффициент c_ω однозначно фиксируется коэффициентом в аномалии, даже несмотря на то, что аномалия может быть выключена вместе с внешними электромагнитными полями, в то время как (3.2) сохраняется в этом пределе. Заметим, что классическое рассмотрение релятивистской гидродинамики (см. [34]) не содержит данного вклада среди градиентных поправок в токе (гидродинамическое рассмотрение предполагает производные скоростей $(\partial_i v_j)$ малыми).

Как было показано в работе [4], анализ эффективной теории поля, учитывающей гидродинамические поля, позволяет проследить связь между киральными эффектами и аномалиями эффективной теории поля. Более того, данный подход приводит пример аномалии свойственный эффективной теории поля и отсутствующий в фундаментальной. Существование данного типа аномалии объясняет модификацию гидродинамических токов даже в отсутствии внешних полей.

В этой главе мы построим эффективную теорию поля киральных фермионов на фоне среды и рассмотрим её симметрии. Мы также подробно обсудим связь аномалий с киральными эффектами, аномальные симметрии и модификации соответствующих зарядов.

3.1 Эффективная теории поля

Для построения эффективной теории поля необходимо конкретизировать лагранжиан, описывающий фундаментальные поля. Мы будем рассматривать фермионные поля двух киральностей, предполагая, что микроскопическое взаимодействие между фермионами, за исключением взаимодействия с внешним электромагнитным полем, не имеет аномалий, и следовательно киральность сохраняется. В таком случае единственная аномалия, рассматриваемая в теории, как и прежде, - аксиальная аномалия во внешних электромагнитных полях. В качестве конкретного примера может быть взят случай теории с двумя типами кварков, взаимодействующих с глюонами одинаковым образом. Данное взаимодействие предполагается ответственным за формирование плотного кварк-глюонного состояния материи, которое может быть эффективно описано на больших расстояниях релятивистской гидродинамикой. Микроскопические токи этой теории хорошо известны и имеют форму

$$j^{i,\mu} = \bar{\psi}\tau^i\gamma^\mu\psi \quad , \quad j_5^{i,\mu} = \bar{\psi}\tau^i\gamma^\mu\gamma_5\psi, \tag{3.3}$$

где кварковое поле $\psi = (u, d)$, $\tau^0 = 1_{2\times 2}$ и $\tau^{1,2,3}$ - матрицы Паули в пространстве ароматов. Отметим, что на классическом уровне существует два типа сохраняющихся токов $\partial_\mu j^{i,\mu} = \partial_\mu j_5^{i,\mu} = 0$, вне зависимости от группового индекса.

Рассмотрение теории поля при конечных плотностях отвечает введению в гамильтониан химпотенциалов для каждого сохраняющегося заряда имеющего ненулевую плотность в среде:

$$\delta H = \mu^i Q^i + \mu_5^i Q_5^i \tag{3.4}$$

где $Q^i = \int d^3x \psi^\dagger \tau^i \psi$ и $Q_5^i = \int d^3x \psi^\dagger \gamma_5 \tau^i \psi$ или переходя к лагранжиану

$$\delta L = \mu^i \psi^\dagger \gamma^0 \tau^i \psi + \mu_5^i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma_5 \tau^i \psi. \tag{3.5}$$

Заметим, что отсутствие неабелевой аномалии (по отношению к глюонным полям) в аксиальном токе накладывает дополнительное требование на μ_5^i, которое выражается в условии $\mu_5^0 = 0$. Тем не менее, подобное ограничение отсутствует в случае векторного тока и обычного химпотенциала, который может иметь синглетную компоненту. Как следствие, сохранение всех токов в рассматриваемой теории позволяет ввести химпотенциалы самосогласованно.

Хорошо известно, что химпотенциал μ сопряжённый с зарядом Q привносит два новых аспекта в квантовую теорию поля: первый - смещение энергетических уровней системы $p_0 \to p_0 - \mu$ (так как все уровни ниже μ заполнены) и второе - изменение полюсов пропагаторов, которые приобретают зависимость от μ и p, делая теорию нелокальной. Необходимо заметить, что оба эффекта отвечают изменению вакуума теории.

До сих пор все рассмотрения были представлены в терминах фундаментальных микроскопических полей. Перейдём теперь к наиболее важному вопросу описания эффективной теории поля. Введём понятие "физически микроскопического объёма" среды, V_y, окружающего некую точку y, в котором ИК поля эффективной теории могут рассматриваться как однородные. После Лоренцева поворота в локальную систему покоя жидкости (в большой степени воспроизводя процедуры перехода к криволинейным координатам, приведённую выше (см. (2.12)), получим

$$S = \int_{V_y} d^4x \bar{\psi}\gamma_\mu \left(i\partial^\mu + (\mu^i + \mu_5^i \gamma_5)\tau^i u^\mu + \hat{q}A^\mu \right) \psi + S_{int}, \tag{3.6}$$

где u^μ обозначает 4-скорость данного элемента жидкости в системе покоя центра масс. Как ИК переменная, скорость предполагается независимой от положения внутри V_y и момента времени. Мы также ввели взаимодействие с внешним электромагнитным полем, используя зарядовую матрицу $\hat{q} = \mathrm{diag}(q_u, q_d)$, отличающую два типа кварков. Внешние поля предполагаются медленно меняющимися в пространстве и времени и рассматриваются как постоянные внутри каждого данного микроскопического объёма. Последний член в действии описывает сильное взаимодействие, и его конкретная форма нас не интересует.

Следующим шагом на пути к полноценной эффективной теории поля является суммирование по большому числу микроскопических объёмов и интегрирование микроскопических степеней свободы - кварков и глюонов. Тем не менее, для анализа структуры киральных эффектов достаточно изучения токов и аномалий эффективной теории поля, чем мы и ограничимся, избегая нетривиальных вычислений в сильносвязанном секторе теории. Заметим, что зависимость положения полюсов пропагаторов от μ не может повлиять на аномальное (не)сохранение токов. Изменение полюсов является ИК явлением, исчезающим при $\mu = 0$ и отвечающим перестройке вакуума теории. В пределе больших импульсов все правила обхода возвращаются к своему состоянию в случае нулевых плотностей. Этот факт тождествен независимости аномалии от температуры/плотности, что широко обсуждалось в литературе (см. [35]). Следовательно, зависимость аномалии от μ, μ_5 может появиться только из формы члена взаимодействия $\bar{\psi}\gamma_\mu(\mu^i + \mu_5^i\gamma_5)\tau^i u^\mu \psi$ в эффективном действии. С другой стороны, этот вклад может рассматриваться в точности в таком же ключе, как и вклад обычного электромагнитного поля $\bar{\psi}\gamma_\mu \hat{q} A^\mu \psi$, так как прочие свойства внешних полей не учитываются при вычислении аномальных дивергенций токов. Таким образом, мы приходим к известному заключению, что переход в гидродинамический режим для средних от операторов теории поля может быть осуществлён заменой

$$A_\mu \to A_\mu + \mu u_\mu .$$

3.2 Аномалии в эффективной теории поля

Вычисление аномалии удобно свести к анализу изменения меры континуального интеграла при соответствующем преобразовании фермионных полей, метод Фуджикавы-Вергелеса [36]. Чтобы избежать дополнительных сложностей с матричной структурой, ограничимся анализом диагональных компонент токов ($i = 0, 3$), тем не менее продолжая использовать изоспин-инвариантные обозначения. Рассмотрим следующее преобразование фермионных полей

$$\psi \to e^{i\hat{\alpha}\gamma_5 + i\hat{\beta}}\psi \tag{3.7}$$

и соответственное преобразование меры континуального интеграла приводит к

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^{i,\mu} &= -\frac{1}{16\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(\tau^i \mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}^{\alpha\beta} + \tau^i \mathcal{F}_5^{\mu\nu}\mathcal{F}_5^{\alpha\beta}\right) \\ \partial_\mu j^{i,\mu} &= -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(\tau^i \mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_5^{\alpha\beta}\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где были введены тензоры напряжённости для векторной и аксиальной части удлинённого калибровочного поля $\mathcal{A}_\nu = A_\nu + \mu^i\tau^i u_\nu + \mu_5^i \tau^i \gamma_5 u_\nu$. Аномальное несохранение векторного тока может нарушить калибровочную инвариантность и по этой причине нежелательно. Тем не менее заметим, что существует произвол, допускающий (частичный) перенос аномалии из дивергенции векторного тока в дивергенцию аксиального. Оставшийся после этого вклад свойственен лишь эффективной теории поля и должен быть перенесён налево, тем самым позволяя переопределить сохраняющийся векторный ток.

В гидродинамическом приближении существует соответствие между микроскопическими токами $j^{i,\mu} = \bar{\psi}\tau^i\gamma^\mu\psi$, $j_5^{i,\mu} = \bar{\psi}\tau^i\gamma^\mu\gamma_5\psi$ и эффективными макроскопическими $J^{i,\mu}$, $J_5^{i,\mu}$, переносящими те же сохраняющиеся квантовые числа и заданные в (3.1). Сонаправленность макроскопических токов является важной особенностью несверхтекучей гидродинамики, где все плотности зарядов распространяются с одинаковой скоростью u^μ. Заметим, что правые стороны уравнений в (3.8) содержат только эффективные ИК поля, изменяющиеся на макроскопических масштабах, а значит дивергенции микроскопических токов ∂j могут быть заменены на соответствующие дивергенции макроскопических токов ∂J. В частности, вклад аксиальной аномалии в дивергенцию аксиального тока может быть переписан следующим образом

$$\partial_\mu \left(n_5^i u^\mu + \mathrm{Tr} \left(\frac{\tau^i}{2\pi^2} \left(\left((\mu^i \tau^i)^2 + (\mu_5^i \tau^i)^2 \right) \omega^\mu + (\mu^i \tau^i) \hat{q} B^\mu \right) \right) \right) = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr} \left(\tau^i (\hat{q})^2 \partial^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta \right) \qquad (3.9)$$

где мы ввели магнитное поле в системе покоя элемента жидкости $B^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \partial_\alpha A_\beta$. Подчеркнём, что в эффективной теории поля существует неизбежное разложение по степеням μ, μ_5. При пертурбативном рассмотрении аномалия даётся треугольной диаграммой Фейнмана и киральные эффекты исчерпываются этим вкладом. Иначе говоря, аномальные вклады не могут содержать степень химпотенциалов старше второй, которая появляется в том случае, если две вершины треугольника отвечают $\mu_{(5)} u_\mu$. Также можно заметить, что коэффициент перед завихрённостью оказывается не нулём только при наличии синглетной компоненты в векторном токе (иначе $\mathrm{Tr}\tau^i (\tau^j \mu^j)^2 = 0$).

Киральные эффекты могут быть получены из (3.9) наивным снятием дивергенции. Такая же процедура возможна и в случае векторного тока. Тем не менее существует значительный произвол по добавлению бездивергентных вкладов к полученным токам, в частности полиномов ИК полей. Отвлекаясь от этого, заметим, что фиксированная часть аномальных транспортных коэффициентов в эффективной теории поля качественно совпадает с результатом, полученным ранее для невзаимодействующих фермионов и с (1.3), за исключением температурного вклада КВЭ в аксиальном токе. Данный вклад не был воспроизведён здесь и, как будет показано позже, не связан с аксиальной аномалией во внешних электромагнитных полях. Все прочие формальные отличия в коэффициентах, фиксированных в (3.9) с киральными эффектами, рассмотренными прежде объясняются наличием двух типов фермионов и наличием нетривиальной групповой структуры в соответствующем пространстве.

Стоит также отметить, что в макроскопических токах могут появиться вклады старших порядков по химпотенциалам. Тем не менее, как было показано выше (см. (3.8)), такие члены не аномальны и не изменяют дивергенций токов, и следовательно не входят явно в (3.9). Более того, старшие степени химпотенциалов связаны с n-точечными диаграммами ($n > 3$), которые расходятся на нижнем пределе интегрирования по импульсам при вычислении петли. Следовательно, неаномальные вклады зависят от ИК обрезания, и мы не будем пытаться найти их в замкнутой форме. Приведём лишь оценку, на примере μ^3-вклада в аномальную проводимость КВЭ. Наивный счёт степеней импульса в соответствующей диаграмме даёт

$$\delta c_\omega \sim \frac{\mu^3}{2\pi^2}\frac{1}{\epsilon_{IR}}, \tag{3.10}$$

где фактор $\frac{1}{2\pi^2}$ указывает на однопетлевую природу величины, а ϵ_{IR} - ИК обрезание в интеграле по импульсному пространству. В гидродинамическом пределе осмыслена следующая оценка обрезания - $\epsilon_{IR} \sim \frac{\epsilon+P}{n}$, где ϵ и P обозначают плотность энергии и давление соответственно, а n - плотность частиц. Позже мы покажем, что такие члены действительно появляются при гидродинамическом выводе киральных эффектов, хотя и могут быть удалены отождествлением системы покоя элемента жидкости с системой покоя энтропии (см. главу 4.1).

3.3 Законы сохранения в гидродинамическом приближении

Резюмируя, отметим существование двух типов аномалий. Первый - обычная аксиальная аномалия в дивергенции фундаментального аксиального тока, второй - аномалии, представленные только в эффективной теории. Сначала рассмотрим случай, когда $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$ для внешних полей, и фундаментальные токи сохраняются. Тогда источник аномалий в эффективной теории поля кроется в отличии симметрий между эффективной теорией и фундаментальной. Этот момент можно проиллюстрировать с помощью модели двух типов кварков, рассмотренной в предыдущем параграфе. Сильное взаимодействие кварков и глюонов не зависит от аромата, тем не менее мы выбираем асимметричные начальные условия, фиксируя среднее число u- , но не d-кварков. Эффективное взаимодействие (3.5) переносит эту асимметрию начального состояния в асимметричное взаимодействие. Как следствие, аномалия появляется в терминах эффективной теории поля, но не фундаментальной.

Теперь перейдём к случаю $(\vec{E} \cdot \vec{B}) \neq 0$. Тогда мы сразу сталкиваемся с проблемой несохранения аксиального тока, и процедура введения в теорию аксиального хипотенциала μ_5 становится несамосогласованной. Тем не менее существует последовательный способ переопределить аксиальный заряд таким образом, чтобы он сохранялся в присутствии внешних электромагнитных полей:

$$\tilde{J}_5^{\alpha} = n_5 u^{\mu} + \frac{1}{2\pi^2}(\mu^2 + \mu^2)\omega^{\mu} + \frac{\mu}{2\pi} B^{\mu} - K^{\alpha}, \tag{3.11}$$

где был введён ток Черна-Саймонса (далее CS) $K_{\mu} = -\frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu} \partial^{\rho} A^{\sigma}$ и как результат

$$\partial_{\mu} \tilde{J}_5^{\mu} = 0. \tag{3.12}$$

Хотя ток K^{μ} не является калибровочно инвариантным, соответствующий заряд $\int d^3x K^0$ действительно не зависит от калибровки. Тем не менее, мы рассматриваем внешнее электромагнитное поле и следовательно величина $(\vec{E} \cdot \vec{B})$ не динамическая. Вследствие киральный заряд среды действительно изменяется под действием внешнего поля, и всё рассмотрение в этом смысле становится приближённым. Мы вернёмся к вопросам переопределения заряда и введения аксиального химпотенциала в следующих главах.

Перейдём теперь к более тонкому вопросу о реализации условия самосогласованности ‘т Хоофта в гидродинамическом приближении. В пределе нулевой температуры существует две возможные реализации теории с выбранными симметриями - безмассовые кварки или безмассовые псевдоскаляры. В КХД при $T = 0$ очевидно реализуется псевдоскалярная голдстоновская мода, а при конечной температуре существуют хорошо определённые поправки к константе распада псевдоскаляров [37]. При температуре деконфайнмента $T = T_c$ пионы становятся массивными, и в условии самосогласованности участвуют безмассовые кварки.

Теперь рассмотрим гидродинамическое приближение, что предполагает усреднение для дистанций больших, чем Δx длина свободного пробега

$$\Delta x \gg l_{free}. \tag{3.13}$$

В результате взаимодействия формируется жидкость, и система описывается гидродинамически, что означает классическое приближение. Ключевой момент в данной ситуации - отсутствие фермионных классических полей. Другими словами, в гидродинамическом приближении не может быть (безмассовых) фермионных возбуждений, которые могли бы принимать участие в условии самосогласованности ‘т Хоофта. И мы приходим к заключению, что в гидродинамическом приближении условие согласованности удовлетворяется безмассовыми бозонными модами.

В теории безмассовых фермионов, взаимодействующих только с внешним электромагнитным полем, аномалия реализуется на нулевых модах, представляющих из себя не что иное, как уровни Ландау [32]. Однако, в рассматриваемой постановке задачи, фермионы взаимодействуют между собой и тем самым формируют жидкость. Это приближение отвечает условию

$$l_{free} < R_L \tag{3.14}$$

на длину свободного пробега l_{free} и радиус нулевого уровня Ландау R_L. На масштабах больших длины свободного пробега система предполагается гидродинамической. Следовательно, фермионы теряют когерентность, и уровни Ландау более не существуют как решения, наполняющие вакуум теории. По этой причине, выполнение условия самосогласованности аномалии для физических фермионных возбуждений сомнительно. В описанной ситуации сопоставление аномалии кварков и безмассовых псевдоскалярных степеней свободы выглядит хорошей альтернативой. Более подробное изучение эффективной теории поля для псевдоскалярных степеней свободы, которые в данном случае можно назвать “гидродинамическими тенями” пионов, остаётся открытым.

В рассмотренном выше случае, наличие специфических бозонных гидродинамических степеней свободы приведёт к существованию двухкомпонентной жидкости $j_5^\mu \sim n_5 u^\mu + \tilde{n}_5 v^\mu$, где u^μ, v^μ две независимые 4-скорости. В общем случае наличие степеней свободы, отвечающих двухкомпонентной гидродинамике, обычно ассоциируется со сверхтекучей жидкостью, где представлены нормальная и сверхтекучая скорости.

3.4 Киральная магнитная волна

В заключении главы обсудим возможность существования нового коллективного возбуждения, распространяющегося вдоль магнитного поля или локальной угловой скорости, в виде волны двух плотностей заряда. Сконцентрируемся на случае КМЭ и рассмотрим два имеющихся вклада в векторном и аксиальном токах

$$J^\mu = \frac{\mu_5}{2\pi^2} B^\mu \quad , \quad J_5^\mu = \frac{\mu}{2\pi^2} B^\mu, \tag{3.15}$$

а также предположим малость обоих плотностей в среде. Естественно предположить отсутствие плотностей зарядов при условии $\mu = \mu_5 = 0$. Тогда для малых плотностей разложение уравнения состояния в общем случае начинается с линейного порядка по химпотенциалам. Учитывая отсутствие прочих псевдоскалярных величин, мы можем пренебречь смешиванием в уравнении состояния и положить

$$\mu = \alpha J^0 \quad , \quad \mu_5 = \beta J_5^0,$$

где α, β - константы теории, определяемые из термодинамических свойств среды. Подставляя (3.16) в уравнения сохранения зарядов и группируя их, получим

$$\partial_t J^0 = -\frac{B_z}{2\pi^2} \partial_z \left(\beta J_5^0 \right) \quad , \quad \partial_t J_5^0 = -\frac{B^z}{2\pi^2} \partial_z \left(\alpha J^0 \right).$$

Окончательно комбинируя два полученных соотношения, легко увидеть, что существует два новых коллективных возбуждения, удовлетворяющих

$$\partial_t^2 J^0 = \left(\frac{B_z}{2\pi^2}\right)^2 \alpha\beta\partial_z^2 J^0 \tag{3.16}$$

и движущихся в противоположных направлениях вдоль магнитного поля (разделение двух мод можно увидеть, анализируя второе уравнение).

Данный результат, несмотря на свою простоту, оказывается крайне важен, так как возбуждения в меньшей степени подвержены зависимости от ИК регуляторов теории. Соответственно в реальных системах скорее ожидаемо наблюдение киральной магнитной волны, или, в полной аналогии с описанным выше, киральной вихревой волны. Более того, как известно из стандартных примеров физики твёрдого тела и конденсированных сред, возбуждение со специфической сигнатурой может значительно повлиять на термодинамические свойства системы. Тем не менее вычисление коэффициентов α и β требует детальной информации об уравнении состояния системы, которое в свою очередь значительно зависит от деталей взаимодействия и в пределе сильной связи предполагает непертурбативные вычисления.

Глава 4

Аномальная гидродинамика

Переходя к анализу физики киральных эффектов в режиме сильной связи, мы неизбежно сталкиваемся с необходимостью поиска альтернативного метода решения задач квантовой теории поля. В предыдущей главе эта проблема была решена путём перехода к ИК описанию системы безмассовых фермионов в предположении неаномальности сильного взаимодействия, ответственного за формирование среды. Более того, с помощью детального анализа аномальных симметрий теории, оказалось возможным изучить отклики равновесных гидродинамических токов на внешние возмущения, минуя прочие конкретные вычисления. Как было показано, данный анализ действительно позволяет получить форму аномальных проводимостей для сильновзаимодействующей системы.

Тем не менее задача построения полной эффективной теории поля и рассмотрения её гидродинамического предела, оказывается куда более сложной и требует конкретных вычислений в режиме сильной связи. Из существующих методов решения задач в этом пределе, наиболее активно развивается AdS/CFT дуальность, ставящая в соответствие многомерную теорию гравитации в пространстве Анти де Ситтера (AdS) с $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга-Миллса в пределе бесконечной константы связи, живущей на границе AdS (см. работы [38, 39, 40] и ссылки в них). Важным преимуществом этого метода в случае рассматриваемой задачи является возможность проследить переход к гидродинамическому пределу [5, 41] в аномальной теории. С другой стороны, как будет показано в конце главы, для вывода киральных эффектов достаточно рассмотреть саму аномальную гидродинамику [2], что согласуется с результатами, полученными в эффективной теории поля.

Таким образом, данная глава посвящена изучению перехода к гидродинамическому описанию в аномальной теории поля и последующему анализу киральных эффектов в соответствующем пределе.

4.1 Гидродинамический предел в AdS/CFT моделях

Рассмотрим конформную теорию поля на границе AdS. Законы сохранения здесь могут быть записаны в отсутствии внешних полей как

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0 \quad , \quad \partial_\mu \langle J^\mu \rangle = 0. \tag{4.1}$$

Гидродинамический предел отвечает рассмотрению возбуждений над равновесным состоянием, предположение о существовании которого играет ключевую роль. Характерные импульсы и энергия предполагаются много меньше обратной длины свободного пробега. В этом пределе, средние оператора ТЭИ и тока могут быть переписаны через гидродинамические поля. Среди которых термодинамические потенциалы, в частности: плотность энергии ϵ, плотность заряда n (сконцентрируемся на случае одной киральности) и локальное поле 4-скорости u^μ ($u^2 = -1$). Заметим, что существует связь между термодинамическими величинами, называемая уравнением состояния, которое в значительной степени зависит от деталей теории. Тем не менее в голографической модели соответствующие функциональные зависимости одних термодинамических потенциалов от других могут быть легко вычислены.

В длинноволновом пределе переменные медленно меняются с пространственными координатами, и по этой причине оказывается возможным рассмотрение теории как ряда по малости градиентов. Такое разложение является неотъемлемой частью перехода к гидродинамическому пределу [5, 34, 41]. В нулевом (равновесном) порядке по этому разложению перечисленные выше гидродинамические величины полностью фиксируют форму сохраняющихся токов:

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{\epsilon}{3} \left(4u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu} \right) + \tau^{\mu\nu} \quad , \quad \langle J^\mu \rangle = n u^\mu + \nu^\mu, \tag{4.2}$$

где мы использовали конформность рассматриваемой задачи $T^\mu_\mu = 0$. Здесь также были введены $\tau^{\mu\nu}, \nu^\mu$ обозначающие все прочие вклады старших порядков по градиентам. Дальнейшее построение гидродинамической теории требует анализа всех доступных лоренцевых структур в каждом данном порядке малости, что позволяет перечислить все возможные поправки заданной малости к равновесным ТЭИ и току [5, 34, 41], оставляя в общем случае произвольными лишь коэффициентные функции при каждом отдельном вкладе.

Как уже упоминалось, нашей целью является рассмотрение гидродинамического предела сильновзаимодействующей теории, что отвечает вычислению всех кинетических коэффициентов, как функций параметров теории и термодинамических переменных. Пользуясь большой степенью универсальности дуальных моделей, ограничимся рассмотрением простейшего случая

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5}\int \left[\sqrt{-g}\left(R + 12 - \frac{1}{4}F^2\right) + \frac{\kappa}{3}\epsilon^{ABCDE}A_A F_{BC}F_{DE}\right] d^5x. \tag{4.3}$$

Это действие отвечает теории Эйнштейна-Максвелла с негативной космологической постоянной в 5-мерном пространстве. Здесь и далее латинские заглавные индексы пробегают (t, x, y, z, r), где последняя координата направлена в голографическое измерение. Выпишем уравнения движения, которые имеют вид

$$\begin{aligned} &R_{MN} + 4g_{MN} + \frac{1}{2}F_{MK}F^{KN} + \frac{1}{12}g_{MN}F^2 = 0 \\ &\partial_N\left(\sqrt{-g}F^{NM}\right) + \kappa\epsilon^{MNOPQ}F_{NO}F_{PQ} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Мы заинтересованы в поиске покоящейся среды с заданной плотностью и температурой, которая будет играть роль равновесного состояния. Было показано (см. [42]), что такому решению со стороны многомерной теории отвечает наличие заряженной чёрной дыры, удалённой по голографической координате от границы:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -r^2 f(r)dt^2 + r^2 d\vec{x}^2 + 2dtdr \\ A_r &= 0\ ,\ A_i = 0\ ,\ A_0 = \frac{\sqrt{3}Q}{r^2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $f(r) = 1 - \frac{M}{r^4} + \frac{Q^2}{r^6}$, M-масса чёрной дыры и Q её заряд. Возбуждение калибровочного поля связано с Q и в терминах дуальной модели отвечает наличию ненулевой киральной плотности на границе. Так химический потенциал имеет форму $\mu = \frac{\sqrt{3}Q}{r_+^2}$, в то время как температура может быть выражена в виде $T = \frac{r_+}{2\pi}\left(2 - \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 - \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^4\right)$, где $r_\pm$ - два действительных решения уравнения $f(r) = 0$. Мы также зафиксировали калибровку, обнулив компоненту вектор-потенциала вдоль 5го-голографического измерения.

Рассматриваемая дуальность приводит к равенству коэффициентов в ряде Тейлора по обратной голографической координате с квантовыми корреляторами операторов на границе [5, 38, 39, 40, 41, 42]. Так коэффициенты при $\frac{1}{r^2}$ в метрике, индуцированной на границе, и в калибровочном поле, соответствуют вакуумным средним от ТЭИ и тока в суперсимметричной теории Янга-Миллса на границе. Раскладывая метрику и калибровочное поле в ряд, получим

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}\rangle &= \frac{1}{16\pi G_5}\left(\lim_{r\to\infty} g_{\mu\nu}r^2\right)\\ \langle J^\mu\rangle &= -\frac{1}{8\pi G_5}\eta^{\mu\nu}\left(\lim_{r\to\infty} A_\nu r^2\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

и сравниваясь с гидродинамическими ТЭИ и током системы в равновесии ($u_\mu = (-1,0,0,0)$) легко видеть, что $n \sim Q$ и $\epsilon \sim M$ (для детального анализа термодинамических соотношений см. [5]). Заметим, что в случае присутствия электромагнитных полей на границе, мы ожидаем наличия аксиальной аномалии. Со стороны дуальной теории это отвечает наличию члена CS в действии (4.3), где κ фиксирует коэффициент в аномальной дивергенции тока.

Теперь используем стандартную процедуру разложения по градиентам для поиска гидродинамического решения, возбуждённого вокруг равновесного решения (4.5) полученного выше. Для анализа разложения оказывается удобным переписать метрику и калибровочное поле в терминах скалярных, векторных и тензорных величин по отношению к 4х-мерной группе Лоренца, тогда

$$\begin{aligned}ds^2 = r^2k(r)u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2h(r)P_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r^2\pi_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu +\\ +r^2 j_\sigma(r)\left(P^\sigma_\mu u_\nu + P^\sigma_\nu u_\mu\right)dx^\mu dx^\nu - 2S(r)u_\mu dx^\mu dr,\end{aligned} \tag{4.7}$$

и

$$A_r = 0 \quad , \quad A_\mu = P_\mu^\nu a_\nu(r) + c(r) u_\mu, \tag{4.8}$$

где введён проектор $P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, и предварительно был сделан локальный поворот решения (4.5) в общую систему отсчёта, движущуюся с постоянной скоростью u^μ.

Теперь будем рассматривать скорости и термодинамические параметры Q, M в (4.7) и (4.8), как медленно-меняющиеся функции координат на границе. Подставляя (4.7) и (4.8) в уравнения движения (4.4) и разлагая по малости градиентов, получим набор уравнений на неизвестные функции в метрике в первом порядке малости. Данная система уравнений была решена в [5, 41], и мы приведём лишь соответствующий ответ:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(r) = 0 \quad , \quad c^{(1)}(r) = 0 \quad , \quad k^{(1)} = \frac{2}{3r}\partial \cdot u \\ \pi^{(1)}(r) = F(r)\left(\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu - \frac{2}{3}P_{\mu\nu}\partial \cdot u\right) \\ a_\nu^{(1)}(r) = a^\kappa(r)\partial_\nu \frac{\mu}{T} - \frac{\sqrt{3}Q^2}{r^2 M}\omega_\nu \\ j_\nu^{(1)}(r) = -\frac{1}{r}u^\mu \partial_\mu u_\nu + j^\kappa(r)\partial_\nu \frac{\mu}{T} - \frac{Q^3}{r^6 M}\omega_\nu, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $F(r), a^\kappa(r), j^\kappa(r)$ известные функции, которые не играют значительной роли в нашем рассмотрении. Заметим, что вклады нулевого порядка фиксируются равновесным решением (4.5). Существует также дополнительная калибровочная степень свободы метрики, которая была зафиксирована условием $h(r) = 1$, что не влияет на окончательный физический результат. Произвол в определении системы покоя элемента жидкости был разрешён требованием отсутствия поправок к тензору энергии импульса в системе покоя - так называемая система покоя Ландау [5, 34].

Легко увидеть, что последовательное решение уравнений (4.4) позволяет вычислить соответствующие гидродинамические коэффициенты как функции выбранного набора термодинамических переменных (например (μ, T)) путём разложения соответствующих членов в (4.9) в ряд по $\frac{1}{r}$. Тем самым длинноволновое поведение сильновзаимодействующей теории было сведено к гидродинамике с соответствующим набором кинетических коэффициентов. С другой стороны, раскладывая поправку в векторное поле, заметим наличие вклада в ток пропорционального ω^μ и отвечающего КВЭ. Такой вклад традиционно не рассматривался в гидродинамике, так как был запрещён требованиями симметрии и неубывания тока энтропии [34]. Таким образом, при наивном рассмотрении существует формальное противоречие между обычной релятивистской гидродинамикой и низкоэнергетическим разложением теории на границе AdS.

Используя приведённое решение и переходя к пределу $r \to \infty$, можно восстановить конкретную форму поправки КВЭ к гидродинамическому току, и после простых преобразований получим

$$\delta J_\mu = C \left(\mu^2 - \frac{2}{3} \frac{n\mu^3}{\epsilon + P} \right) \omega_\mu, \tag{4.10}$$

где C - коэффициент перед аномалией в теории на границе ($C = -\frac{2}{\pi G_5}\kappa$) и в случае системы фермионов одной киральности $C = \pm\frac{1}{4\pi^2}$. Таким образом, лидирующий вклад по степеням химпотенциала действительно совпадает с полученным нами выше (при переходе к теории с правильной чётностью), как в эффективной теории поля (3.9), так и в теории фермионного газа (2.20), с точностью до температурного вклада в КВЭ в аксиальном токе (1.3). Более того, связь киральных эффектов с аномалией в предложенном подходе оказывается явной, а их независимость от прочего неаномального взаимодействия в системе, и в слабой и в сильной связи, наводит на мысль о их неперенормируемости.

Вклады старшего порядка по степеням химпотенциала в (4.10), как уже упоминалось выше, не могут быть зафиксированы в эффективной теории поля из-за зависимости от ИК регуляторов. В случае голографии гидродинамика ИК стабильна и её свойства фиксируют конкретное значение регулятора ϵ_{IR} и всех расходящихся многоточечных корреляторов. Заметим, что члены старших степеней по химпотенциалу в коэффициенте перед КВЭ зависят от выбора определения системы покоя элемента жидкости. В частности, при выборе системы покоя энтропии, где ток энтропии не имеет градиентных поправок, вклады старшего порядка по химпотенциалу обнуляются, и мы получаем ответ тождественный случаю невзаимодействующей системы с точностью до отсутствия температурного вклада в КВЭ.

4.2 Ток энтропии

Теперь, показав, что в режиме сильной связи низкоэнергетический предел теории может быть описан гидродинамически, рассмотрим метод получения аномальных транспортных коэффициентов в терминах одной лишь аномальной гидродинамики [2, 20, 33]. Как уже упоминалось, наличие КВЭ в гидродинамическом токе (4.10) находится в противоречии с классическим описанием релятивистской гидродинамики, что в частности проявляется в нарушении условия $\partial_\mu s^\mu \geq 0$. Чтобы разрешить данную проблему необходимо рассмотреть гидродинамику, включающую аномалии теории поля, и построить соответствующий ток энтропии.

Как уже упоминалось выше, в низкоэнергетическом пределе динамика неаномальной системы может быть описана с помощью одних лишь законов сохранения:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_\mu J^{a,\mu} = 0, \tag{4.11}$$

где индекс a пробегает все сохраняющиеся заряды. После перехода к гидродинамическому режиму сохраняющиеся токи могут быть записаны в терминах гидродинамических переменных

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} \quad , \quad J^{a,\mu} = n^a u^\mu + \nu^{a,\mu}, \tag{4.12}$$

где все члены в разложении по малости градиентов с порядком старше нулевого сгруппированы в $\tau_{\mu\nu}$, ν^a_μ. Отождествляя систему покоя элемента жидкости с системой покоя плотности энергии, наложим условие на поправки по градиентам вида $u_\mu \tau^{\mu\nu} = u_\mu \nu^{a,\mu} = 0$ - это та же система покоя Ландау, что была использована в параграфе 4.1. Используя уравнения непрерывности и термодинамические тождества

$$\begin{aligned} &\epsilon + P = \sum_a n^a \mu^a + Ts \\ &dP = \sum_a n^a d\mu^a + sdT, \end{aligned} \tag{4.13}$$

можно показать, что

$$T\partial_\nu(su^\nu) - \mu^a\partial_\mu\nu^{a,\mu} + u_\mu\partial_\nu\tau^{\mu\nu} = 0, \tag{4.14}$$

где предполагается суммирование по немым индексам, или

$$\partial_\mu\left(su^\mu - \frac{\mu^a}{T}\nu^{a,\mu}\right) = -\nu^{a,\mu}\partial_\mu\frac{\mu^a}{T} - \frac{1}{T}u_\mu\partial_\nu\tau^{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

Таким образом, стоящий под дивергенцией ток должен быть назван током энтропии в диссипирующей системе (наличие градиентных поправок), в то время как правая сторона равенства позволяет зафиксировать наиболее общие допустимые поправки первого порядка по градиентам [34].

В присутствии аномалии ситуация кардинально меняется, как было показано в [2, 20, 33]. Рассмотрим теорию с сохраняющейся чётностью, для чего достаточно ввести две независимых плотности для правых и левых частиц. Будем так же предполагать гидродинамику идеальной, избегая сложностей с диссипативными эффектами, которые обсудим в следующей главе. И, переходя к терминам векторных и аксиальных величин, заметим (вторые будем отмечать индексом “5”), что в данной теории на микроскопическом уровне имеется один несохраняющийся ток - аксиальный. При суммировании по зарядам индекс пробегает два значения, отвечающие векторному и аксиальному зарядам, и предполагается суммирование немых индексов. Тогда гидродинамические уравнения движения во внешних полях принимают форму

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= F_a^{\nu\mu}J_\mu^a \\
\partial_\mu J^\mu &= C\left(E^\mu B_{5,\mu} + E_5^\mu B_\mu\right) \\
\partial_\mu J_5^\mu &= C\left(E^\mu B_\mu + E_5^\mu B_{5,\mu}\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где введено электрическое поле в локальной системе покоя $E^\mu = F^{\mu\nu}u_\nu$ и C - коэффициент перед аномалией, определяющийся симметриями рассматриваемой теории. Фиктивные аксиальные электромагнитные поля введены здесь для достижения полноты уравнений, фиксирующих киральные кинетические коэффициенты, и всегда равны нулю в реальной системе, гарантируя сохранение электрического заряда. Им соответствует векторный потенциал $A_5^\mu = \frac{1}{2}\left(A_R^\mu - A_L^\mu\right)$, в то время как обычный электромагнитный вектор-потенциал имеет форму $A^\mu = \frac{1}{2}(A^\mu_R + A^\mu_L)$. Аномальное несохранение аксиального заряда, тем не менее, ставит под вопрос возможность ввести аксиальный химпотенциал. Пользуясь анализом аномальных симметрий из предыдущей главы, будем полагать сохраняющийся аксиальный заряд смещённым на топологический K^0, и, учитывая постоянство внешних полей, расширенный заряд допускает введение химпотенциала по отношению к нему.

Теперь воспроизведём стандартную процедуру построения тока энтропии [34] приведённую выше и получим

$$\begin{aligned}
\partial_\mu s^\mu &= -\nu^{a,\mu}\partial_\mu \frac{\mu^a}{T} + \frac{E^{a,\mu}}{T}\nu^a_\mu - \frac{C_{abc}}{T}\mu^a E^b_\mu B^{c,\mu} \\
s^\mu &= s u^\mu - \frac{\mu^a}{T}\nu^{a,\mu},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где C_{abc} соответствует коэффициентам аномалии в (4.16). В случае обычной идеальной жидкости $\nu^{a,\mu} = 0$, но тем не менее прямая проверка показывает, что дивергенция прежнего тока энтропии не положительно определена. В связи с этим, задача о построении тока энтропии должна быть решена обобщением на присутствие аномальных дивергенций тока. Будем искать решение, модифицируя токи теории и ток энтропии вкладами вдоль магнитного поля и поля завихрённости

$$\begin{aligned}
s^\mu &= s u^\mu - \frac{\mu^a}{T}\nu^{a,\mu} + D\omega^\mu + D^a_B B^{a,\mu} \\
\nu^{a,\mu} &= \xi^a \omega^\mu + \xi^{ab}_B B^{b,\mu},
\end{aligned}$$

где все коэффициенты являются функциями термодинамических переменных, которыми удобно выбрать $(P, \bar{\mu} = \frac{\mu}{T}, \bar{\mu}_5 = \frac{\mu_5}{T})$. Потребуем сокращения вкладов, привнесённых предложенной модификацией токов с аномалией в дивергенции тока энтропии (4.17). И, используя соотношения для идеальной жидкости

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \omega^\mu &= -\frac{2}{\epsilon + P}\omega^\mu\left(\partial_\mu P - n^a E^a_\mu\right) \\
\partial_\mu B^{a,\mu} &= -2\omega^\mu E^a_\mu - \frac{1}{\epsilon + P}B^{a\mu}\left(\partial_\mu P - n^a E^a_\mu\right),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

получим уравнение, связывающее коэффициентные функции. Учитывая независимость величин $B^{a,\mu}, \omega^\mu, E^a_\mu\omega^\mu, E^a_\mu B^{b,\mu}$, мы можем разделить полученное условие на систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_\mu D - 2\frac{\partial_\mu P}{w}D - \xi^a\partial_\mu\frac{\mu^a}{T}\right)\cdot\omega^\mu &= 0\\
\left(\partial_\mu D^a_B - \frac{\partial_\mu P}{w}D^a_B - \xi^{ba}_B\partial_\mu\frac{\mu^b}{T}\right)\cdot B^{b,\mu} &= 0\\
\left(\frac{2n^a D}{w} - 2D^a_B + \frac{\xi^a}{T}\right)\cdot(E^a_\mu\omega^\mu) &= 0\\
\left(\frac{n^a D^b_B}{w} + \frac{\xi^{ab}_B}{T} - \mu^c\frac{C_{cab}}{T}\right)\cdot(E^a_\mu B^{b,\mu}) &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

где для удобства была введена энтальпия единицы объёма среды $w = \epsilon + P$. Перепишем стандартное термодинамическое тождество для градиента давления, связывающее дифференциалы для разных наборов термодинамических переменных

$$
dT = \frac{T}{w}dP - \frac{nT^2}{w}d\bar{\mu} - \frac{n_5T^2}{w}d\bar{\mu}_5. \tag{4.20}
$$

Произвольность начальных условий, за которые примем градиенты термодинамических переменных, позволяет разделить некоторые уравнения системы (4.19) на большее число независимых условий:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{2D}{w} = 0 \quad &, \quad \frac{\partial D^a_B}{\partial p} - \frac{D^a_B}{w} = 0\\
\frac{\partial D}{\partial\bar{\mu}^a} = \xi^a \quad &, \quad \frac{\partial D^a_B}{\partial\bar{\mu}^b} = \xi^{ab}_B.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Используя структуру уравнений на D, D_B и связь (4.20) между градиентами, будем искать решение задачи в виде

$$
\begin{aligned}
D = T^2 d(\bar{\mu},\bar{\mu}_5) \quad &, \quad D^a_B = Td^a(\bar{\mu},\bar{\mu}_5)\\
\xi^a = \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}^a}(T^2 d(\bar{\mu},\bar{\mu}_5)) \quad &, \quad \xi^{ab}_B = \frac{\partial}{\partial\bar{\mu}^b}(Td^a_B(\bar{\mu},\bar{\mu}_5)).
\end{aligned}
$$

и, подставляя выбранную замену (4.22) в уравнения (4.19) для аномальных коэффициентов в токе энтропии, получим

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{3T}\left(\mu_5^3 + 3\mu^2\mu_5\right) + 2(b\mu + b_5\mu_5)T + aT^2 \\
D_B &= \frac{1}{T}\mu\mu_5 + bT
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

где b, b_5 и a - постоянные интегрирования. Как было показано в работе [43], требование симметрии при CPT преобразовании накладывает ограничение на возможные постоянные и, в частности, $a = b = 0$. Окончательно физические коэффициенты в токах принимают вид

$$
\begin{aligned}
\xi_5 &= C\left(\mu^2 + \mu_5^2 - \frac{2n_5}{3w}\left(\mu_5^3 + 3\mu_5\mu^2 + 6b_5\mu_5T^2\right)\right) + 2b_5T^2 \\
\xi &= 2C\left(\mu\mu_5 - \frac{n}{3w}\left(\mu_5^3 + 3\mu_5\mu^2\right)\right) \\
\xi_B &= C\left(\mu_5 - \frac{n_5}{w}\mu\mu_5\right) \\
\xi_{5,B} &= C\left(\mu - \frac{n}{w}\mu\mu_5\right),
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

где кинетические коэффициенты с индексом “5” относятся к аксиальному току.

Аксиальная аномалия во внешних электромагнитных полях отвечает выбору аномального коэффициента $C = \frac{1}{2\pi^2}$. Сравнивая определения гидродинамических токов (4.12) и поправок в них (4.18) легко видеть, что в лидирующем порядке по химпотенциалам аномальные кинетические коэффициенты тождественно совпадают с (1.3). Более того, результат полученный для КВЭ рассмотрением гидродинамического предела дуальной модели (4.10), полностью совпадает с (4.23), после перехода к P-инвариантной теории. Как отмечалось выше, старшие порядки связаны с неаномальными диаграммами и, в частности, зависят от выбора системы покоя элемента жидкости. Таким образом, все кинетические коэффициенты, полученные до сих пор в широком спектре режимов, от слабой до сильной связи, в слабых и сильных внешних полях, тождественно совпадают. Такое поведение и полная фиксация аномалией, наводят на мысль, что киральные эффекты не перенормируются взаимодействием между фермионами, что свойственно аномалии. Тем не менее более детальное изучение киральных эффектов показывает, что данное предположение неверно. Как будет показано в следующей главе, аномалия фиксирует кинетические коэффициенты киральных эффектов лишь со стороны УФ физики, в то время, как ИК свойства в значительной степени нуждаются в доопределении. После спецификации ИК параметров теории, киральные эффекты могут значительно отличаться от (1.3). Совпадение же предыдущих результатов соответствует сильным предположениям о ИК свойствах теории, так во всех рассматриваемых примерах система предполагалась бесконечной, а составляющие её частицы строго безмассовыми.

Отметим здесь, что чисто гидродинамическое рассмотрение, основанное на построении тока энтропии, допускает существование вклада $\delta J_5^\mu \sim T^2\omega^\mu$, который приведён в (1.3) и до сих пор не был воспроизведён в сильной связи, тем не менее аномалия не фиксирует его форму в гидродинамическом рассмотрении. В последнем параграфе этой главы мы обсудим свойства этого вклада и связанную с ним физику.

4.3 Вклад $T^2\omega^\mu$ в аксиальном токе

В теории линейного отклика было показано, что среди прочих киральных эффектов существует вклад в аксиальный ток вдоль локальной угловой скорости вращения среды (2.20), не исчезающий даже при отсутствии ненулевых химпотенциалов

$$J_5^\mu = \frac{T^2}{6}\omega^\mu. \tag{4.24}$$

Методы, использованные для рассмотрения системы в режиме сильной связи, такие как эффективная теория поля и дуальные модели, не воспроизвели данный эффект. Более того, в чисто гидродинамическом рассмотрении, вклад такого типа хотя и оказывается не запрещённым, тем не менее соответствующий коэффициент не фиксируется аномалией и остаётся свободной константой.

В работе [6] было аргументированно, что коэффициент перед температурным вкладов в КВЭ совпадает с коэффициентом перед гравитационной аксиальной аномалией - нарушением сохранения киральности в гравитационном поле. Так как коэффициент перед аномалией определяется симметриями теории и его ненулевое значение является необходимым и достаточным условием для существования аномалии, то рассматриваемый вклад может быть напрямую связан с гравитационной аномалией. С другой стороны, анализ эффективной теории поля не позволяет найти прямую связь между этими двумя явлениями, так как все вклады гравитационной аномалии начинаются в более старших порядках по градиентам.

Увидеть прямую связь между температурным вкладом в КВЭ и гравитационной аномалией удаётся при рассмотрении дуальных моделей. В этом случае учёт гравитационной аномалии отвечает включению соответствующего члена CS [44]:

$$S_{gCS} = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} d^5x \ \kappa_g \epsilon^{MNPQR} A_M R^A_{BNP} R^b_{AQR}. \tag{4.25}$$

Более того, прямое вычисление показывает, что при данной модификации задачи, среди аномальных поправок в гидродинамическом токе есть член, соответствующий температурному вкладу в КВЭ, и он пропорционален коэффициенту гравитационной аномалии κ_g. После восстановления пространственной чётности данный вклад переходит в соответствующий член в (1.3).

Тем не менее задача об изучении связи между гравитационной аномалией, температурным вкладом в КВЭ в эффективной теории поля и вычислениями по формуле Кубо остаётся открытой.

Глава 5

Инфракрасные свойства киральных эффектов

Выше было показано, что несмотря на разнообразные подходы, кинетические коэффициенты, отвечающие киральным эффектам, сохраняют единую форму, игнорируя силу внешних полей и взаимодействие между фермионами. Более того, как было показано в работах [10, 45, 46], требования для фиксации коэффициентов в данном конкретном виде сводятся к весьма общим предположениям о теории, таким как групповые свойства симметрий и ограничения на тождества Уорда. Тем не менее в большом числе работ [11, 13, 27, 28, 47, 48] было аргументировано, что отождествление киральных эффектов с аномалией, в частности с треугольным графиком Фейнмана в теории поля, оказывается в большой степени неверным. Так, при анализе треугольного графика в случае киральных эффектов, он оказывается в другом кинематическом режиме, который не защищён от радиационных поправок. В этой главе мы приступим к изучению (не)перенормируемости киральных эффектов и покажем, что аномалия фиксирует лишь УФ свойства аномальных проводимостей, в то время как ИК сектор остаётся недоопределённым. При изменении ИК параметров или порядка взятия пределов, аномальные кинетические коэффициенты могут претерпевать значительные трансформации.

5.1 Реализация киральных эффектов на дефектах

При изучении множества физических явлений на микроскопическом уровне оказывается, что непрерывное описание лишь следствие усреднения по большому числу дискретных вкладов. Такие примеры хорошо известны в квантовой теории поля, где встречаются задачи о нулевых модах, локализованных на доменных стенках и струнах - дефектах меньшей размерности. Существенная нелокальность данных объектов приводит к нетривиальному поведению теории в ИК секторе. В соответствии с предположением о перенормировке киральных эффектов ИК параметрами теории, мы рассмотрим частный пример реализации КВЭ на дефектах, что позволит подробнее изучить микроскопическую реализацию аномального транспорта в целом.

5.1.1 Формулировка задачи

Первым последовательным примером неуниверсальности аномальных кинетических коэффициентов может служить вычисление КВЭ в сверхтекучей жидкости [11]. Так как в присутствии конденсата вращение жидкости оказывается запрещённым, то реализация КВЭ тесно связана с появлением дефектов - вихрей в рассматриваемой теории. В такой постановке задачи ИК свойства системы фиксированы и значительно отличаются от ИК свойств систем рассмотренных ранее. Как будет показано, это приводит к значительным изменениям ответов для аномальных проводимостей. Так кинетический коэффициент в КВЭ оказывается вдвое больше [11] полученного ранее (1.3), что связано с реализацией аномального транспорта нулевыми модами локализованными на дефектах, которые и насыщают соответствующий ток.

Мы начнём с построения модели сверхтекучей киральной жидкости. Все предыдущие результаты были получены в предположении медленно меняющихся свойств киральной среды в пространство-времени. Такое предположение выглядит достаточно сильным, так как компонентами среды являются безмассовые фермионы, для которых числа заполнений не бывают велики, и не очевидно, как ввести гидродинамическое или классическое приближение для них. К данной проблеме можно подойти с другой стороны, начиная с микроскопической картины и последовательно выстраивая реализацию киральных эффектов на дефектах меньшей размерности. Такой подход может быть также мотивирован тесной связью между реализацией аномалии и дефектами в теории поля [32, 49, 50]. В частности, аномалия в $2n+2$ измерениях связана с индексом в $2n$-мерии и тем самым может рассматриваться в терминах фермионных нулевых мод на струнах и доменных стенках [50]. В этом приближении аномалия реализуется на вихревых дефектах, и результат для непрерывной теории получается усреднением по большому их числу. Как следствие, в сверхтекучей жидкости, где вращение реализуется только путём рождения дефектов, аномальный ток КМЭ должен переносится нулевыми модами, живущими на них.

Ключевым моментом является потенциальность сверхтекучей скорости, что наивно приводит к запрету вращения и выключению КВЭ. Тем не менее хорошо известно, что начиная с некоторой угловой скорости, энергетически выгоднее конфигурация с сверхтекучим потенциалом, сингулярным вдоль некоторой линии, что эквивалентно появлению дефекта в конденсате. Вращение не запрещено на этих дефектах, и угловой момент таким образом может быть передан жидкости. Хотя угловая скорость равна нулю всюду кроме дефекта, после суммирования по большому их числу, жидкость (и соответствующее поле скоростей) может рассматриваться как вращающаяся [34]. Этот случай может в частности служить примером восстановления непрерывного предела после усреднения по большому числу дефектов.

Микроскопическая картина вычисления киральных эффектов сводится к вычислению вкладов нулевых мод, живущих на рассматриваемом дефекте. Данный метод впервые применялся в случае КМЭ в аксиальном токе (см. [29]), который реализовывался на трубке потока магнитного поля, и полученный результат воспроизвёл соответствующий член в (1.3). Следуя предложенной процедуре, рассмотрим плоскость, пронизанную магнитным полем в некоторой области и, пользуясь теоремой об индексе, свяжем число нулевых мод с потоком магнитного поля

$$N_{0,perp} \sim \int d^2xB. \tag{5.1}$$

Нулевые моды существуют при любом значении продольной компоненты импульса вдоль магнитного поля. Суммируя по всем допустимым импульсам, которые через энергию ограничены химпотенциалом (случай нулевой температуры), получим число нулевых мод отвечающих КМЭ в аксиальном токе

$$N_0 \sim \mu B. \tag{5.2}$$

Переходя к случаю КВЭ, мы можем полностью повторить процедуру счёта нулевых мод, предложенную выше. Электромагнитное поле более не присутствует в системе и должно быть заменено на локальную скорость среды $A_\mu \to \mu u_\mu$ в соответствии с рассмотрением в главе 3. И снова, суммируя по допустимым импульсам, получим ответ пропорциональный μ^2, где вторая степень приходит из подстановки для векторного поля в соответствии с ожиданиями для КВЭ.

Аномальные кинетические коэффициенты, полученные через счёт нулевых мод, можно также воспроизвести в терминах эффективной теории поля. И в обоих рассматриваемых случаях эффекты отвечают треугольному графику, квадратичному по μu_μ в случае КВЭ и линейному по μu_μ и A_μ в случае КМЭ. Как было показано выше, результаты эффективной теории поля тождественно совпадают с общепринятым ответом для обоих эффектов.

Прямое вычисление КВЭ в терминах нулевых мод тем не менее отличается множителем 2 от соответствующего члена в (1.3). Это несоответствие объясняется тем, что нулевые моды не находятся в термодинамическом равновесии с системой и распространяются со скоростью света, вместо 4-скорости элемента жидкости u_μ. В случае же магнитного поля на фоне заряженной сверхтекучей жидкости результат в терминах нулевых мод будет таким же, как и в случае КВЭ. С другой стороны, теоретико-полевые ответы для двух эффектов отличаются на симметрический фактор два при замене калибровочного поля полем скоростей.

5.1.2 Сверхтекучесть пионной среды

В качестве реалистичной модели рассмотрим механизм появления сверхтекучести в пионной среде при ненулевом изоспиновом химпотенциале и нулевой температуре [51]. В этом случае среда, состоящая из безмассовых пионов, описывается киральным лагранжианом

$$L = \frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\left[D^\mu U \left(D_\mu U\right)^\dagger\right], \tag{5.3}$$

где $D_0 U = \partial_0 U - \frac{\mu_I}{2}\left[\tau_3, U\right]$, $D_i U = \partial_i U$ и параметр μ_I обозначает изоспиновый химпотенциал. Проанализируем симметрии рассматриваемой теории. Так киральная симметрия спонтанно нарушена до $\mathrm{SU}(2)_{R+L}$ и, более того, при ненулевом μ_I легко видеть, что присутствует явное нарушение до

$\mathrm{U}(1)_{L+R}$. И окончательное спонтанное нарушение группы $\mathrm{U}(1)_{L+R}$ приводит систему к сверхтекучему состоянию.

Рассмотрим процесс нарушения симметрий более детально - потенциальная энергия в (5.3) равна

$$V_{\text{eff}}(U) = \frac{f_\pi^2 \mu_I^2}{8} \mathrm{Tr}\left[\tau_3 U \tau_3 U - 1\right]. \tag{5.4}$$

Искать минимум потенциала оказывается удобным в следующей параметризации состояния системы

$$U = \cos\alpha + i\left(\tau_1 \cos\psi + \tau_2 \sin\phi\right)\sin\alpha, \tag{5.5}$$

где не теряя общности были отброшены степени свободы, заведомо увеличивающие энергию. Подставляя выбранную параметризацию в энергию получим

$$V_{\text{eff}}(\alpha) = \frac{f_\pi^2 \mu_I^2}{4}\left(\cos 2\alpha - 1\right). \tag{5.6}$$

Легко увидеть, что минимуму $V_{\text{eff}}(\alpha)$ соответствует условие $\cos\alpha = 0$. В зависимости от знака μ_I, квадрат массы $\pi^\pm$ становится негативным, что сигнализирует о конденсации соответствующего пионного поля. Вакуумное состояние в этих терминах описывается как $U = i\left(\tau_1 \cos\psi + \tau_2 \sin\phi\right)$, в то время как обычный вакуум имел вид $U = 1$. В теории также появляется новый параметр порядка $\langle \bar{u}\gamma_5 d\rangle + h.c. = 2\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{vac}}$, и следовательно рассматриваемая система представляет из себя заряженную сверхтекучую жидкость. Вырождение по углу ϕ позволяет отождествить его с гоулдстоновским полем и указывает на то, что симметрия $\mathrm{U}(1)_{L+R}$ спонтанно нарушена. Так как в ТЭИ теории фундаментальных фермионов ϕ входит в комбинации $\partial_0\phi + \mu$, удобно пользоваться смещённым полем $\phi + \mu t \to \phi$, что мы и будем делать дальше. В совокупности теория содержит две массивные и одну безмассовую моды.

Изучая вихри, будем опираться на гидродинамическое приближение, которое подробно изучено в случае заряженной сверхтекучей жидкости в [52]. Голдстоуновское поле должно быть добавлено к термодинамическим потенциалам, так как в системе есть спонтанно нарушенная симметрия. Низшее состояние описывается требованием $\partial_0\phi = \mu$ (уравнение Джозефсона), которое приводит к ненулевой плотности заряда в равновесии. Сверхтекучие распределения скоростей, как уже упоминалось, потенциальны и могут быть представлены как $u^s_\mu = \partial_\mu \phi / |\partial \phi|$, или $v^s_i = \partial_i \phi/\mu$ - в нерелятивистском пределе. Угловая скорость вращения среды пропорциональна ротору поля скоростей, который в сверхтекучем случае обращается нулём $\mathrm{rot}\ v^s = 0$, что наивно приводит к невозможности вращения сверхтекучей среды.

Однако известно, что сверхтекучая жидкость (при $T = 0$, что отвечает отсутствию нормальной компоненты), помещённая в вращающийся контейнер, переходит в энергетически более выгодное состояние, содержащее вихрь для угловых скоростей $\Omega > \Omega_c$. Достичь этого можно в том случае, если сверхтекучий потенциал, заданный полем Голдстоуна, многозначен в плоскости перпендикулярной оси вращения. В такой ситуации поле ϕ неопределенно на протяжённом дефекте, называемом вихревой линией, и в простейшем случае $\phi = \mu t + n \cdot \varphi$ в пределе бесконечно тонкого ядра вихря [53], где φ - угловая координата в плоскости перпендикулярной вихрю. Такое описание допустимо в пределе $r \gg a$, где a размер ядра вихря, а критическая скорость может быть оценена как $\Omega_c = \frac{1}{\mu R^2} \log \frac{R}{a}$ и R - радиус цилиндрического сосуда, содержащего жидкость [53]. Для более высоких скоростей увеличение углового момента происходит дискретными переходами к состояниям с большим числом вихрей с $n = 1$, которые энергетически более выгодны, чем вихри с $n > 1$. Вместе с взаимным отталкиванием вихрей это приводит к их равномерному распределению, которое создаёт профиль скоростей, стремящийся к случаю однородного вращения с ростом угловой скорости. Такая имитация макроскопически однородной среды позволяет сравнивать КВЭ, вычисленный микроскопически, с теоретико-полевым результатом.

5.1.3 Эффективная теория поля и сверхтекучесть

Воспроизведём вкратце вывод КВЭ в терминах эффективной теории поля (см глава (3)), предполагая скорость сверхтекучей. Рассмотрим действие (3.6) и положим $\mu_5 = 0$, в такой постановке задачи мы ожидаем найти только два киральных эффекта - КВЭ и КМЭ в аксиальном токе:

$$j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi + \frac{1}{2\pi^2}\mu^2\omega_\mu + \frac{1}{2\pi^2}\mu B_\mu, \tag{5.7}$$

заметим, что из-за разницы определений между $\omega_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u^\nu\partial^\alpha u^\beta$ и $B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u^\nu\partial^\alpha A^\beta$, отношение факторов при КМЭ и КВЭ равно двум. Данное отличие является следствием идентичности вершин треугольной диаграммы в случае КВЭ (обе вершины соответствуют μu_μ) и соответствующего симметрического множителя $\frac{1}{2}$, в то время, как для КМЭ вершины диаграммы отличны, и фактор $\frac{1}{2}$ не появляется.

Предполагая сверхтекучий потенциал гидродинамической функцией, мы можем ограничиться рассмотрением малых сверхтекучих скоростей, которые являются его градиентами. Подставляя $u_0 \to \partial_0\phi = \mu$, $\mu u_i \to \partial_i\phi = \mu v_i^s$ в (5.7) получим

$$j_5^\mu = \frac{1}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\phi\partial_\alpha\partial_\beta\phi. \tag{5.8}$$

Для любого регулярного потенциала ϕ данное выражение обращается в ноль. Тем не менее рассмотрим ситуацию, предполагая наличие сверхтекучего вихря, направленного вдоль одной из осей координат (положим вдоль оси z), около которого $\phi = \mu t + \varphi$ и учитывая, что $[\partial_x, \partial_y] = 2\pi\delta(x)\delta(y)$, получим

$$j_5^z = \frac{1}{2\pi}\mu\delta(x)\delta(y) \tag{5.9}$$

или, интегрируя по всей плоскости,

$$J_5^z = \frac{\mu}{2\pi}n, \tag{5.10}$$

где n-суммарное квантовое число всех вихрей, пронизывающих плоскость. Заметим, что кажущееся противоречие в степенях μ между (5.9) и (5.7), тривиально разрешается за счёт линейной зависимости n (для одного простейшего вихря $n = 1$) от μ. Чтобы увидеть соответствие явно, необходимо произвести усреднение по большому числу дефектов, что соответствует переходу к непрерывному пределу:

$$n = \frac{1}{2\pi}\int dx_i\ \partial_i\phi = \frac{\mu}{2\pi}\int dx_i\ v_i^s = \frac{\mu}{\pi}\int d^2x\ \omega_3, \tag{5.11}$$

где учитывается, что $\mathrm{rot}\ v^s = 2\omega$. Как легко убедиться, после усреднения по большому числу дефектов средняя плотность тока тождественно совпадает с непрерывным результатом (5.7).

5.1.4 Нулевые моды

Перейдём к вычислению микроскопического тока нулевых мод. Этот параграф основан на результатах работы [11], где ток КВЭ был впервые получен для сверхтекучей жидкости. Данное рассмотрение также перекликается с вычислениями тока на нулевых модах в случае КМЭ [29].

Запишем лагранжиан взаимодействия системы фермионов с полем Голдстона:

$$L = \overline{\psi} i(\partial_\mu + i\partial_\mu \phi)\gamma^\mu \psi, \tag{5.12}$$

в полной аналогии с вычислениями в эффективной теории поля (см. (3.6)), $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\phi \ \to \ \mu u^\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$. Заметим также, что вблизи сверхтекучего вихря независимо от деталей конфигурации $\int dx_i \ \partial_i\phi = 2\pi n$.

Гамильтониан предложенной теории может быть легко получен из (5.12), запишем

$$H = -i(\partial_i - i\partial_i\phi)\gamma^0\gamma^i. \tag{5.13}$$

Соответствующие уравнения движения могут быть разделены для разных киральностей

$$\begin{aligned} -H_R\psi_L &= E\psi_L \\ H_R\psi_R &= E\psi_R, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где $H_R = (-i\partial_i + \partial_i\phi)\sigma_i$. Легко видеть, что функция ψ_R, удовлетворяющая $H_R\psi_R = \epsilon\psi_R$, генерирует два решения уравнений (5.14) с энергиями $E = \epsilon$ и $E = -\epsilon$ соответственно

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad , \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдём к импульсному представлению в направлении угловой скорости вращения (ось z), предполагая ось z периодической с длиной L (предел $L \to \infty$ удобно наложить после). Для любой проекции импульса p_3 имеем

$$
\begin{aligned}
H_R &= p_3\sigma^3 + H_\perp \\
H_\perp &= (-i\partial_a - \partial_a\phi)\sigma^a, \ \ a = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

и отметим, что $\{\sigma^3, H_\perp\} = 0$. Таким образом, для правильно нормированной собственной функции $|\lambda\rangle$ оператора $H_\perp$ с собственным значением λ, $\sigma_3|\lambda\rangle$ также является собственной функцией с собственным значением $-\lambda$. Следовательно все собственные функции $H_\perp$ с ненулевыми собственными значениями могут быть пронумерованы как $|\lambda\rangle$ и $|-\lambda\rangle = \sigma_3|\lambda\rangle$, где $\lambda > 0$. Кроме того, все нулевые моды $H_\perp$ могут быть классифицированы при помощи σ_3.

Заметим, что собственные функции H_R могут быть выражены через собственные функции $H_\perp$. Так как $[H_R, {H_\perp}^2] = 0$, H_R лишь смешивает $|\lambda\rangle$ и $|-\lambda\rangle$, следовательно для $\lambda > 0$

$$
\psi_R = c_1|\lambda\rangle + c_2\sigma_3|\lambda\rangle, \tag{5.16}
$$

где c_1, c_2 могут быть определены из условия

$$
\begin{pmatrix} \lambda & p_3 \\ p_3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{5.17}
$$

Разрешая систему уравнений (5.17) относительно c_1, c_2 получим условие $\epsilon = \pm\sqrt{\lambda^2 + p_3^2}$ и

$$
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_\pm = (4(\lambda^2 + p_3^2))^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \pm sgn(p_3)((\lambda^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}} \pm \lambda)^{\frac{1}{2}} \\ ((\lambda^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}} \mp \lambda)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{5.18}
$$

Любое собственное состояние $H_\perp$ с положительным собственным значением генерирует два собственных состояния H_R, в то время как нулевые моды $H_\perp$ отвечают собственным состояниям H_R с энергиями

$$
\epsilon = p_3\sigma^3. \tag{5.19}
$$

Мы показали, что нулевые моды $H_\perp$ представляют из себя бесщелевые моды H, движущиеся вверх или вниз по дефекту (в зависимости от знака

σ_3 и киральности). Пусть $N_\pm$ - число нулевых мод оператора $H_\perp$ с $\sigma_3 = \pm 1$. Рассмотрим одну из таких мод $|\lambda\rangle = (u,\ v)$, где u и v с-числовые функции, получим

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}v = 0 \quad , \quad \mathcal{D}^\dagger u = 0\\ &\mathcal{D} = -i\partial_1 - \partial_2 - (\partial_1\phi - i\partial_2\phi).\end{aligned} \tag{5.20}$$

Следовательно $N_+ = dim(ker(\mathcal{D}^\dagger))$, $N_- = dim(ker(\mathcal{D}))$ и для разницы числа мод двигающихся вдоль или против вихря имеем

$$N = Index(H_\perp) = N_+ - N_- = dim(ker(\mathcal{D}^\dagger)) - dim(ker(\mathcal{D})). \tag{5.21}$$

Заметим, что $H_\perp$ эллиптический оператор, чьи индексы были досконально изучены [54, 55], и в нашем случае

$$N = \frac{1}{2\pi}\int dx_i\ \partial_i\phi = n, \tag{5.22}$$

где вследствие сверхтекучести среды индекс оказывается целым числом по определению.

Компонента аксиального тока вдоль угловой скорости вращения при конечном μ задаётся как

$$j_5^3(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^3\gamma^5\psi(x) = \psi_L^\dagger\sigma^3\psi_L(x) + \psi_R^\dagger\sigma^3\psi_R(x) \tag{5.23}$$

и, вычисляя $J_5^3 = \int d^2x\langle j_5^3(x)\rangle$, получим:

$$\langle j_5^3(x)\rangle = \sum_\epsilon (n(-\epsilon) + n(\epsilon)))\psi_{R\epsilon}^\dagger(x)\sigma^3\psi_{R\epsilon}(x), \tag{5.24}$$

где $n(E) = sgn(E)\theta\Big((\mu - E)sgn(E)\Big)$ представляет собой распределение Ферми при нулевой температуре, а $\psi_{R\epsilon}$ собственная функция H_R с собственным значением ϵ. Подставляя явно $\psi_{R\epsilon}$ через собственные функции $H_\perp$ получим:

$$\begin{aligned}\langle J^3_5\rangle &= \frac{1}{L}\sum_{p_3}\sum_{\lambda>0}\sum_{s=\pm}(n(-(\lambda^2+p_3^2)^{\frac{1}{2}})+n((\lambda^2+p_3^2)^{\frac{1}{2}}))\langle\psi^s_R(\lambda,p_3)|\sigma^3|\psi^s_R(\lambda,p_3)\rangle + \\ &+ \frac{1}{L}\sum_{p_3}\sum_{\lambda=0}(n(-p_3)+n(p_3))\langle\lambda|\sigma^3|\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{5.25}$$

где $\lambda > 0$ нумерует собственные функции $H_\perp$, генерирующие собственные функции H_R, $\psi^\pm_R(\lambda, p_3)$ с импульсом p_3 и собственными значениями $\epsilon_\pm = \pm\sqrt{\lambda^2+p_3^2}$, а $\lambda = 0$ нумерует нулевые моды $H_\perp$. Можно показать, что $\langle\psi^s_R(\lambda,p_3)|\sigma^3|\psi^s_R(\lambda,p_3)\rangle = sp_3(\lambda^2+p_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ и, так как результат нечётен и по s и по p_3, то сумма по ненулевым модам обращается в ноль. Для нулевых мод $\langle\lambda|\sigma^3|\lambda\rangle = \sigma^3$, и соответственно:

$$\begin{aligned} J^3_5 &= (N_+ - N_-)\frac{1}{L}\sum_{p_3}(n(-p_3)+n(p_3)) \\ &= n\int\frac{dp_3}{2\pi}(n(-p_3)+n(p_3)) = \frac{\mu}{\pi}n. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Заметим, что полученный ответ по структуре подобен (5.10) с точностью до фактора два, как уже упоминалось прежде.

Таким образом, мы показали, что макроскопическое вычисление в эффективной теории поля и микроскопический подсчёт тока через нулевые моды приводят к разным ответам. Тем не менее совпадение результатов для КМЭ в аксиальном токе [29] в обоих подходах указывает на то, что несовпадение ответов для КВЭ - скорее следствие различных физических подходов, нежели отличия в схеме регуляризации. Это позволяет самосогласованно сравнить макроскопическое и микроскопическое вычисления, проделанные выше. Анализ двух ответов, полученных разными путями, приводит к заключению, что причина несовпадения кроется в предположении существования термализованной среды, которое было сделано при рассмотрении эффективной теории поля. Другими словами, существование жидкости, описываемой единым полем скоростей u_μ, является необходимым условием для воспроизведения (1.3). В то время, как вычисление, основанное на счёте нулевых мод, по своей сути содержит две компоненты, где первая отвечает жидкости самой по себе со скоростью v^s, а вторая - току нулевых мод вдоль дефекта, которые всегда движутся со скоростью света. Отсутствие различий в случае КМЭ является следствием отсутствия идентичных вершин в треугольной диаграмме, из-за чего ответ в (1.3) не подвержен изменению, несмотря на различные физические ситуации.

Так как в случае сверхтекучести реализация на дефектах единственно возможная, то данный пример показывает частную неуниверсальность аномальных кинетических коэффициентов (1.3), которые до этого момента сохраняли свою форму, несмотря на широкий спектр предположений. Таким образом, совпадение аномальных проводимостей в разных режимах прежде и модификация результата в данном примере объясняются тем, что аномалия как таковая фиксирует свойства киральных эффектов только в УФ секторе теории, в то время как сам вклад треугольного графика в аномальные токи может быть подвержен перенормировкам ИК параметрами. Подобная картина наблюдается и в случае аксиальной аномалии теории поля, где аксиальный ток чувствителен к ИК деталям описания [31, 48], в то время как его дивергенция строго фиксирована за счёт УФ сектора.

5.2 Частичная сумма ряда теории возмущений

Рассмотрим ещё один пример ИК перенормировки киральных эффектов и генерацию соответствующего масштаба. Как было показано в работе [56] существует тесная связь между равновесным пределом в формуле Кубо для киральных эффектов и вычислением топологической массы фотона m_γ в 2+1-мерной евклидовой теории поля. Так как m_γ оказывается неперенормируемой [57, 58] и, более того, связанной с топологическим взаимодействием [59], продолжение аналогии выглядит весьма перспективно. Основным шагом на этом пути является включение динамического поля фотонов, что может значительно поменять конечный результат, так как ИК сектор, не защищённый аномалией, крайне чувствителен к наличию динамической безмассовой частицы. Вычисление аномальной проводимости в присутствии динамических фотонов проделано в работе [13], и мы будем следовать логике представленной в ней.

Чувствительность ИК сектора по отношению к самодействию электромагнитных полей в присутствии тока $\vec{J} = \sigma_B \vec{B}$ широко обсуждалась прежде, в частности в ключе генерации космологических магнитных полей (см. [60]) и физики α-динамо (см. [61]). Так простейшее рассмотрение статического предела уравнений Максвелла в киральной среде (см. [7])

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \sigma\vec{B} \tag{5.27}$$

показывает (после вторичного применения rot), что в импульсном пространстве существует неустойчивость по отношению к генерации неоднородных полей

$$\left(\vec{k}^2 - \sigma^2\right)\vec{B} = 0, \tag{5.28}$$

что является хорошо известным свойством уравнения Бертлами $\mathrm{rot}\vec{B} = \lambda\vec{B}$. Более того, в динамическом случае было показано существование нестабильного решения, отвечающего растущему со временем магнитному полю в среде с ненулевой асимметрией [12]. Присутствие нестабильности в теории требует рассмотрения ИК свойств системы и их модификации, что приводит к перенормировке киральных эффектов (1.3).

5.2.1 Динамические фотоны

Рассмотрим КЭД в присутствии аксиального химпотенциала μ_5 и соответствующее действие:

$$S = \int dt d^3x \left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu + \mu_5\gamma^0\gamma^5\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \tag{5.29}$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Вычисление ИК корреляторов в 4х-мерной теории более затруднительно, и по этой причине мы ограничимся рассмотрением статического предела, отвечающего $\omega = 0$, что приводит нас к эффективно 3х-мерной теории, которую возможно рассматривать евклидовой. В частности, при $\omega = 0$ двухточечные функции в минковском и евклидовом пространствах совпадают.

Форма точного фотонного пропагатора может быть зафиксирована требованием калибровочной инвариантности и инвариантности по отношению к вращениям:

$$D_{ij}(0,\vec{k}) = D_S(k)\left(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j\right) + D_A(k)i\epsilon_{ijl}\hat{k}^l + a\frac{\hat{k}_i\hat{k}_j}{k^2}, \tag{5.30}$$

где $\hat{k}$ обозначает еденичный вектор вдоль импульса, а последний член в выражении (5.30) фиксирует калибровку. Для обратного пропагатора имеем

$$D_{ij}^{-1}(0,\vec{k}) = P_S(k)(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j) + P_A(k)i\epsilon_{ijl}\hat{k}^l + \frac{k^2}{a}\hat{k}_i\hat{k}_j. \tag{5.31}$$

и заметим, что

$$D_S = \frac{P_S}{P_S^2 - P_A^2} \tag{5.32}$$

$$D_A = \frac{P_A}{P_A^2 - P_S^2}. \tag{5.33}$$

Используя уравнение Дайсона-Швингера, мы можем записать связь между древесным и точным обратными пропагаторами и одночастично-неприводимыми диаграммы (1PI) в собственной энергии фотона,

$$D_{ij}^{-1} = D_{(0)ij}^{-1} - P_{ij} \ . \tag{5.34}$$

Изучим ИК поведение точного коррелятора двух электромагнитных токов, который совпадает с собственной энергией фотона в однoднопетлевом пределе $P_{ij} = \Pi_{ij}$ и соответственно

$$P_A = -\sigma k + O(k^2), \tag{5.35}$$

что следует из формы коррелятора двух токов, который был получен в (2.9), и для симметрической части

$$P_S = O(k^2), \tag{5.36}$$

как следствие лоренц-инвариантности и калибровочной симметрии.

Удерживая только линейные члены по P_A, P_S для пропагатора (5.30) получим:

$$D_{ij}(0,k_i) = \frac{1}{k^2-\sigma^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) - \frac{i\sigma\epsilon_{ijl}k^l}{k^2(k^2-\sigma^2)} + a\frac{k_i k_j}{k^4}, \tag{5.37}$$

что отвечает суммированию пузырьковых диаграмм. В этом же приближении, антисимметричная часть коррелятора двух токов, представленная частичной суммой ряда теории возмущений, принимает вид

$$\Pi^A_{ij}(k_i) = \frac{ik^2\sigma\epsilon_{ijl}k_l}{k^2-\sigma^2} \tag{5.38}$$

и соответственно исчезает в строгом ИК пределе

$$\lim_{k\to 0} \Pi^A_{ij}\big|_{\omega=0} = 0. \tag{5.39}$$

Данный результат эквивалентен перенормировке КМЭ в ноль, что демонстрирует значительную зависимость киральных эффектов от ИК свойств теории. Так в системе заметно меньшего размера, чем масштаб генерации нестабильности и соответственно неоднородности поля $l \sim \frac{1}{\alpha\sigma}$ (где мы восстановили электромагнитную константу связи α), существует конкретное ИК обрезание, и в переделе относительно небольших размеров ток сохраняет универсальную форму (1.3). В то время как для систем, сравнимых с масштабом нестабильности, аномальный кинетический коэффициент в КМЭ оказывается зависимым от ИК регуляризации. Заметим, что несмотря на то, что мы рассмотрели лишь частичную сумму, оставшиеся неучтёнными вклады имеют неаномальную природу, и восстановление универсального ответа в независимости от ИК свойств системы выглядит сомнительным. Также необходимо отметить, что полюс при $k = \sigma$ является проявлением нестабильности теории, которая уже упоминалась выше.

5.2.2 Теорема Колмана-Хилла

Перейдём теперь к изучению возможности выделения ИК точного вклада в ряде теории возмущений [13]. Из выражения (5.37) легко видеть, что фотон в выбранном нами статическом пределе обладает мнимой топологической массой $m_\gamma = i\sigma$. Генерация тахионной массы является признаком нестабильности, которую можно отождествить с нестабильностью, полученной в работе [12]. Заметим также появление дополнительного ИК полюса в (5.37) при $k^2 = 0$, который будет важен для дальнейшего изложения.

Учёт старших порядков в (5.35) и (5.36) и всех старших диаграмм по степеням взаимодействия приводит к модификации пропагатора (5.37). Тем не менее лидирующий вклад по малости k в антисимметричную часть коррелятора двух токов, оказывается неперенормируемым. Пользуясь теоремой Колмана-Хилла [56, 57], покажем, что разложение (5.35) остаётся верным во всех порядках порядках теории возмущений. Для этого, рассмотрим n-фотонную эффективную вершину

$$\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_{(1)} \dots, k_{(n)}). \tag{5.40}$$

Полный набор таких вершин полностью фиксирует точный пропагатор, так как любой член в разложении пропагатора может быть разрезан по внутренним фотонным линиям на набор эффективных вершин $\Gamma' s$. Обратная же процедура потребует умножения вершин на нужное число соответствующих фотонных пропагаторов, при необходимости с последующим интегрированием в петлях.

Так как рассматривается статический предел, то все входящие моменты оказываются Евклидовыми по построению, в то время как внутренние могут быть повёрнуты с помощью поворота Вика. Работая в евклидовом пространстве мы можем также наложить требование аналитичности на $\Gamma^{(n)}$ как функции аргументов. В качестве ИК регулятора, позволяющего избежать инфракрасных расходимостей в пределе безмассовых фермионов, может использоваться μ_5. Следуя логике доказательства в [57] заключим, что

$$\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}(k_{(1)}, \dots, k_{(n)}) = O(k_{(1)} \dots k_{(n)}), \quad n > 2. \tag{5.41}$$

Из полученного ИК поведения вершины следует, что при сворачивании внутренних линий между собой через фотонные пропагаторы на каждый фактор $k_{(i)}^{-2}$ пропагатора приходится два множителя $k_{(i)}$ из эффективных вершин, с которыми пропагатор оказывается связан. Таким образом, новые ИК расходимости не появляются в рассмотрении.

Также легко видеть, что для всех диаграмм включающих $\Gamma^{(n)}$ с $n > 2$ лидирующий ИК вклад в P_{ij} оказывается порядка $O(k^2)$. Так если внешние линии, несущие импульс k и $-k$, связаны с одной фермионной петлёй, то разложение диаграммы по степеням импульса начинается с $O(k^2)$, как следствие (5.41). В противном случае, фактор $O(k)$ привносится каждой из внешних линий. Данный факт не нарушается также внутренними фотонными пропагаторами, вследствие сокращения ИК расходимостей, которое обсуждалось выше. По определению P_{ij} содержит только $1PI$ диаграммы, в то время как эффективные вершины с $n = 2$ могут быть отсечены по одной из фотонных линий, что означает приводимость диаграммы, и нашего рассмотрения вершин с $n > 2$ достаточно. Следовательно, все неизолированные $\Gamma^{(2)}$, переносящие импульсы $k_{(i)}$ появляются только как перенормировки древесного пропагатора, соединяясь с другими $\Gamma^{(n)}, n > 2$. Суммируя все диаграммы, легко видеть, что худшая ИК сингулярность в рассматриваемой теории имеет форму $k_{(i)}^{-2}$ и всегда сокращается соответствующими вкладами $k_{(i)}$, приходящими из эффективных вершин.

Таким образом, мы доказали, что $\Pi_A = \sigma k + O(k^2)$. Так как все старшие поправки приносят вклады, начиная с $O(k^2)$ по малости входящего импульса. В то время как для симметрической части имеем $\Pi_S = O(k^2)$. Данный результат является обобщением известного факта о неперенормируемости топологической массы фотона в $2+1$-мерии [57]. Подставляя полученное разложение в (5.33), имеем $D_A = (\sigma k)^{-1} + O(1)$. И следовательно в рассматриваемой теории существует дополнительный ИК полюс, сигнализирующий о присутствии топологического взаимодействия [59].

5.2.3 Дальнодействие

Как было показано в работе [59], существование ИК полюса в пропагаторе $2+1$-мерной электродинамики приводит к появлению топологического взаимодействия. Легко видеть наличие подобного полюса в статическом пропагаторе $\delta D_{ij}(\omega = 0, \vec{k}) \to -\frac{i\epsilon_{ijl}k^l}{\sigma k^2}$, $\vec{k} \to 0$, что соответственно приводит к новому члену взаимодействия между двумя внешними источниками. И топологическая природа нового вклада проявляется в пропорциональности числу зацеплений токов. Чтобы показать это рассмотрим поведение поля, созданного внешним источником $J_i(\omega = 0, \vec{k})$ на большом расстоянии от него, предполагая источник статическим и трёхмерным ($J_0 = 0$). Используя предел пропагатора, приведённый выше, получим

$$A_i(\vec{k}) = -i\frac{\epsilon_{ijk}k^k}{\sigma k^2}J_j(\vec{k}) + ... \tag{5.42}$$

и следовательно потенциал взаимодействия двух токов, находящихся на большом расстоянии друг от друга, включает в себя вклад следующей формы:

$$\delta V = \frac{2}{\sigma}\int d^3x d^3y\ \epsilon_{ijk}\frac{(x-y)^i}{4\pi|x-y|^3}J^j(x)J'^k(y). \tag{5.43}$$

В случае бесконечно тонких статических токов $J_i(x) = I\int d\tau\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau))\dot{x}_i(\tau)$, переносящих полный ток I, легко видеть, что потенциал (5.43) принимает форму

$$V = \frac{2II'}{\sigma}\int_C\int_{C'} dx^i dy^j \epsilon_{ijk}\frac{(x-y)^k}{4\pi|x-y|^3}. \tag{5.44}$$

Двойной интеграл выше представляет из себя не что иное, как число зацеплений токовых петель, умноженное на константу. Таким образом, две статические петли токов взаимодействуют топологически и член взаимодействия нечувствителен к расстоянию между токами. Более того, топологический член (5.37) оказывается точным в ИК пределе. Хотя для токов, быстро меняющихся в пространстве, данный ответ может значительно измениться, также как полюс при $k^2 \sim \sigma^2$ значительно зависит от деталей взаимодействия. Опираясь на сказанное выше, можно предположить, что при разложении теории вокруг правильного вакуума топологический вклад сохранит свою форму в ИК пределе, в то время как полюс, отвечающий нестабильности, исчезнет.

Заметим, однако, что рассмотрение статической задачи в $3+1$-мерном случае, в отличие от $2+1$-мерной теории где задача была точной, приводит к тому, что результат значительно зависит от динамики системы и вне статического предела исчезает.

5.3 Нестабильность

Рассмотрим физическую картину нестабильности, о существовании которой говорит наличие полюса пропагатора в физическом пространстве, как было показано в (5.37). Качественное объяснение явления может быть получено при рассмотрении малых отклонений от статического предела уравнений Максвелла (5.27). Свободные киральные частицы при включении магнитного поля упорядочиваются и изменяют спиральность макроскопически за счёт большого числа, ток созданный таким образом приводит к появлению распределения магнитного поля с нетривиальной топологической конфигурацией. Окончательно система приходит к некоторому самосогласованному распределению полей и токов с сохранением макроскопического аксиального заряда. В процессе перехода к равновесию часть микроскопической спиральности (киральность частиц) переходит в макроскопическую спиральность распределения полей.

Как было показано в работе [12], динамическая картина развития нестабильности в системе одних правых фермионов с химпотенциалом μ_R соответствует наличию растущих электромагнитных мод с частотами

$$\omega = \pm\frac{4i\alpha\mu_R}{\pi^2 m_D^2}k^2\left(1-\frac{\pi k}{\alpha\mu_R}\right), \tag{5.45}$$

где введена масса Дебая $m_D = e^2\left(\frac{T^2}{6}+\frac{\mu^2}{2\pi^2}\right)$. И в режиме $\mu_R \sim T$ для характерного масштаба нестабильности получим

$$k \sim \alpha\mu \ \ , \ \ \omega \sim \alpha^2\mu, \tag{5.46}$$

повторяя результат рассмотрения статического предела для характерной длины генерации нестабильности.

Наличие нестабильности в теории требует поиска параметров, регуляризующих систему, а также ответа на вопрос о конечной стадии развития динамики. Первый вопрос, как было показано выше, во многом разрешается ИК свойствами теории. Кроме размера системы существует множество других ИК параметров, способных привести рассмотрение к стабильному состоянию, в частности характерный масштаб взаимодействия, связанный с длиной свободного пробега, и малая масса фермионных полей, составляющих среду. Тем не менее подробное изучение возможных механизмов стабилизации не было завершено на настоящий момент. Что касается поиска конечного состояния, куда система перейдёт в процессе развития нестабильности, то заведомо существует тривиальная возможность, отвечающая $\mu_5 = 0$ и распаду полей отклика. Тем не менее, как было аргументированно в [13, 16, 47], допустимыми кандидатами на роль стабильного состояния могут быть самосогласованные конфигурации поля, отвечающие решению уравнения Бертлами. Действительно, киральная среда с ненулевой асимметрией стремится подавить проникновение постоянного магнитного поля в себя, делая его неоднородным с характерным масштабом неоднородности, отвечающим уравнению (5.27). Если же начальная конфигурация полей и токов удовлетворяет уравнению Бертлами, то причины для переноса микроскопической спиральности на макроскопический уровень исчезают. Вопрос же о стабильности такой конфигурации требует более детального изучения квантовой теории поля на соответствующем фоне внешних полей.

Глава 6

Физика киральных сред

Фиксация киральных транспортных коэффициентов аномалией в гидродинамическом рассмотрении указывает на особенности перехода такой теории от микроскопического описания к макроскопическому. Аксиальная аномалия представляет собой квантовый однопетлевой эффект и, как было показано выше, проявляется на макроскопическом уровне в среде, состоящей из киральных частиц. Это приводит к модификации уравнений, описывающих систему, в частности гидродинамические токи теперь содержат в себе в равновесии аномальные транспортные эффекты (1.3). В следствии существования равновесных токов в среде естественно предположить отсутствие диссипации для них. Также, пользуясь наличием второго заряда в теории, киральная среда может быть рассмотрена в состоянии, нарушающем пространственную чётность. Данный эффект отвечает ненулевой разнице числа правых и левых частиц и описывается аксиальным химпотенциалом $\mu_5 \neq 0$.

Киральные эффекты, полученные гидродинамическим путём, являются с очевидностью неперенормируемыми, в полной аналогии со свойствами аксиальной аномалии. В то время как анализ симметрий [62] позволяет более обоснованно утверждать об отсутствии диссипации для данных процессов переноса. Рассмотрим обычный транспорт заряда вдоль электрического поля в сравнении с электрическим током КМЭ

$$\vec{J} = \sigma_E \vec{E} \quad , \quad \vec{J} = \sigma_B \vec{B}. \tag{6.1}$$

При обращении времени временная чётность величин в двух случаях в (6.1) соотносится по-разному

$$\vec{J}^T = -\vec{J}\ ,\ \vec{B}^T = -\vec{B}\ ,\ \vec{E}^T = +\vec{E} \tag{6.2}$$

и следовательно

$$\sigma_E^T = -\sigma_E\ ,\ \sigma_B^T = \sigma_B. \tag{6.3}$$

Чётность проводимости по обращению времени является признаком того, что соответствующая динамика гамильтонова, и следовательно диссипация отсутствует. Известным примером такого поведения может служить случай обычной сверхпроводимости в пределе Лондона $\vec{j}^{el} = m_\gamma^2 \vec{A}$, где m_γ масса фотона и $\vec{A}$ вектор потенциал. Временная чётность последнего совпадает с чётностью тока и приводит к недиссипативному транспорту, что поддерживает вывод о недиссипативности КМЭ [48].

Таким образом, аномальные токи могут рассматриваться как новый тип сверхпроводимости, свойственный киральным средам. Тем не менее отсутствие ограничений на степень когерентности системы выглядит весьма странно, так как транспорт оказывается недиссипативным при любом состоянии среды в отличии от обычной сверхпроводимости, наблюдаемой лишь при малых температурах. Действительно, как было показано выше (см. также [2]), гидродинамический вывод киральных эффектов требует лишь стандартного разложения по производным и наличия аномальной дивергенции аксиального тока. И, используя аргументацию с симметрией по обращению времени, оказывается возможным сделать вывод об отсутствии диссипации.

В этой главе будет показано, что гидродинамическое описание киральной среды в действительности должно удовлетворять дополнительным условиям. Для этого рассмотрим аномальное сохранение аксиального заряда:

$$Q^A \ =\ Q^A_{naive} + \frac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H}, \quad \frac{d}{dt}Q^A \ =\ 0\ , \tag{6.4}$$

где Q^A_{naive} микроскопический аксиальный заряд, сохраняющийся на классических уравнениях теории поля без учёта аномалии, а $\mathcal{H}$ - спиральность конфигурации магнитного поля:

$$\mathcal{H} = \int \vec{A}\cdot\vec{B} d^3x\ \ . \tag{6.5}$$

В рассматриваемом пределе наивный аксиальный заряд Q^A_{naive} описывается, соответствующим макроскопическим током $J^\mu_5 = n_5 u_\mu$, и аксиальная плотность переносится вместе с элементом среды.

Обычно принято рассматривать магнитное поле в (6.5) внешним и постоянным. Однако в случае плазмы, движение плотностей заряда приводит к наложению динамических электромагнитных полей, и сохранение спиральности (6.5) может нарушаться. Таким образом, мы будем также учитывать старшие порядки по электромагнитному взаимодействию. Далее покажем, что для сохранения (6.4) в гидродинамическом пределе необходимо наложить условие сохранения (6.5) в классическом пределе. Так, в случае разрушения спиральности температурой, аксиальный заряд (6.4) может меняться неограниченно, и его сохранение нарушается.

Заметим, что классическое сохранение спиральности широко изучалось в обычной магнитогидродинамике безотносительно к теории киральных сред (см [63, 64]). Известно, что сохранение спиральности (6.5) имеет место лишь при условии отсутствия диссипации электрического тока средой или

$$\sigma_E \ \to \ \infty \ \ , \ \ \frac{d\mathcal{H}}{dt} \ = \ 0 \ . \tag{6.6}$$

Другими словами, электромагнитная спиральность сохраняется только в случае рассмотрения идеальной магнитогидродинамики, которая допускает описание в терминах релятивистской теории поля (см. [65]). Физический смысл (6.6) сводится к запрету диссипации макроскопического аксиального заряда в тепло.

В более общем случае гидродинамики, аксиальный заряд должен быть модифицирован присутствием токов среды. Как неоднократно упоминалось выше, переход к гидродинамическому описанию может быть произведён [4] путём подстановки

$$eA_\mu \ \to \ eA_\mu \ + \ \mu u_\mu \ , \tag{6.7}$$

где μ векторный химпотенциал, отвечающий сохраняющемуся электрическому заряду. Возможность такого объединения скорости с калибровончым полем также неоднократно упоминалась в обычной магнитогидродинамике (см.[63, 64]). В более современном подходе к аномальной гидродинамике, опирающемся на геометрическое описание искривлённого Евклидова пространства, куда вложена рассматриваемая среда, возникает дополнительная симметрия, требующая расширения электромагнитного потенциала смешиванием с μ [10, 17].

Вследствие подстановки расширенного векторного-потенциала (6.7), аксиальный заряд (6.4) модифицируется в гидродинамическом описании и принимает форму

$$Q^A_{hydro} \;=\; Q^A_{naive} \;+\; Q^A_{mh} \;+\; Q^A_{mfh} \;+\; Q^A_{fh}, \tag{6.8}$$

где индексы “mh'', “fh'' и “mfh'' означают “magnetic helicity” , “fluid helicity” и смешанную “magnetic-fluid helicity” соответственно. В частности, Q^A_{mh} обозначает спиральность электромагнитного поля $\mathcal{H}$, тогда как два других вклада содержат информацию о потоке плотностей среды. В пределе идеальной жидкости аксиальный заряд электромагнитного поля Q_{mh} и сумма аксиальных зарядов $Q^A_{mfh} + Q^A_{fh}$, входящих в (6.8), сохраняются по отдельности [63, 64]. Таким образом, расширенный аномальный заряд объединяет все вклады классических спиральностей с микроскопической киральностью в один сохраняющийся заряд.

Заметим, что сравнивая (6.8) с (1.3), легко видеть наличие термального вклада в Q^A_{fh}, который не исчезает в пределе нулевых химпотенциалов. Этот член в аномальной проводимости имеет иную природу чем прочие киральные эффекты и не может быть получен заменой (6.7). Мы опустим данный вклад в ближайшем параграфе и вернёмся к его рассмотрению после.

Уравнение (6.8) имеет большое значение при анализе стабильности асимметричной киральной среды. Рассмотрим случай наличия ненулевого аксиального химпотенциала $\mu_5 \neq 0$. Тогда можно ожидать, что в равновесии все степени свободы с ненулевым аксиальным зарядом равномерно возбуждены, и все спиральности, входящие в (6.8), больше нуля. В свою очередь это означает, что состояние, когда весь аксиальный заряд набирается на одном типе спиральности в (6.8), скажем на разнице числа правых и левых частиц,

$$Q^A_{naive} \;\neq\; 0, \;\; Q^A_{mh} \;=\; Q^A_{fh} \;=\; Q^A_{mfh} \;= 0 \;,$$

является нестабильным по отношению к генерации остальных вкладов. В частности, случай генерации киральной средой конфигурации магнитного поля с ненулевой спиральностью при $\mu_5 \neq 0$ уже рассматривался выше (см.

[13, 12]). Из уравнения (6.8) следует, что в гидродинамическом приближении существует более общая форма нестабильности, отвечающая появлению всех возможных вкладов

$$Q^A_{naive} \sim Q^A_{mh} \sim Q^A_{mfh} \sim Q^A_{fh} \,. \tag{6.9}$$

Другими словами, в киральной плазме возбуждаются все возможные спиральные типы движения на макроскопическом уровне.

Стоит отметить, что все рассмотрения киральной плазмы должны производиться с учётом ИК нестабильности фундаментальной теории на микроскопическом уровне. Как было показано в работе (см. [13]), химпотенциал лишь частично регуляризует теорию в ИК секторе. И следовательно стандартная гидродинамическая процедура разложения по градиентам может оказаться неприменимой. Например, несмотря на то, что аномальные вклады могут быть описаны эффективной теорией поля [4, 6, 10], нет гарантии, что члены старшего порядка по производным действительно окажутся подавленными. Тем не менее мы будем предполагать здесь, что существует ИК обрезание, совместимое с наличием киральной симметрии в гидродинамическом приближении [66]. Заметим также, что в голографических моделях во многих случаях оказывается возможным изучение динамики киральных жидкостей в ИК пределе. Таким образом, очевидно, что можно ожидать большего числа нетривиальных физических явлений в ИК секторе чем обычно предполагается. В частности, в теории могут появляться дополнительные масштабы (см. [67]).

6.1 Вычисление аксиального заряда

В этом параграфе мы кратко рассмотрим вывод аномальных вкладов в аксиальный заряд (6.4). Необходимо отметить, что вычисления тут предполагают наличие точной киральной симметрии. В частности, фермионные массы предполагаются строго нулевыми, а система бесконечной. Данные предположения стандартны для рассмотрения аномальной гидродинамики, так как только в строгом киральном пределе аномалия сводится к локальным вкладам в действие. Которые, кроме того, не содержат зависимости от времени явно, как если бы мы рассматривали строгий статический предел. Специфическое свойство локальных аномальных вкладов в действие заключается в их калибровочной неинвриантности, в то время как само действие калибровочно инвариантно. Выражение (6.5) для магнитной спиральности представляет наиболее известный пример такого поведения полиномиальных вкладов.

Если же нарушение киральной симметрии ввести явно, например за счёт конечной массы частиц, то аномальные эффекты не сводятся к локальным членам в эффективном действии. Тем не менее в определённом кинематическом пределе матричный элемент аксиального тока может снова принимать ту же форму полинома, что и в (6.4). Подчеркнём, что данная кинематика предполагает наличие неисчезающей зависимости полей от времени. В частности, выражение (6.4) для матричного элемента аксиального заряда сохраняет свою форму при наличие фермионной массы в пределе больших напряжённостей электрического поля:

$$m_f^2 \ll E \ll B, \tag{6.10}$$

где E и B абсолютные значения электрического и магнитного полей соответственно. Случай (6.10) более подробно обсуждается в работе [48].

Вернёмся к вычислению матричного элемента аксиального заряда по фотонным состояниям $\langle\gamma|Q^A|\gamma\rangle$, где

$$Q^A = \int d^3x j_0^A(\vec{x},t) = \int d^3x\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi \tag{6.11}$$

и ψ - безмассовое дираковское поле с зарядом e. Рассмотрим предел нулевой температуры для фотонов на массовой поверхности. В этом случае хорошо известно, что матричный элемент аксиального тока j_μ^A, соответствующий аномальному треугольному графику, имеет полюс в импульсном пространстве

$$\langle\gamma|j_\mu^A|\gamma\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{iq_\mu}{q^2}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}e_\rho^{(1)}k_\sigma^{(1)}e_\alpha^{(2)}k_\beta^{(2)} \quad , \tag{6.12}$$

где q_μ - 4-импульс входящий в аксиальный ток, а $e_\rho^{(1)}, k_\sigma^{(1)}$ и $e_\alpha^{(2)}k_\beta^{(2)}$ поляризационные вектора и импульсы фотонов.

Матричный элемент тока (6.12) с очевидностью нелокален по своей структуре в силу лоренцевой ковариантности и калибровочной инвариантности.

Тем не менее рассмотрим матричный элемент аксиального заряда (6.11). Его определение $Q^A = \int d^3x j_0^A(\vec{x}, t)$, и следовательно соответствующее вычисление предполагает кинематический режим

$$\vec{q} \; \equiv \; 0, \; q_0 \; \to \; 0.$$

В этом пределе матричный элемент нулевой компоненты аксиального тока (6.12) сводится к полиному:

$$\langle\gamma|Q^A|\gamma\rangle \; = i\frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{ijk}e_i^{(1)}e_j^{(2)}(k^{(1)} - k^{(2)})_k. \tag{6.13}$$

Другими словами, выражение (6.13) воспроизводит стандартный ответ для заряда (6.4).

С теоретической точки зрения, вычисление аксиально заряда (6.11) с помощью нелокального выражения (6.12) имеет значительное преимущество. Мы избегаем рассмотрения полей тяжёлых регуляторов и весь вывод (6.11) происходит в терминах физических (безмассовых) степеней свободы. В то время как стандартный способ вычисления магнитной проводимости σ_B (см. глава 2) сводится к рассмотрению коррелятора двух электромагнитных токов (2.4). Переписывая в импульсном представлении, получим

$$\sigma_B \; = \lim_{q_0 \equiv 0, q_k \; \to 0} \epsilon^{ijk}\frac{i}{2q_k}\langle j_i^{el}, \; j_j^{el}\rangle, \tag{6.14}$$

где предел $q_k \to 0$ подразумевает на первый взгляд чувствительность ответа (6.14) лишь к теории на больших дистанциях $r \; \sim \; 1/|\vec{q}|$. Тем не менее коррелятор (6.14) зависит от правильного доопределения теории в совпадающих точках. И как следствие, в данном случае приходится рассматривать УФ регуляризацию [68].

Необходимость включения в задачу внешнего поля, зависящего от времени, выглядит странно, учитывая то, что (6.14) связывает аномальную проводимость КМЭ с пространственным коррелятором. Тем не менее напомним, что связь аномалии с КМЭ в простейшем рассмотрении [32], приведённом в главе 2, сводится к вычислению работы $\vec{E}$ над током нулевых мод в магнитном поле:

$$W \; \equiv \; \vec{E}\cdot\vec{j}_{el} \; = \; \vec{E}\cdot\vec{B}\frac{e^2}{2\pi^2}\mu_5. \tag{6.15}$$

Закон сохранения энергии требует компенсации создания пары безмассовых частиц, и только после сокращения электрического поля в уравнении (6.15) мы приходим к току КМЭ (1.3), зависящему исключительно от магнитного поля.

В случае же конечной массы фермионов производство пар внешним полем невозможно, если $E \ll m_f^2$ и роль временной зависимости электромагнитного потенциала становится явной. В частности, в переде $q_0 \rightarrow 0$ ($\vec{q} \equiv 0$) получим

$$\langle\gamma|Q^A|\gamma\rangle_{m_f\neq 0} \;=\; 0 \quad ,$$

из-за отсутствия сингулярности $q^2 = 0$ в матричном элементе, отвечающем треугольной диаграмме.

6.2 Аксиальный заряд в гидродинамике

В работах [6, 10] было показано, что для получения киральных эффектов в гидродинамике полезно рассмотреть движение среды не только в электромагнитных, но также и в гравитационных полях. Такая связь кажется естественной, так как гидродинамическое описание по своей сути определяется законами сохранения соответствующих зарядов и ТЭИ. Технически такое объединение электромагнитного и гравитационного полей может быть получено при рассмотрении ковариантного действия в больших измерениях. Тогда смешанная калибровочно-гравитационная аномалия в высшем измерении генерирует 4х-мерное действие, отвечающее гидродинамике с учётом киральных эффектов [6].

Для определённости рассмотрим случай КВЭ [2, 66], ток которого имеет форму

$$j_5^\mu \;=\; \frac{1}{2}\sigma_\omega \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \partial_\rho u_\sigma. \tag{6.16}$$

Как было показано в главе 2 соответствующая проводимость σ_ω связана с коррелятором электрического тока и ТЭИ:

$$\sigma_\omega \;=\; \lim_{q_k\to 0} \frac{i}{q_k}\epsilon^{ijk}\langle j_{5,i}, T_{0j}\rangle \ . \tag{6.17}$$

В гидродинамическом приближении σ_ω была вычислена явно [2, 20]:

$$\sigma_\omega \;=\; \frac{\mu^2}{2\pi^2} \;\;, \tag{6.18}$$

где мы сохранили только лидирующий вклад по химпотенциалу μ. В то время как вклады с большими степенями μ зависят от выбора системы покоя элемента жидкости (см глава 4).

В случае геометрического подхода [10], мы начинаем рассмотрение со статической метрики

$$ds^2 \;=\; -\exp\left(2\sigma(\vec{x})\right)\left(dt + a_i(\vec{x})dx^i\right)^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j$$

и фонового электромагнитного поля $A_\mu(\vec{x})$. Далее можно показать, что симметрии задачи накладывают ограничение на статистическую сумму, делая её функцией конкретных комбинаций $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i$,

$$\mathcal{A}_0 \;=\; A_0 \;+\; \mu \;, \;\; \mathcal{A}_i \;=\; A_i \;-\; A_0 a_i, \tag{6.19}$$

которые являются калибровочными инвариантами в теории Калуцы-Клейна и должны заменять обычное калибровочное поле A_μ в стандартных теоретико-полевых выражениях.

Как упоминалось выше (см. глава 4), обобщение аксиального заряда (6.4) при гидродинамическом рассмотрении сводится к замене eA_μ, входящего в стандартное выражение для аномалии комбинацией (6.7). Что также соответствует объединению электромагнитной и гравитационной аномалий. Ограничение применимости подстановки (6.7) сводится к свойствам эффективной теории поля, следовательно в каждом конкретном случае только низший порядок по химпотенциалам может быть воспроизведён таким путём.

Заметим, что процедура, используемая здесь, весьма похожа по сути на подход в работе [10]. Действительно, поле a_i, входящее в уравнение (6.19), пропорционально скорости u_i. Заметим тем не менее, что подход, предложенный в [10], применим исключительно в равновесии, тогда как (6.7) может использоваться в более общем случае. Связь с методом, предложенным в [6], также легко прослеживается. Модификация наивного аксиального заряда Q^A_{naive} аномалией находится в однозначном соответствии с коррелятором (6.14). Гидродинамическая модификация лагранжиана теории поля (3.5) приводит к появлению ненулевых компонент ТЭИ:

$$(\delta T^{0i})_{hydro} \; = \; \mu J^i.$$

Что в свою очередь приводит к появлению аномального члена в корреляторе двух ТЭИ

$$\epsilon_{ijk}\frac{\langle T^{0i}, T^{0j}\rangle}{q^k} \; = \; \mu^2\epsilon_{ijk}\frac{\langle J^i, J^j\rangle}{q^k} \; . \tag{6.20}$$

Появление этой аномалии соответствует переопределению аксиального заряд, как и в случае с коррелятором (6.14).

Заметим также, что существует вопрос единственности подстановки (6.7) в релятивистском сулчае $u_i \sim 1$. И наиболее вероятный ответ - отрицательный. Более того, неясно можно ли зафиксировать "правильный" вариант теоретически. Например, хорошо известно, что все существующие релятивистские расширения гидродинамики не учитывают явно конечность скорости света. Вероятно, наиболее аккуратный подход предложен на геометрическом языке описания [10]. Тем не менее, как уже упоминалось, данный подход работает в евклидовом пространство-времени, по этой причине применим только к равновесному случаю, что означает ограничение рассмотрения на стационарные процессы. В такой ситуации геометрическое расширение eA_μ действительно должно заменить (6.7). Для наших целей, однако, необходимо рассмотрение также неравновесных процессов. И более того, в рассматриваемом здесь приближении геометрическая конструкция из [10] сводится к (6.7).

После необходимых комментариев все члены в (6.8) могут быть вычислены с помощью (6.7). Здесь для удобства будем использовать обозначения работы [63], которые также применимы в случае нетривиального гравитационного поля. Рассмотрим спиральности потока жидкости, тогда основным объектом изучения является псевдо-тензор завихрённости:

$$\omega_{\alpha\beta} \; \equiv \; (\mu u_\beta)_{,\alpha} \; - \; (\mu u_\alpha)_{,\beta} \; . \tag{6.21}$$

и ковариантный ток, связанный со спиральностью потока среды, определяется как

$$j^\alpha_{fh} \; = \; 1/2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta}(\mu u_\beta). \tag{6.22}$$

Сама же спиральность потока среды определяется объёмным интегралом временной компоненты тока (6.22):

$$Q^A_{fh} \ = \ \frac{1}{4\pi^2}\int d^3x j^0_{fh} \tag{6.23}$$

и соответствующий аксиальный заряд имеет форму

$$\left(Q^A_{fh}\right)_{non-rel} \ = \ \frac{\mu^2}{4\pi^2}\int d^3x u^0 \epsilon_{ijk} u^i \nabla^j u^k \quad , \tag{6.24}$$

где химпотенциал предполагается постоянным. Таким образом, аксиальный заряд Q^A_{fh} сводится к объёмному интегралу нулевой компоненты поля завихрённости ω^0.

Точно также смешанная магнитно-потоковая спиральность определяется ковариантным током j^α_{mfh} [63], где

$$j^\alpha_{mfh} \ = \ \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}A_\beta \tag{6.25}$$

и $\omega_{\alpha\beta}$ определена в (6.21). Соответствующий аксиальный заряд Q^A_{mfh}, входящий в (6.8), также определяется объёмным интегралом временной компоненты тока j^α_{mfh}, умноженной на фактор $\frac{e}{2\pi^2}$. Заметим, что существует альтернативная форма данного тока, которая определяется как

$$j^\alpha_{mfh} \ = \ \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(\mu u_\beta). \tag{6.26}$$

Несмотря на отличия между (6.25) и (6.26), соответствующий аксиальный заряд Q^A_{mfh} одинаков в обоих случаях.

Приведённые вклады вместе со спиральностью электромагнитного поля (6.5) полностью определяют модифицированный аксиальный заряд (6.8) в гидродинамическом приближении. Заметим снова, что мы работаем здесь в строгом киральном пределе. В котором можно рассмотреть стационарные движения среды и заметить, что кроме тока КМЭ в системе также существует КВЭ в аксиальном токе:

$$j^\alpha \ = \ \frac{\mu^2}{4\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta\nabla_\gamma u_\delta. \tag{6.27}$$

Сделаем оговорку, что в случае присутствия маленькой фермионной массы, которую можно считать мерой нарушения киральной симметрии, уравнения (6.23), (6.25) и (6.26) верны только для поля, зависящего от времени. Например, в случае вклада спиральности жидкости в аксиальный заряд (6.23), необходимо иметь

$$\frac{d(\mu u_i)}{dt} \gg m_f^2. \tag{6.28}$$

Другими словами, массы должны предполагаться малыми даже на гидродинамических масштабах.

Отметим, что относительные коэффициенты перед классическими спиральностями фиксируются расширением калибровочного потенциала (6.7), в то время как коэффициент перед микроскопической киральностью определяется аномалией. Тем не менее было бы интересно найти ответ на вопрос существует ли другой независимый способ фиксировать коэффициенты в сохраняющемся аксиальном заряде.

6.3 Классическое сохранение спиральностей

Возможность сохранения макроскопических спиральностей широко обсуждалась в контексте обычной магнитогидродинамики. Здесь мы воспроизведём основные результаты в этой области, следуя работе [63]. Начнём с рассмотрения условий сохранения потоковой спиральности. Будем использовать релятивистское обобщение уравнения Эйлера для идеальной жидкости (вязкость $\eta \to 0$):

$$\big(\epsilon + p\big)a_\alpha = -p_{,\alpha} - u_\alpha u^\beta p_{,\beta} = -P_{\alpha\mu}\partial^\mu p, \tag{6.29}$$

где ϵ и p обозначают плотность энергии и давление среды соответственно, u^β снова обозначает 4-скорость элемента жидкости, удовлетворяющую условию $u_\beta u^\beta = -1$, а $a^\mu = u^\nu \partial_\nu u^\mu$ - его ускорение. Кроме того, воспроизводя первое начало термодинамики, запишем

$$dp = nd\mu + sdT\ , \tag{6.30}$$

где n плотность сохраняющегося заряда, μ химпотенциал, сопряжённый с ним, локальная температура среды, а s плотность энтропии на единицу объёма. Стоит отметить, что обозначения здесь несколько отличаются от использованных в главе 4.

Приступим теперь к анализу поведения разных вкладов в аксиальный ток для некиральной заряженной жидкости. После простых вычислений можно получить выражение для дивергенции аксиального тока j^{α}_{fh} в отсутствии внешнего электрического поля, что отвечает степени несохранения спиральности потока среды:

$$(j^{\alpha}_{fh})_{,\alpha} \;=\; \frac{2T^2\mu s}{p+\epsilon}\omega^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right), \tag{6.31}$$

где j^{α}_{fh} определено в (6.22). Таким образом, если $\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$ всюду или система находится при нулевой температуре, то аксиальный заряд (6.23) сохраняется.

Перейдём теперь к случае спиральности электромагнитного поля (6.5). Соответствующий 4х-мерный ток принимает форму тока CS:

$$j^{\alpha}_{mh} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\beta}F_{\gamma\delta}. \tag{6.32}$$

Прямым вычислением легко показать, что дивергенция тока пропорциональна произведению магнитного B_{μ} и электрического полей E_{μ} в системе покоя среды

$$(j^{\alpha}_{mh})_{,\alpha} \;=\; -2B^{\mu}E_{\mu}\ , \tag{6.33}$$

а аксиальный заряд, отвечающий j^{0}_{mh}, совпадает со спиральностью поля $Q_{mh} \propto \frac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H}$.

Выражение (6.33) чисто кинематическое, и условие необходимое для сохранения тока j^{α}_{mh} сводится к требованию $E^{\mu} \to 0$ или равносильно бесконечной проводимости среды (что является необходимым условием для рассмотрения идеальной магнитогидродинамики):

$$E_{\mu} \;\to\; 0\ \ ,\ \ \sigma_E \;\to\; \infty. \tag{6.34}$$

В случае же конечной проводимости σ_E [64], скорость диссипации спиральности задаётся выражением

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \;=\; \frac{-2}{\sigma_E}\int d^3x\;\vec{B}\cdot\mathbf{curl}\;\vec{B}. \tag{6.35}$$

Наконец рассмотрим случай смешанной спиральности в отсутствии электрического поля. Дивергенция соответствующего аксиального тока (6.26) имеет форму

$$(j^{\alpha}_{fmh})_{,\alpha} \;=\; \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}. \tag{6.36}$$

Выразим напряжённость $F_{\alpha\beta}$ через магнитное поле B_{μ} в отсутствии электрического $E_{\nu} = 0$:

$$F_{\alpha\beta} \;=\; \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}B^{\gamma}u^{\delta}. \tag{6.37}$$

Подставляя это выражение в (6.36), для дивергенции тока получим

$$(j^{\alpha}_{fmh})_{,\alpha} \;=\; \frac{T^2\mu s}{p+\epsilon}B^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right). \tag{6.38}$$

Условия сохранения смешанного вклада в аксиальный заряд повторяют случай потокового вклада.

В случае произвольной температуры можно заметить, что дивергенция полного классического аксиального тока имеет вид

$$\begin{aligned}
&\partial_{\alpha}(\mu B^{\alpha} + \mu^2\omega^{\alpha}) + \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \\
&= -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta})u_{\beta}(\tilde{F}_{\alpha\gamma} + \tilde{\omega}_{\alpha\gamma})u^{\gamma} = \\
&= -\frac{sT}{2(\epsilon+p)}\left(E^{\alpha} - TP^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right)(\tilde{F}_{\alpha\gamma} + \tilde{\omega}_{\alpha\gamma})u^{\gamma}.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Также похожую структуру имеет дивергенция температурного вклада в аксиальный ток:

$$\partial_{\mu}(T^2\omega^{\mu}) = \frac{2T^2\rho}{\epsilon+p}\omega^{\mu}\left(E_{\mu} - T\partial_{\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right). \tag{6.40}$$

Таким образом, сохранение классического аксиального заряда возможно в двух режимах - $T = 0$ и $E^\alpha - TP^{\alpha\beta}\partial_\beta\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0$. Второе условие тождественно с требованием недиссипативности электрического тока $\sigma \to \infty$, что вместе с требованием $\eta \to 0$, наложенным на уравнение Эйлера, приводит к рассмотрению идеальной жидкости.

Заметим, что существует ещё одно свойство, объединяющее разные типы киральностей. Известно, что все три спиральности имеют топологическую природу и являются мерой числа зацеплений линий магнитного поля и вихревых линий среды. В частности, потоковая спиральность измеряет число зацеплений вихревых линий в жидкости [64], смешанная спиральность измеряет число зацеплений между замкнутыми вихревыми линиями и линиями магнитного потока, а магнитная спиральность связана с числом самозацеплений линий магнитного потока.

Связь спиральностей с топологией по своей сути является фундаментальной причиной существования топологического взаимодействия (5.44), найденного в предыдущей главе. Например, интеграл в (5.44) пропорционален Гауссову числу зацеплений между двумя петлями токов. И как было показано выше (см. [13]), данный член взаимодействия неперенормируется в ИК пределе. Тем не менее в случае жидкостной спиральности было показано наличие старших поправок по взаимодействию [56].

Таким образом, в этом параграфе было рассмотрено классическое сохранение макроскопических спиральностей среды, которые должны быть включены в определение аксиального тока в киральной среде. Суммарная спиральность сохраняется в случае идеальной магнитогидродинамики, что хорошо известно в течении долгого времени. Как было аргументировано выше, три классические спиральности объединяются с микроскопической киральностью при рассмотрении аксиальной аномалии в среде.

6.4 Идеальная магнитогидродинамика

При рассмотрении киральных сред аксиальная аномалия имеет макроскопические проявления в виде киральных эффектов (1.3). Аномальные токи равновесны, и из анализа их структуры можно прийти к выводу об их недиссипативности. Более того, модификация гидродинамики аномалией приводит к тому, что киральные токи появляются без дополнительных условий на систему. Таким образом, возникает противоречивая ситуация с наличием недиссипативного транспорта без ограничений на степень когерентности системы.

Как было показано в предыдущем параграфе, рассмотрение киральной среды тесно связано с возможностью определить сохраняющийся аксиальный заряд, что отвечает наличию киральной симметрии в среде. Аномалия приводит к модификации аксиального заряда на микроскопическом уровне (6.4). Используя подстановку (6.7), микроскопический аксиальный заряд с учётом аномального вклада был обобщён на случай присутствия среды в гидродинамическом пределе (6.8).

Расширенный макроскопический аксиальный заряд (6.8) содержит вклады, пропорциональные макроскопическим спиральностям полей скорости и электромагнитного вектор-потенциала. Операторное сохранение заряда на микроскопическом уровне приводит к требованию сохранения его среднего по любому состоянию. Рассмотрим состояние гидродинамической киральной среды без внешних полей с нулевым дисбалансом правых и левых составляющих и ненулевой потоковой спиральностью. Как было показано выше, аксиальный заряд Q_{fh} сохраняется лишь при наложении дополнительных условий на диссипативные свойства среды. Альтернативным механизмом сохранения полного заряда могла бы стать генерация киральной асимметрии. Тем не менее аномалии теории ограничиваются одной аксиальной аномалией, и в отсутствии внешних полей микроскопическая спиральность сохраняется. Таким образом, мы приходим к необходимости сохранения макроскопических вкладов в аксиальный заряд на классических уравнениях движения. Из неаномальной гидродинамики хорошо известно, что классическое сохранение макроскопических спиральностей (6.8) требует наложения дополнительных условий на систему. В частности, мы показали, что киральная симметрия среды сохраняется классически в случае идеальной жидкости, что приводит к ограничениям

$$\left(\sigma_E\right)_{classical} \ \to\ \infty\ ,\ \left(\frac{\eta}{s}\right)_{classical} \ \to\ 0, \tag{6.41}$$

где вязкость η нормирована на плотность энтропии s из размерных соображений. Тем не менее данное решение может быть не единственным.

Полученный пример условий самосогласованности рассмотрения киральной среды позволяет разрешить парадоксальное отсутствие ограничений на недиссипаивность киральных эффектов. Последние могут иметь место и в системе с несохраняющимся аксиальным зарядом, но тем не менее в такой постановке задачи токи перестанут быть равновесными и будут распадаться вместе с аксиальной асимметрией. В то время как в сугубо квантовой системе (что отвечает отсутствию диссипации в среде) существование недиссипативного транспорта не выглядит чем-то странным.

С другой стороны, остаётся открытым вопрос о возможности существования таких систем на классическом или квантовом уровне. И на микроскопическом уровне некоторым примером может служить p-волновой сверхтекучий гелий (He III), где существуют аналоги киральных эффектов [18]. Другим теоретически важным примером подобной системы может служить голография. В частности, универсальная особенность голографических систем - минимальная возможная удельная вязкость [42]:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}, \tag{6.42}$$

где имеется неявное присутствие постоянной Планка справа от знака равенства.

Глава 7

Заключение

7.1 Полученные результаты

В данной диссертации были изучены свойства макроскопических проявлений аксиальной аномалии кватовой теории поля. Как было показано, в системах безмассовых фермионов при конечных плотностях существуют новые равновесные транспортные явления - киральные эффекты (1.3). Мы рассмотрели различные механизмы реализации киральных эффектов и разнообразные подходы к вычислению соответствующих кинетических коэффициентов.

Совпадение результатов в разных режимах (2.11), (2.20), (2.31), (3.9), (4.23) с универсальным ответом (1.3) показывает высокую степень защищённости рассматриваемых явлений от перенормировок. Так аномальные кинетические коэффициенты имеют идентичный вид (1.3) от слабой (2.11), (2.20) до сильной связи (4.23), (3.9), в слабых (2.11) и сильных (2.31) внешних полях. Вместе с неперенормируемостью аномалии подобное поведение привело к широко распространившемуся в литературе мнению о неперенормируемости киральных эффектов [2, 10, 20, 33, 45, 46]. В частности, оказывается возможным зафиксировать аномальные проводимости за счёт чисто гидродинамического рассмотрения модифицированного наличием аномалий в токах (4.23) (см. [2, 20, 33]). Дальнейший анализ показывает, что равновесность киральных эффектов и пропорциональность аксиальным полям могут быть использованы как базис для доказательства недиссипативности соответствующих токов [62]. Тем не менее отсутствие каких бы то ни было дополнительных ограничений на систему кроме наличия киральной симметрии наводит на мысль о неправомерности сделанных предположений

[10, 11, 13, 16, 27, 28, 69].

Ревизия рассмотренных методов приводит к тому, что задача вычисления аномальных проводимостей обрастает предположениями. Например можно заметить, что на микроскопическом уровне теория безмассовых фермионов крайне нестабильна, и существуют бесконечные поправки, связанные с тормозным излучением частиц. Эта ИК проблема сигнализирует о необходимости доопределения системы на больших расстояниях. С другой стороны, рассмотрение однокомпонентной гидродинамики содержит крайне сильное предположение о термализации безмассовых частиц, движущихся со скоростью света. Также стоит отметить смешанную УФ/ИК природу аномалии [31, 32]. Пошаговое рассмотрение позволяет найти соответствующие предположения об ИК параметрах во всех упомянутых методах. Более того, в большинстве работ доопределение теории делалось универсальным образом, необходимым для очевидного сохранения киральной симметрии.

На конкретных примерах была показана неуниверсальность аномальных кинетических коэффициентов (5.26), (5.39). Тем не менее, накладывая некоторый набор дополнительных требований, восстановим ответ для аномальных проводимостей в форме (1.3). Так малая фермионная масса может быть подавлена высокой температурой, что позволяет изучать эффективно-киральный режим. Мы показали существование более реалистичной постановки задачи, требующей аккуратного учёта порядка пределов по ИК параметрам теории. Таким образом, физика киральных эффектов фиксируется аномалией лишь в УФ секторе, в то время как ИК сектор требует изучения деталей теории и не является универсальным.

Дальнейший анализ ИК свойств киральных эффектов привёл к появлению большого числа новых явлений, связанных с аномалией и её макроскопическими свойствами. Так среди ИК проблем рассматриваемого класса теорий была найдена киральная нестабильность (5.28), (5.45) [12, 13]. Данное явление отвечает переходу микроскопической киральности в спиральность топологически нетривиальной конфигурации электромагнитных полей в системе. Позже киральная нестабильность была обобщена на другие возможные переходы микроскопической киральности на макроскопический уровень (6.9) (см. [16]).

Пользуясь возможностью осознанно выбрать ИК параметры системы, мы проанализировали теорию киральной плазмы. Существование микроскопически сохраняющегося заряда (6.4) позволило построить сохраняющийся аксиальный ток, модифицированный для гидродинамического рассмотрения (6.8). Из операторного сохранения (6.4) и формы макроскопического ожидания (6.8) были получены ограничения на существование киральной симметрии в среде на классическом уровне. Последовательный анализ классического сохранения макроскопических вкладов в (6.8) позволил найти пример системы, допускающей существование киральной симметрии на классическом уровне. Необходимым дополнительным условием, накладываемым на плазму, оказалось требование недиссипативности

$$\left(\sigma_E\right)_{classical} \to \infty\ ,\ \left(\frac{\eta}{s}\right)_{classical} \to 0. \tag{7.1}$$

Таким образом, мы частично разрешили изначальный парадокс существования недиссипативного аномального транспорта в классической системе, так как в полученном примере киральная среда оказывается сугубо квантовой (см. [16]).

7.2 Открытые вопросы

Среди вопросов, обсуждавшихся в данной диссертации, осталось достаточное число открытых задач, которые полезно сформулировать отдельно.

- Рассматривая простейшую систему фермионного газа, мы столкнулись с задачей вычисления КВЭ, связанного с глобальным вращением системы. Данная задача разбиралась в работах [8, 70]. Тем не менее автору неизвестны примеры подробного анализа вакуума теории поля в этой ситуации. Интересным вопросом может быть сравнение КВЭ локального и глобального вращений, а также поиск механизма микроскопической реализации данного эффекта на “нулевых” модах в несверхтекучей среде.

- Как подробно обсуждалось в работах [16, 48], наличие конечной массы фермиона при нулевой температуре приводит к выключению аномальных токов в строгом статическом пределе. С другой стороны, предел высоких температур заведомо возвращает теорию в эффективно-киральное описание, где применимы рассматриваемые методы анализа киральных эффектов. Таким образом, возникает вопрос о переходе из одного режима описания в другой, и соответствующее рассмотрение должно быть проделано.

- В главе 3 приведено рассуждение о невозможности насыщения условия самосогласованности ‘т Хоофта на фермионных степенях свободы в гидродинамической среде. Несмотря на то, что существует некоторое число попыток построения теории киральных эффектов в терминах бозонных степеней свободы [69, 71], данная задача не была полностью разобрана.

- Существующие примеры реализации киральных эффектов на фермионных модах дефектов (см. глава 5) рассматривались в приближении невзаимодействующих нулевых мод, что может значительно изменить результат. Более подробный анализ данной задачи в реалистической постановке может значительно расширить понимание ИК физики киральных эффектов.

- Предсказанное расширение нестабильности (6.9) может быть доведено до количественного ответа прямыми динамическими вычислениями для киральных систем. Кроме того, открытой остаётся задача об изучении стабильности системы безмассовых фермионов на фоне конфигурации поля, удовлетворяющей уравнению Белтрами (5.28).

- Заметим также существование задачи о сохранении аксиального заряда в идеальной киральной плазме с явным учётом её квантовой природы (рассмотрение вязкости пропорциональной постоянной Планка), в частности на примерах дуальных моделей.

Приведённый список может быть значительно расширен. Тем не менее мы ограничимся здесь задачами в том или ином виде упоминавшимися в тексте.

Литература

[1] “Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics”,
S. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426;
"A PCAC puzzle: $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in the σ-model
J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A 60 (1969) 47.

[2] “Hydrodynamics with Triangle Anomalies
D. T. Son and P. Surowka, Phys. Rev. Lett. 103, 191601 (2009).

[3] “The Chiral Magnetic Effect
K. Fukushima, D. E. Kharzeev, H. J. Warringa, Phys. Rev. D78, 074033 (2008).

[4] “Notes on chiral hydrodynamics within effective theory approach”,
A.V. Sadofyev, V.I. Shevchenko, V.I. Zakharov, Phys. Rev. D83, 105025 (2011).

[5] “Fluid dynamics of R-charged black holes ”,
J. Erdmenger, M. Haack, M. Kaminski, A. Yarom, JHEP 0901 (2009) 055.

[6] “Anomalous transport coefficients from Kubo formulas in Holography ”,
I. Amado, K. Landsteiner and F. Pena-Benitez, JHEP 1105, 081 (2011);
“Gravitational Anomaly and Transport ”,
K. Landsteiner, E. Megias, F. Pena-Benitez, Phys.Rev.Lett. 107 (2011) 021601.

[7] “Equilibrium Parity Violating Current In A Magnetic Field”,
A. Vilenkin, Phys. Rev. D22, 3080 (1980).

[8] “Quantum Field Theory At Finite Temperature In A Rotating System”,
A. Vilenkin, Phys. Rev. D21, 2260 (1980).

[9] "Nearly Perfect Fluidity: From Cold Atomic Gases to Hot Quark Gluon Plasmas ",
Th. Schafer, D. Teaney, Rept. Prog. Phys. 72 (2009) 126001.

[10] "Constraints on Fluid Dynamics from Equilibrium Partition Functions",
N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya , S. Jain, Sh. Minwalla, T. Sharma, JHEP 1209 (2012) 046;
"Towards hydrodynamics without an entropy current ",
K. Jensen, M. Kaminski, P. Kovtun, R. Meyer, A. Ritz, A. Yarom, Phys.Rev.Lett. 109 (2012) 101601.

[11] "Chiral Vortical Effect in Superfluid",
V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, V.I. Zakharov, Phys.Rev. D86 (2012) 025021

[12] "Chiral Plasma Instabilities",
Y. Akamatsu and N. Yamamoto, Phys.Rev.Lett. 111 (2013) 052002.

[13] "On Magnetostatics of Chiral Media",
Z.V. Khaidukov, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev , V.I. Zakharov, arXiv:1307.0138 [hep-th].

[14] "Topological semimetal and Fermi-arc surface states in the electronic structure of pyrochlore iridates",
X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath, S. Y. Savrasov, Phys. Rev. B 83, 205101 (2011)

[15] "Observation of the chiral magnetic effect in ZrTe5",
Q. Li et al, arXiv:1412.6543[cond-mat.str-el]

[16] "On consistency of hydrodynamic approximation for chiral media ",
A. Avdoshkin, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, V.I. Zakharov, arXiv:1402.3587 [hep-th]

[17] "Effective actions for anomalous hydrodynamics",
F.M. Haehl, R. Loganayagam, M. Rangamani, JHEP 1403 (2014) 034

[18] "Flow instability in 3He-A as analog of generation of hypermagnetic field in early Universe",
M. Krusius, T. Vachaspati, G.E. Volovik, arXiv:cond-mat/9802005;
"The Universe in a Helium Droplet",
G.E. Volovik, 'International Series of Monographs on Physics'.

[19] “Topology, magnetic field, and strongly interacting matter”,
D.E. Kharzeev, arXiv:1501.01336.

[20] “The Chiral magnetic effect in hydrodynamical approach”,
A.V. Sadofyev, M.V. Isachenkov, Phys.Lett. B697 (2011) 404.

[21] “Chiral Vortical Effect in Fermi Liquid”,
V.P. Kirilin, Z.V. Khaidukov, A.V. Sadofyev, Phys.Lett. B717 (2012) 447.

[22] “Kinetic theory with Berry curvature from quantum field theories”,
D.T. Son, N. Yamamoto, Phys.Rev. D87 (2013) 8, 085016.

[23] “Chiral Kinetic Theory”,
M.A. Stephanov, Y. Yin, Phys.Rev.Lett. 109 (2012) 162001.

[24] “Chiral and Gravitational Anomalies on Fermi Surfaces”,
G. Basar, D.E. Kharzeev, I. Zahed, Phys.Rev.Lett. 111 (2013) 161601.

[25] “Notes on black-hole evaporation”,
W. G. Unruh, Phys. Rev. D 14 (1976), 870.

[26] “Методы квантовой теории поля в статистической физике”,
А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, 1962.

[27] “Some Field Theoretic Issues Regarding the Chiral Magnetic Effect”,
Defu Hou, Hui Liu, Hai-cang Ren, JHEP 1105 (2011) 046.

[28] “Anomalous transport with overlap fermions”,
P.V. Buividovich, Nucl.Phys. A925 (2014) 218-253.

[29] “Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter”,
M.A. Metlitski, A.R. Zhitnitsky, Phys.Rev.D72 (2005), 045011.

[30] “Квантовая Механика”,
Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, 2002.

[31] “On Conservation of the axial current in massless electrodynamics”,
A.D. Dolgov, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B27 (1971) 525.

[32] “The Adler-Bell-Jackiw anomaly and Weyl fermions in a crystal”,
H. B. Nielsen, M. Ninomiya, Phys. Lett. B130 (1983) 389.

[33] "Relativistic Hydrodynamics with General Anomalous Charges",
Y. Neiman, Y. Oz, JHEP 1103 (2011) 023.

[34] "Гидродинамика",
Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, 1986.

[35] "Chiral and parity anomalies at finite temperature and density",
A.N. Sisakian, O.Y. Shevchenko and S.B. Solganik, Nucl. Phys. B518 (1998) 455.

[36] "Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories",
K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1195;
"Anomalies in quantum field theory
R.A. Bertlmann, Oxford, 1996 (ISBN 0198520476).

[37] "How pi0 —> gamma gamma changes with temperature",
R. D. Pisarski, T. L. Trueman, M. H. G. Tytgat, Phys. Rev. D56 (1997) 7077.

[38] "Gauge theory correlators from noncritical string theory",
S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B428 (1998) 105–114.

[39] "Anti-de Sitter space and holography",
E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253.

[40] "How to go with an RG flow",
M. Bianchi, D. Z. Freedman, K. Skenderis, JHEP 08 (2001) 041.

[41] "Hydrodynamics from charged black branes",
N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Dutta, R. Loganayagam, P. Surowka, JHEP 1101 (2011) 094.

[42] "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics",
P. Kovtun, D.T. Son, A. Starinets, Phys. Rev. Lett. 94, 111601 (2005);
"The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma",
G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. 87, 081601 (2001)

[43] "Chiral conductivities and effective field theory",
K. Jensen, P, Kovtun, A. Ritz, JHEP 1310 (2013) 186.

[44] "Holographic Gravitational Anomaly and Chiral Vortical Effect",
K. Landsteiner, E. Megias, L. Melgar, F. Pena-Benitez, JHEP 1109 (2011) 121.

[45] "Fluids, Anomalies and the Chiral Magnetic Effect: A Group-Theoretic Formulation",
V.P. Nair, R. Ray, S. Roy, Phys.Rev. D86 (2012) 025012.

[46] "Triangle Anomalies, Thermodynamics, and Hydrodynamics",
K. Jensen, Phys.Rev. D85 (2012) 125017.

[47] "Anomaly and long-range forces",
V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, V.I. Zakharov, arXiv:1312.0895 [hep-th]

[48] "Chiral Magnetic Effect in Hydrodynamic Approximation",
V.I. Zakharov, Lect. Notes Phys. 871 (2013).

[49] "Fractional Quantum Numbers on Solitons",
J. Goldstone, F. Wilczek, Phys.Rev.Lett. 47, 986-989 (1981).

[50] "Anomalies and Fermion Zero Modes on Strings and Domain Walls",
C.G. Callan, J.A. Harvey, Nucl.Phys.B 250:427 (1985).

[51] "QCD at finite isospin density: From pion to quark - anti-quark condensation",
D.T. Son, M.A. Stephanov, Phys.Atom.Nucl.64:834-842 (2001), Yad.Fiz.64:899-907 (2001);
"On two color QCD with baryon chemical potential",
J.B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, Phys.Lett.B 464:183-191 (1999).

[52] "Low-Energy Quantum Effective Action for Relativistic Superfluids",
D. T. Son, arXiv:0204199v2 [hep-ph].

[53] "Statistical Physics, Part 2",
L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Pergamon, New York, 1959.

[54] “The Ground State of a Spin 1/2 Charged Particle in a Two-dimensional Magnetic Field”,
Y. Aharonov, A. Casher,Phys.Rev.A 19:2461-2462 (1979).

[55] “Fermion Number Fractionization in Quantum Field Theory”,
A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Phys.Rept.135:99 (1986).

[56] “(Non)-renormalization of the chiral vortical effect coefficient”,
S. Golkar and D. T. Son, JHEP 1502 (2015) 169.

[57] “No More Corrections to the Topological Mass Term in QED in Three-Dimensions”,
S. R. Coleman and B. R. Hill, Phys. Lett. B159 (1985) 184.

[58] “Three-Dimensional Massive Gauge Theories”,
S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 975.

[59] “Structure Of $(2 + 1)$ Photodynamics”,
Ya. I. Kogan and A. Yu. Morozov, Sov. Phys. JETP 61 (1985) 1, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 88 (1985) 3;
“Topologically massive gauge theories: Who needs them and why?”,
Ya. I. Kogan, Comments Nucl. Part. Phys. A19 (1990) 305.

[60] “Standing wave ground state in high density, zero temperature QCD at large N(c) ”,
D.V. Deryagin, D.Y. Grigoriev and V.A. Rubakov, Int. J. Mod. Phys. A7, 659 (1992).

[61] “Sur une propriete topologique des applications globalement canoniques de la mecanique classique”,
V. I. Arnold, C. R. Acad Sci. Paris 261, 17 (1965);
“New solutions of the kinematic dynamo problem”, S. Childress, J. Math. Phys.11, 3063 (1970);
“Mean-field dynamos in random Arnold-Beltrami-Childress and Roberts flows”,
N. Kleeorin, I. Rogachevskii, D. Sokoloff, and D. Tomin, Phys. Rev. E 79, 046302 (2009).

[62] “Anomalies and time reversal invariance in relativistic hydrodynamics: the second order and higher dimensional formulations”,
D.E. Kharzeev, H.-U. Yee, Phys.Rev. D84 (2011) 045025.

[63] “Helicity conservation laws for fluids and plasmas”,
J. D. Bekenstein, Astrophys. Journ.319, 207 (1987).

[64] “The degree of knottedness of tangled vortex lines”,
H.K. Moffatt, J. Fluid Mech., 35 (1969) 117.

[65] “Perfect magnetohydrodynamics as a field theory”,
J. D. Bekenstein, G. Betschart, Phys.Rev. D74 (2006) 083009;
“General Relativistic Variational Principle for Perfect Fluids”,
A.H. Taub, Phys.Rev. 94 (1954), 1470;
“Elastic Perturbation Theory in General Relativity and a Variation Principle for a Rotating Solid Star”, B. Carter, Comm. Math. Phys. 30 (07, 1973) 261;
“Action functionals for relativistic perfect fluids”,
J. D. Brown, Class.Quant.Grav.10 (1993) 1579.

[66] “Strongly interacting matter in magnetic fields: an overview”,
D. E. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt, and H.-U. Yee, Lect. Notes Phys. 871, 1 (2013);
“The Chiral Magnetic Effect and Anomaly-Induced Transport”,
D. E. Kharzeev, Prog.Part.Nucl.Phys. 75 (2014) 133.

[67] “Entanglement and Correlations near Extremality: CFTs dual to Reissner-Nordström AdS5”,
T. Andrade, S. Fischetti, D. Marolf, S. F. Ross, M. Rozali, JHEP 1404 (2014) 023.

[68] “Anomalous Transport from Kubo Formulae”,
K. Landsteiner, E. Megias, and F. Pena-Benitez, Lect. Notes Phys. 871, 433 (2013).

[69] “Chiral Superfluidity for QCD”,
T. Kalaydzhyan, arXiv:1412.0536 [hep-ph];
“Chiral superfluidity of the quark-gluon plasma”,
T. Kalaydzhyan, Nucl.Phys. A913 (2013) 243-263.

[70] “Cancellation of equilibrium parity-violating currents”,
A. Vilenkin, Phys.Rev. D22 (1980) 3067.

[71] “Inflaton as an auxiliary topological field in a QCD-like system”,
A.R. Zhitnitsky, Phys.Rev. D89 (2014) 6, 063529.