Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Государственный научный центр Российской Федерации –
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики»
Национального исследовательского центра «Курчатовский
институт»

На правах рукописи

Галахов Дмитрий Максимович

Дуальности в квантовой теории поля

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

УДК 530.145+514.745.82

Работа выполнена в ФГБУ “ГНЦ РФ ИТЭФ”, г. Москва

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Морозов А.Ю.
ФГБУ “ГНЦ РФ ИТЭФ”, г. Москва

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Замолодчиков А.Б.
ведущий научный сотрудник,
Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау РАН, г.Черноголовка

доктор физ.-мат. наук Исаев А.П.
начальник сектора Лаборатории теоретической физики,
Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна

Ведущая организация: Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН, г. Москва

Защита состоится "23" сентября 2014 г. в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д.201.002.01 ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ по адресу: 117218, Москва, ул. Б.Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ.

Автореферат разослан "22" августа 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук В.В. Васильев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Дуальность является мощным инструментом изучения непертурбативных явлений в фундаментальных физических задачах, таких как проблема конфайнмента и появления щели в спектре элементарных возбуждений, интегрирование уравнений ренормгруппы, изучение физики фазовых переходов и, конечно же, построение теории суперструн и квантовой гравитации.

Физические теории называют дуальными, когда удается связать наблюдаемые в одной теории с наблюдаемыми в другой. При этом, как правило, оказывается, что дуальные теории находятся в различных режимах: одна в режиме сильной связи, другая – в слабой, когда применимы различные приближенные методы вычисления наблюдаемых, которые, в свою очередь, после применения дуальности превращаются в нетривиальные соотношения на наблюдаемые величины в режиме сильной связи. Соотношения такого рода могут быть реализованы в крайне разнообразных формах, так дуальность может связывать теории совершенно разного типа: например, с различным количеством пространственно-временных измерений. Наличие дуальности, как правило, подразумевает наличие какой-либо фундаментальной, не обязательно явной, симметрии, либо наличие более полной теории, в которой дуальные теории содержатся в предельных областях пространств параметров, и уже симметрия этой объединяющей теории позволяет осуществить отождествление наблюдаемых дуальных теорий.

Богатство и разнообразие явлений, связанных с реализацией дуальности, и высокая универсальность методов открывает широкое поле для научных исследований. В современной литературе серьезный интерес к дуальным моделям проявлен в связи с возможностью непертурбативного описания различных физических величин, недоступного для обычных пертурбативных методов, и выявления неизвестных ранее соотношений между математическими объектами, принимающими участие в описании физических явлений. Вопросам построения непертурбативных величин и поиску скрытых интегрируемых структур, сопутствующих дуальности, в наиболее популярных сюжетах в современной литературе (дуальность Малдасены, S-дуальность, дуальность Алдая-Гайотто-Тачикавы) и посвящена существенная часть диссертации.

S-дуальность является одним из наиболее интересных открытий современной теории струн. Широкий класс S-дуальных моделей может быть описан конструкциями из M5-бран, где шестимерная теория на бране копмактифицирована на двумерную риманову поверхность, которая таким образом контролирует структуру возникающей четырехмерной теории и естественным образом объясняет наличие скрытой интегрируемой структуры, а спектральная кривая интегрируемой системы является накрывающей римановой поверхности. Качественная реализация этой идеи привела к типу дуальности, предложенному Алдаем, Гайотто и Тачикавой (АГТ), которая отождествляет инстантонные суммы Лосева-Мура-Некрасова-Шаташвили, выраженные через функции Некрасова, с конформными блоками двумерных конформных теорий поля. Это отождествление открывает пути для непосредственного количественного изучения S-дуальностей, поскольку построение модулярных преобразований конформных блоков, хоть и сложная, однако решаемая задача. В диссертации явным образом обсуждается обобщение S-дуальности на случай статистичаских сумм Некрасова и вычисляется уравнение, связывающее операторы Верлинде в конформной теории поля (согласно дуальности АГТ соответствующие оператором линейных дефектов) и чек-операторы в теории бета-ансамблей, производится вычисление модулярного ядра, играющего в конформных теориях поля роль, аналогичную преобразованию S-дуальности для теорий Янга-Миллса. Также обсуждается связь с теорией Черна-Саймонса.

На первый взгляд иной тип дуальности, связанный с интегрируемостью, между гравитацией на фоне пространства анти-де-Ситтера (AdS) и конформной теорией поля (CFT) на его границе, получившей название AdS/CFT-соответствия, или дуальности Малдасены, также рассмотрен в диссертации. Такая дуальность была мотивирована рассмотрением свойств черных дыр, чья геометрия вблизи горизонта повторяет геометрию пространства AdS. В современной литературе она получила дальнейшее развитие, позволившее вложить ее в общий контекст интегрируемых теорий. В предложенной работе произведено изучение и сравнение минимальной площади поверхности струны в пространстве AdS и гипотетического выражения для амплитуды рассеяния большого числа глюонов.

Цель и задачи диссертационного исследования

Целью диссертационной работы является решение различных вопросов, связанных с построением непертурбативных величин в квантовой теории поля и теории суперструн, исследование действия на них различных дуальностей, а также изучение связанных с этим математических задач, поиск скрытых непертурбативных симметрий.

В рамках поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

- построение минимальной площади мировой поверхности струны и ее сравнение с амплитудой рассеяния MHV глюонов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса;

- представление действия конформной группы и построение геометрических инвариантных структур, появляющихся в рассмотрении дуальных минимальных площадей поверхности струны и амплитуд рассеяния глюонов;
- непосредственное сравнение следов модулярных ядер в конформной теории поля и инвариантов узлов;
- построение пертурбативного выражения для модулярного ядра из топологической рекурсии;
- вычисление выражений для операторов Верлинде в терминах бета-ансамблей;
- построение непертурбативных выражений для модулярных ядер.

Научная новизна

Все представленные к защите результаты являются оригинальными разработками автора диссертации. По теме представляемого диссертационного материала опубликованы статьи в ведущих международных реферируемых журналах, сделаны доклады на международных конференциях. Работы известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов (по данным SLAC SPIRES, на текущий момент имеется более трех десятков цитирований основных публикаций автора по теме диссертации в статьях других авторов, из них 28 в уже опубликованных в реферируемых журналах работах).

Практическая и научная ценность

Полученные в работе результаты имеют большую значимость для построения непертурбативных величин в квантовой теории поля, а также изучения разнообразных явлений в физике фазовых переходов и интегрируемых системах. Помимо прочего полученые результаты могут найти применение в разнообразных областях математики, таких, как алгебраическая геометрия.

Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Построен обратный оператор к эффективному лаплассиану для действия Намбу-Гото на фоне метрики AdS, и описан алгоритм пертурбативного вычисления минимальной площади поверхности струны.

- Показано, что отклонение в соответствии минимальной площади поверхности струны в пространстве AdS и формулы Берна-Диксона-Смирнова наступает в старших порядках теории возмущения, не контролируемых конформной инвариантностью.

- Изучены геометрические свойства минимальной поверхности и двойного контурного интеграла, и предложено многомерное обобщение конформной производной Шварца.

- Проведено качественное сравнение следа модулярного ядра и Вильсоновского среднего для узла 4_1 в теории Черна-Саймонса.

- Предложена схема построения нового типа дуальности между трехмерной теорией Черна-Саймонса, пятирмерной суперсимметричной теорией Янга-Миллса и q-деформацией теории Тоды, которая становится все более популярна в современной литературе.

- Предложен метод пертурбативного построения модулярного ядра в конформной теории поля, как деформации S-дуальности в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса на Ω-фоне, показано, что модулярное ядро на пертурбативном уровне совпадает с преобразованием Фурье.

- Построена непертурбативная связь операторв Верлинде в двумерной конформной теории поля, или обобщенных операторов Вильсона-'тХоофта в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, и чек-операторов, действующих на точки ветвления накрывающей спектральной кривой.

- Непертурбативное выражение для модулярного ядра получено из уравнения на сплетающий оператор двух дуальных операторов Верлинде.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации были доложены на теоретических семинарах ИТЭФ, университета Ратгерс (Пискатауэй, США) и университета Коламбия (Нью-Йорк, США) и следующих международных конференциях: VII, IX международные школы ИТФ–ИТЭФ по теоретической и математической физике (Киев, 2009г., и Севастополь, 2010 г.); II, III, IV, V Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics (Триест, Италия, 2009, 2010, 2011, 2012 гг.); I Workshop on synthesis of integrabilities arising from gauge-string dualty (Москва, 2010 г.); 48th, 49th International School of Subnuclear Physics (Эриче, Сицилия, Италия, 2010, 2011 гг.); 2nd Northeast String Meeting: Strings, Knots and Related Aspects (Натал, Бразилия, 2013 г.);

По материалам диссертации опубликованы 4 научные работы в ведущих международных реферируемых журналах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения (глава 1), четырех глав основного текста и заключения (глава 6). Общий объем диссертации составляет 121 страниц, включая 2 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 126 наименования.

Содержание диссертации

Во **введении** (глава 1) дана общая характеристика работы: актуальность, значимость, поставленные цель и задачи исследования.

В **главе 2** рассматривается дуальность Алдая-Малдасены применительно к соотношению между площадью минимальной поверхности A_Π в пространстве AdS_5 и контуром на границе Π и двойным контурным интегралом D_Π вдоль Π, абелевым Вильсоновским средним в дуальной модели. Граничный контур Π сформирован многоугольником из n импульсов глюонов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, который в пределе $n = \infty$ может быть заменен на гладкую кривую (волнистую окружность).

Конфигурация мировой поверхности струны, натянутой на контур Π, выбирается такой, что она минимизирует действие Намбу-Гото:

$$A_\Pi = \int \sqrt{\det_{ab} G^{AdS}_{MN}(Y_{min})\partial_a Y^M_{min}\partial_b Y^N_{min}} \tag{1}$$

а дуальное Вильсоновское среднее задается явным выражением:

$$D_\Pi = \frac{1}{4}\oint\oint_\Pi \frac{d\vec{Y}d\vec{Y}'}{(\vec{Y}-\vec{Y}')^2} \tag{2}$$

На пространстве AdS_5 задаются координаты Пуанкаре y_0, y_1, y_2, y_3, r, метрика запишется как

$$ds^2 = \frac{-dy_0^2 + d\vec{y}^{\,2} + dr^2}{r^2} \tag{3}$$

Рассматриваются малые деформации точного решения для граничного контура, заданного уравнениями Π_0: $z = y_1 + iy_2 = e^{i\phi}$, $y_0 = y_3 = 0$.

Минимизирующая действие Намбу-Гото форма поверхности в этом случае – полусфера $r^2 = 1 - z\bar{z}$. Малые деформации граничного контура в терминах координат $\zeta, \bar{\zeta}$ на мировом листе после фиксации калибровки могут быть заданы следующей параметризацией (возмущения вдоль y_3 не рассматриваются)

$$\Pi: \; z = H\left(e^{i\phi}\right), \qquad H(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \zeta^k,$$
$$r(\zeta,\bar\zeta) = \sqrt{1 - \zeta\bar\zeta + a(\zeta,\bar\zeta)} \tag{4}$$
$$y_0(\zeta,\bar\zeta)\big|_{\zeta\bar\zeta=1} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} q_{-k}\bar\zeta^k$$

Уравнения Лагранжа для такого действия Намбу-Гото можно представить в следующем виде:

$$0 = \Delta_{NG}\Big(a(\zeta,\bar\zeta)\Big) + R(a; h, \bar h, q) \tag{5}$$

где представлен дифференциальный оператор Намбу-Гото

$$\Delta_{NG} = 4\partial\bar\partial - \zeta^2\partial^2 - 2\zeta\bar\zeta\partial\bar\partial - \bar\zeta^2\bar\partial^2, \tag{6}$$

а R – некоторая функция, полином по a и ее производным, начинающийся со степени выше второй.

Одним из основных результатов главы 2 является явная процедура инверсии оператора Δ_{NG} и рекурсивное построение выражения для минимальной площади поверхности до достаточно высокого порядка.

В частности, если пренебречь поправками по параметрам q_k, то разложения регуляризованных величин будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} A_\Pi^{reg} &= A_\Pi - \frac{\pi L_\Pi}{2\mu} + 2\pi = \\ &= -3\pi\left(\sum_{m,n}(-)^{m+n} A^{(m|n)}_{k_1\ldots k_m|l_1\ldots l_n} h_{k_1+1}\ldots h_{k_m+1}\bar h_{l_1+1}\ldots \bar h_{l_n+1}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} D_\Pi^{reg} &= D_\Pi - \frac{\pi L_\Pi}{4\lambda} + \frac{\pi^2}{2} = \\ &= -\pi^2\left(\sum_{m,n}(-)^{m+n} D^{(m|n)}_{k_1\ldots k_m|l_1\ldots l_n} h_{k_1+1}\ldots h_{k_m+1}\bar h_{l_1+1}\ldots h_{l_n+1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

где L_Π – длина граничного контура, а μ и λ – параметры регуляризации.

Также в главе 2 показано, что бесконечное число членов разложения вида $A_{\Pi}^{(\cdot|1)}$ и $D_{\Pi}^{(\cdot|1)}$, или $A_{\Pi}^{(1|\cdot)}$ и $D_{\Pi}^{(1|\cdot)}$, совпадают в выражениях для площади и для контурного интеграла, более того их форма фиксирована конформной симметрией задачи при дополнительном предположении о полиномиальной структуре этих членов разложения.

Также явно указано, что старшие порядки в разложении отличаются, поскольку конформной симметрии недостаточно, чтобы фиксировать их вид, и предположение о полиномиальной форме нарушается для минимальной площади, например,

$$A_{ii|ii}^{(2|2)} = \frac{i(i+1)(57i^5 + 103i^4 + 43i^3 - 51i^2 - 16i + 8)}{96(2i-1)(2i+1)} \quad \times |h_{i+1}|^4 \tag{9}$$

в то время, как

$$D_{ii|ii}^{(2|2)} = \frac{i(i+1)(9i^3 - 16i^2 + 9i - 4)}{60} \quad \times |h_{i+1}|^4 \tag{10}$$

Помимо прочего к построению коэффициентов разложения, как показано в этой главе, довольно эффективны применение методов производящих функций и связанная с этим замена переменных типа Мивы:

$$h_n \equiv \sum_i \alpha_i x_i^{n-1} \tag{11}$$

В этих обозначениях

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_i \frac{\alpha_i \zeta}{1 - x_i \zeta} \tag{12}$$

Тогда фиксированные конформной инвариантностью члены разложения и минимальной площади, и двойного интеграла могут быть записаны в явно инвариантных терминах, например, для плоского граничного контура:

$$D^{(\cdot|1)} = -\frac{1}{6} \oint \bar{h}(\bar{\zeta}) S_\zeta(z) \zeta^2 d\zeta \tag{13}$$

где $S_\zeta(z)$ – производная Шварца, или следующее выражение для неплоского случая:

$$D = \frac{2}{3}\pi^2 \frac{1}{2\pi i} \oint dx \bar{y}(\bar{x}) \left(x^2 \left(\frac{y'''}{z'} - \frac{3}{2}\frac{y''z''}{z'^2} + \frac{3}{4}\frac{y'z''^2}{z'^3} - \frac{1}{2}\frac{y'z'''}{z'^2} \right) + \right. \\ \left. + 3x \left(\frac{y''}{z'} - \frac{y'z''}{z'^2} \right) \right) - \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{2\pi i} \oint x^2 dx \bar{z}(\bar{x}) S(z) + \dots \tag{14}$$

В **главе 3** рассмотрено возможное обобщение дуальности Алдая-Гайотто-Тачикавы. Так принята попытка интерпретации теории на доменной стенке между двумя S-дуальными теориями Янга-Миллса как трехмерной теории Черна-Саймонса. Ожидается, что простейшая версия такого соответствия будет связывать след модулярного ядра в двумерной конформной теории поля с инвариантами узлов.

Модулярное ядро связывает два модулярно сопряженных конформных блока $\mathcal{B}$, например, для конформных блоков на торе с модулярными параметрами τ и $-\tau^{-1}$ с промежуточным Лиувиллевским импульсом a и внешним импульсом α

$$\mathcal{B}\big(a\big|\alpha\big| - 1/\tau\big) = \int \mathcal{M}(a, a'|\alpha)\mathcal{B}\big(a'\big|\alpha\big|\tau\big) d\mu(a') \tag{15}$$

где

$$\mathcal{M}(a, a'|\alpha) = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} \int \frac{s(a + r + \tilde{\alpha})s(a - r + \tilde{\alpha})}{s(a + r - \tilde{\alpha})s(a - r - \tilde{\alpha})}\, e^{\frac{4\pi i r a'}{\epsilon_1\epsilon_2}} dr, \\ d\mu(a') = 4\sinh(2\pi\epsilon_1 a')\sinh(2\pi\epsilon_2 a') da' \tag{16}$$

где параметры $\epsilon_{1,2}$ параметризуют Ω-фон для суперсимметричной теории Янга-Миллса, а $s(z)$ – функция квантового дилогарифма. След этого модулярного ядра раскладывается как

$$\int \mathcal{M}(a, a|\alpha) da = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} T_+(\tilde{\alpha})T_-(\tilde{\alpha}) \tag{17}$$

где

$$T_\pm(\tilde{\alpha}) = \int \tfrac{s(z+\tilde{\alpha})}{s(z-\tilde{\alpha})}\, e^{\pm i\pi z^2} dz \tag{18}$$

При этом среднее петли Вильсона вдоль узла 4_1 в теории Черна-Саймонса описывается похожим выражением:

$$< 4_1 > (u) \sim \int s(z+u)s(z-u)e^{\frac{6\pi iuz}{\epsilon_1\epsilon_2}}dz \qquad (19)$$

В таком простейшем наивном варианте дуальность остается нереализованной, тем не менее остается открытой возможность построения альтернативной дуальности, связывающей трехмерную теорию Черна-Саймонса с пятимерной суперсимметричной теорией Янга-Миллса. Возможно описание инвариантов узлов в терминах интегрируемых систем, можно сопоставить в соответствие узлу спектральную кривую. Ожидается, что процедура топологической рекурсии, упомянутая в прочих главах, позволит связать эффективный препотенциал, получаемый из конструкции Зайберга-Виттена для спектральных кривых, со статистическими суммами пятимерной теории Янга-Миллса.

В **главе 4** изучен вопрос об обобщении S-дуальности на статсуммы Некрасова для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и связанный с этим дуальностью Алдая-Гайотто-Тачикавы вопрос о построении коэффициентов Рака для алгебры Вирасоро. В пределе Зайберга-Виттена S-дуальность сводится к преобразованию Лежандра. В простейшем случае на уровне функций Некрасова это преобразование становится преобразованием Фурье.

В этой главе применены методы бета-ансамблей. Выражения для конформных блоков и фунцкий Некрасова для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса на Ω-фоне (запараметризованном $\epsilon_{1,2}$) совпадают и могут быть выражены через статистическую сумму бета-ансамбля:

$$\begin{gathered} Z = \prod_{a<b}(q_q - q_b)^{\frac{2\alpha_a\alpha_b}{g}} \int_{\gamma_i} dz_i \left(\prod_{j>i} z_{ij}^{2\beta}\right) \prod_a (z_i - q_a)^{\frac{2b\alpha_a}{g}}, \\ g = \sqrt{-\epsilon_1\epsilon_2}, \quad \beta = b^2 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{gathered} \qquad (20)$$

Дуальность АГТ предполагает следующую связь между параметрами в четырехточечном конформном блоке в теории Лиувилля и теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ и четырьмя гипермультиплетами материи:

$$\Delta(\alpha) = \frac{\alpha(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad c = 1 + 6Q^2, \quad Q = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = -\epsilon/2 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \epsilon/2 + \alpha_2 - \alpha_1, \\ \mu_3 = -\epsilon/2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad \mu_4 = \epsilon/2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ a = \alpha - \epsilon/2, \quad x = \frac{(q_2 - q_1)(q_3 - q_4)}{(q_2 - q_4)(q_3 - q_1)} = e^{2\pi i \tau_0} \end{aligned} \tag{21}$$

где μ_i – массы гипермультиплетов, а α_i – Лиувиллевские моменты, а q_i – точки вставки вертексных операторов в конформном блоке.

Количество контуров N_1, соединяющих $[q_1, q_2]$, и N_2, соединяющих $[q_1, q_3]$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{1}{b}\Big(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2\Big) \\ N_2 = \frac{1}{b}\Big(b - \frac{1}{b} - \alpha - \alpha_3 - \alpha_4\Big) \end{aligned} \tag{22}$$

Методы теории бета-ансамблей позволяют обобщить значения интегралов на случай нецелых значений N_1 и N_2.

Резольвента в теории бета-ансамблей определяется как следующее среднее с мерой, заданной (20),

$$r_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \left\langle \sum_i \frac{1}{\xi_1 - z_i} \sum_i \frac{1}{\xi_2 - z_i} \ \ldots \ \sum_i \frac{1}{\xi_k - z_i} \right\rangle \tag{23}$$

Известная резольвента $r_1(\xi)$ позволяет определить дифференциал на спектральной кривой $\Omega_{g,\beta} = g r_1(z) dz$ и задать систему уравнений Зайберга-Виттена

$$a = \oint_A \Omega_{g,\beta}, \quad \frac{\partial F(a)}{\partial a} = \oint_B \Omega_{g,\beta} \tag{24}$$

на функцию препотенциала $F(a)$, связанную с статистической суммой простым соотношением $Z(a) = e^{\frac{1}{g^2} F(a)}$

Основным результатом главы 3 является решение системы петлевых уравнений, возникающей как набор тождеств Уорда-Такахаши, и последующее вычисление препотенциала в виде явного ряда

$$F(\mu_1 = 2tm_1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 2tm_3, \mu_4 = 0|x) = \sum_{k,m=0}^{\infty} I_{k,2m}(x) g^{2k} t^{2m} \tag{25}$$

Это позволяет вычислить пертурбативно модулярное ядро преобразования конформных блоков:

$$\boxed{e^{\frac{1}{g^2}F(x|a)} = \int \frac{db}{g} e^{\frac{2\pi i ab}{g^2} + \mathcal{O}(t^6, g^4)} e^{\frac{1}{g^2}F(1-x|b)}} \tag{26}$$

Таким образом в этой главе проверено, что между статсуммами S-дуальных теорий может быть установлена связь, которая в классическом пределе ($\epsilon_{1,2} \to 0$) сводится к обычному преобразованию Лежандра (как это было описано в теории Зайберга-Виттена), а полноценно представлено модулярным ядром, которое поднимает преобразование Лежандра на уровень преобразования Фурье, а пертурбативные поправки отсутствуют.

В **главе 5** проводится непертурбативное исследование задачи, описанной в предыдущей главе.

Важным объектом в исследовании является чек-операторы, действующие, как дифференциальные операторы, на точки ветвления спектральной кривой, и определенные соотношением

$$\check{\nabla}(z) Z = g\, r_1(z) Z \tag{27}$$

Может быть показано, что интегралы по циклам от этих операторов удовлетворяют следующему коммутационному соотношению

$$\left[\oint_{A_I} \check{\nabla}(z),\ \oint_{B^J} \check{\nabla}(z)\right] = 2\pi i \delta_I^J \tag{28}$$

Другим важным элементом рассмотренных в главе 5 теорий является оператор Верлинде в конформной теории поля, которому ставится в соответствие оператор линейного дефекта в суперсимметричной теории Янга-Миллса. Этот оператор строится на пространстве n-точечных конформных блоков CB_n. Сначала строится отображение по известным тождествам Уорда для вырожденных полей из n-точечных блоков в $n+2$-точечные блоки с двумя вырожденными вставками $CB_{n|2}$. Граничные условия также заданы операторным разложением вырожденных полей.

$$\mathcal{C} : CB_n \longrightarrow CB_{n|2}$$

$$\begin{cases} (b^2 L_{-1}^2 - L_{-2}) \left\langle V_{b/2}(z) V_{b/2}(w) \mathcal{O} \right\rangle = 0, \\ \left\langle V_{b/2}(z) V_{b/2}(w) \mathcal{O} \right\rangle \sim (z-w)^{\frac{b^2}{2}} \left\langle \mathcal{O} \right\rangle \end{cases} \tag{29}$$

Затем может быть определена монодромия одного из вырожденных полей вдоль некоторого контура

$$\mathcal{M}_\gamma : CB_{n|2} \longrightarrow CB_{n|2} \tag{30}$$

а затем результат спроецирован на n-точечные блоки путем использования операторного разложения вырожденных полей. Таким образом, оператор Верлинде определен как

$$\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{M}_\gamma \mathcal{C} : \; CB_n \longrightarrow CB_n \tag{31}$$

Основным результатом главы 5 является выведенное соотношение между операторами Верлинде и чек-операторами в частном случае торического конформного блока:

$$\boxed{\mathcal{L}_\gamma^{\mathrm{tor}} = \left[\frac{1}{N(a)} e^{b \oint\limits_\gamma dz\, \check{\nabla}(z)} N(a) + \frac{1}{N(-a)} e^{-b \oint\limits_\gamma dz\, \check{\nabla}(z)} N(-a) \right]} \tag{32}$$

где $N(a)$ – нормировочная функция, связывающая статсумму бета-ансамбля с выражением для конформного блока, и в случае торического конформного блока имеющая вид:

$$N(a) = \frac{\Gamma_b(2a+\mu)\Gamma_b(2a+Q-\mu)}{\Gamma_b(2a)\Gamma_b(2a+Q)} \tag{33}$$

где Γ_b – гамма-функция Барнса, a – Лиувиллевский момент промежуточного поля, а μ – масса присеодиненного гипермультиплета материи в соответствующей суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Статсуммы Некрасова для S-дуальных теорий, или модулярно сопряженные конформные блоки, могут быть интерпретированы как собственные функции дуальных операторов Верлинде $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{L}_B$.

Таким образом, непертурбативное выражение для модулярного ядра найдено в главе 5 как сплетающий оператор для дуальных операторов Верлинде:

$$\mathcal{L}_B(a)M(a,a') = \mathcal{L}_A(a')M(a,a') \tag{34}$$

$$\boxed{M(a,a') = \int d\xi\; C_1(\xi)C_2(a')\frac{S_b\left(\xi+\frac{\mu}{2}-a'\right)S_b\left(\xi+\frac{\mu}{2}+a'\right)}{S_b\left(\xi+Q-\frac{\mu}{2}-a'\right)S_b\left(\xi+Q-\frac{\mu}{2}+a'\right)}e^{4\pi i a\xi}} \tag{35}$$

где S_b – функция квантового дилогарифма, а $C_{1,2}$ – произвольные функции, которые могут быть фиксированы, исходя из дополнительных условий. Это выражение совпадает с выражением, полученным Понсо и Тешнером для коэффициентов Рака-Вигнера для представлений $\mathcal{U}_q(sl_2)$.

В **заключении** (глава 6) представлены полученные в работе результаты и описано возможное направление дальнейших исследований.

Основные публикации по теме диссертации

1. D. Galakhov, H. Itoyama, A. Mironov, and A. Morozov, "Deviation from Alday-Maldacena duality for wavy circle," ***Nucl.Phys.B*** **823** (2009) 289–319;

2. D. Galakhov, A. Mironov, A. Morozov, A. Smirnov, and A. Mironov, "Three-dimensional extensions of the Alday-Gaiotto-Tachikawa relation," ***Theor.Math.Phys.*** **172** (2012) 939–962;

3. D. Galakhov, A. Mironov, and A. Morozov, "S-duality as a beta-deformed Fourier transform," ***JHEP*** **1208** (2012) 067.

4. D. Galakhov, A. Mironov, and A. Morozov, "S-duality and modular transformation as a non-perturbative deformation of the ordinary pq-duality," ***JHEP*** **06** (2014) 050.