

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Галахов Дмитрий Максимович

Дуальности в квантовой теории поля

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
А.Ю. Морозов

Москва 2014

Оглавление

1	Введение	5
1.1	Суперсимметричная теория Янга-Миллса	6
1.2	Дуальность Монтона-Олива и теория Зайберга-Виттена	9
1.3	Дуальность Малдасены	14
1.4	Содержание диссертации	16
1.5	Результаты выносимые на защиту диссертации	17
2	Дуальность Алдая-Малдасены	19
2.1	Гипотеза Алдая-Малдасены для волнистой окружности	21
2.2	Абелев двойной интеграл	23
2.2.1	Примеры	24
2.2.2	Производящие функции	25
2.3	Минимальная поверхность	28
2.3.1	Пертурбативное вычисление минимальной поверхности	28
2.3.2	Обращение оператора Намбу-Гото	30
2.3.3	Первые члены разложения $a(h)$	31
2.3.4	Выражения для $A^{(1 1)}$, $A^{(2 1)}$ и $A^{(3 1)}$	32
2.3.5	Выражение для $A^{(2 2)}$	32
2.4	Конформная инвариантность	34
2.4.1	Инвариантность двойного контурного интеграла	34
2.4.2	Инвариантность минимальной площади	35
2.4.3	О непертурбативных методах	37
2.5	Многомерный случай	38
2.5.1	Уравнения движения	38
2.5.2	Явные выражения	40
2.5.3	Конформная инвариантность в многомерном случае	40
2.5.4	Многомерное обобщение производной Шварца	44
2.6	Выводы	46
3	Дуальность в трех измерениях	48
3.1	Модулярное ядро	48
3.2	Примеры из теории узлов	50
3.2.1	Представление через квантовый дилогарифм	52
3.2.2	Формализм Хиками в теории Черна-Саймонса	53
3.2.3	Спектральные кривые и топологическая рекурсия	54

3.3	Трехмерное соотношение Алдая-Гайотто-Тачикавы	55
3.4	Альтернативная дуальность	56
3.5	Выводы	57
4	S-дуальность: пертурбативный подход	59
4.1	Коэффициенты Рака-Вигнера для алгебры Вирасоро [95]	59
4.1.1	Определения	59
4.1.2	Различные модулярные преобразования	61
4.1.3	Коэффициенты Рака-Вигнера для представлений $\mathcal{U}_q(sl_2)$	62
4.2	Конформные блоки и статистическая сумма в теории Янга-Миллса	64
4.2.1	Статистическая сумма Некрасова	64
4.2.2	Матричные модели	65
4.3	Пертурбативное модулярное преобразование	67
4.3.1	Простейший случай и общая стратегия	67
4.3.2	Точно решаемые случаи	69
4.3.3	Преобразование Фурье из алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$	70
4.4	Разложение по родам в матричных моделях и пертурбативные поправки к модулярному ядру	71
4.4.1	Петлевые уравнения	71
4.4.2	Посторение модулярного ядра	73
4.4.3	Несколько первых членов разложения	74
4.5	S-дуальность в пределе Некрасова-Шаташвили: комментарии и замечания	75
4.5.1	Модулярные преобразования на торе	76
4.5.2	Преобразование S-дуальности для эффективной константы связи	78
4.5.3	Полная группа дуальности	79
4.6	Выводы	82
5	S-дуальность: непертурбативный подход	84
5.1	Дуальность и собственные функции дуальных операторов	84
5.2	Чек-операторы	85
5.2.1	Петлевые уравнения и их симметрии	85
5.2.2	Резольвенты в представлении чек-операторов [14, 13]	88
5.2.3	Пара дуальных чек-операторов	90
5.3	Непертурбативное модулярное преобразование	91
5.3.1	Фазовая неоднозначность	91
5.3.2	Непертурбативные дуальные монодромии: торический случай	93
5.3.3	Чек-операторы и линейные дефекты	94
5.3.4	Четырехточечный конформный блок на сфере	97
5.4	Непертурбативное модулярное ядро	98
5.5	Выводы	101
6	Заключение	102

7	Приложения	104
7.1	Приложение А. Свойства дилогарифма	104
7.1.1	А2. Модулярное ядро	105
7.1.2	А3. Среднее в теории Черна-Саймонса.	106
7.1.3	А4. Символ Почхаммера как отношение дилогарифмов	108
7.2	Приложение В. Нормировочный коэффициент для матрично-модельной статистической суммы	109

Глава 1

Введение

Дуальность является мощным инструментом изучения непертурбативных явлений в фундаментальных физических задачах, таких как проблема конфайнмента и появления щели в спектре элементарных возбуждений, интегрирование уравнений ренормгруппы, изучение физики фазовых переходов и, конечно же, построение теории суперструн и квантовой гравитации.

В диссертации рассматриваются примеры применения дуальности к различным областям квантовой теории поля, а также способы построения различных непертурбативных физических величин: амплитуд, эффективных действий и эффективных операторов.

Физические теории называют дуальными, когда удается связать наблюдаемые в одной теории с наблюдаемыми в другой. При этом, как правило, оказывается, что дуальные теории находятся в различных режимах: одна в режиме сильной связи, другая – в слабой, когда применимы различные приближенные методы вычисления наблюдаемых, которые, в свою очередь, после применения дуальности превращаются в нетривиальные соотношения на наблюдаемые величины в режиме сильной связи. Связи такого рода могут быть реализованы в крайне разнообразных формах, так дуальность может связывать теории совершенно разного типа: например, с различным количеством пространственно-временных измерений. Наличие дуальности, как правило, подразумевает наличие какой-либо фундаментальной, не обязательно явной, симметрии, либо наличие более полной теории, в которой дуальные теории содержатся в предельных областях пространств параметров, и уже симметрия этой объединяющей теории позволяет осуществить отождествление наблюдаемых дуальных теорий.

Наглядным примером такого соотношения [32, 73] может служить ду-

альность модели синус-Гордона с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta \phi - 1) \quad (1.1)$$

и модели Тиринга с лагранжианом

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi - \frac{g}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.2)$$

В модели синус-Гордона присутствуют обычные скалярные возбуждения и солитонные переходы между вакуумами, в модели Тиринга, в свою очередь, присутствуют спинорные возбуждения и их связанные состояния. И эти теории оказываются эквивалентными при отображении солитонов в спинорные возбуждения, а скалярных возбуждений – в связанные состояния, и отождествлении констант связи:

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi} \quad (1.3)$$

как легко видеть, режим сильной связи одной теории соответствует режиму слабой связи другой.

Особенно интересно применение дуальности как непертурбативного метода изучения теорий к проблеме конфайнмента кварков в квантовой хромодинамике. Особую роль здесь играет суперсимметричная теория Янга-Миллса. С одной стороны это суперсимметричный аналог самой квантовой хромодинамики, с другой стороны, введя достаточное количество суперсимметрий, можно добиться различных эффектов интегрируемости и связать непертурбативные явления с геометрией скрытых симметричных структур.

1.1 Суперсимметричная теория Янга-Миллса

Сначала кратко напомним конструкцию $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории в четырех измерениях, которая крайне важна для нашего обсуждения. Напомним основные представления: векторный мультиплет и гипермультиплет [16, 25]. Начнем с $\mathcal{N} = 2$ векторного мультиплета. Он содержит калибровочное поле A_μ , два вейлевских фермиона λ, ψ и комплексный скаляр ϕ , все в присоединенном представлении калибровочной группы G . Гипермультиплет содержит два вейлевских фермиона ψ_q и ψ_q^\dagger , и комплексные

бозоны q и q^\dagger . Можно составить следующие диаграммы из этих полей в соответствии с действием суперсимметричной Клиффордовой алгебры:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 a_1^\dagger \swarrow & & \searrow a_2^\dagger \\
 \lambda & & \psi \\
 a_2^\dagger \searrow & & \swarrow a_1^\dagger \\
 & \phi &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \psi_q & \\
 a_1^\dagger \swarrow & & \searrow a_2^\dagger \\
 q & & q^\dagger \\
 a_2^\dagger \searrow & & \swarrow a_1^\dagger \\
 & \psi_{\tilde{q}}^\dagger &
 \end{array}
 \tag{1.4}$$

Также удобно собрать поля мультиплетов в суперполя на супермногообразии, тогда действие суперсимметрии может быть явно описано как преобразование координат на этом супермногообразии. Выбрав координаты x^μ , θ^α , $\tilde{\theta}^\alpha$ на супермногообразии, из представленных полей легко построить киральные суперполя.

$$\Psi = \Psi^{(1)}(\tilde{y}, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha \Psi_\alpha^{(2)}(\tilde{y}, \theta) + \tilde{\theta}^2 \Psi_\alpha^{(3)}(\tilde{y}, \theta) \tag{1.5}$$

$$\Psi_\alpha^{(2)}(\tilde{y}, \theta) = W_\alpha(\tilde{y}, \theta), \quad \Psi^{(3)} = \int d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^V \tag{1.6}$$

$$Q(y, \theta) = q(y) + \sqrt{2}\theta\psi_q(y) + \theta^2 F_q(y) \tag{1.7}$$

где $y^\mu = x^\mu + i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta$, $\tilde{y}^\mu = y^\mu + i\bar{\tilde{\theta}}\sigma^\mu\tilde{\theta}$, а V , Φ – киральные $\mathcal{N} = 1$ векторное и скалярное поля, содержащие в себе $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет, а $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 e^{-V} D_\alpha e^V$ [118]. В этих терминах лагранжиан $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса запишется как

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im Tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \frac{\tau}{2} \Psi^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \left[\int d^4\theta \left(Q_i^\dagger e^{-2V} Q_i + \tilde{Q}_i^\dagger e^{2V} \tilde{Q}_i \right) + \right. \\
 \left. + \int d^2\theta \left(\sqrt{2}\tilde{Q}_i \Phi Q_i + m_i \tilde{Q}_i Q_i \right) + h.c. \right] \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

В лагранжиане введена комплексная константа связи $\tau = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi}$, где g – обычная константа связи теории Янга-Миллса, а θ определяет топологический θ -член.

Рассмотрим предел низких энергий для этой теории. Важно заметить, что после интегрирования по вспомогательным полям в лагранжиане появляется эффективный потенциал для скалярного поля:

$$V = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left([\phi^\dagger, \phi] \right)^2 \tag{1.9}$$

Чтобы определить вакуум теории, необходимо минимизировать этот потенциал, выбрав ориентацию поля, совпадающую с картановской подалгеброй изначальной алгебры Ли калибровочной группы G . Вакуум разрушает изначальную калибровочную симметрию до произведения факторов $G \rightarrow U(1)^{\text{rank } G}$ посредством механизма Хиггса так, что $\langle \phi \rangle = a_i H^i$, где H^i – элементы подалгебры Картана, например, в теории с калибровочной группой $SU(2)$ $\langle \phi \rangle = \text{diag}(a, -a)$. Чтобы параметризовать так называемую кулоновскую ветвь теории, используют набор наблюдаемых, являющихся инвариантами группы Вейля, для калибровочной группы $SU(n)$ это $u_k = \langle \frac{1}{k} \text{Tr } \phi^k \rangle$. Эти параметры преобразуются под действием ренормгруппового потока и связаны с вакуумными средними скалярного поля $\langle \phi \rangle$ при низких энергиях сложным образом.

Далее рассмотрим действие ренормализационной группы на суперсимметрию. Изначальная суперсимметрия $SU(2)_R \otimes U(1)_R$ лагранжиана (1.8) может быть нарушена аномалиями. Остаточная симметрия оказывается $(SU(2)_R \otimes \mathbb{Z}_{4N_c - 2N_f})/\mathbb{Z}_2$. Таким образом низкоэнергетическое эффективное действие должно сохранять эту симметрию.

Здесь мы собрали все необходимые ингредиенты для явного построения низкоэнергетического действия: оно содержит абелевый $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет, полученный из оставшейся безмассовой диагональной части высокоэнергетического калибровочного поля. Форма членов действия с максимум двумя производными и не более, чем четырьмя, фермионами ограничена суперсимметрией [110]. Все они могут быть собраны в одну гармоническую функцию \mathcal{F} , называемую препотенциалом

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \text{Im Tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\mathcal{A}) \quad (1.10)$$

здесь \mathcal{A} – эффективное калибровочное $\mathcal{N} = 2$ суперполе, принимающее значения в $U(1)^{\text{rank } G}$. Сохраняющаяся в низкоэнергетическом пределе суперсимметрия накладывает на препотенциал соответствующие ограничения: он должен быть голоморфной функцией везде на пространстве модулей кроме нескольких особенностей. Более детальное исследование поведения теории вблизи особенности $a \rightarrow \infty$ позволяет более точно фиксировать вид препотенциала, например, для теории с калибровочной группой $SU(2)$ без материи

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{2\pi} a^2 \log \frac{a^2}{\Lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{\Lambda}{a} \right)^{4k} a^2 \quad (1.11)$$

Первый член в разложении получается из однопетлевой поправки к бета-функции, старшие члены – из инстантонных поправок. Точное выражение для препотенциала может быть выведено с помощью геометрических методов, путем исследования особенностей этой функции [110]. Особенности препотенциала имеют глубокий физический смысл. Они появляются в точках пространства модулей, где какие-то возбужденные состояния оказываются безмассовыми и изменяют явный вид низкоэнергетического эффективного действия. Наконец заметим, что действие $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса получается из $\mathcal{N} = 2$ действия, когда гипермультиплет выбран в присоединенном представлении, а его масса равна нулю.

1.2 Дуальность Монтона-Олива и теория Зайберга-Виттена

Пожалуй, самым хорошо известным и первым открытым примером дуальных теорий является обычная электродинамика. Одну пару из четырех уравнений Максвелла можно представить в инвариантной форме как

$$\delta F = j_e \quad (1.12)$$

где введено обозначение $\delta = *d*$, $*$ – оператор, звезда Ходжа, а j_e – един-форма электрического тока. Вторая пара уравнений запишется тогда в виде

$$*dF = \delta \tilde{F} = 0 \quad (1.13)$$

где введено обозначение $\tilde{F} = *F$ для дуального тензора поля. Этим уравнениям может быть придана симметричная форма посредством введения тока магнитных зарядов j_m . Изначально уравнение (1.13) позволяет искать решение в виде точной формы $F = dA$, однако после добавления магнитных зарядов такое решение может существовать только локально. Область пространства, где это решение имеет сингулярность, может быть собрано в двумерную поверхность, ограниченную мировой линией магнитного заряда, называемую струной Дирака. Эффективную квантовую теорию магнитных зарядов можно сделать невосприимчивой к наличию струны, при этом электрическая g_e и магнитная g_m константы связи будут удовлетворять условию квантования

$$\frac{g_e g_m}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad (1.14)$$

В настоящее время нет наблюдений, подтверждающих существование $U(1)$ -магнитных монополей (частиц, несущих единичный магнитный заряд)[22] в природе, однако они играют важнейшую роль, как возбуждения в низкоэнергетических эффективных теориях. Так в неабелевой теории Янга-Миллса-Хиггса возможны классические полевые конфигурации (монополюс 'тХоофта-Полякова [113, 106]), чьи характеристики напоминают характеристики абелева магнитного монополя, а соотношения дуальности были впервые рассмотрены Монтоном и Оливом [93].

Так хорошо известно, что конфайнмент в квантовой хромодинамике может быть описан как фаза, дуальная фазе со спонтанно нарушенной симметрией, иными словами, когда поле монополей получает ненулевое вакуумное среднее [111]. Для инвариантного определения фазы используют операторы Вильсона, голономии связности калибровочного поля, и операторы 'тХоофта, голономии дуальной связности, определенной как $\tilde{F} = dA^{(D)}$ [114]:

$$W_R(\gamma) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_{\gamma} A, \quad H_R(\gamma) = \text{Tr}_R \mathcal{P} \exp \oint_{\gamma} A^{(D)} \quad (1.15)$$

Когда оператор Вильсона удовлетворяет “закону площади”

$$W_R(\gamma) \sim e^{\kappa S(\gamma)}$$

где $S(\gamma)$ – площадь двумерной поверхности, натянутой на граничный контур γ , а κ – некоторый коэффициент, считается, что теория находится в фазе конфайнмента, когда оператор 'тХоофта - в фазе спонтанно нарушенной симметрии.

В главе 5 мы приведем способы построения этих операторов в суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Низкоэнергетическое эффективное действие для суперсимметричной теории Янга-Миллса описывает суперсимметричную абелеву калибровочную теорию. Дуальная теория получается путем преобразования Лежандра. Эффективная константа связи

$$\tau = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \mathcal{F}(a) \quad (1.16)$$

и эффективная константа связи дуальной теории связаны соотношением

$$\tau^{(D)} = -\tau^{-1} \quad (1.17)$$

Вместе с преобразованием эквивалентности при сдвиге θ -угла на 2π преобразование дуальности образует группу S -дуальности $SL(2, \mathbb{Z})$.

S -дуальность является одним из наиболее интересных открытий современной теории струн [93, 110, 111].

Широкий класс S -дуальных моделей может быть описан конструкциями из $M5$ -бран [121, 78, 45], где шестимерная теория на бране компактифицирована на двумерную риманову поверхность, которая таким образом контролирует структуру возникающей четырехмерной теории и естественным образом объясняет наличие скрытой интегрируемой структуры [55, 74, 54], а спектральная кривая интегрируемой системы является накрывающей римановой поверхности. Качественная реализация этой идеи [45] привела к другому типу дуальности, предложенному Алдаем, Гайотто и Тачикавой (АГТ) [6, 123, 82, 85], которая отождествляет инстантонные суммы Лосева-Мура-Некрасова-Шаташвили [71, 94], выраженные через функции Некрасова [102], с конформными блоками двумерных конформных теорий поля [21, 126]. Это отождествление открывает пути для непосредственного количественного изучения S -дуальностей, поскольку построение модулярных преобразований конформных блоков, хоть и сложная, однако решаемая задача.

Сложность заключается в том, что изначальное определение конформных блоков дано в виде пертурбативного ряда по модулярному параметру x ; в случае сферического четырехточечного конформного блока, связанного соотношением АГТ с суперсимметричной теорией Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ и четырьмя гипермультиплетами материи, x – просто двойное отношение четырех точек вставки вертексных операторов, а модулярное преобразование связывает конформные блоки в точках x и $1 - x$. Обычно необходимо какое-то непертурбативное пополнение этого определения, чтобы, как минимум, поставить задачу.

Существует несколько таких определений: использование представлений $SL_q(2)$ [108, 116], либо различных уравнений для конформных блоков, начиная с тождеств Уорда для расширенных конформных блоков с дополнительной вставкой вырожденных полей [4, 36, 70, 77, 18, 76] и заканчивая примечательным, но тем не менее не до конца понятным, соотношением с уравнениями Пенлеве [59].

Заметим, что изучение дуальности АГТ задает также и иной, более прямой подход, являющийся своеобразной деформацией (“квантованием”)

подхода к S -дуальности в теории Зайберга-Виттена. Конформные блоки обладают аналогичной реализацией в терминах матричных моделей (β -ансамблей) [34, 109, 87], которые представляют собой усовершенствованную версию давнего приема Доценко-Фатеева [35] и конструкции Фелдера [44] (в частности, контуры интегрирования для экранирующих зарядов могут быть открыты, а не обязательно замкнуты, взамен достаточно использовать один вид экранирующих зарядов). Далее можно изучить разложение по родам в этой теории, которое оказывается инвариантным по отношению к S -дуальности. В частности этот прием позволяет пересуммировать “пертурбативное” разложение конформных блоков в ряды по переменной x в ряды по переменной $g_s^2 = \epsilon_1 \epsilon_2$ ¹, где каждый член ряда, как функция x , имеет особенности в $0, 1, \infty$, и может быть легко продолжен из одной особенности в другую.

На самом деле нужно быть осторожным с применением термина “пертурбативный” в данном контексте. Как мы упомянули, стандартное определение конформного блока предполагает пертурбативное разложение не только по переменной x , но и по размерностям операторов, т.е. по струнной константе связи g_s . Непертурбативные поправки существуют и по x , и по g_s , и они на самом деле значительно отличаются. Далее мы будем использовать термины “пертурбативный” и “непертурбативный” для поправок по g_s^2 , предполагая, что поведение по переменной x полностью фиксировано матрично-модельным описанием. Таким образом, “пертурбативный конформный блок” отвечает разложению по родам β -ансамбля, описываемого формализмом топологической рекурсии [30, 12, 15, 41] и [31], в то время как “непертурбативный конформный блок” отвечает более абстрактной величине, которой пока не сопоставлено однозначно принятого определения. Возможно, существующие предложения [108, 59, 4, 36] и те, что описаны в диссертации, прольют свет на данную проблему.

В диссертации будет использовано определение через β -ансамбли Доценко-Фатеева [87] для изучения S -дуальностей (модулярных преобразований) для пертурбативных и непертурбативных конформных блоков в главах 4 и 5 соответственно.

Как будет показано в главе 4 пертурбативные поправки к модулярно-

¹Параметры $\epsilon_{1,2}$ задают деформирующий Ω -фон в суперсимметричной теории Янга-Миллса [102], а с точки зрения конформной теории поля параметризуют центральный заряд и общий масштаб поведения конформных размерностей [6].

му ядру не появляются, а значит, действие S -дуальности, как и в случае теории Зайберга-Виттена, отвечает преобразованию Лежандра (Фурье при учете деформации) во всех порядках по струнной константе связи.

Это утверждение было пересмотрено и подтверждено со слегка другой точки зрения в работах [26, 27]. Эти результаты пертурбативны, и их точное соотношение с непертурбативными результатами [108, 59] остается ясным не до конца, хотя последние согласованы с преобразованием Фурье на пертурбативном уровне.

Вычисления, представленные в главе 4, довольно громоздки, что кажется довольно странным для такого простого результата. Простое объяснение будет представлено в главе 5, оно открывает путь для исследования более глубоких следствий возникающего формализма, который, на первый взгляд, кажется лишь техническим приемом в обобщенной теории матричных моделей [14, 13].

Интуитивная идея была сформулирована в работе [4]: для описания дуальности можно рассматривать соответствующие дуальные статистические суммы как собственные функции канонически сопряженных квантовых операторов. Вопрос заключается в понимании, что это за операторы и как они действуют на статистические суммы Янга-Миллса и конформные блоки конформной теории поля.

Матричные модели позволяют вложить это обсуждение в контекст теории Зайберга-Виттена, где статистическая сумма может быть определена, как функция плоских модулей \vec{a} с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \left(\oint_{\vec{A}} \lambda \right) Z(\vec{a}) &= \vec{a} Z(\vec{a}), \\ \left(\oint_{\vec{B}} \lambda \right) Z(\vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial \vec{a}} Z(\vec{a}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

которые позволяют интерпретировать периоды мероморфного дифференциала Зайберга-Виттена как операторы, действующие на пространстве модулей. В разложении по родам в матричных моделях роль дифференциала Зайберга-Виттена играет одноточечная резольвента, которая может быть определена и обычным способом [12], и с помощью так называемых чек-операторов [14, 13], которые действуют на точки ветвления накрывающей спектральной кривой.

1.3 Дуальность Малдасены

Как мы уже упомянули, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса может быть получена из $\mathcal{N} = 2$ теории рассмотрением безмассового гипермультиплета материи в присоединенном представлении. Эта теория суперконформна: петлевая бета-функция в ней тождественно зануляется. Она играет важную роль в ином типе дуальности между гравитацией на фоне пространства анти-де-Ситтера (AdS) и конформной теорией поля (CFT) на его границе, получившей название AdS/CFT-соответствия, или дуальности Малдасены.

Интерес к такому типу дуальности связан с попытками понять поведение теорий с калибровочной группой $SU(N)$ при больших N в режиме сильной связи. Особое внимание эта область привлекла к себе после работы Х.Малдасены [72], в которой, рассматривая структуру метрики вблизи горизонта черной дыры, удалось связать предел больших N конформно инвариантных теорий в d измерениях с супергравитацией (теорией струн с более широкой точки зрения) на произведении пространства AdS размерности $d + 1$ и некоторого компактного многообразия, которое в случае максимальной суперсимметрии оказывается сферой.

Важным примером такого соответствия является $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса в четырех измерениях с калибровочной группой $SU(N)$ и константой связи g_{YM} . Эта теория ставится в соответствие теории суперструн типа IIB на фоне $AdS_5 \times S^5$, где струнная константа связи g_{st} пропорциональна g_{YM}^2 , N единицам потока поля пять-формы через S^5 и радиусу кривизны $(g_{YM}^2 N)^{\frac{1}{4}}$. В пределе большого N при фиксированном, но большом значении $x = g_{YM}^2 N$ струнные возбуждения отщепляются, а супергравитация является хорошим приближением.

Такая дуальность, построенная в [72], была мотивирована рассмотрением свойств черных дыр, чья геометрия вблизи горизонта повторяет геометрию пространства AdS. У пространства AdS имеется ряд своеобразных свойств: например, граница на пространственной бесконечности, которая на самом деле является копией d -мерного пространства Минковского, а группа симметрий пространства AdS_{d+1} $SO(2, d)$ действует на эту границу как конформная группа. Таким образом группы симметрий обеих теорий, а соответственно и представления полей, совпадают.

Дальнейшее интересное развитие эта дуальность получила в работах [5],

а затем в работах [7], позволивших вложить ее в общий контекст интегрируемых теорий. Для этого необходимо рассмотреть амплитуды рассеяния глюонов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса в режиме сильной связи. Эти амплитуды являются инфракрасно расходящимися и, на первый взгляд, не кажутся хорошими наблюдаемыми. Однако часто при практическом вычислении амплитуд рассеяния эти амплитуды являются важным промежуточным шагом на пути к хорошо определенным наблюдаемым.

С точки зрения AdS/CFT-соответствия такие амплитуды отвечают классической струнной конфигурации, построенной по известным данным процесса рассеивания. Конечная форма соотношения между амплитудой рассеяния n глюонов в режиме сильной связи и струнным действием имеет следующий вид :

$$\mathcal{A} \sim e^{iS_{cl}} = e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \text{Area}} \quad (1.19)$$

где S_{cl} отвечает классическому действию на классическом решении уравнений, задающих форму мирового листа струны в пространстве AdS , а λ – константа 'тХоофта. Это выражение зависит от импульсов рассеиваемых глюонов. Зависимость от константы связи сводится к одному-единственному общему множителю. Структура инфракрасных расходимостей в этом выражении прекрасно согласуется с тем, что можно ожидать в квантовой теории поля.

Особый интерес эти амплитуды вызывают в связи с гипотезой, предложенной Берном, Диксоном и Смирновым [24] для просуммированного по всем порядкам теории возмущений для максимально нарушающих спиральность (MHV) амплитуд рассеяния n глюонов. В частности амплитуда рассеяния четырех глюонов имеет вид:

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_4^{\text{tree}} \exp \left[(\text{IR divergent}) + f(\lambda) (\log(s/t))^2 + \dots \right] \quad (1.20)$$

где s, t – параметры Мандельстама.

Как мы покажем, к сожалению, соотношение перестанет быть столь простым для амплитуд с большим числом глюонов. Тем не менее, такое рассмотрение открывает путь к изучению геометрических структур, скрытых за интегрируемостью $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и дуальной ей теории суперструн [5, 7].

1.4 Содержание диссертации

В **главе 2** обсуждается широко известный пример струнной AdS/CFT дуальности, в частности случай так называемой дуальности Алдая-Малдасены, связывающей амплитуду рассеяния глюонов в $N=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с минимальной площадью поверхности в пространстве AdS. Подробно обсуждается метод решения задачи Плато в пространстве AdS пертурбативными методами. Этот способ особенно продуктивен при изучении предела большого числа глюонов, участвующих в рассеянии. Проведено сравнение выражений для минимальной поверхности и глюонной амплитуды.

В **главе 3** кратко обсуждается пример дуальности Алдая-Гайотто-Тачикавы. Приводится пример изучения применения такой дуальности к трехмерным теориям поля, связывающий средние Вильсоновских петель и следы модулярных ядер в конформной теории поля. Подробно изучен пример модулярного ядра для торического блока и Вильсоновского среднего узла 4_1 .

В **главе 4** обсуждается применение дуальности Алдая-Гайотто-Тачикавы к вычислению модулярного ядра преобразований конформных блоков в двумерной конформной теории поля и его связь с S-дуальностью в низкоэнергетическом пределе суперсимметричной теории Янга-Миллса. С помощью разложения по родам произведено пересуммирование ряда, отвечающего разложению конформного блока по модулярному параметру, и выведена пертурбативная форма модулярного ядра.

В **главе 5** к задаче вычисления модулярного ядра применены непертурбативные методы. Найдено представление операторов Верлинде и обобщенных операторов Вильсона-'тХоофта в терминах так называемых чек-операторов. Получено непертурбативное выражение для модулярного ядра.

В **заключении** обсуждаются полученные результаты.

1.5 Результаты выносимые на защиту диссертации

- Построен обратный оператор к эффективному лапласиану для действия Намбу-Гото на фоне метрики AdS, и описан алгоритм пертурбативного вычисления минимальной площади поверхности струны.
- Показано, что отклонение в соответствии минимальной площади поверхности струны в пространстве AdS и формулы Берна-Диксона-Смирнова наступает в старших порядках теории возмущения, не контролируемых конформной инвариантностью.
- Изучены геометрические свойства минимальной поверхности и двойного контурного интеграла, и предложено многомерное обобщение конформной производной Шварца.
- Проведено качественное сравнение следа модулярного ядра и Вильсоновского среднего для узла 4_1 в теории Черна-Саймонса.
- Предложена схема построения нового типа дуальности между трехмерной теорией Черна-Саймонса, пятимерной суперсимметричной теорией Янга-Миллса и q -деформации теории Тоды, которая становится все более популярна в современной литературе.
- Предложен метод пертурбативного построения модулярного ядра в конформной теории поля, как деформации S-дуальности в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса на Ω -фоне, показано, что модулярное ядро на пертурбативном уровне совпадает с преобразованием Фурье.
- Построена непертурбативная связь операторов Верлинде в двумерной конформной теории поля, или обобщенных операторов Вильсона-'тХоофта в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, и чек-операторов, действующих на точки ветвления накрывающей спектральной кривой.
- Непертурбативное выражение для модулярного ядра получено из уравнения на сплетающий оператор двух дуальных операторов Верлинде.

По теме диссертационного исследования в ведущих реферируемых журналах опубликованы статьи [47, 50, 48, 49].

Благодарности

Я хотел бы особо поблагодарить моего научного руководителя А.Ю.Морозова за постановку интересных задач и разъяснения научных вопросов. Я очень признателен ему за помощь, поддержку и внимание к моей работе.

Я выражаю благодарность соавторам по совместным работам Х.Итояме, П.Лонги, А.Миронову, Г.Муру, А.Смирнову, а также признательность за полезные обсуждения и разъяснения научных вопросов В.Альбе, А.Анохиной, С.Апенко, С.Артамонову, Э.Ахмедову, Ф.Бурде, Д.Васильеву, В.Долотину, П.Дунину-Барковскому, А.Забродину, А.Литвинову, А.Лосеву, В.Лосякову, А.Маршакову, А.А.Морозову, И.Полюбину, А.Пополитову, А.Слепцову, С.Харчеву и Ш.Шакирову. Я также хотел бы поблагодарить Е.Суслову за поддержку и помощь.

Глава 2

Дуальность Алдая-Малдасены

Гипотеза Алдая-Малдасены [10], [1], [9], [11], [60] следствие, мотивированное реализацией [72, 122] струнно-калибровочной дуальности [107], – одна из выдающихся идей в математической физике. Здесь мы основываемся описании проблемы, приведенном в [91]-[97]. В нашем понимании

гипотеза Алдая-Малдасены:
задача Плато в пространстве AdS разрешима в слабом смысле

Более того, такая гипотеза может быть переписана в более явной форме: (регуляризованная) площадь минимальной поверхности в пространстве AdS

$$A_{\Pi} = \int \sqrt{\det G_{MN}^{AdS}(Y_{min}) \partial_a Y_{min}^M \partial_b Y_{min}^N} \quad (2.1)$$

с заданным граничным контуром Π на плоской бесконечно удаленной границе AdS и абелево Вильсоновское среднее, (регуляризованный) двойной интеграл вдоль границы

$$D_{\Pi} = \frac{1}{4} \oint \oint_{\Pi} \frac{d\vec{Y} d\vec{Y}'}{(\vec{Y} - \vec{Y}')^2} \quad (2.2)$$

пропорциональны друг другу

$$\boxed{A_{\Pi}^{reg} \stackrel{?}{=} \kappa_{\Pi} D_{\Pi}^{reg}} \quad (2.3)$$

где κ_{Π} зависит только от углов u Π , точек, где контур не гладок, но не от гладких деформаций. Это решение задачи Плато в *слабом* смысле, поскольку поддается вычислению только *площадь* минимальной поверхности, но не ее конкретная форма.

Физическая мотивация, стоящая за этой гипотезой, следует из струнно-калибровочной дуальности с применением предположения Берна-Диксона-Смирнова [24]: явных формул для многопетлевых диаграмм в планарном пределе $N = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Гипотеза БДС, переработанная в [10, 39, 29] при помощи дуальности КТ [65], предсказывает, что пертурбативная теория в слабой связи предоставляет ответ для амплитуд, максимально нарушающих спиральность, в терминах абелева двойного интеграла:

$$\mathcal{A}_{BDS} \sim \exp(\tilde{\kappa} D_{\Pi}) \quad (2.4)$$

Эта форма позволяет продолжить выражение в режим сильной связи, просто заменив коэффициент $\tilde{\kappa}$ каким-то другим κ . Зависимость параметра $\tilde{\kappa}$ от константы связи крайне сложна, как и для любого другого параметра в эффективном действии [98], она связана со скрытой интегрируемой структурой [80]. Связь κ - $\tilde{\kappa}$ также продиктована этой структурой, однако этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Поскольку в режиме сильной связи струнное описание должно преобладать (при этом некритическая струна описывается соответствием AdS/CFT [72, 122]), то же выражение должно описываться $\exp(A_{\Pi})$, а, следовательно, заключаем, что $A_{\Pi} = \kappa D_{\Pi}$, как и предложено в (2.3).

К сожалению, более тщательное изучение гипотезы БДС (2.4) приводит к ее важным доработкам [23, 38]: как изначально было предложено в [37], петлевые диаграммы могут быть просуммированы в неабелево Вильсоновское среднее, таким образом, *ответ* не может быть явно проэкспоненцирован и продолжен в область сильной связи, что делает гипотезу Алдая-Малдасены (2.3) беспочвенной. Хуже того, отсутствие таких простых формул как (2.4) с зависимостью от импульсов в Π и D_{Π} , отделенной от зависимости от константы связи в $\tilde{\kappa}_{\Pi}$, делает невозможными пертурбативные (диаграммные) вычисления для анализа в области сильной связи. Таким образом, соотношение (2.3) и его возможные модификации приходится изучать непосредственным образом, без ссылок на диаграммные вычисления в суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Тем не менее эта задача хорошо определена, поскольку обе части (2.3) имеют геометрический смысл и не содержат ссылок к квантовой теории поля. Однако эта задача является сложной, поскольку построение поверхности минимальной площади в пространстве AdS с заданной границей за-

труднено само по себе: задача Плато в пространстве AdS не кажется сильно проще, чем ее евклидовый аналог, давняя “сложная задача” в фундаментальной математике.

В данной работе мы применяем методы рассмотрения возмущенных (волнистых) граничных контуров [112, 8]: небольших деформаций точно решаемых примеров, т.е. мы рассматриваем такие Π , которые слабо и гладко отклоняются от Π_0 , для которого минимальная поверхность в AdS известна. Эта идея слегка нарушает изначальную постановку задачи, где Π был многоугольником со светоподобными сторонами и, следовательно, не являлся гладким. Волнистые контуры будут преобладать в пределе рассеяния $n \rightarrow \infty$ частиц с маленькими четырехимпульсами $\sim 1/n$ [8]. Несмотря на то, что в этом случае мы теряем контакт с вычислением для конечного n (которое может быть выполнено лишь с помощью диаграммной техники в режиме слабой связи), мы получим бесконечномерное семейство кривых, чтобы увидеть, каким образом уравнение (2.3) модифицируется.

2.1 Гипотеза Алдая-Малдасены для волнистой окружности

Хорошим примером точно решаемой граничной задачи [62, 97] является выбор граничного контура $\Pi_0 =$ окружность,¹ решение задачи Плато в этом случае описывается уравнениями

$$r^2 = 1 - z\bar{z}, \quad z = y_1 + iy_2, \quad (2.5)$$

$$y_0 = y_3 = 0 \quad (2.6)$$

Здесь y_0, y_1, y_2, y_3, r - стандартные координаты Пуанкаре на пространстве AdS_5 с метрикой

$$ds^2 = \frac{-dy_0^2 + d\vec{y}^2 + dr^2}{r^2} \quad (2.7)$$

Если единичную окружность $\Pi_0 : z = e^{i\phi}$ заменить на другую произ-

¹Другим хорошим примером выбора граничного контура Π_0 является пара окружностей [104]. Обобщение (2.6) очень интересно, поскольку в этом случае возможен фазовый переход, когда расстояние между окружностями становится велико по сравнению с их радиусами.

вольную кривую², лежащую в плоскости $y_0 = y_3 = 0$,

$$\Pi : z = H(e^{i\phi}), \quad H(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \zeta^k, \quad (2.8)$$

тогда обе части уравнения (2.3) могут быть представлены как формальные ряды по h и \bar{h} :

$$\begin{aligned} A_{\Pi}^{reg} &= A_{\Pi} - \frac{\pi L_{\Pi}}{2\mu} + 2\pi = \\ &= -3\pi \left(\sum_{m,n} (-)^{m+n} A_{k_1 \dots k_m | l_1 \dots l_n}^{(m|n)} h_{k_1+1} \dots h_{k_m+1} \bar{h}_{l_1+1} \dots \bar{h}_{l_n+1} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} D_{\Pi}^{reg} &= D_{\Pi} - \frac{\pi L_{\Pi}}{4\lambda} + \frac{\pi^2}{2} = \\ &= -\pi^2 \left(\sum_{m,n} (-)^{m+n} D_{k_1 \dots k_m | l_1 \dots l_n}^{(m|n)} h_{k_1+1} \dots h_{k_m+1} \bar{h}_{l_1+1} \dots h_{l_n+1} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В этих терминах гипотеза Алдая-Малдасены (2.3) переформулируется как совпадение всех коэффициентов $A^{(m|n)}$ и $D^{(m|n)}$, в то время как

$$\kappa_{smooth} = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

Промежуточные уравнения в (2.10) представлены, чтобы показать, как расходимости устранены в площади и контурном интеграле, где μ и λ - соответствующие параметры регуляризации [62], а

$$L_{\Pi} = 2\pi \left(1 + \sum_{m,n} L_{k_1 \dots k_m | l_1 \dots l_n}^{(m|n)} h_{k_1+1} \dots h_{k_m+1} \bar{h}_{l_1+1} \dots \bar{h}_{l_n+1} \right) \quad (2.12)$$

длина контура Π . Явно указаны суммы только по порядкам разложения m и n , однако суммирование, несомненно, производится и по параметрам k_i и l_j . Единичный сдвиг индексов в (2.10) и (2.12), h_{k+1} вместо h_k , более удобен, поскольку при таком определении

$$\sum_{i=1}^m k_i = \sum_{j=1}^n l_j \quad (2.13)$$

²Согласно теореме Римана мы можем параметризовать таким образом *любую* гладкую плоскую кривую, а не только *инфинитезимальные* деформации окружности Π_0 .

во всех суммах.

В [62] два первых коэффициента были вычислены

$$A_{k|k}^{(1|1)} = \frac{(k+1)k(k-1)}{6}, \quad (2.14)$$

$$A_{k_1, k_2 | k_1 + k_2}^{(2|1)} = \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{12} (k_1^2 + k_2^2 + 3k_1k_2 - k_1 - k_2) \quad (2.15)$$

На самом деле (2.15) является хорошим аргументом в пользу гипотезы Алдая-Малдасены (2.3): эти соотношения демонстрируют совпадение *бесконечного числа* членов с обеих сторон соотношения. Как мы увидим далее, это совпадение не случайно: мы принимаем что оно может быть продолжено и на все прочие вклады с $m = 1$ или $n = 1$:

$$A_{k_1, \dots, k_m | k_1 + \dots + k_m}^{(m|1)} = D_{k_1, \dots, k_m | k_1 + \dots + k_m}^{(m|1)}, \quad (2.16)$$

$$A_{l_1 + \dots + l_m | l_1, \dots, l_n}^{(1|n)} = D_{l_1 + \dots + l_m | l_1, \dots, l_n}^{(1|n)} \quad (2.17)$$

Тем более при дополнительном предположении о полиномиальной зависимости индексов, (2.17) можно считать следствием конформной инвариантности [39, 37, 69, 62]. В то же время, конформная инвариантность не ограничивает таким образом члены с $\min(m, n) \geq 2$, с индексами $k_i + 1$ и $l_i + 1$, превышающими 2 (поскольку алгебра симметрий содержит только три генератора: деформации $\partial/\partial h_0$, $\partial/\partial h_1$ и $\partial/\partial h_2$). Более того, индексная зависимость площади перестает иметь полиномиальную форму в этом случае, потому вполне естественно ожидать отклонения от (2.3) в членах типа (2|2). Далее мы увидим, что эти размышления оправдывают себя, и, действительно, $A^{(2|2)} \neq D^{(2|2)}$, а также

Гипотеза Алдая-Малдасены (2.3) *не работает* для волнистой окружности

2.2 Абелев двойной интеграл

Теперь мы приступаем к детальному изучению обеих частей соотношения (2.3). Двойной интеграл в правой части формулы значительно проще,

чем минимальная поверхность в правой. В этом разделе мы явно представим *общий вид* выражения $D^{(m|n)}$, как многократной суммы, обобщающей выражение (1.13) в [62] с $n = 1$ или $m = 1$ до произвольных $(m|n)$:

$$\begin{aligned}
D_{k_1, \dots, k_m | l_1, \dots, l_n}^{(m;n)} &= \\
&= \text{symm} \left(\sum_{i_1=0}^{k_1} \dots \sum_{i_m=0}^{k_m} \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_n=0}^{l_n} (k_m - i_m)(l_n - j_n) \right) = \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{p=1}^m \frac{1}{q!} \sum_{q=1}^n \left(\sum_{i_1=0}^{k_1} \dots \sum_{i_m=0}^{k_m} \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_n=0}^{l_n} (k_p - i_p)(l_q - j_q) \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

с условием

$$\sum_{p=1}^m i_p + \sum_{q=1}^n j_q = \sum_{p=1}^m k_m = \sum_{q=1}^n l_q \tag{2.19}$$

Детальный вывод этой формулы приведен в [47], а в оставшейся части этого раздела рассмотрим несколько явных примеров.

2.2.1 Примеры

В частности (2.15) - непосредственное следствие (2.18):

$$\begin{aligned}
D^{(2)} &\equiv \sum_{\substack{k, l=0 \\ k=l}}^{\infty} D_{k|l}^{(1|1)} h_{k+1} \bar{h}_{l+1} = \sum_{k=0}^{\infty} |h_{k+1}|^2 \sum_{i=0}^k (k-i)(k-j) \Big|_{i+j=k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)k(k+1)}{6} |h_{k+1}|^2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$D^{(3)} \equiv \sum_{\substack{k_1, k_2, l=0 \\ k_1+k_2=l}}^{\infty} D_{k_1, k_2 | l}^{(2|1)} h_{k_1+1} h_{k_2+1} \bar{h}_{l+1} + \sum_{\substack{k, l_1, l_2=0 \\ k=l_1+l_2}}^{\infty} D_{k|l_1, l_2}^{(1|2)} h_{k+1} \bar{h}_{l_1+1} \bar{h}_{l_2+1} \tag{2.21}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{k_1, k_2 | k_1+k_2}^{(2|1)} &= \\
&= \text{symm} \left(\sum_{k_1 \leftrightarrow k_2} \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \sum_{j=0}^{k_1+k_2} (k_2 - i_2)(k_1 + k_2 - j) \Big|_{i_1+i_2+j=k_1+k_2} \right) = \\
&= \frac{1}{12} (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_1^2 + 3k_1k_2 + k_2^2 - k_1 - k_2) = D_{k_1+k_2; k_1, k_2}^{(1;2)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Более того несложно воспроизвести из (2.18) результаты [62] для прочих членов разложения.

$$\begin{aligned}
D^{(4)} \equiv & \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, l=0 \\ k_1+k_2+k_3=l}}^{\infty} D_{k_1, k_2, k_3 | l}^{(3|1)} h_{k_1+1} h_{k_2+1} h_{k_3+1} \bar{h}_{l+1} + \\
& + \sum_{\substack{k, l_1, l_2=0 \\ k_1+k_2=l_1+l_2}}^{\infty} D_{k_1, k_2 | l_1, l_2}^{(2|2)} h_{k_1+1} h_{k_2+1} \bar{h}_{l_1+1} \bar{h}_{l_2+1} + \\
& + \sum_{\substack{k, l_1, l_2, l_3=0 \\ k=l_1+l_2+l_3}}^{\infty} D_{k | l_1, l_2, l_3}^{(1|3)} h_{k+1} \bar{h}_{l_1+1} \bar{h}_{l_2+1} \bar{h}_{l_3+1}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{k_1, k_2, k_3 | k_1+k_2+k_3}^{(3|1)} &= \frac{1}{18} (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \times \\
&\times \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 3(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1) - k_1 - k_2 - k_3 \right) = \\
&= D_{k_1+k_2+k_3 | k_1, k_2, k_3}^{(1|3)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

а

$$\begin{aligned}
D_{k_1, k_2 | l_1, l_2}^{(2;2)} &= \\
&= \text{symm}_{\substack{k_1 \leftrightarrow k_2, l_1 \leftrightarrow l_2, \\ i_1+i_2+j_1+j_2=k_1+k_2=l_1+l_2}} \left(\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \sum_{j_1=0}^{l_1} \sum_{j_2=0}^{l_2} (k_2 - i_2)(l_2 - j_2) \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.2.2 Производящие функции

Оказывается довольно эффективным рассматривать производящие функции для коэффициентов D . Здесь мы вводим следующие производящие функции:

$$D(x_1 \dots x_m; y_1 \dots y_n) \equiv \sum D_{k_1 \dots k_m | l_1 \dots l_n}^{(m|n)} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} y_1^{l_1} \dots y_n^{l_n} \tag{2.26}$$

$$h(x) \equiv \sum h_n x^n \tag{2.27}$$

$$\bar{h}(x) \equiv \sum \bar{h}_n x^n \tag{2.28}$$

Тогда, например,³,

$$\begin{aligned} D^{(m,1)} &= \sum D_{i_1 \dots i_m}^{(m,1)} h_{i_1+1} \dots h_{i_m+1} \bar{h}_{i_1+\dots+i_m+1} = \\ &= \oint \dots \oint D^{(m,1)}(x_1, \dots, x_m; y) h(\bar{x}_1) \dots h(\bar{x}_m) \bar{h}(\bar{y}) \frac{dx_1}{2\pi i} \dots \frac{dx_m}{2\pi i} \frac{dy}{2\pi i} \end{aligned} \quad (2.31)$$

где интегрирование производится по единичной окружности, и так же для других D .

Простейшие производящие функции

Простейшие производящие функции могут быть получены из представления формул в индексах:

$$D_i^{(1,1)} = \frac{i+1}{6}(i^2 - i), \quad (2.32)$$

$$D_{ij}^{(2,1)} = \frac{(i+1)(j+1)}{12}(i^2 + j^2 + 3ij - i - j), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} D_{ijk}^{(3,1)} &= \frac{(i+1)(j+1)(k+1)}{18} \times \\ &\times (i^2 + j^2 + k^2 + 3(ij + jk + ki) - i - j - k), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$D_{i_1 \dots i_m}^{(m,1)} = \frac{(i_1+1) \dots (i_m+1)}{6m} \left(\sum_{p=1}^m i_p^2 + 3 \sum_{p<q} i_p i_q - \sum_{p=1}^m i_p \right) \quad (2.35)$$

Эти ряды могут быть просуммированы, приводя к следующему общему выражению:

$$D^{(m,1)}(x_1, \dots, x_m; y) = \frac{1}{m} \left(\xi_1 \dots \xi_m (m - \xi_1 - \dots - \xi_m) \right)^2 \quad (2.36)$$

где $\xi_i = \frac{1}{1-x_i y}$.

³Заметим, что с другим естественным определением производящих функций D 's,

$$D(x_1 \dots x_m; y_1 \dots y_n) \equiv \sum \frac{D_{k_1 \dots k_m | l_1 \dots l_n}^{(m|n)}}{x_1^{k_1+2} \dots x_m^{k_m+2} y_1^{l_1+2} \dots y_n^{l_n+2}} \quad (2.29)$$

формула (2.31) имеет более простой вид:

$$\begin{aligned} D^{(m,1)} &= \sum D_{i_1 \dots i_m}^{(m,1)} h_{i_1+1} \dots h_{i_m+1} \bar{h}_{i_1+\dots+i_m+1} = \\ &= \oint \dots \oint D^{(m,1)}(x_1, \dots, x_m; y) h(x_1) \dots h(x_m) \bar{h}(y) \frac{dx_1}{2\pi i} \dots \frac{dx_m}{2\pi i} \frac{dy}{2\pi i} \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $h(\bar{x})$ заменены на $h(x)$, а интегрирование производится по окружности вокруг нуля, но не обязательно единичного радиуса.

Производящие функции и переменные Мивы

На производящие функции можно взглянуть под другим углом, введя вместо переменных h_k и \bar{h}_k (изучая эти множества, мы опускаем h_0 и \bar{h}_0 , поскольку они не влияют на ответ в силу конформной инвариантности) два бесконечных ряда новых переменных по типу Мивы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ [92, 98]

$$h_n \equiv \sum_i \alpha_i x_i^{n-1}, \quad \bar{h}_n \equiv \sum_i \bar{\alpha}_i y_i^n \quad (2.37)$$

где α_i и $\bar{\alpha}_i$ - соответствующие множители, иными словами число совпадающих x_i и y_i соответственно. Тогда

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{k=2} h_k \zeta^k = \zeta + \sum_{i,k} \alpha_i x_i^k \zeta^{k+1} = \zeta + \sum_i \frac{\alpha_i \zeta}{1 - x_i \zeta} \quad (2.38)$$

И соответственно

$$\bar{z}(\zeta) = \bar{\zeta} + \sum_j \frac{\bar{\alpha}_j \bar{\zeta}}{1 - y_j \bar{\zeta}} \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

На самом деле можно положить все множители равными единице. Однако, оставив их нетривиальными, можно немедленно вывести выражение для производящей функции из двойного интеграла $D[z, \bar{z}]$

$$D^{(n|m)}(x|y) = \left[\left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \prod_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j} \right) D[z, \bar{z}] \right] \Bigg|_{\alpha_i, \beta_j=0} \quad (2.41)$$

Производные в этом уравнение следует брать по отношению к различным α_i и $\bar{\alpha}_i$.

Производящие функции и Шварцман

Оказывается, что все члены в $D^{(m|1)}$ могут быть явно просуммированы [62] или выведены с помощью описанных приемов, и результирующее выражение может быть переписано через производную Шварца:

$$\begin{aligned} D^{(\cdot|1)} &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} D_{k_1 \dots k_m | k_1 + \dots + k_m}^{(m|1)} h_{k_1+1} \dots h_{k_m+1} \bar{h}_{k_1+\dots+k_m+1} = \\ &= -\frac{1}{6} \oint \bar{h}(\bar{\zeta}) S_{\zeta}(z) \zeta^2 d\zeta \end{aligned} \quad (2.42)$$

где интегрирование производится вдоль единичной окружности $\zeta = e^{i\phi}$, $z = \zeta + \sum_k h_k \zeta^k$, а производная Шварца дается формулой

$$S_\zeta(z) = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 \quad (2.43)$$

Аналогично можно показать, что

$$D(h, \bar{h}) = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta_k \bar{h}(\bar{\zeta}_k) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{6} \sum_i \frac{\zeta_i^{2n}}{\prod_{j \neq i} (\zeta_i - \zeta_j)^2} S(z_i) - \sum_{i \neq j} \frac{2\zeta_i^n \zeta_j^n \sigma(z_i, z_j)}{(\zeta_i - \zeta_j)^2 \prod_{p \neq i, j} (\zeta_i - \zeta_p)(\zeta_j - \zeta_p)} \right) \quad (2.44)$$

где

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{z_1' z_2'}{(z_1 - z_2)^2}, \quad z_i = z(\zeta_i) \quad (2.45)$$

Преимущество такого подхода связано с тем, что s и σ - явные инварианты конформной симметрии, см. раздел 2.4.3 далее.

2.3 Минимальная поверхность

Возвращаясь к правой части уравнения (2.3), мы напомним пертурбативную теорию минимальных поверхностей в пространстве AdS, предложенную в [63, 64] и подстроенную под волнистые граничные линии в [63].

2.3.1 Пертурбативное вычисление минимальной поверхности

После подстановки

$$y_0 = 0, \quad (2.46)$$

$$z = y_1 + iy_2 = \zeta + H(\zeta) = \zeta + \sum_{k \geq 0} h_k \zeta^k, \quad (2.47)$$

$$r(\zeta, \bar{\zeta}) = \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta} + a(\zeta, \bar{\zeta})} \quad (2.48)$$

действие Намбу-Гото в пространстве AdS (2.1) становится

$$A_{\Pi} = \int \frac{\sqrt{|\partial H|^2 (|\partial H|^2 r^2 + |\partial r^2|^2)}}{r(r^2 + \mu^2)} d^2\zeta \xrightarrow{\mu=0} \int \frac{|1 + \partial h|^2 \sqrt{1 - \zeta\bar{\zeta} + a + \frac{(\partial a - \bar{\zeta})(\bar{\partial} a - \zeta)}{|1 + \partial h|^2}}}{(1 - \zeta\bar{\zeta} + a)^{3/2}} d^2\zeta \equiv \int \mathcal{L} d^2\zeta \quad (2.49)$$

где необходимо подставить решение уравнений движения $a(\zeta, \bar{\zeta})$, т.е. форму минимальной поверхности, ограниченное граничным условием $a(e^{i\phi}, e^{-i\phi}) = 0$ на Π , а μ - небольшой ИК-регуляризующий параметр (его можно игнорировать при решении уравнений движения, однако он становится важным при нахождении площади минимальной поверхности, то есть самого действия). Это действие предполагает уравнения движения следующего вида

$$0 = \partial \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial a)} \right) + \bar{\partial} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\bar{\partial} a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \frac{1}{4(1 - \zeta\bar{\zeta})^{3/2}} \left\{ \Delta_{NG} \left(a(\zeta, \bar{\zeta}) \right) + R(a; h, \bar{h}) \right\} \quad (2.50)$$

где представлен дифференциальный оператор Намбу-Гото

$$\Delta_{NG} = 4\partial\bar{\partial} - \zeta^2\partial^2 - 2\zeta\bar{\zeta}\partial\bar{\partial} - \bar{\zeta}^2\bar{\partial}^2 \quad (2.51)$$

(он зависит от метрики AdS и от выбора невозмущенного решения $r_0^2 = 1 - \zeta\bar{\zeta}$), а также сложное, но непосредственно вычисляемое выражение $R(a; h, \bar{h})$.

Уравнение движения теперь может быть итеративно разложено по степеням h и \bar{h} так же, как мы поступали во время изучения двойного контурного интеграла:

$$\Delta_{NG} \left(a^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\zeta}h(\zeta) + \zeta\bar{h}(\bar{\zeta}) \right) = 0, \quad (2.52)$$

$$\Delta_{NG} \left(a^{(k)}(\zeta, \bar{\zeta}) \right) = -R^{(k)}(a; h, \bar{h}) \quad \text{for } k \geq 2. \quad (2.53)$$

Индексы отвечают порядку по h , здесь использован тот факт [62], что $R^{(0)} = R^{(1)} = 0$. Поскольку $R(a; h, \bar{h})$ - нелинейная функция по всем аргументам, все компоненты $a^{(j)}$ с $1 \leq j \leq k - 1$ дают вклад в $R^{(k)}$.

Компонента $a^{(k)}$, содержащая h^k , дает вклад только в компоненту действия $A^{(2k)}$, содержащую h^{2k} , поскольку $a^{(1)} + \dots + a^{(k-1)}$ удовлетворяет уравнению движения: в силу этого линейный по $a^{(k)}$ член в выражении

$$A\left(a^{(1)} + \dots + a^{(k-1)} + a^{(k)}\right) = A\left(a^{(1)} + \dots + a^{(k-1)}\right) + a^{(k)} \frac{\delta A}{\delta a} \left(a^{(1)} + \dots + a^{(k-1)}\right) + \dots$$

отсутствует, $a^{(k)}$ может входить в ответ только квадратично, то есть только в $A^{(2k)}$. В частности $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ зависят только от $a^{(1)}$ [62], $A^{(4)}$ и $A^{(5)}$ зависят от $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$, первый вклад от $a^{(3)}$ появляется в $A^{(6)}$ и так далее.

2.3.2 Обращение оператора Намбу-Гото

Теперь мы опишем систематический способ построения решения уравнений Намбу-Гото с ненулевой правой частью и исчезающего на границе (условие Дирихле).

Нулевые моды оператора Намбу-Гото Δ_{NG} определены как

$$g_k(\eta) = \frac{1 + k\sqrt{1-\eta}}{(1 + \sqrt{1-\eta})^k}, \quad (2.54)$$

$$\tilde{g}_k(\eta) = \frac{1 - k\sqrt{1-\eta}}{(1 - \sqrt{1-\eta})^k} = \frac{(1 - k\sqrt{1-\eta})(1 + \sqrt{1-\eta})^k}{\eta^k}, \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} G_k(u) = g_k(1 - u^2) = \frac{1+ku}{(1+u)^k}, \\ \tilde{G}_k(u) = \tilde{g}_k(1 - u^2) = \frac{1-ku}{(1-u)^k} \end{cases} \quad k \geq 2 \quad (2.56)$$

$$\Delta_{NG}\left(\zeta^k g_k(\eta)\right) = 0, \quad \Delta_{NG}\left(\zeta^k \tilde{g}_k(\eta)\right) = 0 \quad (2.57)$$

где $\eta = \zeta\bar{\zeta}$ и $u = \sqrt{1-\eta} = \sqrt{1-\zeta\bar{\zeta}}$.

Решение уравнения

$$\Delta_{NG}\left(\zeta^k F_k(\eta)\right) = \zeta^k m_k(\eta), \quad (2.58)$$

которое конечно при $\eta = 0$ и удовлетворяет $F_k(\eta = 1) = 0$, дается обычным методом “вариации констант”

$$F_k(\eta) = -\tilde{g}_k(\eta) \int_{\sqrt{1-\eta}}^1 \frac{M_k(u)d\mu_k}{\tilde{G}_k(u)} + g_k(\eta) \left\{ \int_{\sqrt{1-\eta}}^1 \frac{M_k(u)d\mu_k}{G_k(u)} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\tilde{G}_k(u)} - \frac{1}{G_k(u)} \right) M_k(u)d\mu_k \right\}, \quad (2.59)$$

где $M_k(u) = m_k(1 - u^2)$,

$$d\mu_k = \frac{(1 - k^2 u^2) du}{2k(k^2 - 1)u^2} \quad (2.60)$$

и каждый из трех интегралов сходится для несингулярного $M_k(\eta)$. В конкретных случаях $k = 0$ и $k = 1$ эти формулы неприменимы, вместо них имеем

$$F_0(\eta) = \int_0^{\sqrt{1-\eta}} \frac{u^2 du}{1 - u^2} \int_u^1 \frac{M_0(u) du}{u^2} \quad (2.61)$$

и

$$F_1(\eta) = \int_0^{\sqrt{1-\eta}} \frac{u^2 du}{(1 - u^2)^2} \int_1^u \frac{M_1(u)(1 - u^2) du}{u^2} \quad (2.62)$$

2.3.3 Первые члены разложения $a(h)$

Уравнение (2.52) легко решается

$$\begin{aligned} a(\zeta, \bar{\zeta}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(h_{k+1} \zeta^k + \bar{h}_{k+1} \bar{\zeta}^k \right) \times \\ &\times \left(\frac{\left(1 + k \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}} \right)^k}{(\zeta \bar{\zeta})^k} - \zeta \bar{\zeta} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left(h_{k+1} h_{l+1} \zeta^{k+l} + \bar{h}_{k+1} \bar{h}_{l+1} \bar{\zeta}^{k+l} \right) \times \\ &\times \left(\frac{k(k+1)}{(1 + \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}})^{k-1}} + \frac{l(l+1)}{(1 + \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}})^{l-1}} - \right. \\ &\left. - \frac{k(k+1) + l(l+1) + (k+1)(l+1)(k+l) \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}}}{(1 + \sqrt{1 - \zeta \bar{\zeta}})^{k+l}} \right) + \\ &+ \sum_{k>l}^{\infty} (h_{k+1} \bar{h}_{l+1} \zeta^{k-l} + \bar{h}_{k+1} h_{l+1} \bar{\zeta}^{k-l}) b_{kl}(z \bar{z}) + \sum_k |h_{k+1}|^2 b_{kk}(z \bar{z}) + \\ &+ O(h^3, h^2 \bar{h}, h \bar{h}^2, \bar{h}^3) \end{aligned} \quad (2.63)$$

где

$$b_{kl}(\eta) = \left(\frac{k(k-1)}{2(1+u)^{k+1}} + \frac{l(l-1)}{2(1+u)^{l+1}} - 1 \right) \eta^{l+1} - \frac{k^2 + l^2 - 2 + (k+l)(kl-1)u}{2(1+u)^{k+l}} \eta^l + \frac{(k+l)(1+(k-l)u)}{2(1+u)^{k-l}} \quad (2.64)$$

для $k \geq l$ и $\eta = 1 - u^2$. В частности

$$b_{k0}(\eta) = g_k(\eta) - \eta = \frac{1 + ku}{(1+u)^k} - \eta \quad (2.65)$$

2.3.4 Выражения для $A^{(1|1)}$, $A^{(2|1)}$ и $A^{(3|1)}$

Теперь настало время представить несколько первых членов разложения минимальной поверхности и соответствующего двойного петлевого интеграла. Как было изначально отмечено, они совпадают:

$$A_i^{(1|1)} = \frac{i(i^2 - 1)}{6} = D_i^{(1|1)} \quad (2.66)$$

$$A_{ij}^{(2|1)} = \frac{(i+1)(j+1)}{12} \left(i^2 + j^2 + 3ij - (i+j) \right) = D_{ij}^{(2|1)} \quad (2.67)$$

$$A_{ijk}^{(3|1)} = \frac{(i+1)(j+1)(k+1)}{18} \times \left(i^2 + j^2 + k^2 + 3(ij + jk + ik) - (i+j+k) \right) = D_{ijk}^{(3|1)} \quad (2.68)$$

2.3.5 Выражение для $A^{(2|2)}$

С другой стороны в этом (четвертом) порядке появляются выражения, отличающиеся для площади и двойного интеграла. На самом деле для

$k \leq i, j \leq l$

$$\begin{aligned}
A_{ij|kl}^{(2|2)} &= \delta_{i+j,k+l} \frac{k+1}{48(i+j-1)(i+j+1)} \times \\
&\times \left\{ 2ij(i^4 + 5i^3j + 8i^2j^2 + 5ij^3 + j^4) + 2(i+j)^5 - \right. \\
&- 2(k^2 - k + 1)i^2j^2 + k^2(k^2 + k - 2)(i^2 - ij + j^2) + \\
&+ (3k^4 + 3k^3 - 10k^2 + 4k - 2)ij - \\
&- k^2(k^2 + k - 2) - \frac{1}{i+j} \left(2(k^3 + k^2 - 2k + 2)(i^4 + j^4) + \right. \\
&+ (7k^3 + 9k^2 - 16k + 16)ij(i^2 + j^2) + \\
&+ (9k^3 + 15k^2 - 24k + 24)i^2j^2 - \\
&- 2(k^3 + k^2 - 2k + 1)(i^2 + j^2) - \\
&\left. \left. - (5k^3 + 3k^2 - 8k + 4)ij \right) \right\} h_{i+1}h_{j+1}\bar{h}_{k+1}\bar{h}_{l+1}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

в то время, как

$$\begin{aligned}
D_{ij|kl}^{(2|2)} &= \delta_{i+j,k+l} \frac{1}{24} \left((i+1)(j+1)(k+1)(i^2 + 3ij + j^2 - i - j) - \right. \\
&- (i+j+2)(k+2)(k+1)k(k-1) + \\
&\left. + \frac{3}{5}(k+3)(k+2)(k+1)k(k-1) \right) h_{i+1}h_{j+1}\bar{h}_{k+1}\bar{h}_{l+1}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Эти выражения не совпадают, если один из индексов не равен 1, иными словами если выражение не содержит h_2 или \bar{h}_2 . В последнем случае A и D совпадают, как следствие конформной инвариантности, которое мы обсуждаем в следующем разделе.

Заметим, что эти формулы при определенных значениях индексов имеют следующий вид

$$A_{ii|ii}^{(2|2)} = \frac{i(i+1)(57i^5 + 103i^4 + 43i^3 - 51i^2 - 16i + 8)}{96(2i-1)(2i+1)} \times |h_{i+1}|^4 \tag{2.71}$$

в то время как

$$D_{ii|ii}^{(2|2)} = \frac{i(i+1)(9i^3 - 16i^2 + 9i - 4)}{60} \times |h_{i+1}|^4 \tag{2.72}$$

В следующем разделе мы покажем, как это различие согласуется с конформной инвариантностью.

2.4 Конформная инвариантность

Структура AdS_5 предполагает конформную инвариантность по отношению к генераторам алгебры $SL(2)$. В терминах параметров h эти генераторы задают условия типа Вирасоро

$$\hat{J}_- = \frac{\partial}{\partial h_0} \quad (2.73)$$

$$\hat{J}_0 = \frac{\partial}{\partial h_1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{\partial}{\partial h_k} \quad (2.74)$$

$$\hat{J}_+ = \frac{\partial}{\partial h_2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{\partial}{\partial h_{k+1}} + \sum_{k,m=0}^{\infty} h_k h_m \frac{\partial}{\partial h_{k+m}} \quad (2.75)$$

Поскольку минимальная поверхность и двойной контурный интеграл совпадают вплоть до третьего порядка разложения, следует исследовать поведение обеих частей по отношению к этим генераторам.

2.4.1 Инвариантность двойного контурного интеграла

Рассмотрим действие глобальных преобразований на двойной контурный интеграл. Под действием дробно-линейного преобразования $SL(2, R)$ $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, составляющие двойного интеграла по контуру, лежащему в *плоскости*, преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} dz_1 d\bar{z}_2 &\rightarrow \frac{dz_1 d\bar{z}_2}{(cz_1+d)^2 (c\bar{z}_2+d)^2}, & d\bar{z}_1 dz_2 &\rightarrow \frac{d\bar{z}_1 dz_2}{(c\bar{z}_1+d)^2 (cz_2+d)^2}, \\ |z_1 - z_2|^{-2} &\rightarrow |cz_1 + d|^2 |cz_2 + d|^2 |z_1 - z_2|^{-2}, \end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned} D &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{2} \oint \oint \frac{dz_1 d\bar{z}_2 + d\bar{z}_1 dz_2}{|z_1 - z_2|^2} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} \oint \oint \frac{dz_1 d\bar{z}_2}{|z_1 - z_2|^2} \cdot \frac{c\bar{z}_1 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{cz_2 + d}{c\bar{z}_2 + d} + \\ &+ \frac{1}{2} \oint \oint \frac{d\bar{z}_1 dz_2}{|z_1 - z_2|^2} \cdot \frac{cz_1 + d}{c\bar{z}_1 + d} \cdot \frac{c\bar{z}_2 + d}{cz_2 + d} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Не очевидно, глядя на эту формулу, что D является инвариантом. Однако это так. Простейший способ увидеть это – посмотреть на инфинитезимальные преобразования $SL(2, R)$, выбирая вклады, которые линейны по $d - 1$

и с. Тогда вариация D может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\delta D &= -\frac{c}{2} \oint \oint \left(\frac{1}{z_1 - z_2} - \frac{1}{\overline{z_1 - z_2}} \right) (d\bar{z}_1 dz_2 - dz_1 d\bar{z}_2) = \\ &= c \oint \oint \frac{y(dy dX - dx dY)}{x^2 + y^2},\end{aligned}\tag{2.77}$$

где мы обозначили z_1, z_2 как $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ и $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, $X = x_1 + x_2$, $Y = y_1 + y_2$. Представленный в таком виде интегранд является полной производной. На самом деле приведенные интегралы расходятся, и формальные манипуляции с ними имеют смысл только после регуляризации, которая, в свою очередь, нарушает инвариантность, и *аномалия* появляется, когда регуляризация удалена:

$$\delta D = \delta \left(\frac{1}{2} \oint \oint \frac{dz_1 d\bar{z}_2 + d\bar{z}_1 dz_2}{|z_1 - z_2|^2 + \lambda^2} \right) = \frac{\pi}{4\lambda} \delta L\tag{2.78}$$

где $L = L_{\Pi}$ – длина кривой Π . Однако $D^{reg} = D - \pi \frac{L}{4\lambda}$ остается инвариантом [62].

2.4.2 Инвариантность минимальной площади

Изначальное выражение для минимальной площади (2.1), с очевидностью, инвариантно под действием этих генераторов из-за способа своего построения. Введение μ -регуляризации, на первый взгляд, разрушает эту инвариантность. На самом деле, если рассмотреть действие генераторов, которые преобразуют один плоский контур в другой плоский контур

$$r \rightarrow r(1 - \gamma\bar{z} - \bar{\gamma}z)\tag{2.79}$$

$$z \rightarrow z(1 - \bar{\gamma}z) + \gamma r^2\tag{2.80}$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z}(1 - \gamma\bar{z}) + \bar{\gamma} r^2\tag{2.81}$$

μ -регуляризация явно нарушает инвариантность (в терминах (2.49))

$$\int d^2 z \mathcal{L}(z, \bar{z}, r) \rightarrow \int d^2 z \mathcal{L}(z, \bar{z}, r) \left(1 - \mu^2 \frac{\gamma\bar{z} + \bar{\gamma}z}{r^2 + \mu^2} \right)\tag{2.82}$$

После регуляризации, понятие инвариантности площади похоже понятию об инвариантности двойного интеграла: с одной стороны, выражение для площади ведет себя как $\sim L/\mu + \dots$, отклонение ведет себя как μ^2 , и оно

не дает вклада в регуляризованную часть площади; с другой стороны, дополнительная расходимость возникает в знаменателе, что может привести к различным проблемам.

Явное вычисление минимальной площади в терминах h показывает, что конформная инвариантность присутствует. Более того, она глубоко связана с равенством членов, содержащих h_2 или \bar{h}_2 в четвертом порядке в обеих частях (2.3). Аргументы, связанные с инвариантностью, могут быть непосредственно применены к пятому порядку поправок к площади, соответствующие члены могут быть выписаны следующим образом

$$A^{(5)} = \frac{3}{2} \sum_{i,j,k,l,m} (X_{ijk;lm} h_{i+1} h_{j+1} h_{k+1} \bar{h}_{l+1} \bar{h}_{m+1} + Y_{ijkl;m} h_{i+1} h_{j+1} h_{k+1} h_{l+1} \bar{h}_{m+1}) + h.c. \quad (2.83)$$

сопровождаемые дополнительным условием

$$X_{ijk;lm} \sim \delta_{i+j+k,l+m} \quad Y_{ijkl;m} \sim \delta_{i+j+k,l,m} \quad (2.84)$$

Легко сконструировать выражение, которое должно удовлетворяться тождественно

$$3!A_{1jk;lm}^{(5)} - 2(2!A_{j(k+1);lm}^{(4)} + 2!A_{(j+1)k;lm}^{(4)}) + 2A_{j+k+1;lm}^{(3)} = 0 \quad (2.85)$$

Это соотношение между коэффициентами не универсально, оно зависит от количества совпадающих индексов в различных членах. В качестве яркого примера рассмотрим одно из таких соотношений

$$3A_{112;22}^{(5)} - 2(A_{13;22}^{(4)} + A_{22;22}^{(4)}) + A_{4;22}^{(3)} = 0 \quad (2.86)$$

(заметим, что $A_{22;22}^{(5)}$ не совпадает с $D_{22;22}^{(5)}$.) Это соотношение позволяет предсказать, например, коэффициент $A_{112;22}^{(5)} = \frac{419}{30}$. Можно непосредственно проверить, что это число действительно задает данный коэффициент.

На самом деле конформная инвариантность позволяет фиксировать различные члены по обе стороны соответствия. Рассмотрим, например, формулу (2.68). Можно ожидать, что это полином степени три по всем индексам. Более того известно, что он исчезает, если хотя бы один из индексов равен -1 (что соответствует присутствию h_0) только потому, что генератор

\hat{J}_- должен занулять это выражение в силу конформной инвариантности. Следовательно, общая форма этого выражения

$$A^{(3|1)} = \alpha(i+1)(j+1)(k+1)(i^2 + j^2 + k^2 + \beta(ij + jk + ik) + \gamma(i+j+k) + \delta) \quad (2.87)$$

Далее конформная инвариантность задает еще два уравнения для $k = 0$ и $k = 1$:

$$\alpha(i^2 + j^2 + \beta ij + \gamma(i+j) + \delta) = \frac{1}{18}(i^2 + j^2 + 3ij - (i+j)) \quad (2.88)$$

$$2\alpha(i^2 + j^2 + 1 + \beta(ij + j + i) + \gamma(i+j+1) + \delta) = \frac{2}{18}(i^2 + j^2 + 3ij + 2(i+j)) \quad (2.89)$$

Эти уравнения позволяют однозначно определить все коэффициенты и восстановить выражение не только для $A^{(1\dots 3|1)}$, но и для всех $A^{(n|1)}$. Следовательно, предположений о полиномиальной структуре и конформной инвариантности регуляризованной минимальной площади и двойного петлевого интеграла достаточно, чтобы утверждать, что члены, линейные по h (или по \bar{h}), совпадают в обеих частях (2.3). Заметим, однако, что предположение о полиномиальной структуре нарушается для $A^{(n|m)}$ с $\min(m, n) \geq 2$ (однако остается правильным для $D^{(n|m)}$).

2.4.3 О непертурбативных методах

Поскольку гипотеза Алдая-Малдасены не работает, необходимо его скорректировать. Легко видеть, какими должны быть строительные блоки для поправок.

Поскольку мы привели аргументы, что $A^{(\cdot|1)} = D^{(\cdot|1)}$. Можно, как и в разделе 2.2.2 провести суммирование по членам в разложении *минимальной площади* линейным по \bar{h}

$$A^{(\cdot|1)} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} A_{k_1 \dots k_m | k_1 + \dots + k_m}^{(m|1)} h_{k_1+1} \dots h_{k_m+1} \bar{h}_{k_1 + \dots + k_m + 1} = \frac{1}{6} \oint \bar{h}(\bar{\zeta}) S_{\zeta}(z) \zeta^2 d\zeta \quad (2.90)$$

Тот факт, что этот ряд может быть просуммирован в терминах конформно-инвариантной производной Шварца, не оказывается неожиданным. Более

того, отталкиваясь от предположения, что она входит линейно, ответ может быть фиксирован с точностью до общего коэффициента. Это объясняет, почему $A^{(\cdot|1)} = D^{(\cdot|1)}$.

Чтобы построить старшие поправки к A , необходимо представить более старшие конформные структуры. Легко построить следующий набор структур, которые инвариантны под действием рациональных преобразований, которые отражают действие конформной алгебры $SL(2)$:

$$S(z) = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} S_2(z_1, z_2) &\sim \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - \zeta_2)^2} \left(1 + \sum_k kh_k \zeta_1^{k-1} \right) \times \\ &\times \left(1 + \sum_k kh_k \zeta_2^{k-1} \right) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-)^m (m+1) \left(h_k \frac{\zeta_1^k - \zeta_2^k}{\zeta_1 - \zeta_2} \right)^m \right\} \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} S_3(z_1, z_2, z_3) &\sim \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} = \\ &= \frac{d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3}{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_3 - \zeta_1)} \times \\ &\times \left(1 + \sum_k kh_k \zeta_1^{k-1} \right) \left(1 + \sum_k kh_k \zeta_2^{k-1} \right) \left(1 + \sum_k kh_k \zeta_3^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Эти выражения должны служить строительными блоками для старших поправок к A , которые отличаются от D уже в порядке \bar{h}^2 , т.е. на уровне непертурбативной $A^{(\cdot|2)}$. Однако более детальное исследование этих поправок и инвариантов выходит за рамки данной работы.

2.5 Могомерный случай

2.5.1 Уравнения движения

Для изучения многомерного случая, то есть послабления последнего условия в (2.6), мы включаем в рассмотрение одно из координатных полей, которое раньше считалось равным нулю (для определенности мы выбираем y_0). Таким образом мы добавляем его вклад к площади и контурному

интегралу

$$A = \int \frac{1}{r^2 + \mu^2} \left(-8\partial r \bar{\partial} r \partial y_0 \bar{\partial} y_0 + 4\partial r \bar{\partial} r \partial H \bar{\partial} \bar{H} - \right. \\ \left. - 4\partial y_0 \bar{\partial} y_0 \partial H \bar{\partial} \bar{H} + 4(\partial r)^2 (\bar{\partial} y_0)^2 + 4(\bar{\partial} r)^2 (\partial y_0)^2 + (\partial H \bar{\partial} \bar{H})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

$$D = \frac{1}{4} \oint \oint \frac{\frac{1}{2}(dz d\bar{z}' + dz' d\bar{z}) - dy_0 dy_0'}{(z - z')(\bar{z} - \bar{z}') - (y_0 - y_0')^2} \quad (2.95)$$

Как и ранее, мы используем калибровочную инвариантность, чтобы фиксировать поля y_1 и y_2 как в (2.8). Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа представляют собой набор из двух нелинейных уравнений для полей r и y_0 . В отличие от граничного условия $r|_{\zeta\bar{\zeta}=1} = 0$, для y_0 мы полагаем

$$y_0(\zeta, \bar{\zeta})|_{\zeta\bar{\zeta}=1} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} q_{-k} \bar{\zeta}^k \quad (2.96)$$

Это разложение Фурье для произвольных граничных условий. Мы снова используем итеративную процедуру, рассматривая формальные разложения по степеням параметров h и q . Вне границы (в объеме) получаем

$$r(\zeta, \bar{\zeta}) = \sqrt{1 - \zeta\bar{\zeta} + a^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) + a^{(2)}(\zeta, \bar{\zeta}) + \dots} \quad (2.97)$$

$$y_0(\zeta, \bar{\zeta}) = b^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) + b^{(2)}(\zeta, \bar{\zeta}) + \dots \quad (2.98)$$

А уравнения Намбу-Гото сводятся к

$$\Delta_{NG}(a^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) + h(\zeta)\bar{\zeta} + \bar{h}(\bar{\zeta})\zeta) = 0 \quad (2.99)$$

$$\Delta_{NG}b^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \quad (2.100)$$

$$\Delta_{NG}a^{(k)}(\zeta, \bar{\zeta}) = -R^{(k)}(a, b; h, \bar{h}) \quad (2.101)$$

$$\Delta_{NG}b^{(k)}(\zeta, \bar{\zeta}) = -Q^{(k)}(a, b; h, \bar{h}) \quad (2.102)$$

Легко построить решение второго уравнения в (2.100), которое удовлетворяет граничному условию (2.96)

$$b^{(1)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k g_k(\zeta\bar{\zeta}) + \sum_{k=1}^{\infty} q_{-k} \bar{\zeta}^k g_k(\zeta\bar{\zeta}) \quad (2.103)$$

Тогда все старшие итерации должны удовлетворять тривиальному граничному условию $b^{(k)}|_{\zeta\bar{\zeta}=1} = 0$, $k \geq 2$.

2.5.2 Явные выражения

Первые зависящие от q вклады в регуляризованную площадь и двойной интеграл имеют следующую форму

$$\begin{aligned} \frac{A}{3\pi} = \frac{D}{\pi^2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} k(k^2 - 1) q_k q_{-k} + \\ & + \sum_{i,j \geq 1} \frac{ij(i^2 + j^2 + 3(i+j) - 2)}{6} (q_i q_j \bar{h}_{i+j+1} + q_{-i} q_{-j} h_{i+j+1}) - \\ & - \frac{(i+1)j(i^2 + 2j^2 + 3ij + 2i - 2)}{3} (h_{i+1} q_j q_{-i-j} + \bar{h}_{i+1} q_{-j} q_{i+j}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Следовательно до третьего порядка A и D совпадают.

В четвертом порядке ситуация довольно-таки похожа на плоский случай. В частности, обе части имеют следующую форму

$$\begin{aligned} A, D \sim & T_{ij;kl} q_i q_j q_{-k} q_{-l} \delta_{i+j, k+l} + \\ & + Y_{ijk} (q_i q_j q_k q_{-i-j-k} + q_{-i} q_{-j} q_{-k} q_{i+j+k}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

где коэффициенты $T_{ij;kl}$, вообще говоря, разные, в то время как

$$Y_{ijk} \sim ijk \left(\frac{2}{3} (i^2 + j^2 + k^2) + (ij + kj + jk) - 2 \right) \quad (2.106)$$

совпадают в обеих частях. Это выражение должно точно фиксироваться с помощью конформной инвариантности, как и в плоском случае.

2.5.3 Конформная инвариантность в многомерном случае

Пространство AdS_{d+1} может быть рассмотрено как квадрака (гиперболоид) в R^{d+2} , заданная уравнением

$$Y_+ Y_- + \vec{Y}^2 = 1, \quad (2.107)$$

которое может быть параметризовано как

$$\vec{y} = \frac{\vec{Y}}{Y_+}, \quad r = \frac{1}{Y_+}, \quad (2.108)$$

$$\vec{Y} = \frac{\vec{y}}{r}, \quad Y_+ = \frac{1}{r}, \quad Y_- = \frac{r^2 - \vec{y}^2}{r} \quad (2.109)$$

Метрика пространства AdS_{d+1} , индуцированная из Евклидовой этим вложением, имеет форму Пуанкаре

$$dY_+dY_- + d\vec{Y}^2 = \frac{d\vec{y}^2 - dr^2}{r^2} \quad (2.110)$$

Группа симметрий $SO(d, 2)$ линейно действует на $(d + 2)$ -компонентный вектор (Y_+, Y_-, \vec{Y}) ,

$$\delta \begin{pmatrix} Y_- \\ Y_+ \\ \vec{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 2\vec{\beta} \\ 0 & -b & 2\vec{\gamma} \\ -\vec{\gamma} & -\vec{\beta} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_- \\ Y_+ \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

Рассмотрим действие генератора $\vec{\gamma}$ на AdS_5 :

$$\delta Y_- = 0, \quad \delta Y_+ = 2(\vec{\gamma}\vec{Y}), \quad \delta\vec{Y} = -\vec{\gamma}Y_- \quad (2.112)$$

Выражая Y через координаты на AdS_5 , можно легко вывести форму преобразования последних

$$\delta r = -2(\vec{\gamma}\vec{y})r \quad (2.113)$$

$$\delta\vec{y} = -2\vec{y}(\vec{\gamma}\vec{y}) + \vec{\gamma}\vec{y}^2 - \vec{\gamma}r^2 \quad (2.114)$$

Это означает, что два плоских генератора могут быть реализованы на границе ($r = 0$) как

$$\hat{\gamma}_1 = 2y_0y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + (y_1^2 + y_0^2 - y_2^2)\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1y_2\frac{\partial}{\partial y_2} \quad (2.115)$$

$$\hat{\gamma}_2 = 2y_0y_2\frac{\partial}{\partial y_0} + 2y_1y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + (y_2^2 + y_0^2 - y_1^2)\frac{\partial}{\partial y_2} \quad (2.116)$$

или, аналогично,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \hat{\gamma}_1 + i\hat{\gamma}_2 = 2y_0(y_1 + iy_2)\frac{\partial}{\partial y_0} + y_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \\ &+ (y_1^2 - y_2^2 + 2iy_1y_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (2y_1y_2 + iy_2^2 - iy_1^2)\frac{\partial}{\partial y_2} = \\ &= 2y_0z\frac{\partial}{\partial y_0} + 2y_0^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2} \right) = \\ &= 2 \left(y_0z\frac{\partial}{\partial y_0} + y_0^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.117)$$

Теперь мы проверим инвариантность двойного контурного интеграла

$$D = \oint \oint \frac{(dydy')}{(y-y')^2 + \lambda^2} \quad (2.118)$$

то есть действие генератора $\vec{\hat{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} \delta D &= 2 \oint \oint \frac{(dyd\delta y')}{(y-y')^2 + \lambda^2} - 2 \oint \oint \frac{(dydy')(y-y', \delta(y-y'))}{[(y-y')^2 + \lambda^2]^2} = \\ &= 2 \oint \oint \frac{dy(-2dy'(\gamma y') - 2y'(\gamma dy') + 2\gamma(y' dy'))}{(y-y')^2 + \lambda^2} + \\ &+ 2 \oint \oint \frac{(y-y')^2(y+y', \gamma)}{[(y-y')^2 + \lambda^2]^2} = \quad (2.119) \\ &= -4\lambda^2 \oint \oint \frac{(dy dy')(y'\gamma)}{[(y-y')^2 + \lambda^2]^2} + 4 \oint \oint \frac{(\gamma dy')((y-y')dy)}{(y-y')^2 + \lambda^2} = \\ &= -4\lambda^2 \oint \oint \frac{(dy dy')(y'\gamma)}{[(y-y')^2 + \lambda^2]^2} + 2 \oint (\gamma dy') \oint d \log [(y-y')^2 + \lambda^2] \end{aligned}$$

Второй член является полной производной и может быть опущен. Первый член должен стремиться к нулю с $\lambda \rightarrow 0$, с другой стороны присутствует дополнительная расходимость в знаменателе, и инвариантность не очевидна.

Аналогичным образом, другие генераторы конформной инвариантности имеют вид (вращения $SO(d)$ опущены):

$$\hat{\beta}_0 : \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad (2.120)$$

$$\hat{\beta} : \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.121)$$

$$\hat{\bar{\beta}} : \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (2.122)$$

$$\hat{b} : y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (2.123)$$

$$\hat{\gamma}_0 : (z\bar{z} + y_0^2) \frac{\partial}{\partial y_0} + 2y_0 \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2.124)$$

$$\hat{\gamma} : y_0 \bar{z} \frac{\partial}{\partial y_0} + y_0^2 \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (2.125)$$

$$\hat{\bar{\gamma}} : y_0 z \frac{\partial}{\partial y_0} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \underline{y_0^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \quad (2.126)$$

Можно представить эти генераторы в терминах переменных h и q , используя следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h_k} = \oint ds \zeta^k \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_k} = \oint ds \zeta^k \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta y_0} \quad (2.127)$$

Тогда получаем

$$\hat{b} = \frac{\partial}{\partial h_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{h}_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k \frac{\partial}{\partial \bar{h}_k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} = & \frac{\partial}{\partial h_2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{\partial}{\partial h_{k+1}} + \sum_{k,m \geq 1} h_k h_m \frac{\partial}{\partial h_{k+m}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \frac{\partial}{\partial q_{k+1}} + \\ & + \sum_{k,m} q_k h_m \frac{\partial}{\partial q_{k+m}} + \sum_{k,m \geq 0} q_{-k} q_{-m} \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{k+m}} + 2 \sum_{k \geq m} q_m q_{-k} \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{k-m}} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Теперь покажем, каким образом конформная инвариантность работает в многомерном случае. Рассмотрим следующие члены разложения

$$\begin{aligned} & \sum_k M_k q_k q_{-k} + \sum_{i,j} R_{ij} (h_{i+1} q_j q_{-i-j} + \bar{h}_{i+1} q_{-j} q_{i+j}) + \\ & + \sum A_k h_{k+1} \bar{h}_{k+1} + \sum_{k,m} B_{k,m} q_{-k-m-1} q_m h_{k+1} h_2 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$2R_{0j} + 2M_j = 0, \quad (2.131)$$

$$R_{1j} + M_{j+1} + M_j = 0 \quad (2.132)$$

где коэффициент 2 в правой части уравнения вызван действием генераторов $\partial/\partial h_1$ и $\partial/\partial \bar{h}_1$, которые оба представлены в \hat{b} .

Менее тривиальный пример возникает при действии генераторов на (2.130) и сравнении коэффициентов при $q_{-k-m} q_m h_k$. Это приводит к следующим соотношениям на коэффициенты

$$B_{k-1,m} + 2R_{k,m} + R_{k-1,m} + R_{k-1,m+1} + M_{k+m} + M_m + 2A_{k-1} = 0 \quad (2.133)$$

Выражение для B может быть найдено непосредственно и имеет следующую форму

$$B_{k,m} = \frac{2}{3} m(k+1)(2k^2 + 6km + 7k + 4m^2 + 6m + 2) \quad (2.134)$$

Заметим, что этот вывод формул для конформных генераторов, на самом деле, слегка наивен. В принципе, следует учитывать то, что конформные преобразования изменяют фиксированное калибровочное условие, как легко видеть из (2.120). На самом деле, генераторы $\hat{\gamma}$ явно смешивают чисто голоморфные z -координаты с y_0 , которая содержит анти-голоморфные части. Тем не менее уравнения (2.131)-(2.134) показывают, что генераторы (2.128) имеют правильный вид в этих примерах.

2.5.4 Многомерное обобщение производной Шварца

Теперь мы попробуем переформулировать эти выражения в инвариантных терминах и построить пример “многомерного” Шварциана. Теперь к (z, \bar{z}) мы добавим голоморфные и анти-голоморфные части $y_0, (y, \bar{y})$ так, что при конформных преобразованиях

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad y \rightarrow \frac{y}{cz + d} \quad (2.135)$$

Тогда

$$z' \rightarrow \frac{z'}{cz + d}, \quad (2.136)$$

$$z'' \rightarrow \frac{z''}{(cz + d)^2} - \frac{2c(z')^2}{(cz + d)^3}, \quad (2.137)$$

$$z''' \rightarrow \frac{z'''}{(cz + d)^2} - \frac{6cz'z''}{(cz + d)^3} + \frac{6c^2(z')^3}{(cz + d)^4} \quad (2.138)$$

и

$$y' \rightarrow \frac{y'}{cz + d} - \frac{cyz'}{(cz + d)^2}, \quad (2.139)$$

$$y'' \rightarrow \frac{y''}{cz + d} - \frac{2cy'z'}{(cz + d)^2} - \frac{cyz''}{(cz + d)^2} + \frac{2c^2y(z')^2}{(cz + d)^3}, \quad (2.140)$$

$$y''' \rightarrow \frac{y'''}{cz + d} - \frac{3cy''z'}{(cz + d)^2} - \frac{3cy'z''}{(cz + d)^2} + \frac{6c^2y'(z')^2}{(cz + d)^3} - \frac{cyz'''}{(cz + d)^2} + \frac{6c^2yz'z''}{(cz + d)^3} - \frac{6c^3y(z')^3}{(cz + d)^4} \quad (2.141)$$

Следовательно, выражение

$$S(z) = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 \rightarrow S(z) \quad (2.142)$$

инвариантно, в то время как

$$\sigma_2(y, z) = \left(\frac{y''}{z'} - \frac{y' z''}{(z')^2} \right) \rightarrow (cz + d)\sigma_2(y, z) \quad (2.143)$$

проективно-инвариантно так же, как и

$$\begin{aligned} \sigma_3(y, z) = \left(\frac{y'''}{z'} - \frac{3y'' z''}{2(z')^2} - \boxed{1} \frac{y' z'''}{(z')^2} + \boxed{\frac{3}{2}} \frac{y'(z'')^2}{(z')^3} \right) \rightarrow \\ \rightarrow (cz + d)\sigma_3(y, z) \end{aligned} \quad (2.144)$$

Более детально

$$\frac{y'''}{z'} - \frac{3y'' z''}{2(z')^2} \rightarrow (cz + d) \left(\frac{y'''}{z'} - \frac{3y'' z''}{2(z')^2} \right) - cyS(z) \quad (2.145)$$

Это выражение вместе с $-\frac{y'}{z'}S(z)$ – инвариант, поскольку Шварциан $S(z)$ является инвариантом, а $\frac{y'}{z'} \rightarrow (cz + d)\frac{y'}{z'} - cy$.

Таким образом можно предположить, что линейная по \bar{y} часть ответа

$$\oint \bar{y} \left(\sigma_3(y, z)\zeta^2 + 3\sigma_2(y, z)\zeta \right) d\zeta \quad (2.146)$$

Однако это инвариант преобразований (2.135), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.147)$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.148)$$

$$z^2 \frac{\partial}{\partial z} + yz \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.149)$$

которые отличны от (2.120). Особенно важно отсутствие подчеркнутого члена из (2.120) в (2.147). Следовательно, (2.146) отличается от двойного интеграла. Однако разница минимальна (легко проверить, что (2.150) повторяет уравнение (2.133)):

$$\begin{aligned} D = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{1}{2\pi i} \oint dx \bar{y}(\bar{x}) \left(x^2 \left(\frac{y'''}{z'} - \frac{3y'' z''}{2z'^2} + \frac{3y' z''^2}{4z'^3} - \frac{1y' z'''}{2z'^2} \right) + \right. \\ \left. + 3x \left(\frac{y''}{z'} - \frac{y' z''}{z'^2} \right) \right) - \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2\pi i} \oint x^2 dx \bar{z}(\bar{x}) S(z) + \dots \end{aligned} \quad (2.150)$$

то есть оба выделенных коэффициента в (2.144) модифицированы с помощью множителя $1/2$. Это, безусловно, нарушает инвариантность под действием (2.147), однако, это как раз то, что необходимо для инвариантности под действием (2.120): изменение коэффициентов целиком компенсировано изменением \bar{z} на y^2 в члене $\oint \bar{z}S(z)\zeta^2 d\zeta$ (отсутствующий подчеркнутый член в (2.147)).

2.6 Выводы

В этом разделе мы использовали конструктивный подход работ [62], [63], [97] и вычислили регуляризованную площадь минимальной поверхности в пространстве AdS, ограниченной волнистой окружностью на бесконечно удаленной границе, до четвертого порядка по параметрам отклонения h, \bar{h} граничного контура от окружности. Мы подтвердили гипотезу [62, 97], что бесконечно много членов вида $h^m \bar{h}$ и $h \bar{h}^n$ совпадают в правой и левой части (2.3). Однако, четвертый порядок включает также и члены вида $h^2 \bar{h}^2$, в которых возможно отклонение от соответствия (2.3), поскольку эти члены не контролируются конформной инвариантностью [39, 37, 69, 62]. И мы действительно наблюдали отклонение от (2.3), более того предположение о полиномиальной зависимости коэффициентов оказалось неверным.

Это наблюдение повторяет наблюдение о нарушении гипотезы БДС (2.4) в случае $n = 6$ [23, 38], где члены, форма которых не контролируется конформной инвариантностью, нарушают (2.3). Преимущество случая волнистого граничного контура заключается в конструктивном подходе к вычислению минимальной поверхности. Недостаток заключается в отсутствии явной связи с вычислениями фейнмановских диаграмм и гипотезой о неабелевом Вильсоновском среднем в режиме слабой связи.

Вычисление для волнистого граничного контура имеет свои особенности. Общая структура коэффициентов $D^{(m|n)}$ полностью описана в разделе 2.2. Однако похожая явная общая формула для коэффициентов $A^{(m|n)}$ остается неизвестной, несмотря на явную рекурсивную процедуру инверсии лапласиана Намбу-Гото Δ_{NG} , сформулированную и примененную в разделе 2.3.

С другой стороны даже формулы (2.18) не имеют простой интерпретации в терминах дифференциальной геометрии: они не представлены как

интегралы локальной кривизны и ее производных [62], таким образом, геометрический смысл этих формул остается открытым вопросом.

Такое же вычисление может быть проведено для волнистой деформации другого точно решаемого примера плоских кривых: двух концентрических окружностей [104]. Однако вместо этого мы обобщили анализ [62] на случай непланарных деформаций окружности.

В заключение данного раздела, заметим, что проведенный в данной главе анализ открывает возможность систематического исследования отклонений в формуле (2.3), поиска скрытых симметрических свойств с обеих сторон соответствия и, в конце концов, модификации абелевой формулы в правой части соответствия, которая будет выполнять роль аналога в сильной связи для неабелевого Вильсоновского среднего в режиме слабой связи, таким образом представляя явную формулировку струнно-калибровочной дуальности для амплитуд рассеивания.

Глава 3

Дуальность в трех измерениях

3.1 Модулярное ядро

Конформный блок $B_\Gamma(a|m|q)$ для данного графа Γ зависит от трех типов переменных: a и m - параметры (α -параметры) на внутренних линиях и внешних ногах соответственно (соответствующие конформные размерности квадратичны по этим параметрам), а q параметризует сам граф. Модулярное преобразование в данном случае не меняет граф Γ , но изменяет $q \rightarrow q'$ и переставляет элементы множества α параметров на внешних ногах. Оно может быть представлено интегральным преобразованием по переменным a :

$$B_\Gamma(a|\alpha|q) = \int M(a, a') B_\Gamma(a'|\alpha'|q') d\mu(a') \quad (3.1)$$

Функция $M(a, a')$ зависит от Γ и α , но не от q , и называется модулярным ядром, связанным с преобразованием $q \rightarrow q'$. В ряде случаев оно просто представлено преобразованием Фурье:

$$M(a, a') \sim \exp\left(\frac{4\pi i a a'}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \dots\right) \quad (3.2)$$

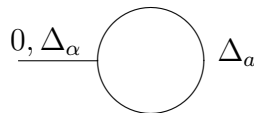


Рис. 3.1: Диаграмма торического конформного блока, $\Delta_a = \frac{\epsilon^2/4+a^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}$, $\Delta_\alpha = \frac{\epsilon^2/4+\alpha^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}$.

Простейший пример дается модулярным преобразованием торического одноточечного конформного блока, рис.3.1, который описывает с точки зрения калибровочной теории модель суперсимметричного Янга-Миллса с гипермультиплетом материи в присоединенном представлении с массой $m = -i\alpha + \frac{\epsilon}{2} = -2i\tilde{\alpha}$:

$$\mathcal{B}(a|\alpha| - 1/\tau) = \int \mathcal{M}(a, a'|\alpha)\mathcal{B}(a'|\alpha|\tau)d\mu(a') \quad (3.3)$$

где [105]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a|\alpha|\tau) &= q^{-(\nu+1)/24}\eta(q)^\nu e^{\frac{2\pi i\tau a^2}{\epsilon_1\epsilon_2}} \times \\ &\times \left(1 + 2q \frac{(\epsilon_1 - m)(\epsilon_2 - m)}{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{(\epsilon^2 - 4a^2 + m(m - \epsilon))}{(\epsilon^2 - 4a^2)} + O(q^2) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

здесь приведены следующие обозначения: $\nu = 1 - \frac{2m(\epsilon-m)}{\epsilon_1\epsilon_2}$, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ и $\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$, $q = e^{2\pi i\tau}$. Согласно [116] модулярное ядро дается формулой:

$$\mathcal{M}(a, a'|\alpha) = \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} \int \frac{s(a+r+\tilde{\alpha})s(a-r+\tilde{\alpha})}{s(a+r-\tilde{\alpha})s(a-r-\tilde{\alpha})} e^{\frac{4\pi i r a'}{\epsilon_1\epsilon_2}} dr \quad (3.5)$$

где мера задается формулой

$$d\mu(a') = 4 \sinh(2\pi\epsilon_1 a') \sinh(2\pi\epsilon_2 a') da' \quad (3.6)$$

Функция $s(z)$ - квантовый дилогарифм [19, 42], отношение двух дигамма функций Барнса [19],

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m + \frac{1}{2})\epsilon_1 + (n + \frac{1}{2})\epsilon_2 - iz}{(m + \frac{1}{2})\epsilon_1 + (n + \frac{1}{2})\epsilon_2 + iz} \quad (3.7)$$

Заметим, что $\mathcal{M}(a, a'|\alpha)$ зависит от внешнего Лиувиллевского импульса $\tilde{\alpha}$, внутренней размерности $\Delta(\alpha)$ и центрального заряда $c = 1 + 6\frac{\epsilon^2}{\epsilon_1\epsilon_2}$, но не от модулярного параметра τ .

Когда $\alpha \rightarrow 0$, конформный блок становится чисто классическим:

$$\mathcal{B}(a|\alpha|\tau) \rightarrow \frac{1}{\eta(q)} e^{2i\pi\tau a^2/\epsilon_1\epsilon_2}$$

(последний множитель в скобках в выражении (3.4) становится $q^{1/12}\eta^{-2}(q)$, когда $m = 0$), и модулярное преобразование сводится к обычному преобразованию Фурье:

$$\mathcal{M}(a, a'|0)\mu'(a) \xrightarrow{\tilde{\alpha}=i\epsilon/2} \sqrt{2} \cos\left(4\pi i \frac{aa'}{\epsilon_1\epsilon_2}\right) \quad (3.8)$$

так что

$$\frac{e^{-2\pi i\tau^{-1}a^2/(\epsilon_1\epsilon_2)}}{\eta(-\tau^{-1})} = \int \frac{da'}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} e^{4\pi i aa'/(\epsilon_1\epsilon_2)} \frac{e^{2\pi i\tau a'^2/(\epsilon_1\epsilon_2)}}{\eta(\tau)} \quad (3.9)$$

Вывод (3.8) из уравнения (3.5) - довольно нетривиальная задача, см. Приложение А.2 для упрощенного случая $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = g_s$.

Заметим, что модулярное ядро удовлетворяет соотношению унитарности

$$\int d\mu(a) M(a, b) M^*(a, b') = \frac{d\mu(b')}{db'} \delta(b - b') \quad (3.10)$$

Следовательно естественно определить след как $\text{Tr} \sim \int \frac{d\mu(a)}{d\mu(a')} da' \delta(a - a')$. Тогда модулярное ядро (3.5) расщепляется на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{M}(a, a|\alpha) da &= \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} \int \int \frac{s(a+r+\tilde{\alpha})s(a-r+\tilde{\alpha})}{s(a+r-\tilde{\alpha})s(a-r-\tilde{\alpha})} e^{4\pi i r a} dr da = \\ &= \frac{2^{3/2}}{s(\alpha)} T_+(\tilde{\alpha}) T_-(\tilde{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$T_{\pm}(\tilde{\alpha}) = \int \frac{s(z+\tilde{\alpha})}{s(z-\tilde{\alpha})} e^{\pm i\pi z^2} dz \quad (3.12)$$

На самом деле такие величины, как $T_{\pm}(\tilde{\alpha})$, хорошо известны в теории Черна-Саймонса, и соотношение такого вида открывает путь к трехмерному обобщению соотношения Алдая-Гайотто-Тачикавы.

3.2 Примеры из теории узлов

Полиномиальные инварианты узлов могут быть определены как средние Вильсоновских петель вдоль узла в топологической теории Черна-Саймонса [120]:

$$\langle K \rangle_R = \left\langle \text{Tr}_R P \exp \oint_K A \right\rangle_{CS} \quad (3.13)$$

Эти инварианты зависят от узла K , алгебры Ли G , ее представления R , и константы связи $\hbar = \log q = \frac{2\pi i}{k}$ (иногда k сдвинута в $k + C_A$, как в модели ВЗВН [119]), и в дополнение от монодромии u , которая описывает отклонение от периодичности поля A при обходе вокруг узла. Можно считать u собственным значением матрицы монодромии $PSL(2)$ вокруг узла K . С другой стороны можно считать, что u принимает значения в подалгебре Картана калибровочной группы $SU(2)$, и, в этом случае, описывается представлением R , отвечающим узлу K .

Средние $\langle K \rangle_R$ являются интересным обобщением обычных характеров и, как и все точные корреляторы, обладают свойствами интегрируемых систем [96, 2]. Как явная реализация скрытой интегрируемой структуры, средние $\langle K \rangle_R$ удовлетворяют K -зависимым разностным уравнениям по переменной $R(!)$ [52], которые позволяют описывать их как элементы семейства обобщенных q -гипергеометрических рядов. Предел $q \rightarrow 1$ для этих уравнений определяет спектральную кривую $\Sigma(K)$, а седловая точка соответствующего интегрального представления определяет соответствующий дифференциал Зайберга-Виттена. Таким образом полная зависимость от \hbar может быть восстановлена с помощью топологической рекурсии [30, 12, 15, 41] из данных Зайберга-Виттена [33].

Интересное свойство инвариантов (3.13) заключается в том, что в точке $u = 0$ они описываются полиномами по переменной $q = \exp(\frac{2\pi i}{k})$. В литературе эти полиномы, нормированные на квантовую размерность, имеют различные названия в зависимости от группы и представления. Здесь для

удобства мы приводим таблицу, описывающую соответствие:

$G \setminus P$	Фундаментальное представление	Общее представление с весом λ
$N = 0$	Полином Конвея-Александера	—
$SU(2)$	Полином Джонса	Цветной полином Джонса
$SU(N)$	Полином ХОМФЛИ	Цветной полином ХОМФЛИ
$SO(N)$	Полином Кауффмана	Цветной полином Кауффмана
$\{SU(N)\}_t$	Суперполином	Цветной суперполином

Последняя строка в таблице описывает обобщение (квантовых) групп на характеры Макдональда, которое описывает однопараметрическую деформацию (t -деформацию) (3.13), на суперполиномы [40, 56], включающие гомологии Хованова [68]. Дальнейшее обобщение характеров Макдональда на уровень полиномов Аски-Вильсона-Керова остается до сих пор неисследованным.

3.2.1 Представление через квантовый дилогарифм

В [52] полиномиальные инварианты (3.13) для калибровочной группы $SU(2)$ со спином J были систематически интерпретированы как обобщенные q -гипергеометрические функции, такие представления были детально изучены ранее в явных примерах. Это означает, что эти Вильсоновские

средние могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\langle K \rangle_J = \dim_q(R) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{(q, N)_{k_1} \dots (q, N)_{i_1}}{(q, N)_{k_{i_2}} \dots (q, N)_{k_n}} q^{p_2(k_1, \dots, k_n)} \quad (3.14)$$

Здесь $N = 2J + 1$, $(q, N)_k$ - q -Почхаммер символ:

$$(q, N)_k = \prod_{i=1}^k \left(q^{\frac{N-i}{2}} - q^{-\frac{N-i}{2}} \right) \quad (3.15)$$

а $p_2(k_1, \dots, k_n)$ - определенная квадратичная функция. Числа k_i в сумме (3.14), квадратичный полином p_2 , расстановка символов Почхаммера определена узлом K и пределами суммирования по J . Существование такого представления для узлов напрямую следует из гипотезы AJ для цветных полиномов Джонса [53], которая утверждает, что $\langle K \rangle_j$ являются решением определенного гипергеометрического разностного уравнения. В то же время символы Почхаммера могут быть выражены через отношение квантовых дилогарифмов:

$$(q, N)_k = (-i)^k \frac{s \left(i\epsilon_2(N - 1 - k) + \frac{i}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \middle| \epsilon_1, \epsilon_2 \right)}{s \left(i\epsilon_2(N - 1) + \frac{i}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \middle| \epsilon_1, \epsilon_2 \right)} \quad (3.16)$$

а выражение (3.14) может быть переписано как

$$\langle K \rangle_J = \dim_q(R) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{s_{k_1} \dots s_{k_{i_1}}}{s_{k_{i_2}} \dots s_{k_n}} q^{p_2(k_1, \dots, k_n)} \quad (3.17)$$

Это действие дает выражение дискретной версии инвариантов Хиками.

3.2.2 Формализм Хиками в теории Черна-Саймонса

Идея формализма Хиками заключается в вычислении статистических сумм в теории Черна-Саймонса, используя триангуляции трехмерного многообразия M , т.е. разлагая его на элементарные симплексы, тетраэдры. Каждый тетраэдр имеет четыре грани, можно выбрать две из них и окрасить в белый, тогда две другие будут окрашены в черный, и разрешается склеивать только черные грани с белыми. Для каждого тетраэдра в соответствие белым граням ставится число p , а черным - p^* . Когда две грани склеены, два соответствующих числа должны быть отождествлены,

$p_i = p_j^*$. В конце концов каждому тетраэдру ставится в соответствие функция $G(p_1^*, p_2^* | p_1, p_2)$, и берется интеграл по всем p -переменным на всех плоскостях. Таким образом каждой триангуляции S^3 ставится в соответствие многократный интеграл по переменным p , по одной на каждую 2-грань триангуляции:

$$H(K|u) = \int \prod_{\text{simplices}} dp_{i_1} dp_{i_2} dp_{i_1} dp_{i_2} G(p_{i_1}^*, p_{i_2}^* | p_{i_1}, p_{i_2}) \times \prod_{2\text{-faces}} \delta_{p_{k_m}^* - p_{k_n}} \prod_{1\text{-cycles}} \delta \left(\sum p_j - u \right) \quad (3.18)$$

В то же время, геометрически, с каждой системой склеенных тетраэдров можно ассоциировать узел K , более того, переменные u , которые соответствуют 1-циклам, могут быть интерпретированы как $U(1)$ -монодромии вокруг узла K . Функции G были найдены в [58]:

$$G(p_{i_1}^*, p_{i_2}^* | p_{i_1}, p_{i_2}) = \delta(p_1 + p_2 - p_1^*) s(p_2^* - p_2 - i\pi + \hbar | \epsilon_1, \epsilon_2) e^{\frac{p_1(p_2^* - p_2)}{2\hbar} + \frac{\hbar^2}{2}} \quad (3.19)$$

интеграл Хиками $H(K|u)$ для данного K имеет тот же вид, что и Вильсоновское среднее $\langle K \rangle_R$ в разделе 3.2.1 в переменных (\hbar, u) , однако сумма заменена на интеграл. Переход от сумм к интегралам связан с переходом от компактных к некомпактным группам.

3.2.3 Спектральные кривые и топологическая рекурсия

Как минимум для $G = SL(2)$ среднее $\langle K \rangle_R$ зануляется зависящим от K разностным оператором, т.е. удовлетворяет рекуррентному соотношению по спину J , это соотношение носит название гипотезы AJ [53] (для первых примеров вне $SL(2)$ см. [51]). В переменных $u = N\hbar$, где $N = D_{2J+1} = 2J + 1$, можно записать:

$$\mathcal{A}(e^{\hbar\partial_u}, e^u) \langle K \rangle_R = 0 \quad (3.20)$$

В пределе $\hbar = 0$ этот оператор превращается в функцию (полином), а разностное уравнение - в алгебраическое,

$$\Sigma(K) : \mathcal{A}(w, \lambda) = 0 \quad (3.21)$$

определяя спектральную кривую $\Sigma(K)$. Далее можно определить дифференциал Зайберга-Виттена:

$$dS = \log w d \log \lambda \quad (3.22)$$

В типичных примерах узлов 4_1 и $m009$, это квадратичное уравнение по w (заметим, что дополнительный $U(1)$ -множитель $w - 1$ отделяется, понижая степень уравнения на единицу):

$$\begin{aligned} \Sigma(K) : \quad \mathcal{A}(w, \lambda) &= w + \frac{1}{w} = 2f \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \\ w_{\pm}(\lambda) &= f \pm \sqrt{f^2 - 1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

а

$$dS = \left(\log w_+(\lambda) - \log w_-(\lambda) \right) d \log \lambda = \log \frac{f + \sqrt{f^2 - 1}}{f - \sqrt{f^2 - 1}} d \log \lambda \quad (3.24)$$

Свободная энергия $F = \log \langle K \rangle_R$ - точный препотенциал Зайберга-Виттена, восстановленный во всех порядках в разложении по родам из данных (Σ_K, dS) с помощью топологической рекурсии [30, 12, 15, 41]. См. [33] для детальных примеров этой реконструкции.

3.3 Трехмерное соотношение Алдая-Гайотто-Тачикавы

Предложение [115] отождествить модулярные ядра $M(a, a')$, связанные с модулярными преобразованиями римановой поверхности с отмеченными точками $S(q) \rightarrow S(q')$, с амплитудами кобордизма в теории Черна-Саймонса на трехмерном пространстве, который интерполирует между $S(q)$ и $S(q')$. В частности, след $M(a, a')$ нужно сравнивать с инвариантами узлов, где соответствующий узел K задается замкнутыми траекториями отмеченных точек, в то время как внешние моменты отождествляются с монодромиями вокруг компонент узла. Конечно, K зависит от выбора модулярного преобразования. В действительности выражения (3.29) и (3.30), приведенные ниже, крайне похожи. Оба являются многократными интегралами произведений квантовых дилогарифмов $s(\dots | \epsilon_1, \epsilon_2)$, при следующем естественном отождествлении параметров:

$$2\pi i \hbar = \log q = \frac{2\pi i}{k + C_G} \stackrel{[115]}{=} 2\pi i b^2 = \frac{2\pi i \epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (3.25)$$

Однако, имеются и различия: в числе дилогарифмов s , в их аргументах и контурах интегрирования. Возможно, наиболее значительное различие заключается в том, что переменные интегрирования подчиняются “законам

сохранения” в выражениях для инвариантов узлов, однако такого не происходит в выражении для следа матрицы монодромии. Чтобы увидеть это, используем свойство

$$s(z) = 1/s(-z) \quad (3.26)$$

чтобы перевести все дилוגарифмы в числитель, так что все интегралы приобретают “каноническую” форму:

$$\prod_i \int_{C_i} dp_i \prod_m s(A_{mi}p_i + B_m | \epsilon_1, \epsilon_2) \exp(C_{ij}p_i p_j + D_i p_i + E) \quad (3.27)$$

Тогда

$$\sum_m A_{mi} = 0 \quad (3.28)$$

в (3.12), однако этого не происходит в целом для инвариантов узлов. Простейший пример такой разницы может быть представлен между выражениями

$$T_{\pm}(z) = \int \frac{s(z + \tilde{\alpha})}{s(z - \tilde{\alpha})} e^{\pm i\pi z^2} \quad (3.29)$$

которые являются составляющими выражения для торического модулярного ядра, и

$$\langle 4_1 \rangle \sim \int s(z + u) s(z - u) e^{\frac{6\pi i u z}{\epsilon_1 \epsilon_2}} dz \quad (3.30)$$

для среднего Вильсона-Хиками, отвечающего узлу 4_1 .

3.4 Альтернативная дуальность

Рассмотрим альтернативные возможности построения дуальности в данном контексте. Очевидная возможность заключается в обобщении обычной дуальности АГТ добавлением лишнего измерения к обеим теориям: соотношение между трехмерной теорией Черна-Саймонса и пятимерной суперсимметричной теорией Янга-Миллса. Во многих отношениях эта дуальность проще описанной в предыдущих разделах. Уравнения в разделе 3.2.3 описывают инварианты узлов, однако в (3.23) легко узнать спектральную кривую релятивистской системы Тоды, а в (3.24) – соответствующий дифференциал Зайберга-Виттена [99]. Затем пятимерная суперсимметричная

теория Янга-Миллса может быть описана как q -деформация четырехмерной теории.

В рамках этого соответствия необходимо сопоставить разностное уравнение (3.20) с уравнением Бакстера для той же системы. Известно, что уравнения Бакстера [83] возникают в пределе Некрасова-Шаташвили [101], а, следовательно, должны позволить связать теорию Черна-Саймонса с q -деформированной конформной теорией поля.

При этом стоит упомянуть следующие интересные особенности. Формула для функции дилогарифма из Приложения А задают интегральное представление для решений уравнений (3.20). Они похожи на решения [66] для *открытой* цепочки Тоды, однако уравнения (3.23) описывают *закрытую* цепочку и неприменимы в противном случае.

Дело в том, что, во-первых, (3.20) определяет уравнение Бакстера в некоторой конкретной точке пространства модулей: для специальных значений “энергий”, таким образом, сам факт того, что решения такого вида недоступны в общем виде в точке общего положения, не запрещает решению существовать в некоторой выделенной точке. Во-вторых, в то время как классические уравнения (3.23), с очевидностью, представляют из себя уравнения релятивистской теории Тоды, их квантование неоднозначно, а (3.20) не является стандартной версией уравнения Бакстера, рассмотренной в литературе. Также необходимо заметить, что при рассмотрении разностного уравнения (а не дифференциального) возникает бесконечно много решений. Для фиксации этой неоднозначности накладывают условие в виде двух разностных уравнений. И эта пара, как правило, связана симметрией $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, которая явно нарушена при построении инвариантов узлов, например, в (3.25).

Важный и интересный вопрос, возникающий на этой стадии: чем нужно заменить инварианты узлов при обобщении такой дуальности на полноценную деформацию ЛМНШ для пятимерной теории Янга-Миллса.

3.5 Выводы

После открытия соотношения АГТ [6], которое вкладывает двумерную конформную теорию поля в общий контекст теории Зайберга-Виттена и интегрируемых теорий [55], началась охота за различными обобщениями, в частности такими, которые дадут подобный эффект для трехмерной тео-

рии Черна-Саймонса. В этой главе мы провели количественное обсуждение соотношения АГТ для трехмерной теории. Это стало возможным благодаря быстрому прогрессу в теории инвариантов узлов.

Таким образом, имея в наличии набор различных явных примеров, можно испытывать различные гипотезы. Мы указали на сложности, возникающие в гипотезе, представленной в [115], связывающей инварианты узлов с модулярными ядрами.

Тем не менее эти инварианты имеют непосредственное отношение к пятимерной суперсимметричной теории Янга-Миллса, что является более прямой, хоть и менее интригующей, реализацией соответствия.

Глава 4

S-дуальность: пертурбативный подход

4.1 Коэффициенты Рака-Вигнера для алгебры Вирасоро [95]

4.1.1 Определения

Как хорошо известно, двумерные конформные теории поля могут быть интерпретированы в терминах теории представлений алгебры Вирасоро,

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m} \quad (4.1)$$

с нетривиальным правилом ко-умножения [95]

$$\Delta(L_n) = I \otimes L_n + \sum_{k=-1}^{\infty} x^{n-k} \binom{n+1}{k+1} L_k \otimes I \quad (4.2)$$

которое сохраняет центральный заряд алгебры (центральный заряд алгебры с наивным ко-умножением $\tilde{\Delta}(L_n) = I \otimes L_n + L_n \otimes I$ оказывается удвоенным по отношению к L_n). Мы обозначаем ко-умножение жирным шрифтом, чтобы отличить его от конформных размерностей полей. Примарное поле соответствует векторам старшего веса $L_Y V_\Delta = 0$, $L_0 V_\Delta = \Delta V_\Delta$, которые генерируют представления (модули Верма) $R_\Delta = \{L_{-Y} V_\Delta\}$. Киральная часть ассоциативного операторного разложения

$$L_{-Y_1} V_{\Delta_1}(0) \otimes L_{-Y_2} V_{\Delta_2}(x) = \sum_{\Delta, Y} C_{\Delta_1, Y_1 | \Delta_2, Y_2}^{\Delta, Y} L_{-Y} V_\Delta(0) x^{\Delta + |Y| - \Delta_1 - |Y_1| - \Delta_2 - |Y_2|} \quad (4.3)$$

должна соответствовать (4.2), что сильно ограничивает (почти фиксирует) коэффициенты $C_{\Delta_1, Y_1 | \Delta_2, Y_2}^{\Delta, Y}$.

Однако, в теории присутствует не только структура ассоциативной алгебры. Четырехточечный конформный блок дается скалярным произведением тройного произведения представлений с фиксированным представлением во внутреннем канале и представления, соответствующего точке на бесконечности (далее мы связываем его с четвертой точкой конформного блока). Более детально мы рассматриваем произведение двух перепутывающих операторов, $\Phi_{12}^3 : R_1 \otimes R_2 \rightarrow R_3$, которые могут быть скомбинированы двумя способами: $\Phi_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta \Phi_{\Delta', \Delta_3}^{\Delta_4}$ и $\Phi_{\Delta_1, \Delta}^{\Delta_4} \Phi_{\Delta_2, \Delta_3}^\Delta$, где промежуточное представление R_Δ обозначает различные представления, возникающие при тензорном произведении двух представлений. Как обычно, мы требуем ассоциативности ко-произведения, что означает, что два различных способа умножения перепутывающих операторов задает два различных базиса конформных блоков, связанных ортогональной, не зависящей от x матрицей $M_{\Delta\Delta'}$, которая называется матрицей коэффициентов Рака-Вигнера, иными словами линейным отображением

$$\Phi_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta \Phi_{\Delta', \Delta_3}^{\Delta_4} = \sum_{\Delta'} M_{\Delta\Delta'} \Phi_{\Delta_1, \Delta'}^{\Delta_4} \Phi_{\Delta_2, \Delta_3}^{\Delta'} \quad (4.4)$$

Вместо рассмотрения этих произведений перепутывающих операторов можно вычислить их значения на векторах старшего веса. Поскольку дуальное представление к R_{Δ_4} входит в ответ, он может быть переписан как скалярное произведение. Это произведение называется конформным блоком, а, следовательно, существуют два разных типа конформных блоков. Их можно изобразить как

$$\begin{array}{ccc}
 B_\Delta(x) = & \langle (V_{\Delta_1}(0) \otimes V_{\Delta_2}(x)) \otimes V_{\Delta_3}(1), V_{\Delta_4}(\infty) \rangle & \\
 & \nearrow I & \\
 \langle V_{\Delta_1}(0) V_{\Delta_2}(x) V_{\Delta_3}(1) V_{\Delta_4}(\infty) \rangle & & \\
 & \searrow II & \\
 B_{\Delta'}(1-x) = & \langle V_{\Delta_1}(0) \otimes (V_{\Delta_2}(x) \otimes V_{\Delta_3}(1))_{\Delta'}, V_{\Delta_4}(\infty) \rangle & \\
 & & \updownarrow B_\Delta = \sum_{\Delta'} M_{\Delta\Delta'} B_{\Delta'}
 \end{array}$$

В терминах конформных блоков соотношение (4.4) может быть переписано как

$$\boxed{B_\Delta(x) = \sum_{\Delta'} M_{\Delta\Delta'} B_{\Delta'}(1-x)} \quad (4.5)$$

В этой главе наша цель - изучить это отображение в терминах дуальностей. С одной стороны $M_{\Delta\Delta'}$ описывает модулярные преобразования конформных блоков, с другой она представляет собой деформацию преобразования дуальности, обобщения преобразования Лежандра на случай $\epsilon_1, \epsilon_2 \neq 0$.

4.1.2 Различные модулярные преобразования

Стоит заметить, что преобразование (4.5) не исчерпывает все возможные соотношения между различными типами конформных блоков. Можно менять порядок вертексных операторов внутри скобок и перераспределять скобки различными способами в конечном скалярном произведении. Можно построить все возможные соотношения из двух независимых преобразований

$$\hat{S} : \quad x \rightarrow 1 - x, \quad \hat{T} : \quad x \rightarrow \frac{x}{x - 1} \quad (4.6)$$

Первое связывает два следующих вида конформных блоков

$$\begin{array}{c|c|c} x, \Delta_2 & 1, \Delta_3 & \\ \hline 0, \Delta_1 & \Delta & \infty, \Delta_4 \end{array} \xrightarrow{\hat{S}} \begin{array}{c|c|c} x, \Delta_2 & 0, \Delta_1 & \\ \hline 1, \Delta_3 & \Delta' & \infty, \Delta_4 \end{array} \quad (4.7)$$

Это преобразование S -дуальности выглядит особенно просто в терминах “эффективной константы связи” \mathcal{T} (см. раздел 1.1, где введена соответствующая терминология) в пределе Зайберга-Виттена:

$$\hat{S} : \quad \mathcal{T} \rightarrow -\frac{1}{\mathcal{T}} \quad (4.8)$$

Второй генератор \hat{T} , который описывает второе модулярное преобразование (этих двух достаточно, чтобы построить всю модулярную группу), в этом случае имеет вид

$$\hat{T} : \quad \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} + 1 \quad (4.9)$$

Это модулярное преобразование связывает конформные блоки следующего вида

$$\begin{array}{c|c|c} x, \Delta_2 & 1, \Delta_3 & \\ \hline 0, \Delta_1 & \Delta & \infty, \Delta_4 \end{array} \xrightarrow{\hat{T}} \begin{array}{c|c|c} x, \Delta_2 & \infty, \Delta_4 & \\ \hline 0, \Delta_1 & \Delta' & 1, \Delta_3 \end{array} \quad (4.10)$$

Также можно определить “затравочную константу связи” τ_0 : $x = e^{2\pi i\tau_0}$ (см. раздел 1.1), однако в этих терминах то же преобразование выглядит сложным:

$$\hat{S} : e^{2\pi i\tau_0} \rightarrow 1 - e^{2\pi i\tau_0}, \quad \hat{T} : e^{2\pi i\tau_0} \rightarrow \frac{e^{2\pi i\tau_0}}{e^{2\pi i\tau_0} - 1} \quad (4.11)$$

На Ω -фоне общего вида конформный блок преобразуется нетривиальным образом только по отношению к первому преобразованию, \hat{S} , в то время, как преобразование \hat{T} дает добавку в виде тривиального множителя:

$$B_\Delta(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4|x) = (-1)^\Delta (1-x)^{2\Delta_2} B_\Delta(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_3|x) \quad (4.12)$$

Это происходит, потому что \hat{T} перемешивает точки 1 и ∞ , но не влияет на точку x . В то же время (4.5) крайне нетривиально, так что мы в основном сконцентрируемся на нем.

Также мы рассмотрим преобразования одноточечного конформного блока на торе, который зависит от модулярного параметра тора τ_0 . Эти модулярные преобразования сгенерированы двумя независимыми преобразованиями

$$\hat{S} : \tau_0 \rightarrow -\frac{1}{\tau_0}, \quad \hat{T} : \tau_0 \rightarrow \tau_0 + 1 \quad (4.13)$$

В этом случае также только \hat{S} -преобразование оказывается нетривиальным, в то время, как \hat{T} -преобразование дает только фазовый фактор:

$$B_\Delta(\Delta_{ext}|\tau_0 + 1) = \exp\left\{2\pi i\left(\Delta - \frac{c}{24}\right)\right\} B_\Delta(\Delta_{ext}|\tau_0) \quad (4.14)$$

Мы вернемся к обсуждению полной модулярной группы (S -дуальности) в разделе 4.5.3.

4.1.3 Коэффициенты Рака-Вигнера для представлений $\mathcal{U}_q(sl_2)$

Задача построения матрицы Рака-Вигнера для алгебры Вирасоро была решена в случае вырожденных представлений [95], однако в общем случае она становится крайне нетривиальной. Тем не менее, в [108] Понсо и Тешнер изучили случай матрицы Рака-Вигнера для бесконечно-мерных представлений алгебры $U_q(sl_2)$ и предположили, что они совпадают с матрицами в случае Вирасоро.

В частности модулярное преобразование было явно описано в [108] в двух случаях, связанных согласно гипотезе Алдая-Гайотто-Тачикавы с суперсимметричной теорией Янга-Миллса с $N_f = 4$ фундаментальными или одним присоединенным мультиплетом материи. Первый случай отвечает четырехточечному конформному блоку [108]:

$$B_p \left(\begin{array}{cc|c} p_1 & p_2 & x \\ p_3 & p_4 & \end{array} \right) = \int d\mu(p') M_{pp'} \left(\begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{array} \right) B_{p'} \left(\begin{array}{cc|c} p_2 & p_3 & 1-x \\ p_4 & p_1 & \end{array} \right) \quad (4.15)$$

где

$$\Delta(p) = \frac{\epsilon^2/4 + p^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (4.16)$$

$$d\mu(p) = 4 \sinh \left(2\pi \frac{p}{\epsilon_1} \right) \sinh \left(2\pi \frac{p}{\epsilon_2} \right) dp, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (4.17)$$

и

$$M_{pp'} \left(\begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{array} \right) = \frac{s(u_1)s(w_1)}{s(u_2)s(w_2)} \int_{\mathbb{R}} dt \prod_{i=1}^4 \frac{s(t - r_i)}{s(t - q_i)} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= p_2 - p_1 & q_1 &= \epsilon/2 - p_4 + p_2 - p' & u_1 &= p + p_2 - p_1 \\ r_2 &= p_2 + p_1 & q_2 &= \epsilon/2 - p_4 + p_2 + p' & u_2 &= p + p_3 + p_4 \\ r_3 &= -p_4 - p_3 & q_3 &= \epsilon/2 + p & w_1 &= p' + p_1 + p_4 \\ r_4 &= -p_4 + p_3 & q_4 &= \epsilon/2 - p & w_2 &= p' + p_2 - p_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

а второй случай отвечает одноточечному торическому конформному блоку

$$B_p(p_0|\mathcal{T}) = \int d\mu(p') M_{pp'}(p_0) B_{p'}(p_0| -1/\mathcal{T}) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} M_{pp'}(p_0) &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{s(p_0)} \int_{\mathbb{R}} dt \frac{s(p' + \frac{1}{2}(p_0 + \epsilon) + t)}{s(p' - \frac{1}{2}(p_0 + \epsilon) + t)} \times \\ &\quad \times \frac{s(p' + \frac{1}{2}(p_0 + \epsilon) - t)}{s(p' - \frac{1}{2}(p_0 + \epsilon) - t)} e^{4\pi i p t} \end{aligned} \quad (4.21)$$

где мы использовали функцию “квантовый дилогарифм” (см. Приложение А)

Формулы (4.15), (4.20) и (4.21) следует рассматривать как контурный интеграл вокруг полюсов и нулей квантовых дилогарифмов, и их крайне сложно использовать практически.

4.2 Конформные блоки и статистическая сумма в теории Янга-Миллса

4.2.1 Статистическая сумма Некрасова

Комплексная константа связи в теории Янга-Миллса определена в терминах стандартной константы связи g и θ -угла как

$$\mathcal{T} = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} \quad (4.22)$$

Внутренняя симметрия теории $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T} + 1$ и преобразование дуальности (S-дуальность), определенная Зайбергом и Виттенем [110], образуют модулярную группу $SL(2, \mathbb{Z})$. Важно делать различие между затравочной константой связи τ_0 , возникающей в фундаментальной суперсимметричной теории Янга-Миллса, и эффективной \mathcal{T} , возникающей в эффективном низко-энергетическом действии общего вида

$$S_{eff} = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \operatorname{Im} m \left[\int d^2\theta \frac{\partial \mathcal{F}(A)}{\partial A} \bar{A} + \frac{1}{2} \int d^4\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}(A)}{\partial A^2} W_\alpha W^\alpha \right] \quad (4.23)$$

как $\mathcal{T}(a) = \partial^2 \mathcal{F}(a) / \partial a^2$, где модуль a - вакуумное среднее скалярного поля. Мы рассмотрим действие S-дуальности на \mathcal{T} и τ_0 . Препотенциал Зайберга-Виттена может быть связан [102] с интегралом ЛМНШ [71, 94]

$$\mathcal{F} = \lim_{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2\pi i} \log \mathcal{Z}_{\text{LMNS}}$$

Интеграл ЛМНШ определен для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса на так называемом Ω -фоне, параметризованном двумя параметрами ϵ_1 и ϵ_2 . Простейшей является теория с калибровочной группой $SU(2)$ и четырьмя мультиплетами материи в фундаментальном представлении с массами μ_i (β -функция в этой теории зануляется). В этом случае интеграл ЛМНШ представлен [102] степенным разложением по экспоненцированной затравочной константе связи τ_0 , каждый член которой параметризован парой диаграмм Юнга Y_1, Y_2

$$Z_{\text{Nek}} = \sum_{Y_1, Y_2} N_{\epsilon_{1,2}}(Y_1, Y_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, a) e^{2\pi i \tau_0 (|Y_1| + |Y_2|)} \quad (4.24)$$

Коэффициенты $N_{\epsilon_{1,2}}(Y_1, Y_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, a)$ (функции Некрасова) - рациональные функции ϵ , скалярного вакуумного среднего a и масс гипермультиплетов материи μ_i .

Известно, что эти ряды совпадают [6, 124] с четырехточечным конформным блоком с точностью до так называемого $U(1)$ -фактора при следующем отождествлении параметров конформной теории поля и суперсимметричной теории Янга-Миллса:

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &= \frac{\alpha(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, & c &= 1 + 6 \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \\ \mu_1 &= -\epsilon/2 + \alpha_1 + \alpha_2, & \mu_2 &= \epsilon/2 + \alpha_2 - \alpha_1, \\ \mu_3 &= -\epsilon/2 + \alpha_3 + \alpha_4, & \mu_4 &= \epsilon/2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ a &= \alpha - \epsilon/2, & x &= e^{2\pi i \tau_0}\end{aligned}\tag{4.25}$$

где α_i соответствуют внешним размерностям, а α - внутренней размерности в (4.5).

Стоит заметить, что эти функции Некрасова не обладают какой-то особой симметрией, однако теория Зайберга-Виттена обладает [110, 111]. В действительности теория Зайберга-Виттена симметрична по отношению к преобразованию

$$\begin{aligned}\hat{T} : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} + 1 \\ \hat{S} : \mathcal{T} &\rightarrow -\frac{1}{\mathcal{T}}\end{aligned}\tag{4.26}$$

Эта симметрия отображает свободу в выборе A - и B -циклов на спектральной кривой. Как мы увидим, эта симметрия может быть обобщена до уровня ϵ -деформированного препотенциала, или функций Некрасова. Идея такого отождествления была представлена в [45].

4.2.2 Матричные модели

Как было показано в [88, 86] конформный блок, а, следовательно, и функция Некрасова, может быть определен в терминах бета-ансамбля (в дальнейшем мы часто будем называть его просто матричной моделью, хотя буквально к матричной модели он сводится в случае $c = 1$, т.е. при $\epsilon_1 = -\epsilon_2$):

$$\begin{aligned}Z &= \prod_{a < b} (q_a - q_b)^{\frac{2\alpha_a \alpha_b}{g}} \int_{\gamma_i} dz_i \left(\prod_{j > i} z_{ij}^{2\beta} \right) \prod_a (z_i - q_a)^{\frac{2b\alpha_a}{g}}, \\ g &= \sqrt{-\epsilon_1 \epsilon_2}, & \beta &= b^2 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\end{aligned}\tag{4.27}$$

Здесь $a, b = 1, 2, 3$, $q_1 = 0$, $q_2 = x$, $q_3 = 1$, а среди контуров интегрирования γ_i присутствует

$$N_1 = \frac{1}{b} (\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) \quad (4.28)$$

отрезков $[0, q]$ и

$$N_2 = \frac{1}{b} \left(b - \frac{1}{b} - \alpha - \alpha_3 - \alpha_4 \right) \quad (4.29)$$

отрезков $[0, 1]$. Эта статистическая сумма удовлетворяет уравнениям Зайберга-Виттена: препотенциал $F = g^2 \log Z$ может быть восстановлен из уравнений

$$a = \oint_A \Omega_{g,\beta}, \quad \frac{\partial F(a)}{\partial a} = \oint_B \Omega_{g,\beta} \quad (4.30)$$

где $\Omega_{g,\beta}$ - полная (включающая все рода) одноточечная резольвента в матричной модели. Это позволяет обобщить конструкцию Зайберга-Виттена на функции Некрасова и продолжить преобразование S-дуальности на конформные блоки. Как мы увидим далее, это преобразование, как раз, и описывается модулярным преобразованием.

Случай торического конформного блока, согласно АГТсоответствию, отвечает теории с бифундаментальным мультиплетом материи массы μ со следующим отождествлением параметров

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} - a^2, \quad \Delta_{\text{ext}} = \mu(Q - \mu), \quad c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1} \quad (4.31)$$

Конформный блок связан с статистической суммой эллиптического бета-ансамбля [89]

$$Z_a(\tau|\mu) = q^{-a^2} \int_0^\pi dz_1 \dots \int_0^\pi dz_N \prod_{i<j} \theta(z_i - z_j)^{-2b^2} \prod_i \theta(z_i)^{-2b\mu} e^{-4ia \left(\sum_i b z_i + \mu w \right)} \quad (4.32)$$

где число интегралов подчиняется условию $\mu + bN = 0$. Торическое тепловое ядро имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(z) &= 2q^{\frac{1}{8}} \sin z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - 2q^n \cos 2z + q^{2n}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} \sin(2n+1)z \end{aligned} \quad (4.33)$$

Конкретное соотношение этой статистической суммы и конформного блока имеет вид¹

$$Z_a(\tau|\mu) = \frac{Z_a(i\infty|\mu)}{\eta(q)^\nu} B_a(\tau|\mu), \quad \nu = 3\Delta_{\text{ext}} + 3N - 1 \quad (4.34)$$

4.3 Пертурбативное модулярное преобразование

4.3.1 Простейший случай и общая стратегия

Чтобы увидеть, как модулярное преобразование может быть интерпретировано в терминах теории Зайберга-Виттена, заметим, что в силу соответствия АГТ, конформный блок ведет себя подобно функции Некрасова, то есть в пределе, когда ϵ_1 и ϵ_2 стремятся к нулю:

$$B \stackrel{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0}{\sim} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} F_{SW}(a) \right\} \quad (4.35)$$

Здесь F_{SW} - препотенциал Зайберга-Виттена, определенный для спектральной кривой

$$\oint_A \Omega_{SW} = a, \quad \oint_B \Omega_{SW} = \frac{\partial F_{SW}(a)}{\partial a} \quad (4.36)$$

В то же время можно иначе выбрать контура интегрирования, и определить другой препотенциал

$$\oint_A \Omega_{SW} = -\frac{\partial F_{SW}^*(b)}{\partial b}, \quad \oint_B \Omega_{SW} = b \quad (4.37)$$

Рассмотрим простейший пример этой конструкции, соответствующий четырехточечному конформному блоку с нулевыми конформными размерностями внешних полей, или, в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с четырьмя безмассовыми гипермультиплетами материи (заметим, что в деформированном случае эти массы становятся пропорциональными $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ в то время, как конформные размерности по-прежнему равны нулю). Соответствующий дифференциал Зайберга-Виттена имеет следующий вид

$$\Omega_{SW} = \frac{udz}{\sqrt{z(z-x)(z-1)}} \quad (4.38)$$

Циклы выбраны как показано на рис.4.1. Можно непосредственно вычис-

¹Мы выбираем функцию Дедекинда имеющей следующий вид $\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_n (1 - q^n)$.

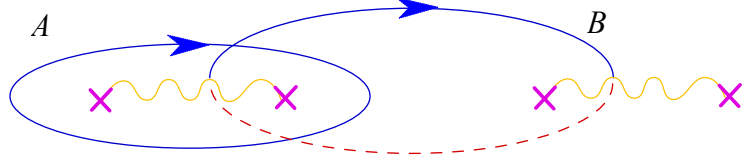


Рис. 4.1: Выбор циклов на спектральной кривой, отмеченные точки: 0, x , 1 и ∞

лить оба периода и соответствующий препотенциал

$$\oint_A \Omega_{SW} = \frac{1}{\pi i} K(x), \quad \oint_B \Omega_{SW} = \frac{1}{\pi} K(1-x),$$

$$F(a) = \frac{B}{2} \frac{K(1-x)}{K(x)} \quad (4.39)$$

Легко видеть, что рациональное преобразование $z \mapsto 1-z$ переставляет контура как $(A, B) \mapsto (-B, A)$, так что сопряженный препотенциал получается той же функцией с переменной x , замененной на $1-x$. Иными словами,

$$\boxed{F^*(a, x) = F(a, 1-x)} \quad (4.40)$$

Это соотношение также работает в общем случае, если массы или параметры деформации $\epsilon_{1,2}$ не равны нулю. Поскольку препотенциал непосредственно связан с конформным блоком, является естественным связать эту перестановку контуров с модулярным преобразованием $x \rightarrow 1-x$ для препотенциала, т.е.

$$\boxed{F \xrightarrow{M_{\Delta, \Delta'}} F^*} \quad (4.41)$$

Это утверждение позволяет построить соответствующую модулярную матрицу явным образом. Известно, что преобразование S-дуальности, которое связывает препотенциал Зайберга-Виттена с ему сопряженным, является ничем иным, как преобразованием Лежандра

$$F^*(a, x) = \sup_b \left(F(b, x) - ab \right) = F(a, 1-x) \quad (4.42)$$

Это соотношение можно рассматривать как лидирующее (квази-классическое) приближение к

$$\exp \left\{ \frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} F^*(a) \right\} = \int db \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} ab \right\} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} F^*(b) \right\} \quad (4.43)$$

где малыми параметрами являются $\epsilon_{1,2}$. Иными словами, асимптотическое поведение модулярной матрицы описывается формулой

$$M_{a,b} \sim \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} ab \right\} \quad (4.44)$$

4.3.2 Точно решаемые случаи

Теперь мы рассмотрим случаи, когда приближение Зайберга-Виттена оказывается почти точным. Это происходит, когда коэффициенты в рекурсивной формуле Замолодчикова [125]² зануляются:

$$B(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4; \Delta|x) = (e^{\pi i \mathcal{T}})^{\Delta - \frac{c-1}{24}} x^{\frac{c-1}{24} - \Delta_1 - \Delta_2} (1-x)^{\frac{c-1}{24} - \Delta_2 - \Delta_3} \times \\ \times \theta_3(\mathcal{T})^{\frac{c-1}{2} - 4(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)} \left(1 + H_{non-classical}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4; \Delta|x) \right) \quad (4.45)$$

$$\mathcal{T} = i \frac{K(1-x)}{K(x)}$$

Это хорошо известен случай теории с калибровочной группой $SU(2)$ с $N_f = 4$ мультиплетами материи в фундаментальном представлении с массами, такими, что $\Delta_i = \frac{1}{16}$, $\Delta = \frac{a^2}{g^2}$, и параметрами деформации такими, что $c = 1$. Тогда:

$$B(a|x) = \frac{e^{\frac{\pi i}{g^2} \mathcal{T} a^2}}{[x(1-x)]^{\frac{1}{8}} \theta_3(\mathcal{T})} \quad (4.46)$$

$$(4.47)$$

$$B(a|x) = \int \frac{db}{g} e^{\frac{2\pi i ab}{g^2}} B(b|1-x) \quad (4.48)$$

Второй точно решаемый пример представляется теорией с той же калибровочной группой $SU(2)$ с безмассовым мультиплетом материи в присоединенном представлении theory и параметрами деформации такими, что $c = 1$. Эта теория соответствует торическому конформному блоку ($\Delta = \frac{a^2}{g^2}$), и

$$B(a|\mathcal{T}) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{g^2} \mathcal{T} a^2}}{\eta(\mathcal{T})} \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

$$B(a|\mathcal{T}) = \int \frac{db}{g} e^{\frac{4\pi i ab}{g^2}} B\left(b \middle| -\frac{1}{\mathcal{T}}\right) \quad (4.51)$$

²Этот сюжет был рассмотрен в терминах АГТ в работах [75, 105].

в этом случае.

Как легко видеть, в обоих примерах асимптотическая форма модулярной матрицы оказывается точной. На самом деле эти два базовых примера эквивалентны друг другу в силу соответствия между одноточечным конформным блоком на торе и четырехточечным блоком на сфере, см. [105] и раздел 4.5.1.

4.3.3 Преобразование Фурье из алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$

Точные формулы могут быть сравнены с полученными из ядра Понсо-Тешнера (4.21). Например, когда внешняя размерность торического конформного блока стремится к нулю, ядро (4.21) сильно упрощается (см. Приложение A2):

$$\mathcal{M}(a, a'|0) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cos\left(4\pi i \frac{aa'}{\epsilon_1 \epsilon_2}\right)}{\mu'(a)} \quad (4.52)$$

Тогда в этом пределе модулярное преобразование сводится просто к обычному преобразованию Фурье, как мы уже видели в разделе 4.3.2.

Преобразование Фурье также может быть выведено в пределе $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$. Предположим, что $\text{Im} \ln\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) > 0$, тогда асимптотики квантовых диалогарифмов имеют различные знаки в направлении

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{2} z^2}, & \arg \epsilon_1 - \frac{\pi}{2} < \arg z < \arg \epsilon_2 + \frac{\pi}{2} \\ e^{-\frac{\pi i}{2} z^2}, & \arg \epsilon_2 - \frac{3\pi}{2} < \arg z < \arg \epsilon_1 - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.53)$$

Это приводит к следующему пределу модулярного ядра для $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$

$$M(a, a_D) \sim \int dt \exp \left\{ \frac{\pi i}{2\epsilon_1 \epsilon_2} (2t^2 - (t - a_D)^2 + (t + a_D)^2 - (t - a)^2 + (t + a)^2) \right\} \sim e^{\frac{2\pi i}{\epsilon_1 \epsilon_2} aa_D} \quad (4.54)$$

К сожалению, этот подход не позволяет найти старшие поправки к модулярной матрице, поскольку в пределе $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ присутствуют только квадратичные члены в экспоненте (4.53), так старшие поправки должны быть экспоненциально подавлены, и не могут быть получены в пертурбативном разложении [67]. В следующей главе мы разовьем непертурбативный подход, позволяющий получить это выражение точно.

4.4 Разложение по родам в матричных моделях и пертурбативные поправки к модулярному ядру

4.4.1 Петлевые уравнения

Для получения эффективных формул, описывающих S -дуальность, мы используем методы матричных моделей, которые, в соответствии с соотношением АГТ, описывают конформные блоки и функции Некрасова, см. раздел 4.2.2. Эти методы позволяют вычислить пертурбативные поправки к модулярному ядру, то есть построить преобразование S -дуальности итеративно, используя матрично-модельные петлевые уравнения.

Таким образом мы рассмотрим многократный интеграл (4.27). Обычно, для изучения матричных интегралов используют петлевые уравнения для k -точечных резольвент [81, 61]

$$r_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \left\langle \sum_i \frac{1}{\xi_1 - z_i} \sum_i \frac{1}{\xi_2 - z_i} \cdots \sum_i \frac{1}{\xi_k - z_i} \right\rangle \quad (4.55)$$

где скобки означают среднее по отношению к мере (4.27)

$$\int_{\gamma_i} dz_i \left(\prod_{j>i} z_{ij}^{2\beta} \right) \prod_a (z_i - q_a)^{\frac{2b\alpha_a}{g}} \quad (4.56)$$

Также мы используем связанные корреляторы, и обозначаем их как $\rho_k(\xi_1, \dots, \xi_k)$. Для $k = 1$ вводится дополнительный сдвиг

$$\rho_1(z) = \sqrt{\beta} \left(gr_1(z) + \sum_a \frac{\alpha_a}{z - q_a} \right) \quad (4.57)$$

Петлевые уравнения для несвязных резольвент имеют следующую форму

$$\begin{aligned} & \beta r_{k+1}(\zeta, \zeta, x_1, \dots, x_{k+1}) + (\beta - 1) \partial_\zeta r_k(\zeta, x_1, \dots, x_{k-1}) + \\ & + \sum_a \frac{2\sqrt{\beta}\alpha_a}{g} \frac{r_k(\zeta, x_1, \dots, x_{k-1}) - r_k(q_a, x_1, \dots, x_{k-1})}{\zeta - q_a} + \\ & + \sum_j \partial_{x_j} \frac{r_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) - r_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})|_{x_j=\zeta}}{x_j - \zeta} = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Можно переопределить их в терминах связанных резольвент, которые позволяют разложить эти уравнения “по родам” по степеням константы связи g .

Эти уравнения имеют более сложную структуру. Как пример мы приведем несколько первых из них

$$g^2\beta\rho_2(z) + g\left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\partial\rho_1(z) + \sqrt{\beta}\sum_a\frac{\alpha_a}{(z-q_a)^2}\right) + \rho_1^2(z) - \sum_a\frac{\partial_{q_a}\mathcal{F}}{z-q_a} - \beta\left(\sum_a\frac{\alpha_a}{z-q_a}\right)^2 = 0, \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} g^2\beta\rho_3(z) + \frac{1}{2}g(\beta-1)\partial\rho_2(z) + 2\rho_1(z)\rho_2(z) - \sum_a\frac{\partial_{q_a}\rho_1(z)}{z-q_a} + \frac{1}{2}\partial^2\rho_1(z) &= 0, \\ 2\rho_1(z)\rho_3(z) + 2\rho_2^2(z) - \sum_a\frac{\partial_{q_a}\rho_2(z)}{z-q_a} + (\hat{L}\rho_2)(z) &= 0, \\ 2\partial^2\rho_1(z)\rho_2(z) + 2\partial\rho_1(z)\partial\rho_2(z) + 2\rho_1(z)(\hat{L}\rho_2)(z) - \\ - 2\sum_a\frac{\partial_{q_a}\rho_1(z)}{(z-q_a)^3} + \frac{1}{12}\partial^4\rho_1(z) &= 0 \end{aligned}$$

где

$$(\hat{L}\rho_2)(z) = \partial_z\partial_w\rho_2(z, w)|_{w=z} \quad (4.60)$$

и \mathcal{F} отличается от F отсутствующим нормировочным множителем $\prod_{a<b}(q_a - q_b)^{2\alpha_a\alpha_b/g}$ из (4.27).

Статистическая сумма матричной модели (бета-ансамбля) может быть вычислена с использованием уравнений Зайберга-Виттена (4.30) для ее логарифма. Комплексная спектральная кривая определяется из вклада рода 0 в первое уравнение (4.59), который включает только одноточечную резольвенту $\rho_1^{(0)}(z)$ (4.57)

$$y^2(z) = \rho_1^{(0)}(z)^2 = \sum_a\frac{\partial_{q_a}\mathcal{F}}{z-q_a} + \beta\left(\sum_a\frac{\alpha_a}{z-q_a}\right)^2 \quad (4.61)$$

где дифференциал определен как

$$\Omega_{g,\beta} = \rho_1(z)dz \quad (4.62)$$

4.4.2 Посторение модулярного ядра

Аналогичным разложению препотенциала по степеням струнной константы связи g образом можно получить разложение модулярной матрицы. Мы стартуем со следующего разложения

$$F(a, x) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{2k} F_k(a, x) \quad (4.63)$$

$$M(a, b) = \exp \left(\frac{2\pi i a b}{g^2} + \sum_{k=0}^{\infty} g^{2k} \mathbf{m}_k(a, b) \right) \quad (4.64)$$

которое нужно подставить в определение модулярного ядра $M(a, b)$

$$e^{\frac{2\pi i}{g^2} F(b, 1-x)} = \int \frac{da}{g} M(a, b) e^{\frac{2\pi i}{g^2} F(a, x)} \quad (4.65)$$

Тогда несложное вычисление приводит к следующему соотношению

$$\begin{aligned} F(b, 1-x) = & (F(a_0, x) + a_0 b) + g^2 (\mathbf{m}_0(a_0, b) + F_1(a_0|x) \\ & - \frac{1}{4\pi i} \log F_0''(a_0|x)) + g^4 \left(\mathbf{m}_1(a_0, b) + F_2(a_0|x) + \frac{i}{4\pi} \frac{F_1''(a_0|x)}{F_0''(a_0|x)} + \right. \\ & + \frac{i}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_0'(a_0, b)}{F_0''(a_0|x)} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{m}_0'(a_0, b))^2}{F_0''(a_0|x)} - \frac{1}{2} \frac{(F_1'(a_0|x))^2}{F_0''(a_0|x)} \\ & - \frac{\mathbf{m}_0'(a_0, b) F_1'(a_0|x)}{F_0''(a_0|x)} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_0^{(IV)}(a_0|x)}{(F_0''(a_0|x))^2} - \frac{i}{4\pi} \frac{F_0'''(a_0|x) F_1'(a_0|x)}{(F_0''(a_0|x))^2} + \\ & \left. + \frac{5}{96\pi^2} \frac{(F_0'''(a_0|x))^2}{(F_0''(a_0|x))^3} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.66)$$

где a_0 определяется из уравнения $F_0'(a_0|x) + b = 0$, а производная берется по отношению к a_0 . Это соотношение может быть интерпретировано как определяющее функцию $x(a, b)$ неявным образом

$$F_0'(a|x(a, b)) = -b \quad (4.67)$$

Используя эту формулу, можно избавиться от зависимости от переменной x в модулярном ядре. Например, в первом порядке получим

$$\mathbf{m}_0(a, b) = F_1(b, 1-x(a, b)) - F_1(a|x(a, b)) + \frac{1}{4\pi i} \log F_0''(a|x(a, b)) \quad (4.68)$$

4.4.3 Несколько первых членов разложения

Здесь мы представим несколько явных выражений для первых членов разложения препотенциала, вычисленного методами, изложенными в предыдущих разделах. Найдем разложение по родам для модулярного ядра:

Пример: $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = g$ или $\beta = 1$, $\mu_1 = 2tm_1, \mu_{2,4} = 0, \mu_3 = 2tm_3$. В этом случае разложение препотенциала имеет следующий вид

$$F(\mu_1 = 2tm_1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 2tm_3, \mu_4 = 0|x) = \sum_{k,m=0}^{\infty} I_{k,2m}(x) g^{2k} t^{2m} \quad (4.69)$$

Несколько первых членов в этом разложении представлены следующими выражениями

$$I_{00} = -\frac{\pi a^2 K(1-x)}{K(x)} \quad (4.70)$$

$$I_{02} = 2(m_1^2 + m_3^2) \log a \quad (4.71)$$

$$I_{04} = -\frac{2(m_1^4 + m_3^4)}{3\pi^2 a^2} ((x-2)K(x) + 3E(x)) - \frac{4m_1^2 m_3^2}{\pi^2 a^2} K(x) ((x-1)K(x) + E(x)) \quad (4.72)$$

$$I_{10} = -\frac{1}{2} \log a \quad (4.73)$$

$$I_{12} = \frac{2(m_1^2 + m_3^2)}{3\pi^2 a^2} K(x) ((x-2)K(x) + E(x)) \quad (4.74)$$

$$I_{14} = \frac{4(m_1^4 + m_3^4)}{3\pi^2 a^4} K^2(x) [(x^2 - 3x + 3)K^2(x) + 4(x-2)K(x)E(x) + 6E^2(x)] + \frac{8m_1^2 m_3^2}{3\pi^4 a^4} [(3x^2 - 7x + 4)K^2(x) + 2(4x-5)K(x)E(x) + 6E^2(x)] \quad (4.75)$$

$$I_{20} = -\frac{K(x)}{8\pi^2 a^2} ((x-2)K(x) - 3E(x)) \quad (4.76)$$

$$I_{22} = -\frac{m_1^2 + m_3^2}{60\pi^4 a^4} K^2(x) ((48x^2 - 143x + 143)K^2(x) + 190(x-2)K(x)E(x) + 285E^2(x)) \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned}
I_{24} = & -\frac{K^3(x)(m_1^4 + m_3^4)}{90\pi^6 a^6} \left(-1646K^3(x) + 4350E^3(x) + \right. \\
& + 2469xK^3(x) - 8700K(x)E^2(x) + 6476K^2(x)E(x) - \\
& - 1783K^3(x)x^2 + 480x^3K^3(x) + 4350K(x)E^2(x)x + \\
& + 2126K^2(x)x^2E(x) - 6476K^2(x)xE(x) \left. \right) - \\
& - \frac{K^3(x)m_1^2m_3^2}{45\pi^6 a^6} \left(-1646K^3(x) + 4350E^3(x) + 2469K^3(x)x - \right. \\
& - 8700K(x)E^2(x) + 6476K^2(x)E(x) - 1783K^3(x)x^2 + \\
& + 480x^3K^3(x) + 4350K(x)E^2(x)x + 2126K^2(x)x^2E(x) \\
& \left. - 6476K^2(x)E(x)x \right)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

В этом случае модулярная матрица не отличается от преобразования Фурье:

$$\boxed{e^{\frac{1}{g^2}F(x|a)} = \int \frac{db}{g} e^{\frac{2\pi iab}{g^2} + \mathcal{O}(t^6, g^4)} e^{\frac{1}{g^2}F(1-x|b)}} \tag{4.79}$$

Также для случая $\beta \neq 1$ в работе [103] было показано отсутствие поправок к преобразованию Фурье. В следующей главе мы приведем аргументы в пользу того, что модулярное ядро пертурбативно совпадает с преобразованием Фурье.

4.5 S -дуальность в пределе Некрасова-Шаташвили: комментарии и замечания

Ранее мы использовали методы матричных моделей, чтобы построить преобразование S -дуальности как ряд по параметру $\beta - 1$, то есть около значения $\beta = 1$. В этом разделе мы рассмотрим особенности другого важного предела $\epsilon_2 = 0$ (предел Некрасова-Шаташвили [101, 100]), который важен для дальнейшего изучения, поскольку в этом пределе модулярные свойства значительно проще, чем в общем случае. Этот предел также интересен с точки зрения интегрируемых систем, поскольку остаточный параметр ϵ_1 может быть интерпретирован как параметр квантовой деформации.

4.5.1 Модулярные преобразования на торе

Методы матричных моделей мы до сих пор использовали для получения ядра S -дуальности для конформных блоков на сфере. Таким же образом можно обходиться и с конформными блоками на торе, однако матричная модель становится сложнее (см. раздел 4.2.2 и [89]). В принципе, проще использовать эквивалентность одноточечного конформного блока а сферического четырехточечного блока [105]. Однако, в [105] эта эквивалентность была доказана посредством сложной рекурсивной процедуры. Здесь мы представим эту эквивалентность в более явных терминах, но только в пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$, т.е. когда присутствует соответствующая квантовая интегрируемая система (эллиптическая модель Калоджеро [55, 83, 84]) и “проквантованная” кривая Зайберга-Виттена. Чтобы полностью описать конформный блок в этом пределе, необходимо вставить дополнительное вырожденное поле [4, 36] и рассмотреть уравнение конформного блока, которое возникает в результате [21, 126]. Уравнение Шредингера-Бакстера как раз и описывает то, что принято называть “проквантованной” кривой Зайберга-Виттена, а логарифмическая производная решения этого уравнения - соответствующий дифференциал. Используя эти данные, можно построить функцию Некрасова в пределе Некрасова-Шаташвили $\epsilon_2 \rightarrow 0$.

Тогда конформные блоки, которые мы собираемся сравнить, - пятиточечный блок на сфере и двухточечный блок на торе, оба с одним вырожденным полем и поправленной внутренней размерностью [76]. Мы покажем, что дифференциальные уравнения для торического блока сводится к конкретному виду уравнения четырехточечного блока на сфере.

В пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$, дифференциальное уравнение для торического блока сводится к [76]

$$\left\{ 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_0} - 4 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \left[\sqrt{(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)} \partial_X \right]^2 + \frac{\mu(\epsilon_1 - \mu)}{\epsilon_1 \epsilon_2} X \right\} \Psi(\tau_0, X) = 0 \quad (4.80)$$

где, как и в [76, уравнение (36)], мы оставили только члены, дающие вклад в пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$ и мы ввели переменную $X = \wp(z|\tau_0)$, т.е.

$$z = \frac{1}{2} \int_X^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}},$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\pi^2}{3}(2-x)\theta_3^4(\tau_0), & e_2 &= -\frac{\pi^2}{3}(1+x)\theta_3^4(\tau_0), \\ e_3 &= -\frac{\pi^2}{3}(1-2x)\theta_3^4(\tau_0), & x &= \frac{\theta_2^4(\tau_0)}{\theta_3^4(\tau_0)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Внешняя размерность $\Delta = \frac{\mu(\epsilon_1 - \mu)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ параметризует массу μ присоединенного гипермультиплета материи.

Теперь произведем замену переменной $X = e_2 - t(e_1 - e_2)$, которая приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2}x(x-1)\partial_x + t(t-1)(t-x) \left[\partial_t^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-x} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mu(\epsilon_1 - \mu)}{4\epsilon_1 \epsilon_2} \left(t - \frac{1}{3}(1+x) \right) \right\} \Psi(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Заменяя выражение для волновой функции $\tilde{\Psi}(t) = [t(t-1)(t-x)]^{-\frac{1}{4}} \Psi(t)$, можно убрать член, линейный по ∂_t , с точностью до порядка $\mathcal{O}(\epsilon_2^0)$. Эта процедура переопределяет интеграл Зайберга-Виттена с внутренней размерностью $\Delta_\alpha = \frac{\alpha(\epsilon - \alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2}$, в соответствии с

$$\frac{\epsilon_1}{2\pi i} \oint_A dt \log \tilde{\Psi} = \frac{\epsilon_1}{2\pi i} \oint_A dt \log \Psi - \frac{\epsilon_1}{2} = \alpha - \frac{\epsilon_1}{2} = a$$

Это уравнение совпадает с уравнением для сферического конформного блока [76, уравнения (85)-(86)] в пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$, если преобразовать модулярный параметр $\tau_0 \rightarrow 2\tau_0$ и волновую функцию $\psi = \tilde{\Psi} [x(x-1)]^{-\frac{\Delta}{12}}$:

$$\left[x(x-1)\partial_x - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} t(t-1)(t-x)\partial_t^2 - \frac{\mu(\epsilon_1 - \mu)}{4\epsilon_1 \epsilon_2} (t-x) \right] \psi(x, t) = 0 \quad (4.83)$$

Поскольку волновые функции одинаковы для торического и сферического случаев, то же верно и для конформных блоков. Таким образом мы воспроизвели ответ [105] в пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} Z_{\text{sphere}} \left(\Delta_{1,2,3} = 0, \Delta_4 = \frac{\Delta}{4} \middle| x = \frac{\theta_2^4(2\tau_0)}{\theta_3^4(2\tau_0)} \right) = \\ = \eta^{-2\Delta}(\tau_0) \left(\frac{\theta_3^8(2\tau_0)}{\theta_2^4(2\tau_0)\theta_4^4(2\tau_0)} \right)^{\frac{\Delta}{12}} Z_{\text{torus}}(\Delta | \tau_0) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Это означает, что преобразования торического конформного блока идентичны преобразованиям сферического, т.е. модулярный оператор/оператор S -дуальности в пределе $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ имеет вид

$$M(a, a') = e^{\frac{4\pi i a a'}{\epsilon_1 \epsilon_2}} \quad (4.85)$$

Заметим, что мы здесь учли преобразование $\tau_0 \rightarrow 2\tau_0$.

4.5.2 Преобразование S -дуальности для эффективной константы связи

В этой главе мы в основном сосредоточились на модулярном ядре для преобразования $x \rightarrow 1 - x$, которое пертурбативно представлено преобразованием Фурье. Также естественным является вопрос о преобразовании константы связи.

Как мы обсуждали, преобразование S -дуальности эффективной матрицы зарядов, определенной, как $\|\mathcal{T}_{\epsilon_1, \epsilon_2}\|_{i,j} = \frac{\partial^2 F_{\epsilon_1, \epsilon_2}}{\partial a_i \partial a_j}$, имеет простую форму в пределе Зайберга-Виттена:

$$\hat{S}(\mathcal{T}_{0,0}) = -(\mathcal{T}_{0,0})^{-1} \quad (4.86)$$

На самом деле оно остается таким же, когда представлена только одна деформация:

$$\hat{S}(\mathcal{T}_{\epsilon_1,0}) = -(\mathcal{T}_{\epsilon_1,0})^{-1} \quad (4.87)$$

Причина, по которой это свойство сохраняется при деформации, заключается в том, что в этом случае существует замкнутое уравнение (Шредингера или Бакстера) для дифференциала Зайберга-Виттена, так что препотенциал может быть получен с помощью конструкции интегралов Бора-Зоммерфельда. Однако, в случае присутствия обеих деформаций это утверждение более не является верным. В этом случае дифференциал Зайберга-Виттена определяется из петлевых уравнений, включающих все резольвенты, т.е.

$$\hat{S}(\mathcal{T}_{\epsilon_1, \epsilon_2}) \neq -(\mathcal{T}_{\epsilon_1, \epsilon_2})^{-1} \quad (4.88)$$

Это происходит по следующей технической причине. Рассмотрим пространство констант связи $x = e^{2\pi i \tau_0}$ и расслоение римановых поверхностей над этим пространством $u(x) = \langle \text{Tr } \phi^2 \rangle$. В каждом слое можно построить А-

и В-периоды 1-резольвенты: $a(x) = \langle \phi \rangle$, $b(x)$. Поскольку дифференциал Зайберга-Виттена в единично деформированном случае зависит только от параметра $u(x)$, но не от его производных, локально можно переставить циклы в некоторой точке x_0 , т.е. изменить значение $a(x)$ в этой точке $x = x_0$, и эта замена никак не отразится на значениях $a(x)$ в любой другой точке x . Это свойство нарушается матрично-модельными поправками, поскольку в этом случае в дифференциал явно входят производные $u(x)$. С другой точки зрения, мы фиксируем на всем расслоении $a(x) = const$, а $b(x)$ оказывается нетривиальной функцией, и больше нельзя переставлять локально циклы в некоторой точке x_0 .

Это свойство можно интерпретировать иначе. Чтобы целиком фиксировать многоточечную резольвенту, необходимо наложить условия на все А-периоды: в частности, потребовать их равенства нулю. Это явно нарушает симметрию между перестановками А- и В-циклов, см. рис.4.1.

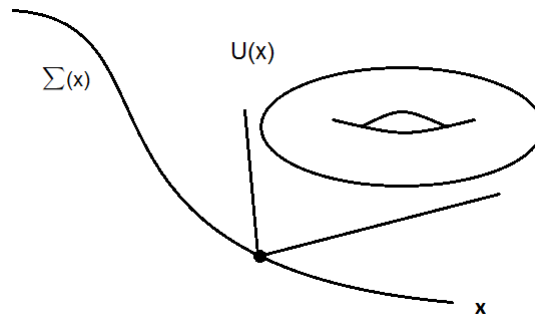


Рис. 4.2: Семейство эффективных спектральных кривых над пространством модулей

4.5.3 Полная группа дуальности

До сих пор мы обсуждали только S -преобразование из группы дуальности. Естественно также изучить полную модулярную группу, т.е. вместе с генератором T -преобразования. Этот вопрос был детально исследован в различных работах [110, 111, 79, 3, 17], и тем не менее заслуживает краткого упоминания.

Заметим, что до сих пор мы рассматривали различные группы преобразований. Во-первых, это группа модулярных преобразований конформных блоков. Оно связано соотношением АГТ с группой S -дуальности. Модулярные преобразования образуют другую группу, которая связывает различ-

ные способы распределения скобок в тензорном произведении. Эта группа иногда совпадает с группой перестановки точек на сфере, как мы обсудим ниже.

$SL(2, \mathbb{Z})$ и тождества Рака

Начнем со случая калибровочной группы $SU(2)$, т.е. с четырехточечного конформного блока. Заметим, что ассоциативность операторной алгебры предполагает важное свойство коэффициентов Рака-Вигнера: рассматривая различные произведения представлений и перераспределяя в них скобки, можно получить различные коммутативные диаграммы. Например,

$$\begin{array}{ccccc}
 (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 & \xrightarrow{\hat{T}} & (T_2 \otimes T_1) \otimes T_3 & \xrightarrow{\hat{R}} & T_2 \otimes (T_1 \otimes T_3) \\
 \downarrow \hat{R} & & & & \downarrow \hat{F} \\
 T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) & \xleftarrow{\hat{T}} & T_1 \otimes (T_3 \otimes T_2) & \xleftarrow{\hat{R}} & (T_1 \otimes T_3) \otimes T_2
 \end{array} \quad (4.89)$$

которая накладывает нетривиальное ограничение $\hat{T}\hat{R}\hat{F}\hat{R}\hat{T} = \hat{R}$ на модулярное ядро. Для модулярного преобразования и преобразования S -дуальности с генераторами \hat{S} и \hat{T} можно написать $\hat{R} = \hat{T}\hat{S}$, $\hat{F} = \hat{1}$, и соотношение Рака эквивалентно $(\hat{T}\hat{S})^3 = 1$. Вместе с $\hat{S}^2 = 1$ это соотношение предполагает, что эти генераторы формируют группу $SL(2, \mathbb{Z})$.

Как мы обсуждали в предыдущем разделе, эти генераторы можно реализовать в пределе Некрасов-Шаташвили, или в терминах эффективной константы связи \mathcal{T} в калибровочной теории (S -дуальность) как

$$\hat{S} : \mathcal{T} \mapsto -1/\mathcal{T}, \quad \hat{T} : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T} + 1, \quad (4.90)$$

или в терминах двойного отношения (затравочной константы связи в калибровочной теории) четырех точек на сфере (модулярного преобразования) как

$$\hat{S} : x \mapsto 1 - x, \quad \hat{T} : x \mapsto \frac{x}{x - 1} \quad (4.91)$$

В первом представлении получаются два соотношения на генераторы: $\hat{S}^2 = 1$ и $(\hat{T}\hat{S})^3 = 1$, в то время как во втором случае имеется дополнительное соотношение $\hat{T}^2 = 1$, т.е. генераторы в этом случае формируют конечную группу перестановок S_3 . Это кажущееся противоречие легко разрешается

на уровне конформных блоков, поскольку последние так же не удовлетворяют соотношению $\hat{T}^2 = 1$ в силу сингулярного поведения: $B \sim x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2}$, $x \rightarrow 0$. В результате действие \hat{T}^2 , которое обносит точку q вокруг нуля, возвращает нетривиальный монодромийный фактор, таким образом конформные блоки описывают представление $SL(2, \mathbb{Z})$, а не S_3 .

Многоточечный конформный блок.

Разница между группой дуальности и перестановок становится глубже для многоточечных конформных блоков. На самом деле в этом случае не все возможные модулярные преобразования (т.е. все возможные способы расставить скобки в тензорном произведении) могут быть связаны с перестановкой точек. Это происходит, начиная с шеститочечного конформного блока³. В случае пятиточечного конформного блока модулярная группа могла бы покрывать группу перестановок S_4 , однако на самом деле группа дуальности в этом случае не имеет ничего общего с группой перестановок. Пятиточечный конформный блок описывается теорией с калибровочной группой $SU(2) \times SU(2)$, однако группа дуальности не является прямым произведением двух групп $SL(2, \mathbb{Z})$, см. детальное обсуждение в [17]. Хотя это и сделано для теории Зайберга-Виттена, т.е. в пределе $\epsilon_1, \epsilon_2 = 0$, однако этого вычисления достаточно в данном случае и, в принципе, может быть обобщено на случай произвольных ϵ_1 и ϵ_2 .⁴

Группа S-дуальности содержит две подгруппы $SL(2, \mathbb{Z})$ и дополнительный смешивающий генератор: $\hat{S}_{1,2}$, $\hat{T}_{1,2}$, \hat{Q} . Как и прежде в этом случае можно построить соотношение Рака

$$\hat{R}_1 \hat{T}_1 \hat{R}_2 \hat{R}_1 = \hat{Q} \hat{R}_1 \hat{R}_2 \quad (4.92)$$

с коэффициентами Рака, заданными by $\hat{R}_{1,2} = \hat{T}_1 \hat{T}_2 \hat{S}_{1,2}$. Поскольку группа

³Стоит заметить, что новое, более сложное поведение описывает и n -точечные глюонные амплитуды в контексте дуальности Алдая-Малдасены для $n \geq 6$ по сравнению с $n = 4, 5$ [90].

⁴В случае многоточечного конформного блока в безмассовом пределе спектральная кривая (4.61) имеет следующий вид

$$y^2(z) = \sum_i \frac{x_i(x_i - 1)\partial_{x_i}\mathcal{F}}{z(z - x_i)(z - 1)}$$

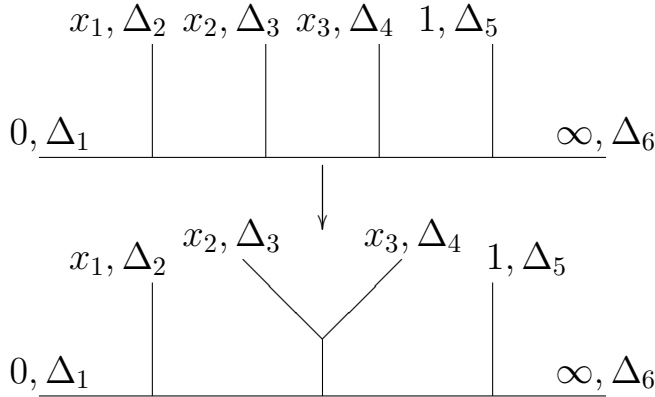
а дифференциал Зайберга-Виттена -

$$\Omega = y(z)dz$$

Затравочные константы связи связана с двойными отношениями как $x_k = \exp\left(2\pi i \sum_{i=1}^{N-k} \tau_0^i\right)$.

S -дуальности содержит $SL(2, \mathbb{Z})$ -подгруппы, соотношение $(\hat{S}\hat{T})^3 = 1$ по-прежнему выполняется.

Как мы упоминали, начиная со случая шеститочечного блока модулярные преобразования не сводятся к перестановке точек. Причина этого заключается в том, что появляется новая диаграмма, и необходимо в терминах модулярных преобразований описать отображение



Это предполагает, что модулярная группа и группа S -дуальности разные в этой теории: эта теория не может быть описана в терминах изначальной теории с измененными параметрами.

4.6 Выводы

В этой главе мы рассмотрели вопрос о построении сплетающих коэффициентов в двумерной конформной теории поля с точки зрения соотношения АГТ. Мы привели ряд точных выражений, связывающих модулярное отображение конформных блоков с отображением S -дуальности для препотенциала, полученного из статистических сумм Некрасова на Ω -фоне. Мы показали, что преобразование S -дуальности пертурбативно представляет из себя преобразование Фурье. Используя методы бета-ансамблей мы построили разложение по родам для препотенциала и модулярного ядра, показав таким образом, что старшие поправки к ядру зануляются.

Также мы видели, что имеет смысл волновой функции определенной на некоммутативном семействе римановых поверхностей.

В следующей главе мы построим непертурбативное выражение для модулярного ядра и покажем, что оно совпадает с коэффициентами Рака-Вигнера для алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$, рассмотренными Б.Понсо и Дж.Тешнером.

Обобщение на случаи многоточечных конформных блоков, деформированных алгебр Вирасоро и алгебр \mathcal{W}_N остается открытой задачей.

Глава 5

S-дуальность: непертурбативный подход

5.1 Дуальность и собственные функции дуальных операторов

Самый классический пример дуальности представлен заменой операторов координаты и импульса. А именно рассмотрим два оператора $\hat{A} = e^{i\hat{P}}$ и $\hat{B} = e^{i\hat{Q}}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\hat{A}\hat{B} = e^{i\hbar}\hat{B}\hat{A} \quad (5.1)$$

Тогда их собственные функции связаны преобразованием Фурье в пространстве собственных значений:

$$\begin{aligned} \hat{A}Z_a(\mathcal{Q}) &= e^{ia}Z_a(\mathcal{Q}) \\ \hat{B}\tilde{Z}_{a'}(\mathcal{Q}) &= e^{ia'}\tilde{Z}_{a'}(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad \xrightarrow{(5.1)} \quad Z_a(\mathcal{Q}) = \int e^{\frac{iaa'}{\hbar}} \tilde{Z}_{a'}(\mathcal{Q}) da' \quad (5.2)$$

Это может быть непосредственно проверено прямым вычислением собственных функций:

$$Z_a(\mathcal{Q}) = e^{\frac{ia\mathcal{Q}}{\hbar}}, \quad \tilde{Z}_{a'}(\mathcal{Q}) = \delta(\mathcal{Q} - a') \quad (5.3)$$

однако явный вид этих выражений **не обязателен** для определения ядра преобразования. Для этого заменим оба оператора их представлениями в пространстве собственных значений, которые воспроизводят правильные коммутационные соотношения:

$$\check{A} = e^{ia}, \quad \check{B} = e^{\hbar\frac{\partial}{\partial a}} \quad (5.4)$$

мы их называем *чек-операторами*, следуя [14, 13]. Тогда ядро преобразования $M(a, a') = e^{\frac{iaa'}{\hbar}}$ легко может быть вычислено из соотношения

$$\boxed{\check{A}(a)M(a, a') = \check{B}(a')M(a, a')} \quad (5.5)$$

Тонкость в этом выводе заключается в том, что оператор B в (5.4) может быть умножен на произвольную функцию a : этот нормализационный фактор окажется важным в примерах, рассмотренных далее.

Этот подход к преобразованию дуальности мы собираемся применить в дальнейшем. Таким образом мы построим пару операторов \hat{A} и \hat{B} таких, что конформный блок, или статистическая сумма в матричной модели (бета-ансамбле), является собственной функцией \hat{A} , в то время как модулярно преобразованный конформный блок - собственная функция \hat{B} . Тогда соответствие АГТ гарантирует аналогичное соотношение между S -дуальными $N = 2$ суперсимметричными теориями Янга-Миллса.

Как мы увидим, единственная разница между модулярной S -дуальностью и обычной pq -дуальностью заключается в том, что операторы \hat{A} и \hat{B} в случае *непертурбативных* конформных блоков коммутируют менее тривиальным способом, однако *пертурбативно* они точно удовлетворяют (5.1). Это объясняет пертурбативный результат прошлого раздела и [103] для конформных блоков и явным образом предоставляет способ непертурбативного обобщения, которое находится в согласии с [108].

5.2 Чек-операторы

5.2.1 Петлевые уравнения и их симметрии

Ключевую роль в нашем рассмотрении играют операторы резольвенты. n -точечная резольвента для бета-ансамбля на некоторой обобщенной римановой поверхности определена как среднее

$$R_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left\langle \left(\sum_{i_1} \frac{E'(\xi_1, z_{i_1})}{E(\xi_1, z_{i_1})} \right) \cdots \left(\sum_{i_n} \frac{E'(\xi_n, z_{i_n})}{E(\xi_n, z_{i_n})} \right) \right\rangle \quad (5.6)$$

по бета-ансамблю, как (4.32), где x_i - переменные интегрирования в бета-ансамбле, а производная берется по отношению к первому аргументу. Здесь $E(z, w)$ - примарная форма Шоттки-Клейна [43], ее логарифм играет роль функции Грина для скалярных полей; конкретно в торическом случае она

задается выражением (4.33) (с точностью до незначительной константы, которая сокращается в отношении).

Можно также ввести вообще говоря бесконечное количество дополнительных переменных времени, чтобы сгенерировать многоточечные несоединенные резольвенты с помощью оператора, действующего на эти времена [12], так что

$$R_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = Z^{-1} \hat{\nabla}(\xi_1) \dots \hat{\nabla}(\xi_n) Z \quad (5.7)$$

Аналогичным образом определяются соединенные резольвенты

$$\rho_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \hat{\nabla}(\xi_1) \dots \hat{\nabla}(\xi_n) \log Z \quad (5.8)$$

Следуя [28], бесконечное число тождеств Уорда может быть выведено для бета-ансамбля с помощью простого сдвига переменных интегрирования

$$z_i \rightarrow z_i + \epsilon \partial_\xi \log \theta(\xi - z_i) \quad (5.9)$$

Таким образом в первом порядке по ϵ получаем тождество

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\sum_i \frac{\theta'(\xi - z_i)}{\theta(\xi - z_i)} \right)^2 - \sum_i \frac{\theta''(\xi - z_i)}{\theta(\xi - z_i)} + \right. \\ & \quad \left. + (-2b^2 \mu \partial_\xi \log \theta(\xi - w) + 4ib^2 a) \sum_i \frac{\theta'(\xi - z_i)}{\theta(\xi - z_i)} + \right. \\ & \quad \left. + 2\mu b \sum_i \frac{\theta'(\xi - z_i)}{\theta(\xi - z_i)} \left(\sum_i \frac{\theta'(z_i - w)}{\theta(z_i - w)} - \sum_i \frac{\theta'(\xi - w)}{\theta(\xi - w)} \right) - \right. \\ & \quad \left. - 2b^2 \sum_{i < j} \frac{\theta'(z_i - z_j)}{\theta(z_i - z_j)} \left(\sum_i \frac{\theta'(\xi - z_i)}{\theta(\xi - z_i)} - \sum_i \frac{\theta'(\xi - z_j)}{\theta(\xi - z_j)} \right) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\theta'(x-y)\theta'(x-z)}{\theta(x-y)\theta(x-z)} + \frac{\theta'(y-x)\theta'(y-z)}{\theta(y-x)\theta(y-z)} + \frac{\theta'(z-x)\theta'(z-y)}{\theta(z-x)\theta(z-y)} = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta''(x-y)}{\theta(x-y)} + \frac{\theta''(y-z)}{\theta(y-z)} + \frac{\theta''(y-z)}{\theta(y-z)} \right) + 3\eta_1 \end{aligned}$$

где $\eta_1 = 4 \frac{\partial \log \eta}{\partial \log q}$, и после несложных вычислений находим следующее уравнение

$$\begin{aligned}
& -b^2 \langle R(\xi, \xi) \rangle - Qb \langle R'(\xi) \rangle + (-2\mu \partial_\xi \log \theta(z-w) - 4ia)b \langle R(\xi) \rangle + \\
& + 3b\mu(N+1)\eta_1 - \frac{\theta'(\xi-w)}{\theta(\xi-w)} \partial_w \log Z - bN\mu \frac{\theta''(\xi-w)}{\theta(\xi-w)} + \\
& + 4 \frac{\partial \log Z}{\partial \log q} + 4a^2 - 4ia\mu \frac{\theta'(\xi-w)}{\theta(\xi-w)} = 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Гораздо более удобно использовать слегка сдвинутое определение резольвенты

$$\boxed{\hat{\nabla}(\xi)Z = \left\langle b \sum_i \partial_\xi \log \theta(\xi - z_i) + \mu \partial_\xi \log \theta(\xi - w) + 2ia \right\rangle Z} \tag{5.11}$$

Тогда, с очевидностью, статистическая сумма является собственной функцией интеграла резольвенты

$$\int_0^\pi d\xi \hat{\nabla}(\xi)Z = 2\pi iaZ \tag{5.12}$$

Мы можем переформулировать петлевые уравнения в этих терминах

$$\begin{aligned}
& \left[\hat{\nabla}^2(z) + Q\partial_z(\hat{\nabla}(z) - \mu \partial_z \log \theta(z-w)) - \zeta(z-w)\partial_w + \right. \\
& \left. + \mu^2 \wp(z) + 4q\partial_q - 3\mu(b-\mu)\eta_1 \right] Z = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

где мы использовали стандартные эллиптические функции [20]

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= -\partial_z \log \theta(z) \\
\wp(z) &= \partial_z^2 \log \theta(z)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Петлевое уравнение обладает симметрией

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}(\xi) &\longrightarrow -\hat{\nabla}(\xi) - Q\partial_\xi \log \hat{\nabla}(\xi) - \frac{Q^2}{2} \partial_\xi \left(\frac{\hat{\nabla}'(\xi)}{\hat{\nabla}^2(\xi)} \right) - \\
& - \frac{Q^3}{4} \partial_\xi \left(-\frac{5}{2} \frac{(\hat{\nabla}'(\xi))^2}{\hat{\nabla}^4(\xi)} + \frac{\hat{\nabla}''(\xi)}{\hat{\nabla}^3(\xi)} \right) + O(Q^4)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Таким образом наличествуют две ветви решений¹

$$\oint_A dz \hat{\nabla}^{(+)}(z) Z_a^{(+)} = a Z_a^{(+)}, \quad \oint_A dz \hat{\nabla}^{(-)}(z) Z_a^{(-)} = -a Z_a^{(-)} \quad (5.17)$$

где интегралы берутся по A-периоду спектральной кривой, а калибровочно-инвариантные величины, такие, как конформный блок, зависят только от инварианта $\Delta(a) = \frac{Q^2}{4} - a^2$.

5.2.2 Резольвенты в представлении чек-операторов [14, 13]

Оператор $\hat{\nabla}(z)$, действующий на статистическую сумму матричной модели на сфере, производит вставку $\sum_i \frac{1}{z-z_i}$ в коррелятор (аналогично производится вставка $\sum_i \frac{\theta'(\xi-z_i)}{\theta(\xi-z_i)}$ в торическом случае), а, следовательно, он может быть реализован, как действие на бесконечный набор времен в статистической сумме, который входит в меру экспоненциально, $e^{\sum_{i,k} t_k z_i^k}$:

$$\hat{\nabla}(z) = \sum_k \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (5.18)$$

Эти операторы очень удобны в изучении тождеств Уорда в форме условий Вирасоро подобно [12]. Однако, в формализме петлевых уравнений обычно рассматривают статистические суммы, в которых большинство времен исчезает, а остается лишь несколько, $t_k = T_k \neq 0$ для $k \leq N$ (N - произвольно большое целое число, параметризующее класс решений), и решение тождеств Уорда параметризовано произвольной функцией этих оставшихся времен. Следовательно, в формализме [14, 13] оператор $\hat{\nabla}(z)$ может быть рассмотрен как действующий на пространство модулей решений. Замечательным фактом является то, что *результат* действия $\hat{\nabla}(z)$ (среднее резольвенты) может быть представлено, как действие *другого* оператора $\check{\nabla}(z)$, действующего только на пространство модулей. Это довольно

¹Для торического блока все старшие члены точны и не дают вклада, таким образом представляя симметрию $\oint_{\gamma} dz \hat{\nabla}(z) \leftrightarrow - \oint_{\gamma} dz \hat{\nabla}(z)$.

Заметим, что для 4-х точечного блока на сфере второй член в разложении дает нетривиальный вклад, так что присутствует симметрия $\oint_{\gamma} dz \hat{\nabla}(z) \leftrightarrow Q - \oint_{\gamma} dz \hat{\nabla}(z)$, а симметрическая функция (инвариант) в терминах собственных значений - как раз конформная размерность $\Delta(\alpha) = \alpha(Q - \alpha)$, поскольку в это случае

$$\oint_A dz \hat{\nabla}(z) Z = \alpha Z \quad (5.16)$$

как обычно мы переходим к симметричным обозначениям $\alpha = Q/2 + a$.

сложный формализм, однако он был достаточно развит в [14, 13], и мы можем воспользоваться этими результатами. Для наших целей важно заметить, что

$$\hat{\nabla}(z|t)Z(t)\Big|_{t=T} = \check{\nabla}(z|T)Z(T) \quad (5.19)$$

однако, это неверно для повторного действия оператора резольвенты

$$\hat{\nabla}(z_1|t)\hat{\nabla}(z_2|t)Z(t)\Big|_{t=T} \neq \check{\nabla}(z_1|T)\check{\nabla}(z_2|T)Z(T) \quad (5.20)$$

Более того, в то время как операторы $\hat{\nabla}(z)$ в различных точках z коммутируют,

$$[\hat{\nabla}(z_1), \hat{\nabla}(z_2)] = 0 \quad (5.21)$$

это неверно для чек-операторов:

$$[\check{\nabla}(z_1), \check{\nabla}(z_2)] \neq 0 \quad (5.22)$$

В частности, явный результат [14, 13]

$$\left[\oint_{A_I} \check{\nabla}(z), \oint_{B^J} \check{\nabla}(z) \right] = 2\pi i \delta_I^J \quad (5.23)$$

В [14, 13] были представлены некоторые доказательства в пользу этой гипотезы путем вычисления первых членов разложения по родам, однако мы предполагаем что это соотношение точное.

Для начала заметим, что для вычисления интеграла вдоль В-цикла необходимо сменить ветвь. Тогда более правильным рассмотреть “полуциклы”. Согласно [14, 13] коммутационное соотношение для чек-операторов имеет следующий вид:

$$[\check{\nabla}(x), \check{\nabla}(y)] = -\frac{1}{\check{\nabla}(x)\check{\nabla}(y)} (\partial_x - \partial_y) \frac{\check{\nabla}(x)^2 - \check{\nabla}(y)^2}{x - y} + \dots \quad (5.24)$$

В случае нулевых внешних размерностей, ожидание чек-резольвенты хорошо дается сферическим приближением

$$\langle \check{\nabla}(z) \rangle = \frac{(q(q-1)\partial_q \log Z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{z(z-q)(z-1)}} \quad (5.25)$$

Тогда для коммутатора находим

$$[\check{\nabla}(x), \check{\nabla}(y)] = -\frac{1}{g(x)g(y)} (\partial_x - \partial_y) \frac{g(x)^2 - g(y)^2}{x - y} + \dots \quad (5.26)$$

где $g(z) = [z(z - q)(z - 1)]^{-\frac{1}{2}}$. Мы ввели обозначения $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$ для полу-циклов

$$\int_{A_{1/2}} dz = \int_0^q dz, \quad \int_{B_{1/2}} dz = \int_q^1 dz \quad (5.27)$$

Тогда легко вычислить соответствующий интеграл

$$-\int_0^q dx \int_q^1 \frac{1}{g(x)g(y)} (\partial_x - \partial_y) \frac{g(x)^2 - g(y)^2}{x - y} = \frac{\pi i}{2} \quad (5.28)$$

Это простое вычисление использует только сферический предел в простой модели, однако мы предполагаем, что следующее выражение верно **точно** (см. также [14, 13])

$$\boxed{\left[\int_{A_{1/2}} dz \check{\nabla}^{(\pm)}(z), \int_{B_{1/2}} dz \check{\nabla}^{(\pm)}(z) \right] = \frac{\pi i}{2}} \quad (5.29)$$

Вопрос о связи между интегралами по полу-циклам и полным циклам мы оставим до рассмотрения калибровочно-инвариантных операторов в разделе 5.3.4.

Таким образом мы построили операторы явно реализующие pq -дуальность. Они позволят нам построить дуальную пару операторов A и B и модулярное преобразование, как это было сделано в разделе 5.1.

5.2.3 Пара дуальных чек-операторов

Чтобы построить дуальную пару, заметим, что действие оператора резольвенты (или чек-резольвента) на статистическую сумму (конформный блок) подобно вставке в конформный блок вырожденного на втором уровне поля, которое может быть описано в терминах бета-ансамблей как

$$\begin{aligned} Z_{r.op.}(\xi) &= \eta^{3\mu(b-\mu)} e^{b \int^\xi du \check{\nabla}(u)} Z = \\ &= \eta^{3\mu(b-\mu)} \left\langle \prod_i \theta(\xi - z_i)^{b^2} \theta(\xi - w)^{\mu b} e^{2iab\xi} \right\rangle Z \end{aligned} \quad (5.30)$$

где мы использовали эта-функцию Дедекинда

$$\eta(\tau) := e^{i\pi\tau/12} \prod_{n>0} (1 - e^{2i\pi n\tau})$$

На самом деле соответствующее петлевое уравнение может быть представлено в форме уравнения Шредингера для эллиптической системы Калоджеро и совпадает с уравнением для двухточечного конформного блока на торе с одним вырожденным полем на втором уровне, [76, уравнение (34)]

$$\left[4q\partial_q + b^2\partial_z^2 - (\zeta(z-w)\partial_w + \Delta_\mu\wp(z-w) - \left(\frac{3}{2b^2} + 1\right)\eta_1) \right] \tilde{Z}_{r.op.}(z) = 0 \quad (5.31)$$

где $\eta_1 = -2\pi i\partial_\tau \log \eta$. Другими словами вставка внешнего вырожденного поля в конформный блок может быть буквально представлена соответствующей экспонентой чек-резольвенты. Это замечание позволяет построить оператор монодромии вдоль замкнутого контура γ для вырожденного поля:

$$\mathcal{L}_\gamma \sim e^{\int_\gamma b \wp dz \check{\nabla}(z)} \quad (5.32)$$

Это выражение соответствует "квантовой" версии абелианизирующего отображения, построенного в [46].

Заметим, что (5.23) дает построить пару дуальных операторов \mathcal{L}_A и \mathcal{L}_B , явно реализованных в терминах переменных pq , практически как и в разделе 5.1. Следовательно модулярное преобразование описывается ничем иным, как преобразованием Фурье в соответствии с результатом предыдущего раздела и [103].

5.3 Непертурбативное модулярное преобразование

5.3.1 Фазовая неоднозначность

Как мы уже упоминали при рассмотрении базового примера, чтобы восстановить интегральное ядро, необходимо фиксировать нормировку, которая не важна в ином случае. Следовательно, важно установить нормировочную константу $N(a)$, связывающую статистическую сумму и конформный блок

$$Z_a(\tau|\mu) = N(a|\mu)B_a(\tau|\mu) \quad (5.33)$$

чтобы определить модулярное ядро. Здесь мы детально рассмотрим эту нормировочную константу.

Торическая нормировочная константа. Нормировочная константа в торическом случае может быть легко определена из статистической суммы при $q = 0$

$$N(a) = \int dz_1 \dots \int dz_N \prod_{i<j} (\sin z_{ij})^{-2b^2} \prod_i (\sin z_i)^{-2b\mu} \prod_i e^{-4ibaz_i} \quad (5.34)$$

После замены переменных $z_i = -\frac{i}{2} \log t_i$, интеграл сводится (с точностью до незначительного множителя) к

$$N(a) = \int dt_1 \dots \int dt_N \prod_{i<j} t_{ij}^{-2b^2} \prod_i t_i^{-2b(a+\frac{Q}{2})} (t_i - 1)^{-2b\mu} \quad (5.35)$$

Это выражение представляет собой интеграл Сельберга, который обсуждается в разделе 7.2

$$\begin{aligned} N(a) &= \tilde{N} \left(\frac{Q}{2} + a, \mu, \frac{Q}{2} + a \right) = \\ &= \frac{\left(b^{2b^2 - b\mu + 1} / \Gamma(-b^2) \right)^{-\frac{\mu}{b}}}{\Gamma_b(0) \Gamma_b(Q - 2\mu)} \frac{\Gamma_b(-2a + \mu) \Gamma_b(-2a + Q - \mu)}{\Gamma_b(-2a) \Gamma_b(-2a + Q)} \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $\Gamma_b(x)$ - двойная гамма-функция Барнса.

Нормировочная константа для четырехточечной сферы. Здесь мы сталкиваемся с **неопределенностью** в фиксации константы. Рассмотрим два разных бета-ансамбля

$$\begin{aligned} Z_a^{(1)} &= \int_0^x dz_1 \dots \int_0^x dz_{N_1} \boxed{\int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_{N_1}} \prod_{i<j} z_{ij}^{-2b^2} \times \\ &\times \prod_i z_i^{-2b\alpha_0} (z_i - x)^{-2b\alpha_x} (z_i - 1)^{-2b\alpha_1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} Z_a^{(2)} &= \int_0^x dz_1 \dots \int_0^x dz_{N_1} \boxed{\int_1^\infty dz_1 \dots \int_1^\infty dz_{N_1}} \prod_{i<j} z_{ij}^{-2b^2} \times \\ &\times \prod_i z_i^{-2b\alpha_0} (z_i - x)^{-2b\alpha_x} (z_i - 1)^{-2b\alpha_1} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Они оба дают одинаковые выражения для конформных блоков, однако их нормировочные константы отличаются.

$$\begin{aligned} Z_a^{(1)} &= \tilde{N}(\alpha, \alpha_x, \alpha_0) \tilde{N}(Q - \alpha_\infty, \alpha_1, \alpha) B_a \\ Z_a^{(2)} &= \tilde{N}(\alpha, \alpha_x, \alpha_0) \tilde{N}(Q - \alpha, \alpha_\infty, \alpha_1) B_a \end{aligned} \quad (5.39)$$

Тогда и модулярные ядра будут **различными** в этих двух случаях. На самом деле неопределенность даже шире из-за возможности использования различных экранирующих операторов (до сих пор мы использовали только один из них, см. [87]). И способ *априорного* выбора между этими возможностями не известен. Можно лишь заметить, что модулярное ядро определено с точностью до сопряжения этими нормировочными факторами.

5.3.2 Непертурбативные дуальные монодромии: торический случай

На самом деле проблема с выражением (5.32) заключается в том, что оно не калибровочно-инвариантно. Его можно сделать калибровочно-инвариантным, взяв след: сумму по обеим ветвям чек-оператора

$$\mathcal{L}_\gamma \sim e^{\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}^{(+)}(z)} + e^{\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}^{(-)}(z)} \quad (5.40)$$

Однако статистические суммы отличаются на различных ветвях, таким образом мы перейдем к конформному блоку, который является калибровочно-инвариантным объектом:

$$B_a(\tau|\mu) = \frac{Z_a(\tau|\mu)}{N(a)} \quad (5.41)$$

Это отвечает сопряжению экспонент чек-операторов соответствующими нормировочными константами

$$e^{\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}(z)} \longrightarrow \frac{1}{N(a)} e^{\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}(z)} N(a) \quad (5.42)$$

Ветви отличаются знаком чек-оператора, следовательно конечное соотношение между оператором монодромии и экспонентой чек-резольвенты имеет следующую форму

$$\boxed{\mathcal{L}_\gamma^{\text{tor}} = \left[\frac{1}{N(a)} e^{\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}(z)} N(a) + \frac{1}{N(-a)} e^{-\int_\gamma b \oint dz \check{\nabla}(z)} N(-a) \right]} \quad (5.43)$$

Этот оператор хорошо определен на всем пространстве модулей, а конформные блоки задают собственные функции его A -периодов.

Нам нужна только часть нормировочной константы, зависящая от a :

$$N(a) = \frac{\Gamma_b(2a + \mu)\Gamma_b(2a + Q - \mu)}{\Gamma_b(2a)\Gamma_b(2a + Q)} \quad (5.44)$$

Подставляя a -представление чек-оператора

$$\oint_A dz \check{\nabla}(z) = 2\pi ia, \quad \oint_B dz \check{\nabla}(z) = \frac{1}{2}\partial_a \quad (5.45)$$

получим,

$$\mathcal{L}_A = 2 \cos 2\pi ba \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \frac{\Gamma(2ab)\Gamma(bQ + 2ab)}{\Gamma(b\mu + 2ab)\Gamma(b(Q - \mu) + 2ab)} e^{\frac{b}{2}\partial_a} + \\ & + \frac{\Gamma(-2ab)\Gamma(bQ - 2ab)}{\Gamma(b\mu - 2ab)\Gamma(b(Q - \mu) - 2ab)} e^{-\frac{b}{2}\partial_a} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Таким образом мы построили два оператора \mathcal{L}_A и \mathcal{L}_B из чек-операторов с каноническими коммутационными соотношениями. Они отвечают модулярно преобразованным периодам на классической спектральной кривой, иными словами они отвечают преобразованию S -дуальности. Следовательно модулярная инвариантность - **преобразование, индуцированное rq -дуальностью**. Более того в пертурбативном режиме (т.е. при больших a) эти операторы содержат только одну из двух экспонент, соответствующих двум ветвям, т.е. модулярное преобразование в этом режиме сводится к обычному преобразованию Фурье.

5.3.3 Чек-операторы и линейные дефекты

Дуальные операторы $\mathcal{L}_{A,B}$ могут быть интерпретированы как операторы линейных дефектов [4, 36]. Явные выражения для них были получены в [4, 36] посредством эвристических аргументов, и они совпадают с явными выражениями, полученными в предыдущем разделе.

Более детально, два вырожденных на втором уровне поля в алгебре Вирасоро имеют следующее операторное разложение:

$$\Phi_{(2,1)} \otimes \Phi_{(2,1)} = \Phi_{(1,1)} \oplus \Phi_{(3,1)} \quad (5.48)$$

Размерность поля $\Phi_{(1,1)}$ равна 0, на это поле можно смотреть как на оператор, действующий на пространстве конформных блоков. Иными словами, рассмотрим следующую операцию \mathcal{C} , отображающую n -точечный конформный блок CB_n в вырожденный $n+2$ -точечный блок, построив решение для следующего уравнения с заданными граничными условиями

$$\mathcal{C} : CB_n \longrightarrow CB_{n|2} \quad (5.49)$$

$$\begin{cases} (b^2 L_{-1}^2 - L_{-2}) \langle V_{b/2}(z)V_{b/2}(w)\mathcal{O} \rangle = 0, \\ \langle V_{b/2}(z)V_{b/2}(w)\mathcal{O} \rangle \sim (z-w)^{\frac{b^2}{2}} \langle \mathcal{O} \rangle \end{cases} \quad (5.50)$$

Используя то же дифференциальное уравнение, можно построить преобразования монодромии, производя параллельный перенос одного из вырожденных полей вдоль некоторого контура γ :

$$\mathcal{M}_\gamma : CB_{n|2} \longrightarrow CB_{n|2} \quad (5.51)$$

Таким образом строится (линейный) оператор Верлинде [4, 36, 117, 57]

$$\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{M}_\gamma \mathcal{C} : CB_n \longrightarrow CB_n \quad (5.52)$$

Важно заметить, что этот оператор может быть сформулирован как дифференциальный оператор, действующий на конформный блок, по крайней мере в абстрактном виде. Это делает операторы Верлинде крайне похожими на чек-операторы, сформулированные в терминах матричных моделей, и позволяет интерпретировать оператор Верлинде как, своего рода, экспоненту чек-оператора. Связь становится более прозрачной, если рассмотреть слегка другой оператор [76] $\mathcal{L}_\gamma = (C'_x)^{-1} \mathcal{M}_\gamma C'_x$

$$C'_x : CB_n \longrightarrow CB_{n|1} \quad (5.53)$$

построив его как решение следующего уравнения с заданным граничным условием

$$\left[b^2 z(z-1) \partial_z^2 - (2z-1) \partial_z - \frac{x(x-1)}{z-x} \partial_x + \Delta_{1/2b} + \frac{\Delta_0}{z} - \frac{\Delta_1}{z-1} - \Delta_\infty + \frac{x^2 - (2x-1)z}{(z-x)^2} \Delta_x \right] B_{4|1}(z|x) = 0,$$

$$B_{4|1}(z|x) = B_4(x) (z-x)^{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \Delta}} (1 + O((z-x)))$$

Этому уравнению удовлетворяет пятиточечный конформный блок с одним вырожденным полем на втором уровне с фиксированными промежуточными размерностями, см. [76, уравнения (26,30)] для детального описания.

Явные выражения для этих операторов могут быть найдены в терминах конформной теории поля [4, 36], не только для одноточечного торического, но и для четырехточечного сферического конформного блока:

- Торический:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= 2 \cos 2\pi ba \\ \mathcal{L}_B &= \frac{\Gamma(2ab)\Gamma(bQ + 2ab)}{\Gamma(b\mu + 2ab)\Gamma(b(Q - \mu) + 2ab)} e^{\frac{b}{2}\partial_a} + \\ &+ \frac{\Gamma(-2ab)\Gamma(bQ - 2ab)}{\Gamma(b\mu - 2ab)\Gamma(b(Q - \mu) - 2ab)} e^{-\frac{b}{2}\partial_a}\end{aligned}\quad (5.54)$$

- Четырехточечный сферический:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= \cos 2\pi ba, \\ \mathcal{L}_B &= H_+(a)e^{b\partial_a} + H_0(a) + H_-(a)e^{-b\partial_a},\end{aligned}\quad (5.55)$$

где

$$\begin{aligned}H_{\pm}(a) &= 4\pi^2 \frac{\Gamma(b(Q/2 \pm 2a + b)) \Gamma(b(Q/2 \pm 2a))}{\prod_{s_i=\pm} \Gamma(b(Q/2 \pm a + s_1\mu_1 + s_2\mu_2))} \times \\ &\times \frac{\Gamma(b(\pm 2a + b)) \Gamma(b(\pm 2a))}{\prod_{s_i=\pm} \Gamma(b(Q/2 \pm a + s_3\mu_3 + s_4\mu_4))}\end{aligned}\quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}H_0(a) &= \frac{\cos \pi b^2}{\cos 4\pi ba - \cos 2\pi b^2} \cos 2\pi b\mu_2 \cos 2\pi b\mu_3 + \\ &+ \frac{\cos \pi b^2}{\cos 4\pi ba - \cos 2\pi b^2} \cos 2\pi b\mu_1 \cos 2\pi b\mu_4) + \\ &+ \frac{\cos 2\pi ba}{\cos 4\pi ba - \cos 2\pi b^2} \cos 2\pi b\mu_1 \cos 2\pi b\mu_3 + \\ &+ \frac{\cos 2\pi ba}{\cos 4\pi ba - \cos 2\pi b^2} \cos 2\pi b\mu_2 \cos 2\pi b\mu_4\end{aligned}\quad (5.57)$$

а переменные μ_i связаны с конформными размерностями в случае четырехточечного сферического блока как $\Delta_i = \mu_i(Q - \mu_i)$. Заметим, что наша нормировочная константа для H_{\pm} отличается от [4] на 2π .

Результат для торического случая совпадает с формулой (5.46), полученной в предыдущем разделе.

5.3.4 Четырехточечный конформный блок на сфере

В случае сферы с проколами в подходе, примененном нами в предыдущем разделе, появляются некоторые тонкости. Проблема заключается в том, что при переходе вдоль В-цикла необходимо в определенный момент сменить ветви (see Fig.4.1). Однако, построив калибровочно-инвариантный оператор, мы ожидаем естественного соотношения $\mathcal{L}_\gamma \sim \mathcal{L}_{\gamma_{1/2}} \mathcal{L}_{\gamma_{1/2}}$, где $\gamma_{1/2}$ обозначает "половину" контура, идущую только вдоль одной из ветвей (либо постоянная, либо пунктирная линия на рис.4.1), однако нельзя исключать появления диагональных частей в этом выражении. Следовательно, в общем виде этот оператор запишется как

$$\mathcal{L}_\gamma = c_1 \mathcal{L}_{\gamma_{1/2}} \mathcal{L}_{\gamma_{1/2}} + c_2 \quad (5.58)$$

Неизвестные коэффициенты c_1 и c_2 могут быть легко фиксированы из условия на монодромии вдоль А-цикла (5.46). В этом случае и оператор и "полуоператор" хорошо определены

$$\mathcal{L}_A = 2 \cos 2\pi b a, \quad \mathcal{L}_{(0,x)} = 2 \cos \pi b a \quad (5.59)$$

Используя простое тригонометрическое тождество $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, можно переформулировать оператор монодромии в терминах чек-оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma^{4\text{-pun}} &= \\ &= \left[\frac{1}{N(a)} e^{b \int_{\gamma_{1/2}} dz \check{\nabla}(z)} N(a) + \frac{1}{N(-a)} e^{-b \int_{\gamma_{1/2}} dz \check{\nabla}(z)} N(-a) \right]^2 - 2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Это выражение позволяет явно вычислить сдвигающие коэффициенты

$$\mathcal{L}_\gamma = H_+(a) e^{b\partial_a} + H_0(a) + H_-(a) e^{-b\partial_a}, \quad (5.61)$$

$$H_\pm(a) = \frac{N(\pm a + b)}{N(\pm a)}, \quad (5.62)$$

$$H_0(a) = \frac{N(a + b/2)}{N(a)} \frac{N(-a)}{N(-a - b/2)} + \frac{N(-a + b/2)}{N(-a)} \frac{N(a)}{N(a - b/2)} - 2 \quad (5.63)$$

Теперь для получения конечного ответа достаточно просто подставить явные выражения для $N(a)$. Однако, как уже было замечено в разделе 5.3.1, присутствует неопределенность в нормировочном множителе в этом случае. Таким образом мы просто используем $N(a)$ из известного выражения поверхностного оператора (5.56).

Мы выбираем

$$N(a) = \frac{\prod_{s_i=\pm} \Gamma_b(Q/2 + a + s_1\mu_1 + s_2\mu_2)\Gamma_b(Q/2 + a + s_3\mu_3 + s_4\mu_4)}{\Gamma_b(2a + Q)\Gamma_b(2a)} \quad (5.64)$$

тогда выражения для H_{\pm} получаются автоматически совпадающими с (5.56). Сделав такой выбор, в действительности сложно воспроизвести вклад магнитного члена H_0 . Формула (5.64) не может подходить для такого случая, поскольку она симметрична по отношению к перестановкам μ_1 и μ_2 , в то время как формула (5.57) нет. Тем не менее заметим, что (5.64) может быть умножена на произвольную периодическую функцию a с периодом b , что не повлияет на H_{\pm} , однако изменит H_0 .

Заметим также, что при определенных значениях $\mu_1 = \mu_4 = \frac{b}{4}$, правильное выражение для H_0 может быть получено из (5.64) непосредственно. Действительно, в этом случае

$$\frac{\Gamma_b(x + \mu_1 + b/2)\Gamma_b(x - \mu_1 + b/2)}{\Gamma_b(x + \mu_1)\Gamma_b(x - \mu_1)} = \frac{\sqrt{2\pi}b^{b(x-b/4-1/2)}}{\Gamma(bx - b^2/4)} \quad (5.65)$$

Применив это соотношение, мы получим отношение

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{N(a + b/2)}{N(a)} \frac{N(-a)}{N(-a - b/2)} = \\ &= -4 \frac{\prod_{s_i=\pm} \cos(\pi b (a + \frac{b}{4} + s_2\mu_2)) \cos(\pi b (a + \frac{b}{4} + s_3\mu_3))}{\sin(2\pi ab) \sin(\pi b(2a + b))} \end{aligned} \quad (5.66)$$

и, после несложных вычислений,

$$F(a) + F(-a) - 2 = H_0 \left(a, \mu_1 = \frac{b}{4}, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \frac{b}{4} \right) \quad (5.67)$$

5.4 Непертурбативное модулярное ядро

В этом разделе мы покажем, что модулярное ядро может быть явно вычислено из уравнения

$$\mathcal{L}_B(a)M(a, a') = \mathcal{L}_A(a')M(a, a') \quad (5.68)$$

похожего на уравнение (5.5) в разделе 5.1. Рассмотрим торический одноточечный конформный блок, т.е. соотношения (5.46). Заметим, что источником сложной структуры модулярного ядра является сложность асимпто-

тического ряда конформного блока $N(a) \neq N(-a)$. Более детально, разделим нормировочный множитель на симметричную и несимметричную части $N(a) = N_n(a)N_s(a)$, где $N_s(-a) = N_s(a)$. Тогда операторы монодромии могут быть упрощены

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma &= \frac{1}{N_n(a)N_s(a)} e^{\frac{b}{\gamma} \oint dz \check{\nabla}(z)} N_n(a)N_s(a) + \\ &+ \frac{1}{N_n(-a)N_s(-a)} e^{-\frac{b}{\gamma} \oint dz \check{\nabla}(z)} N_n(-a)N_s(-a) = N_s(a)^{-1} \mathcal{L}'_\gamma N_s(a), \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\mathcal{L}'_\gamma = N_n(a)^{-1} e^{\frac{b}{\gamma} \oint dz \check{\nabla}(z)} N_n(a) + N_n(-a)^{-1} e^{-\frac{b}{\gamma} \oint dz \check{\nabla}(z)} N_n(-a) \quad (5.70)$$

поскольку $N_s(a)$ симметричен по отношению к группе Вейля и совпадает на обеих ветвях чек-оператора. Разделим нормировочный множитель

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{\Gamma_b(2a + \mu)\Gamma_b(2a + Q - \mu)}{\Gamma_b(2a)\Gamma_b(2a + Q)} = \frac{\Gamma_b(2a + \mu)\Gamma_b(Q - 2a)}{\Gamma_b(2a)\Gamma_b(Q - 2a - \mu)} \times \\ &\times \frac{\Gamma_b(2a + Q - \mu)\Gamma_b(-2a + Q - \mu)}{\Gamma_b(2a + Q)\Gamma_b(-2a + Q)} = \\ &= \frac{S_b(2a + \mu)}{S_b(2a)} \left[\frac{\Gamma_b(2a + Q - \mu)\Gamma_b(-2a + Q - \mu)}{\Gamma_b(2a + Q)\Gamma_b(-2a + Q)} \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

где $S_b(x)$ функция двойного синуса (см. Приложение А), мы опустили симметричный множитель в скобках². Тогда получим (ср. с [36, уравнение (5.25)])

$$N_a(a) = \frac{S_b(2a + \mu)}{S_b(2a)}, \quad (5.72)$$

$$\mathcal{L}'_A = \cos 2\pi ba, \quad (5.73)$$

$$\mathcal{L}'_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\pi b(a - \mu/2)}{\sin 2\pi ba} e^{-\frac{1}{2}b\partial_a} + \frac{\sin 2\pi b(a + \mu/2)}{\sin 2\pi ba} e^{\frac{1}{2}b\partial_a} \right) \quad (5.74)$$

Теперь мы можем решить задачу на собственные значения, подставив (5.72) в (5.68):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\pi b(a - \mu/2)}{\sin 2\pi ba} e^{-\frac{b}{2}\partial_a} + \frac{\sin 2\pi b(a + \mu/2)}{\sin 2\pi ba} e^{\frac{b}{2}\partial_a} \right) M(a, a') &= \\ &= \cos 2\pi ba' M(a, a') \end{aligned} \quad (5.75)$$

²В действительности выражения для поверхностных операторов в [36] и [4] отличаются именно на симметричный множитель

Проще решать это уравнение, предварительно применив к нему преобразование Фурье

$$M(a, a') = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{4\pi i a \xi} f_{a'}(\xi) \quad (5.76)$$

Это приводит к подстановке

$$e^{2\pi i b a} \longrightarrow e^{-\frac{b}{2}\partial_\xi}, \quad e^{\frac{b}{2}\partial_a} \longrightarrow e^{2\pi i b \xi} \quad (5.77)$$

где мы использовали следующую замену переменных

$$\begin{aligned} \eta &= e^{\pi i b^2}, & y &= e^{\pi i b \mu}, & z &= e^{2\pi i b \xi}, \\ s &= e^{2\pi i b a'}, & \hat{X} f(\xi) &= e^{\frac{b}{2}\partial_\xi} f(\xi) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Тогда задача на собственные значения сводится к следующему алгебраическому уравнению

$$\begin{aligned} \left[\left(\hat{X} y - \hat{X}^{-1} y^{-1} \right) z^{-1} + \left(\hat{X} y^{-1} - \hat{X}^{-1} y \right) z \right] f_{a'}(\xi) &= \\ &= \left(\hat{X} - \hat{X}^{-1} \right) \left(s + \frac{1}{s} \right) f_{a'}(\xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{X}^2 f_{a'}(\xi) &= \eta^2 \frac{(s - yz)(1 - zys)}{(sy - \eta^2 z)(y - \eta^2 sz)} f_{a'}(\xi) \end{aligned} \quad (5.79)$$

или, аналогично,

$$f_{a'}(\xi + b) = \frac{\sin \pi b \left(\xi + \frac{\mu}{2} - a' \right) \sin \pi b \left(\xi + \frac{\mu}{2} + a' \right)}{\sin \pi b \left(\xi + b - \frac{\mu}{2} - a' \right) \sin \pi b \left(\xi + b - \frac{\mu}{2} + a' \right)} f_{a'}(\xi) \quad (5.80)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\begin{aligned} f_{a'}(\xi) &= \tilde{C}_1(\xi) C_2(a') \frac{S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} + a' \right)}{S_b \left(\xi + b - \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + b - \frac{\mu}{2} + a' \right)} = \\ &= C_1(\xi) C_2(a') \frac{S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} + a' \right)}{S_b \left(\xi + Q - \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + Q - \frac{\mu}{2} + a' \right)} \end{aligned} \quad (5.81)$$

где $C_1(\xi)$ - произвольная периодическая функция с периодом b , $C_2(a')$ - произвольная функция, и мы использовали тот факт, что функция $G(x) = e^{\pi i x/b} \frac{S_b(x + 1/b)}{S_b(x)}$ периодична с периодом b . Таким образом в результате получаем

$$M(a, a') = \int d\xi C_1(\xi) C_2(a') \frac{S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + \frac{\mu}{2} + a' \right)}{S_b \left(\xi + Q - \frac{\mu}{2} - a' \right) S_b \left(\xi + Q - \frac{\mu}{2} + a' \right)} e^{4\pi i a \xi}$$

где остается свобода в ответе, связанная с выбором нормировки конформного блока. Этот результат находится в согласии ³ с [116, (4.41)], здесь мы его получили путем решения простого и явного уравнения (5.68).

5.5 Выводы

В этой главе мы реализовали непертурбативный подход к вычислению модулярного ядра в терминах бета-ансамблей. Мы построили модулярное ядро как унитарный оператор перехода между собственными базисами дуальных операторов.

Чек-операторы, введенные в [14, 13], были использованы как дифференциальные операторы на семействах статистических сумм бета-ансамблей. При этом оказалось, что:

1. Интегралы по периодам спектральной кривой от чек-резольвент канонически сопряжены.
2. Конформные блоки являются собственными функциями для этих интегралов.

Особенностью такого рассмотрения является тот факт, что разложение по родам в бета-ансамблях - типичное квазиклассическое разложение, а потому оно подвержено явлению Стокса, которое подразумевает аккуратный учет всех ветвей функции дифференциала Зайберга-Виттена. Этот факт позволяет построить непертурбативные выражения для операторов. Обычные контурные интегралы чек-операторов собираются в калибровочно-инвариантные операторы Верлинде. Соответствующее унитарное преобразование между собственными пространствами дуальных операторов Верлинде дается символами Рака-Вигнера, выражение для которых совпадает с аналогичным выражением для алгебр $\mathcal{U}_q(sl_2)$ [108].

Особенность такого подхода заключается в том, что он непосредственно связан с теорией фазовых переходов (стенок маргинальной стабильности на пространстве модулей), с теорией кластерных алгебр, и квантовой теорией Тейхмюллера.

³Для сравнения ответов нужно использовать свойство $S_b(x)S_b(Q-x) = 1$.

Глава 6

Заключение

В диссертации рассмотрены способы применения дуальностей как непертурбативных методов вычисления различных наблюдаемых в теориях поля. Рассмотренные модели различными и иногда неочевидными способами связаны с интегрируемыми моделями, а сама дуальность, как правило, носит геометрический характер.

Мы привели пример построения рекурсивной процедуры вычисления регуляризованной площади в геометрии пространства AdS и сравнили это выражение с гипотетическим видом амплитуды рассеяния глюонов в суперсимметричной теории Янга-Миллса, предложенной Берном, Диксоном и Смирновым. С геометрической точки зрения эта задача интересна тем, что предполагает нетривиальное решение задачи Плато, т.е. зависимости минимальной площади поверхности пленки, натянутой на контур, от формы контура, и, как мы видели, форма бесконечного числа членов разложения для площади может быть фиксирована без явного вычисления формы поверхности, а лишь используя конформную симметрию задачи. Геометрический смысл выражений также позволяет предложить естественные многомерные конформные инварианты, аналог производной Шварца. Представленные методы заслуживают дальнейшего изучения, особенно в свете тесной связи с интегрируемыми моделями [5, 7], которая находит отражения и в остальных обсуждаемых примерах.

Другим исследованным в диссертации примером скрытых интегрируемых структур является гипотеза о дуальности между эффективными теориями на доменной стенке в суперсимметричной теории Янга-Миллса и топологической теорией Черна-Саймонса, которая строится по типу дуальности между статсуммой самого Янга-Миллса и конформного блока в двумерной конформной теории поля. Показаны подобию и отличия наивных

выражений дуальных частей. Дальнейшее исследование данного вопроса позволит глубже изучить связь топологических инвариантов различных многообразий с наблюдаемыми в квантовых теориях поля.

И, конечно же, мы не могли обойти вниманием саму дуальность между суперсимметричной теорией Янга-Миллса и двумерной конформной теорией поля и, пожалуй, первую реализацию дуальности, как метода непертурбативного вычисления наблюдаемых, – дуальности Монтонена-Олива.

Мы рассмотрели пертурбативный и непертурбативный подходы к вычислению модулярного ядра, сплетающего оператора для тензорных произведений представлений алгебры Вирасоро. На пертурбативном уровне ядро представляется обычным преобразованием Фурье, что отвечает на стороне Янг-Миллса преобразованию S -дуальности эффективного низкоэнергетического действия.

Для реализации непертурбативного подхода мы использовали специальные чек-операторы, естественным образом появляющиеся в теории бета-ансамблей и действующие на точки ветвления спектральных накрытий, которые реализуют квантовую деформацию дифференциала Зайберга-Виттена. Такой подход напрямую связывает эту задачу с интегрируемыми системами и объединяет представленные картины дуальностей в общий контекст интегрируемых систем. Интересен вопрос о продолжении представленных моделей на случай пятимерной и шестимерной теорий, компактифицированных на различные многообразия, а также связь с квантованием пространства Тейхмюллера и пространства модулей плоских связностей на римановых поверхностях, затрагивающая описание фазовых переходов и непертурбативных перестроек спектров возбуждений в эффективных теориях поля.

Глава 7

Приложения

7.1 Приложение А. Свойства дилогарифма

В этом разделе мы приведем сравнительный анализ различных определений квантового дилогарифма, применяемого в литературе: $S(z|\epsilon_1, \epsilon_2)$, $S_b(z)$, $\Phi_h(z)$, $e_b(z)$. Также мы приводим вывод безмассового предела $\alpha \rightarrow 0$ модулярного ядра $M(a, a')$, необходимого для вывода выражения (3.8).

А1. Различные определения дилогарифма

Функция $s(z)$, называемая квантовым дилогарифмом [42], - отношение двух дигамма функций Барнса [19],

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m + \frac{1}{2}) \epsilon_1 + (n + \frac{1}{2}) \epsilon_2 - iz}{(m + \frac{1}{2}) \epsilon_1 + (n + \frac{1}{2}) \epsilon_2 + iz} = \frac{\Gamma_2(\epsilon/2 + iz|\epsilon_1, \epsilon_2)}{\Gamma_2(\epsilon/2 - iz|\epsilon_1, \epsilon_2)} \quad (7.1)$$

Она обладает набором периодических свойств:

$$s\left(z - \frac{i\epsilon_2}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) = 2 \cosh\left(\frac{\pi z}{\epsilon_1}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon_2}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) \quad (7.2)$$

$$s\left(z - \frac{i\epsilon_1}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) = 2 \cosh\left(\frac{\pi z}{\epsilon_2}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon_1}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) \quad (7.3)$$

$$s\left(z - \frac{i\epsilon}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) = 4 \sinh\left(\frac{\pi z}{\epsilon_1}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{\epsilon_2}\right) s\left(z + \frac{i\epsilon}{2} \middle| \epsilon_1, \epsilon_2\right) \quad (7.4)$$

Квантовый дилогарифм имеет интегральное представление:

$$i \log s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_0^\infty \frac{dw}{w} \left\{ \frac{\sin(2zw)}{2 \sinh(\epsilon_1 w) \sinh(\epsilon_2 w)} - \frac{z}{\epsilon_1 \epsilon_2 w} \right\} \quad (7.5)$$

которое может быть использовано для описания асимптотического поведения

$$i \log s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\pi z^2}{2\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\pi}{24} \frac{2\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon^2}{\epsilon_1\epsilon_2} + \\ + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1/2)}{n!} \left(2\pi i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{n-1} \text{Li}_{2-n} \left(-e^{\frac{2\pi z}{\epsilon_1}}\right) \quad (7.6)$$

Следующее разложение также часто используется:

$$i \log s(z_0 + z|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\pi(z_0 + z)^2}{2\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\pi}{24} \frac{2\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon^2}{\epsilon_1\epsilon_2} + \\ + \sum_{k=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{k+1} B_{k+1}(1/2)}{(k+1)!j!} (2\pi)^{k+j} \frac{\epsilon_2^k}{\epsilon_1^{k+j}} \text{Li}_{1-j-k} \left(-e^{\frac{2\pi z_0}{\epsilon_1}}\right) z^j \quad (7.7)$$

Квантовый дилогарифм симметричен по отношению к перестановке ϵ_1 и ϵ_2 , однако, мы явно задали здесь предел малого ϵ_2 , такое разложение играет важную роль в пределе Некрасова-Шаташвили.

Такое определение квантового дилогарифма удобно в приложении к изучению соответствия АГТ, где параметры $\epsilon_{1,2}$ явно заданы. Однако в литературе часто встречается иное определение, отличающееся перемасштабированием:

$$S_b(z) = \exp \left(\frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{dw}{w} \left(\frac{\sin 2zw}{2 \sinh bw \sinh b^{-1}w} - \frac{z}{w} \right) \right) \quad (7.8)$$

так что

$$s(z|\epsilon_1, \epsilon_2) = S_{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}} \left(\frac{z}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \right) \quad (7.9)$$

7.1.1 A2. Модулярное ядро

В этом разделе мы представим стандартный прием для вычисления модулярного ядра (3.5) в пределе нулевой внешней размерности $\tilde{\alpha} = i\frac{\epsilon}{2}$. Рассматривая модулярное ядро в этом пределе, наивно можно вывести из уравнения (7.4), что

$$\mathcal{M}(a, a'|0) = \\ = 2^{3/2} \int \frac{dr e^{4\pi i a' r}}{16 \sinh \left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_1} \right) \sinh \left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_2} \right) \sinh \left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_1} \right) \sinh \left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_2} \right)} \quad (7.10)$$

Знаменатель в подынтегральном выражении имеет двойные полюса, которые склеиваются вместе в пределе $\tilde{\alpha} \rightarrow i\frac{\epsilon}{2}$, и выбранный контур интегрирования оказывается зажат между ними. Следовательно, этот предел должен быть рассмотрен более аккуратно:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a, a'|0) &= \\ &= \oint_{r=-a} dr \frac{s(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} \frac{e^{4\pi i a' r}}{4 \sinh\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_1}\right) \sinh\left(\frac{\pi(a-r)}{\epsilon_2}\right)} + \\ &+ \oint_{r=a} dr \frac{s(a-r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a-r-i\epsilon/2-i\lambda)} \frac{e^{4\pi i a' r}}{4 \sinh\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_1}\right) \sinh\left(\frac{\pi(a+r)}{\epsilon_2}\right)} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\frac{s(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{s(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} = \\ &= \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 - i(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)}{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 + i(a+r+i\epsilon/2+i\lambda)} \times \\ &\times \frac{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 + i(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)}{(m+1/2)\epsilon_1 + (n+1/2)\epsilon_2 - i(a+r-i\epsilon/2-i\lambda)} = \\ &= \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m+1)\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2 - i(a+r+i\lambda)}{m\epsilon_1 + n\epsilon_2 + i(a+r+i\lambda)} \times \\ &\times \prod_{m,n \geq 0} \frac{(m+1)\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2 + i(a+r-i\lambda)}{m\epsilon_1 + n\epsilon_2 - i(a+r-i\lambda)} \sim \\ &\sim \prod_{m,n=0} \frac{1}{(a+r)^2 - \lambda^2} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \delta(a+r) \end{aligned}$$

в конце получим

$$\mathcal{M}(a, a'|0) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cos\left(4\pi i \frac{aa'}{\epsilon_1 \epsilon_2}\right)}{\mu'(a)} \quad (7.12)$$

7.1.2 А3. Среднее в теории Черна-Саймонса.

Стандартные величины, возникающие в теории Черна-Саймонса, часто используют иное определение квантового дилогарифма. Например, среднее узла 4_1 обычно записывается как функция константы связи h и параметра

монодромии вокруг узла u (заметим, что \hbar в наших формулах отличается от h в [58] множителем 2)

$$\langle 4_1 \rangle = H(u, \hbar) = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \int dp \frac{\Phi_{\hbar}(p + i\pi + \hbar/2)}{\Phi_{\hbar}(-2u - p - i\pi - \hbar/2)} e^{-\frac{4}{\hbar}u(u+p)-u} \quad (7.13)$$

где

$$\Phi_{\hbar}(z) = \Phi\left(\frac{z}{\pi i \hbar} \middle| \frac{\hbar}{2\pi i}\right), \quad \Phi(z|\tau) = \exp\left(\frac{1}{4} \int \frac{dw}{w} \frac{e^{2xz}}{\sinh w \sinh \tau w}\right) \quad (7.14)$$

В ранее обсуждаемом контексте конформной теории поля можно обнаружить похожую функцию, однако с переопределенными параметрами

$$e_b(z) = \exp\left(\frac{1}{4} \int \frac{dw}{w} \frac{e^{-2izw}}{\sinh bw \sinh b^{-1}w}\right) = \Phi(-ibz|b^2) \quad (7.15)$$

так, что

$$\langle 4_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\pi ib^2)}} \int dp \frac{e_b\left(\frac{1}{2\pi b}(p + i\pi + \pi ib^2)\right)}{e_b\left(\frac{1}{2\pi b}(-2u - p - i\pi - \pi ib^2)\right)} e^{-\frac{2}{\pi ib^2}u(u+p)-u} \quad (7.16)$$

Вводя новые переменные $p = 2\pi bz$, $u = 2\pi bu'$, $Q = b + b^{-1}$, получим

$$\langle 4_1 \rangle = \frac{2\pi b}{\sqrt{2\pi(\pi ib^2)}} \int dz \frac{e_b(z + iQ/2)}{e_b(-2u' - z - iQ/2)} e^{8\pi iu'(u'+z)-2\pi bu'} \quad (7.17)$$

Заметим, что функции e_b и S_b слегка отличаются, в частности они отличаются множителем:

$$e_b(z) = e^{\frac{\pi iz^2}{2}} e^{-\frac{i\pi(2-Q^2)}{24}} S_b(z) \quad (7.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle &= \sqrt{-2i} \int dz \frac{S_b(z + iQ/2)}{S_b(-2u' - z - iQ/2)} e^{6\pi iu'(z+u')-\pi u'(b-b^{-1})} = \\ &= \int_{z \rightarrow z-u'-iQ/2} \sqrt{-2i} \int dz S_b(z - u') S_b(z + u') e^{6\pi iu'z+2\pi u'/b+4\pi u'b} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Наконец, те же выражения в терминах функции $s(z|\epsilon_1, \epsilon_2)$ записываются как

$$\begin{aligned} H\left(\frac{2\pi u}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}, \pi i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) &= \\ &= \sqrt{\frac{-2i}{\epsilon_1 \epsilon_2}} \int dz s(z - u|\epsilon_1, \epsilon_2) s(z + u|\epsilon_1, \epsilon_2) e^{\frac{6\pi iuz}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{2\pi u}{\epsilon_2} + \frac{4\pi u}{\epsilon_1}} \end{aligned} \quad (7.20)$$

7.1.3 А4. Символ Почхаммера как отношение дилогарифмов

Рассмотрим символ Почхаммера

$$\begin{aligned} (q, N)_k &= \prod_{j=1}^k \left(q^{\frac{N-j}{2}} - q^{-\frac{N-j}{2}} \right) = 2^k \prod_{j=1}^k \sinh(\pi i \hbar (N - j)), \\ (q, N)_k^* &= \prod_{j=1}^k \left(q^{\frac{N+j}{2}} - q^{-\frac{N+j}{2}} \right) = 2^k \prod_{j=1}^k \sinh(\pi i \hbar (N + j)) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Используя условие периодичности (7.4) можно переписать произведение гиперболических синусов как

$$\sinh\left(\frac{\pi i \epsilon_2 z}{\epsilon_1}\right) = -\frac{i s\left(i \epsilon_2 z + \frac{i}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\right)}{2 s\left(i \epsilon_2 z + \frac{i}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)\right)} \quad (7.22)$$

таким образом, символы Почхаммера переписываются как

$$\begin{aligned} (q, N)_k &= (-i)^k \prod_{j=1}^k \frac{s\left(i \epsilon_2(N - 1 - j) + i \epsilon_2/2\right)}{s\left(i \epsilon_2(N - j) + i \epsilon_2/2\right)} = \\ &= (-i)^k \frac{s\left(i \epsilon_2(N - 1 - k) + i \epsilon_2/2\right)}{s\left(i \epsilon_2(N - 1) + i \epsilon_2/2\right)} \end{aligned} \quad (7.23)$$

и, соответственно,

$$(q, N)_k^* = (-i)^k \frac{s\left(i \epsilon_2(N) + i \epsilon_2/2\right)}{s\left(i \epsilon_2(N + k) + i \epsilon_2/2\right)} \quad (7.24)$$

Заметим, что $\langle 4_1 \rangle$ может быть выражен через $(q, N/\sqrt{\hbar})_{k/\sqrt{\hbar}}$, который обладает симметрией $\hbar \rightarrow \hbar^{-1}$:

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle &= \frac{i}{\cosh\left(i \epsilon_2(N - 1/2) + i \epsilon_2/2\right)} \times \\ &\times \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-1)^k \frac{s\left(i \epsilon_2(N - 1/2 - k) + i \epsilon_2/2\right)}{s\left(i \epsilon_2(N - 1/2 + k) + i \epsilon_2/2\right)} \end{aligned} \quad (7.25)$$

В пределе $\epsilon_2 \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $i \epsilon_2(N - 1/2) + i \epsilon_2/2 = \tilde{u}$ сумма может быть заменена интегралом, что дает

$$\langle 4_1 \rangle = -\frac{1}{\epsilon_2 \cosh \tilde{u}} \int dz e^{\pi z / \epsilon_2} s(z - \tilde{u}) s(z + \tilde{u}) \quad (7.26)$$

Это выражение напоминает формулу Хиками, однако правильный экспоненциальный множитель не восстанавливается в интегрировании.

7.2 Приложение В. Нормировочный коэффициент для матрично-модельной статистической суммы

“Голоморфная” трехточечная корреляционная функция \tilde{N} определена через интеграл Сельберга как

$$\tilde{N}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i \prod_{i < j} z_{ij}^{-2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{-2b\alpha_1} (1 - z_i)^{-2b\alpha_2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + bN = \alpha_3$$

Для любого целого N этот интеграл может быть вычислен явно

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) &= \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(-2b\alpha_1 + 1 - b^2(j-1)) \Gamma(-2b\alpha_2 + 1 - b^2(j-1))}{\Gamma(-2b\alpha_1 - 2b\alpha_2 + 2 - b^2(N+j-2))} \times \\ &\times \frac{\Gamma(1 - b^2j)}{\Gamma(1 - b^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Используя функциональное соотношение

$$\Gamma(bx) = \sqrt{2\pi b} b^{bx - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(x+b)} \quad (\text{B.3})$$

можно вывести аналитическое продолжение этого выражения для произвольного N [109]

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left(\frac{b^{(N+2)b^2+1}}{\Gamma(-b^2)} \right)^N \frac{\Gamma_b(2Q - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{\Gamma_b(2Q - 2\alpha_1)\Gamma_b(Q - 2\alpha_2)} \times \\ &\times \frac{\Gamma_b(Q - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Gamma_b(Q - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)\Gamma_b(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma_b(Q - 2\alpha_3)\Gamma_b(0)} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Литература

- [1] S. Abel, S. Forste, and V. V. Khoze, “Scattering amplitudes in strongly coupled $\mathcal{N} = 4$ SYM from semiclassical strings in AdS,” *JHEP* **0802** (2008) 042, [arXiv:0705.2113 \[hep-th\]](#).
- [2] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino, and C. Vafa, “Topological strings and integrable hierarchies,” *Commun.Math.Phys.* **261** (2006) 451–516, [arXiv:hep-th/0312085 \[hep-th\]](#).
- [3] O. Aharony and S. Yankielowicz, “Exact electric - magnetic duality in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD theories,” *Nucl.Phys.* **B473** (1996) 93–120, [arXiv:hep-th/9601011 \[hep-th\]](#).
- [4] L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa, and H. Verlinde, “Loop and surface operators in $\mathcal{N} = 2$ gauge theory and Liouville modular geometry,” *JHEP* **1001** (2010) 113, [arXiv:0909.0945 \[hep-th\]](#).
- [5] L. F. Alday, D. Gaiotto, and J. Maldacena, “Thermodynamic bubble ansatz,” *JHEP* **1109** (2011) 032, [arXiv:0911.4708 \[hep-th\]](#).
- [6] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, “Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories,” *Lett.Math.Phys.* **91** (2010) 167–197, [arXiv:0906.3219 \[hep-th\]](#).
- [7] L. F. Alday, J. Maldacena, A. Sever, and P. Vieira, “Y-system for scattering amplitudes,” *J.Phys.* **A43** (2010) 485401, [arXiv:1002.2459 \[hep-th\]](#).
- [8] L. F. Alday and J. Maldacena, “Comments on gluon scattering amplitudes via AdS/CFT,” *JHEP* **0711** (2007) 068, [arXiv:0710.1060 \[hep-th\]](#).
- [9] L. F. Alday and J. M. Maldacena, “Comments on operators with large spin,” *JHEP* **0711** (2007) 019, [arXiv:0708.0672 \[hep-th\]](#).

- [10] L. F. Alday and J. M. Maldacena, “Gluon scattering amplitudes at strong coupling,” *JHEP* **0706** (2007) 064, [arXiv:0705.0303 \[hep-th\]](#).
- [11] L. F. Alday and R. Roiban, “Scattering amplitudes, Wilson loops and the string/gauge theory correspondence,” *Phys.Rept.* **468** (2008) 153–211, [arXiv:0807.1889 \[hep-th\]](#).
- [12] A. Alexandrov, A. Mironov, and A. Morozov, “Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. I. Finite size Hermitean one matrix model,” *Int.J.Mod.Phys.* **A19** (2004) 4127–4165, [arXiv:hep-th/0310113 \[hep-th\]](#).
- [13] A. Alexandrov, A. Mironov, and A. Morozov, “Solving Virasoro constraints in matrix models,” *Fortsch.Phys.* **53** (2005) 512–521, [arXiv:hep-th/0412205 \[hep-th\]](#).
- [14] A. Alexandrov, A. Mironov, and A. Morozov, “Unified description of correlators in non-Gaussian phases of Hermitean matrix model,” *Int.J.Mod.Phys.* **A21** (2006) 2481–2518, [arXiv:hep-th/0412099 \[hep-th\]](#).
- [15] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and P. Putrov, “Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. II. Kontsevich model,” *Int.J.Mod.Phys.* **A24** (2009) 4939–4998, [arXiv:0811.2825 \[hep-th\]](#).
- [16] L. Alvarez-Gaume and S. Hassan, “Introduction to S duality in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten,” *Fortsch.Phys.* **45** (1997) 159–236, [arXiv:hep-th/9701069 \[hep-th\]](#).
- [17] P. C. Argyres and A. Buchel, “New S dualities in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $SU(2) \times SU(2)$ gauge theory,” *JHEP* **9911** (1999) 014, [arXiv:hep-th/9910125 \[hep-th\]](#).
- [18] H. Awata, H. Fuji, H. Kanno, M. Manabe, and Y. Yamada, “Localization with a surface operator, irregular conformal blocks and open topological string,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **16** no. 3, (2012) 725–804, [arXiv:1008.0574 \[hep-th\]](#).

- [19] E. W. Barnes, “The genesis of the double gamma functions,” *Proceedings of the London Mathematical Society* **1** no. 1, (1899) 358–381.
- [20] H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions, vol. 2*. McGraw-Hill book company, London, 1953.
- [21] A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nucl.Phys.* **B241** (1984) 333–380.
- [22] **Particle Data Group** Collaboration, J. Beringer *et al.*, “Review of particle physics (RPP),” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 010001.
- [23] Z. Bern, L. Dixon, D. Kosower, R. Roiban, M. Spradlin, *et al.*, “The two-loop six-gluon MHV amplitude in maximally supersymmetric Yang-Mills theory,” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 045007, [arXiv:0803.1465 \[hep-th\]](#).
- [24] Z. Bern, L. J. Dixon, and V. A. Smirnov, “Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory at three loops and beyond,” *Phys.Rev.* **D72** (2005) 085001, [arXiv:hep-th/0505205 \[hep-th\]](#).
- [25] A. Bilal, “Introduction to supersymmetry,” [arXiv:hep-th/0101055 \[hep-th\]](#).
- [26] M. Billo, M. Frau, L. Gallot, A. Lerda, and I. Pesando, “Deformed $\mathcal{N} = 2$ theories, generalized recursion relations and S-duality,” *JHEP* **1304** (2013) 039, [arXiv:1302.0686 \[hep-th\]](#).
- [27] M. Billo, M. Frau, L. Gallot, A. Lerda, and I. Pesando, “Modular anomaly equation, heat kernel and S-duality in $\mathcal{N} = 2$ theories,” *JHEP* **1311** (2013) 123, [arXiv:1307.6648 \[hep-th\]](#).
- [28] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, “Quantum Hitchin systems via beta-deformed matrix models,” [arXiv:1104.4016 \[hep-th\]](#).
- [29] A. Brandhuber, P. Heslop, and G. Travaglini, “MHV amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills and Wilson loops,” *Nucl.Phys.* **B794** (2008) 231–243, [arXiv:0707.1153 \[hep-th\]](#).

- [30] L. Chekhov and B. Eynard, “Hermitean matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera,” *JHEP* **0603** (2006) 014, [arXiv:hep-th/0504116](#) [hep-th].
- [31] L. Chekhov and B. Eynard, “Hermitean matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera,” *JHEP* **0603** (2006) 014, [arXiv:hep-th/0504116](#) [hep-th].
- [32] S. R. Coleman, “The quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model,” *Phys.Rev.* **D11** (1975) 2088.
- [33] R. Dijkgraaf, H. Fuji, and M. Manabe, “The volume conjecture, perturbative knot invariants, and recursion relations for topological strings,” *Nucl.Phys.* **B849** (2011) 166–211, [arXiv:1010.4542](#) [hep-th].
- [34] R. Dijkgraaf and C. Vafa, “Toda theories, matrix models, topological strings, and $\mathcal{N} = 2$ gauge systems,” [arXiv:0909.2453](#) [hep-th].
- [35] V. Dotsenko and V. Fateev, “Conformal algebra and multipoint correlation functions in two-dimensional statistical models,” *Nucl.Phys.* **B240** (1984) 312.
- [36] N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda, and J. Teschner, “Gauge theory loop operators and Liouville theory,” *JHEP* **1002** (2010) 057, [arXiv:0909.1105](#) [hep-th].
- [37] J. Drummond, J. Henn, G. Korchemsky, and E. Sokatchev, “The hexagon Wilson loop and the BDS ansatz for the six-gluon amplitude,” *Phys.Lett.* **B662** (2008) 456–460, [arXiv:0712.4138](#) [hep-th].
- [38] J. Drummond, J. Henn, G. Korchemsky, and E. Sokatchev, “Hexagon Wilson loop = six-gluon MHV amplitude,” *Nucl.Phys.* **B815** (2009) 142–173, [arXiv:0803.1466](#) [hep-th].
- [39] J. Drummond, G. Korchemsky, and E. Sokatchev, “Conformal properties of four-gluon planar amplitudes and Wilson loops,” *Nucl.Phys.* **B795** (2008) 385–408, [arXiv:0707.0243](#) [hep-th].
- [40] N. M. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, “The superpolynomial for knot homologies,” *Experimental Mathematics* **15** no. 2, (2006) 129–159, [arXiv:math/0505662](#) [math-th].

- [41] B. Eynard and N. Orantin, “Invariants of algebraic curves and topological expansion,” [arXiv:math-ph/0702045](#) [math-th].
- [42] L. Faddeev and R. Kashaev, “Quantum dilogarithm,” *Mod.Phys.Lett.* **A9** (1994) 427–434, [arXiv:hep-th/9310070](#) [hep-th].
- [43] J. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*. Springer, Berlin, 1973.
- [44] G. Felder, “BRST approach to minimal models,” *Nucl.Phys.* **B317** (1989) 215.
- [45] D. Gaiotto, “ $\mathcal{N} = 2$ dualities,” *JHEP* **1208** (2012) 034, [arXiv:0904.2715](#) [hep-th].
- [46] D. Gaiotto, G. W. Moore, and A. Neitzke, “Four-dimensional wall-crossing via three-dimensional field theory,” *Commun.Math.Phys.* **299** (2010) 163–224, [arXiv:0807.4723](#) [hep-th].
- [47] D. Galakhov, H. Itoyama, A. Mironov, and A. Morozov, “Deviation from Alday-Maldacena duality for wavy circle,” *Nucl.Phys.* **B823** (2009) 289–319, [arXiv:0812.4702](#) [hep-th].
- [48] D. Galakhov, A. Mironov, and A. Morozov, “S-duality as a beta-deformed Fourier transform,” *JHEP* **1208** (2012) 067, [arXiv:1205.4998](#) [hep-th].
- [49] D. Galakhov, A. Mironov, and A. Morozov, “S-duality and modular transformation as a non-perturbative deformation of the ordinary pq-duality,” *JHEP* **06** (2014) 050, [arXiv:1311.7069](#) [hep-th].
- [50] D. Galakhov, A. Mironov, A. Morozov, A. Smirnov, and A. Mironov, “Three-dimensional extensions of the Alday-Gaiotto-Tachikawa relation,” *Theor.Math.Phys.* **172** (2012) 939–962, [arXiv:1104.2589](#) [hep-th].
- [51] S. Garoufalidis and C. Koutschan, “The sl_3 Jones polynomial of the trefoil: A case study of q-holonomic sequences,” *Advances in Applied Mathematics* **47** no. 4, (2011) 829–839, [arXiv:1011.6329](#) [math-th].
- [52] S. Garoufalidis and T. T. Le, “The colored Jones function is q-holonomic,” *Geom. Topol* **9** (2005) 1253–1293, [arXiv:math/0309214](#) [math-th].

- [53] R. Gelca and J. Sain, “The noncommutative A-ideal of a $(2, 2p + 1)$ -torus knot determines its Jones polynomial,” *J.Knot Theory Ramifications* **12** no. 02, (2003) 187–201.
- [54] A. Gorsky, S. Gukov, and A. Mironov, “Multiscale $\mathcal{N} = 2$ SUSY field theories, integrable systems and their stringy/brane origin. I.,” *Nucl.Phys.* **B517** (1998) 409–461, arXiv:hep-th/9707120 [hep-th].
- [55] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, “Integrability and Seiberg-Witten exact solution,” *Phys.Lett.* **B355** (1995) 466–474, arXiv:hep-th/9505035 [hep-th].
- [56] S. Gukov, A. Iqbal, C. Kozcaz, and C. Vafa, “Link homologies and the refined topological vertex,” *Commun.Math.Phys.* **298** (2010) 757–785, arXiv:0705.1368 [hep-th].
- [57] S. Gukov and E. Witten, “Rigid surface operators,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **14** (2010) , arXiv:0804.1561 [hep-th].
- [58] K. Hikami, “Hyperbolic structure arising from a knot invariant,” *Int. J. Mod. Phys. A* **16** (2001) 3309–3333, arXiv:math-ph/0105039 [math-th].
- [59] N. Iorgov, O. Lisovyy, and Y. Tykhyy, “Painlevé VI connection problem and monodromy of $c = 1$ conformal blocks,” *JHEP* **1312** (2013) 029, arXiv:1308.4092 [hep-th].
- [60] K. Ito, “Comment on gluon scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory at strong coupling,” *Int.J.Mod.Phys.* **A23** (2008) 2135–2142.
- [61] H. Itoyama and Y. Matsuo, “ $W(1 + \infty)$ type constraints in matrix models at finite n ,” *Phys.Lett.* **B262** (1991) 233–239.
- [62] H. Itoyama, A. Mironov, and A. Morozov, “‘Anomaly’ in $n = \infty$ alday-maldacena duality for wavy circle,” *JHEP* **0807** (2008) 024, arXiv:0803.1547 [hep-th].
- [63] H. Itoyama, A. Mironov, and A. Morozov, “Boundary ring: a way to construct approximate NG solutions with polygon boundary conditions. I. $Z(n)$ -symmetric configurations,” *Nucl.Phys.* **B808** (2009) 365–410, arXiv:0712.0159 [hep-th].

- [64] H. Itoyama and A. Morozov, “Boundary ring or a way to construct approximate NG solutions with polygon boundary conditions. II. Polygons which admit an inscribed circle,” *Prog.Theor.Phys.* **120** (2008) 231–287, [arXiv:0712.2316 \[hep-th\]](#).
- [65] R. Kallosh and A. Tseytlin, “Simplifying superstring action on $AdS_5 \times S^5$,” *JHEP* **9810** (1998) 016, [arXiv:hep-th/9808088 \[hep-th\]](#).
- [66] S. Kharchev and D. Lebedev, “Integral representations for the eigenfunctions of quantum open and periodic Toda chains from QISM formalism,” *J.Phys.* **A34** (2001) 2247–2258, [arXiv:hep-th/0007040 \[hep-th\]](#).
- [67] S. Kharchev, D. Lebedev, and M. Semenov-Tian-Shansky, “Unitary representations of $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains,” *Commun.Math.Phys.* **225** (2002) 573–609, [arXiv:hep-th/0102180 \[hep-th\]](#).
- [68] M. Khovanov, “A categorification of the Jones polynomial,” *Duke Math.J.* **101** (2000) 359–426.
- [69] Z. Komargodski, “On collinear factorization of Wilson loops and MHV amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM,” *JHEP* **0805** (2008) 019, [arXiv:0801.3274 \[hep-th\]](#).
- [70] C. Kozcaz, S. Pasquetti, and N. Wyllard, “A & B model approaches to surface operators and Toda theories,” *JHEP* **1008** (2010) 042, [arXiv:1004.2025 \[hep-th\]](#).
- [71] A. Losev, N. Nekrasov, and S. L. Shatashvili, “Testing Seiberg-Witten solution,” [arXiv:hep-th/9801061 \[hep-th\]](#).
- [72] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231–252, [arXiv:hep-th/9711200 \[hep-th\]](#).
- [73] S. Mandelstam, “Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation,” *Phys.Rev.* **D11** (1975) 3026.

- [74] A. Marshakov, M. Martellini, and A. Morozov, “Insights and puzzles from branes: 4-D SUSY Yang-Mills from 6-D models,” *Phys.Lett.* **B418** (1998) 294–302, [arXiv:hep-th/9706050](#) [hep-th].
- [75] A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, “Zamolodchikov asymptotic formula and instanton expansion in $\mathcal{N} = 2$ SUSY $N_f = 2N_c$ QCD,” *JHEP* **0911** (2009) 048, [arXiv:0909.3338](#) [hep-th].
- [76] A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, “On AGT relations with surface operator insertion and stationary limit of beta-ensembles,” *J.Geom.Phys.* **61** (2011) 1203–1222, [arXiv:1011.4491](#) [hep-th].
- [77] K. Maruyoshi and M. Taki, “Deformed prepotential, quantum integrable system and Liouville field theory,” *Nucl.Phys.* **B841** (2010) 388–425, [arXiv:1006.4505](#) [hep-th].
- [78] A. Mikhailov, “Bps states and minimal surfaces,” *Nucl.Phys.* **B533** (1998) 243–274, [arXiv:hep-th/9708068](#) [hep-th].
- [79] J. A. Minahan, “Duality symmetries for $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with vanishing beta-functions,” *Nucl.Phys.* **B537** (1999) 243–259, [arXiv:hep-th/9806246](#) [hep-th].
- [80] J. Minahan and K. Zarembo, “The Bethe ansatz for $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills,” *JHEP* **0303** (2003) 013, [arXiv:hep-th/0212208](#) [hep-th].
- [81] A. Mironov and A. Morozov, “On the origin of Virasoro constraints in matrix models: Lagrangian approach,” *Phys.Lett.* **B252** (1990) 47–52.
- [82] A. Mironov and A. Morozov, “The power of Nekrasov functions,” *Phys.Lett.* **B680** (2009) 188–194, [arXiv:0908.2190](#) [hep-th].
- [83] A. Mironov and A. Morozov, “Nekrasov functions and exact Bohr-Zommerfeld integrals,” *JHEP* **1004** (2010) 040, [arXiv:0910.5670](#) [hep-th].
- [84] A. Mironov and A. Morozov, “Nekrasov functions from exact BS periods: The case of $SU(N)$,” *J.Phys.* **A43** (2010) 195401, [arXiv:0911.2396](#) [hep-th].

- [85] A. Mironov and A. Morozov, “On AGT relation in the case of $U(3)$,” *Nucl.Phys.* **B825** (2010) 1–37, arXiv:0908.2569 [hep-th].
- [86] A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, “Conformal blocks and generalized Selberg integrals,” *Nucl.Phys.* **B843** (2011) 534–557, arXiv:1003.5752 [hep-th].
- [87] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, “Conformal blocks as Dotsenko-Fateev integral discriminants,” *Int.J.Mod.Phys.* **A25** (2010) 3173–3207, arXiv:1001.0563 [hep-th].
- [88] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, “Matrix model conjecture for exact BS periods and Nekrasov functions,” *JHEP* **1002** (2010) 030, arXiv:0911.5721 [hep-th].
- [89] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, “On ‘Dotsenko-Fateev’ representation of the toric conformal blocks,” *J.Phys.* **A44** (2011) 085401, arXiv:1010.1734 [hep-th].
- [90] A. Mironov, A. Morozov, and T. Tomaras, “Some properties of the Alday-Maldacena minimum,” *Phys.Lett.* **B659** (2008) 723–731, arXiv:0711.0192 [hep-th].
- [91] A. Mironov, A. Morozov, and T. Tomaras, “On n-point amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM,” *JHEP* **0711** (2007) 021, arXiv:0708.1625 [hep-th].
- [92] T. Miwa, “On Hirota’s difference equations,”
- [93] C. Montonen and D. I. Olive, “Magnetic monopoles as gauge particles?,” *Phys.Lett.* **B72** (1977) 117.
- [94] G. W. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili, “Integrating over Higgs branches,” *Commun.Math.Phys.* **209** (2000) 97–121, arXiv:hep-th/9712241 [hep-th].
- [95] G. W. Moore and N. Seiberg, “Classical and quantum conformal field theory,” *Commun.Math.Phys.* **123** (1989) 177.
- [96] A. Morozov, “Integrability and matrix models,” *Phys.Usp.* **37** (1994) 1–55, arXiv:hep-th/9303139 [hep-th].

- [97] A. Morozov, “Alday-Maldacena duality and AdS Plateau problem,” *Int.J.Mod.Phys.* **A23** (2008) 2118–2134, [arXiv:0803.2431 \[hep-th\]](#).
- [98] A. Y. Morozov, “String theory: what is it?,” *Sov.Phys.Usp.* **35** (1992) 671–714.
- [99] N. Nekrasov, “Five dimensional gauge theories and relativistic integrable systems,” *Nucl.Phys.* **B531** (1998) 323–344, [arXiv:hep-th/9609219 \[hep-th\]](#).
- [100] N. Nekrasov, A. Rosly, and S. Shatashvili, “Darboux coordinates, Yang-Yang functional, and gauge theory,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **216** (2011) 69–93, [arXiv:1103.3919 \[hep-th\]](#).
- [101] N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, “Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories,” [arXiv:0908.4052 \[hep-th\]](#).
- [102] N. A. Nekrasov, “Seiberg-Witten prepotential from instanton counting,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **7** (2004) 831–864, [arXiv:hep-th/0206161 \[hep-th\]](#).
- [103] N. Nemkov, “S-duality as Fourier transform for arbitrary ϵ_1, ϵ_2 ,” [arXiv:1307.0773 \[hep-th\]](#).
- [104] P. Olesen and K. Zarembo, “Phase transition in Wilson loop correlator from AdS/CFT correspondence,” [arXiv:hep-th/0009210 \[hep-th\]](#).
- [105] R. Poghossian, “Recursion relations in CFT and N=2 SYM theory,” *JHEP* **0912** (2009) 038, [arXiv:0909.3412 \[hep-th\]](#).
- [106] A. M. Polyakov, “Particle spectrum in the quantum field theory,” *JETP Lett.* **20** (1974) 194–195.
- [107] A. M. Polyakov, “Gauge fields and strings,” *Contemp.Concepts Phys.* **3** (1987) 1–301.
- [108] B. Ponsot and J. Teschner, “Liouville bootstrap via harmonic analysis on a noncompact quantum group,” [arXiv:hep-th/9911110 \[hep-th\]](#).
- [109] R. Schiappa and N. Wyllard, “An $A(r)$ threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d $\mathcal{N} = 2$ gauge theories,” *J.Math.Phys.* **51** (2010) 082304, [arXiv:0911.5337 \[hep-th\]](#).

- [110] N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory,” *Nucl.Phys.* **B426** (1994) 19–52, [arXiv:hep-th/9407087](#) [hep-th].
- [111] N. Seiberg and E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD,” *Nucl.Phys.* **B431** (1994) 484–550, [arXiv:hep-th/9408099](#) [hep-th].
- [112] G. W. Semenoff and D. Young, “Wavy Wilson line and AdS/CFT,” *Int.J.Mod.Phys.* **A20** (2005) 2833–2846, [arXiv:hep-th/0405288](#) [hep-th].
- [113] G. ’t Hooft, “Magnetic monopoles in unified gauge theories,” *Nucl.Phys.* **B79** (1974) 276–284.
- [114] G. ’t Hooft, “On the phase transition towards permanent quark confinement,” *Nucl.Phys.* **B138** (1978) 1.
- [115] Y. Terashima and M. Yamazaki, “ $SL(2, \mathbb{R})$ Chern-Simons, Liouville, and gauge theory on duality walls,” *JHEP* **1108** (2011) 135, [arXiv:1103.5748](#) [hep-th].
- [116] J. Teschner, “From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces,” [arXiv:hep-th/0308031](#) [hep-th].
- [117] E. P. Verlinde, “Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory,” *Nucl.Phys.* **B300** (1988) 360.
- [118] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [119] E. Witten, “Nonabelian bosonization in two-dimensions,” *Commun.Math.Phys.* **92** (1984) 455–472.
- [120] E. Witten, “Quantum field theory and the Jones polynomial,” *Commun.Math.Phys.* **121** (1989) 351.
- [121] E. Witten, “Solutions of four-dimensional field theories via M theory,” *Nucl.Phys.* **B500** (1997) 3–42, [arXiv:hep-th/9703166](#) [hep-th].

- [122] E. Witten, “Anti-de-Sitter space and holography,” *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253–291, arXiv:hep-th/9802150 [hep-th].
- [123] N. Wyllard, “ $A(N - 1)$ conformal Toda field theory correlation functions from conformal $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories,” *JHEP* **0911** (2009) 002, arXiv:0907.2189 [hep-th].
- [124] N. Wyllard, “ $A(N - 1)$ conformal Toda field theory correlation functions from conformal $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories,” *JHEP* **0911** (2009) 002, arXiv:0907.2189 [hep-th].
- [125] A. Zamolodchikov, “Two-dimensional conformal symmetry and critical four-spin correlation functions in the Ashkin-Teller model,” *JETP* **63** (1986) 1061.
- [126] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Conformal field theory and 2-d critical phenomena,” *ITEP-90-91* (1990) .