Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Государственный научный центр Российской Федерации –
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики»
Национального исследовательского центра «Курчатовский
институт»

На правах рукописи

Дунин-Барковский Петр Игоревич

Пространства модулей кривых
в теории струн
и топологических теориях поля

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

УДК 530.145+514.745.82

Работа выполнена в ФГБУ "ГНЦ РФ ИТЭФ", г. Москва

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Морозов А.Ю.
ФГБУ "ГНЦ РФ ИТЭФ", г. Москва

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Кричевер И.М.
Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау РАН, г.Черноголовка

доктор физ.-мат. наук Фейгин Е.Б.
Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН,
г. Москва

Ведущая организация: Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН, г. Москва

Защита состоится "24" июня 2014 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д.201.002.01 ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ по адресу: 117218, Москва, ул. Б.Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ.

Автореферат разослан "23" мая 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук В.В. Васильев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория суперструн была создана для решения таких фундаментальных проблем физики, как проблема построения квантовой теории гравитации, проблема иерархий и проблема объединения взаимодействий. Многие идеи из теории суперструн оказали значительное влияние не только на развитие физики, но и на развитие различных областей математики.

Основная идея теории струн состоит в замене точечных частиц на одномерные объекты, называемые *струнами*. Различают *открытую* и *замкнутую* теории струн, рассматривающие, соответственно, случаи одномерных объектов с двумя концами и замкнутых петель. Различные наблюдаемые типы частиц при этом происходят из различных квантовых состояний струны. Таким образом, в теории струн, в отличие от Стандартной Модели, имеется ровно один тип фундаментальных объектов. При этом (для случая теории суперструн), струнные состояния естественным образом включают в себя не только все типы частиц, имеющиеся в Стандартной Модели, но и гравитоны, попытки добавления которых в саму Стандартную Модель так и не увенчались успехом. Помимо гипотетической роли теории струн как *теории всего*, которая бы описывала все наблюдаемые частицы и фундаментальные взаимодействия, теория струн также важна как инструмент, с помощью которого были получены различные интересные результаты в квантовой теории поля и других областях теоретической физики и математики. В частности, идеи, происходящие из теории струн, легли в основу голографических моделей в КХД, которые являются на данный момент одним из самых перспективных непертурбативных подходов к КХД.

Однако даже пертурбативная теория суперструн на данный момент полностью не построена. При записи амплитуд в теории струн используется переход от бесконечномерного интеграла фейнмановского типа по всевозможным вложениям мировых поверхностей к конечномерному интегралу по пространству модулей римановых поверхностей. Для случая суперструн получается интеграл по пространству модулей супер-римановых поверхностей. Для порядков теории возмущений вплоть до второго включительно было выведено из первопринципов, что можно в общем случае взять интеграл по нечетным переменным и перейти к интегралу по набору мер, пронумерованных спин-структурами (называемыми также тэта-характеристиками), на обычном пространстве модулей римановых поверхностей. При этом, для случаев нулевого и первого порядка этот факт был понятен с самого начала, а для случая второго порядка это заняло 20 лет, на протяжении которых Э.Д'Окер и Д.Фонг выпустили длинную серию работ, в которых доказали этот факт, и нашли выражения для суперструнных мер через римановы тэта-константы. Можно ожидать, что аналогичное утверждение верно и в более старших порядках теории возмущений. К сожалению, доказать его и вывести из первопринципов выражения для суперструнных мер не представляется возможным уже для третьего порядка, поскольку даже случай второго порядка был чрезвычайно сложен, хотя использовались специфичные для второго порядка серьезные упрощения, которые не работают, начиная с третьего порядка. Можно подойти к этой проблеме с другой стороны, и попытаться найти суперструнные меры в старших порядках, исходя из свойств, которыми они обладают. Именно этому вопросу и посвящена существенная часть диссертации. В частности, в диссертации явным образом показано, что два известных ранее анзаца (т.е. предлагавшихся в рамках вышеописанного подхода ответа) для суперструнных мер совпадают вплоть до четвертого порядка, а в пятом порядке отличаются. Также в диссертации предложен новый анзац для пятого порядка, который, в отличие от ранее известных анзацев для пятого порядка, удовлетворяет всем условиям, накладываемым на суперструнные меры.

Кроме этого, в диссертации рассматриваются вопросы, связанные с происходящими из теории струн топологическими теориями поля. Топологические теории поля интересны и важны тем, что из-за отсутствия локальных степеней свободы их проще изучать, но, тем не менее, они сохраняют определенные свойства, имеющиеся у связанных с ними теорий с локальными степенями свободы. В диссертации рассматриваются теории Громова-Виттена, соответсвующие пертурбативному разложению топологической теории струн типа A, и обобщающие их когомологические теории поля. Интересно, что у этих теорий есть связь с другими областями науки, такими, как теория интегрируемых систем. В частности, когомологические теории поля можно использовать для классификации бигамильтоновых иерархий гидродинамического типа. В диссертации изучается действие группы Гивенталя, лежащее в основе большинства последних результатов в этой области. В предлагаемой работе получено выражение для одной из нетривиальных дискретных симметрий когомологических теорий поля, происходящей из симметрий уравнения Виттена-Дайкхраафа-Верлинде-Верлинде (ВДВВ), через действие группы Гивенталя.

Цель и задачи диссертационного исследования

Целью диссертационной работы является решение различных вопросов, связанных с построением пертурбативных амплитуд в теории суперструн и относящихся к ним математических проблем, а также исследование действия группы Гивенталя на когомологических теориях поля и нетривиальных симметрий фробениусовых многообразий.

В рамках поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

- определение соотношений между решеточными тэта-рядами для шестнадцатимерных самодуальных решеток и тэта-константами Римана;
- явное сравнение анзацев Грушевского и Оуры-Пура-Салвати Манни-Юэна для суперструнных мер;
- получение анзаца для суперструнных мер в роде 5, который бы удовлетворял всем условиям, накладываемым на суперструнные меры;
- представление действия группы Гивенталя на когомологических теориях поля в виде суммы по графам;
- нахождение выражения для симметрии обращения для фробениусовых многообразий через действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля.

Научная новизна

Все представленные к защите результаты являются оригинальными разработками автора диссертации. По теме представляемого диссертационного материала опубликованы статьи в ведущих международных реферируемых журналах, сделаны доклады на международных конференциях. Работы известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов (по данным SLAC SPIRES, на текущий момент имеется более двух десятков цитирований основных публикаций автора по теме диссертации в статьях других авторов, из них 14 в уже опубликованных в реферируемых журналах работах).

Практическая и научная ценность

Полученные в работе результаты имеют большую значимость для построения пертурбативной теории суперструн и для исследования топологической теории струн и различных топологических теорий поля, а также интегрируемых систем. Кроме того, полученные результаты важны для таких областей математики, как теория чисел и алгебраическая геометрия.

Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Явным образом продемонстрировано совпадение двух известных анзацев для суперструнных мер, анзаца Грушевского и анзаца Оуры-Пура-Сальвати Манни-Юэна (ОПСМЮ), вплоть до четвертого порядка теории возмущений. Для этого найден способ выражения решеточных тэта-констант для 16-мерных самодуальных решеток через римановы тэта-константы.

- Показано, что анзацы Грушевского и ОПСМЮ не совпадают в пятом порядке теории возмущений.

- Предложен новый анзац для суперструнных мер в пятом порядке теории возмущений, удовлетворяющий (в отличие от ранее известных анзацев) всем условиям, накладываемым на суперструнные меры, в том числе условию обращения в ноль двухточечной функции.

- Показано, что с использованием известных на данный момент модулярных форм невозможно построить анзац для суперструнных мер в шестом порядке теории возмущений, который бы удовлетворял всем условиям.

- Получено выражение для симметрии обращения, имеющей место для определенного класса топологических теорий поля, связанных с теорией суперструн, через действие элемента группы Гивенталя.

- Найдены выражения для гамильтонианов ассоциированной главной интегрируемой иерархии, получаемых в результате действия элемента группы Гивенталя, соответствующего симметрии обращения. Также установлена связь с преобразованиями Шлезингера.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации были доложены на теоретических семинарах ИТЭФ, института Кортевега-де Фриза (Амстердам) и следующих международных конференциях: 38-я Зимняя Школа ИТЭФ (Москва, 2010); VII, IX, X, XI международные школы ИТФ–ИТЭФ по теоретической и математической физике (Киев, 2009г., и Севастополь, 2010, 2012, 2013 гг.); II, III, V Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics (Триест, Италия, 2009,2010,2012 гг.); 2nd Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras and Symplectic Invariants (Москва, 2010); I, III Workshop on synthesis of integrabilities arising from gauge-string dualty (Москва, 2010 г., и Осака, Япония, 2012 г.); 48th, 49th International School of Subnuclear Physics (Эриче, Сицилия, Италия, 2011,2012 гг.); I Workshop on Aspects of Non-Associative and Non-Commutative Geometries in String Theory (Стамбул, Турция, 2012 г.); 2nd Northeast String Meeting: Strings, Knots and Related Aspects (Натал, Бразилия, 2013 г.);

По материалам диссертации опубликованы 3 научные работы в ведущих международных реферируемых журналах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения (глава 1), трех глав основного текста и заключения (глава 5). Общий объем диссертации составляет 96 страниц, включая 1 рисунок и 2 таблицы. Список литературы содержит 110 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** (глава 1) дана общая характеристика работы: актуальность, значимость, поставленные цель и задачи исследования.

В **главе 2** рассматривается вопрос построения пертурбативных амплитуд в теории суперструн в формализме Невё-Шварца-Рамона для порядков теории возмущения $g \leq 4$ (которые соответствует родам мировых поверхностей струн). Рассматривается подход, в котором статсумма представляется в виде интеграла по пространству модулей римановых поверхностей

$$Z_g = \int_{\mathcal{M}_g} \left(\det \mathrm{Im}\left(\tau^{(g)}\right)\right)^{-5} \left|\sum_m d\mu[m](\tau)\right|^2 \tag{1}$$

где τ – матрица периодов мировой поверхности. Меры $d\mu[m]$ нумеруются тэта-характеристиками $m = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{(2g)}$, которые соответствуют выбору граничных условий для полей на мировой поверхности струны, и представляются в виде произведения меры Мамфорда для критической бозонной струны $d\mu$ и функций $\Xi^{(g)}[m]$ на локусе якобианов в полупространстве Зигеля $\mathcal{H}_g$ (пространстве комплексных симметрических $g \times g$ матриц с положительно определенной мнимой частью).

Условия, которым должна удовлетворять мера, следующие:

1. Функции $\Xi[m]$ являются модулярными формами веса 8 относительно подгруппы $\Gamma[m]$ модулярной группы при ограничении на локус якобианов (подмножество полупространства Зигеля, образованное матрицами периодов).

2. Формы $\Xi[m]$ должны удовлетворять следующим условиям факторизации на блочно-диагональных матрицах:

$$\Xi^{(g)}_{m\times n} \begin{pmatrix} \tau^{(g-k)} & 0 \\ 0 & \tau^{(k)} \end{pmatrix} = \Xi^{(g-k)}_m \left(\tau^{(g-k)}\right) \Xi^{(k)}_n \left(\tau^{(k)}\right). \tag{2}$$

3. След суперструнной меры (космологическая постоянная) должен обращаться в ноль, т.е.
$$\sum_m \Xi[m] = 0. \tag{3}$$
Кроме того, след $1, 2, 3$-точечных функций $\sum_m A_k[m]$ должен также обращаться в ноль.

4. В роде 1 анзац должен давать ранее известный ответ.

Основным результатом главы 2 является то, что явным образом показано, что два известных на данный момент анзаца для суперструнных мер – анзацы Грушевского и Оуры-Пура-Салвати Манни-Юэна (ОПСМЮ) – совпадают вплоть до четвертого порядка теории возмущений (т.е. вплоть до рода $g = 4$). Для этого найдены ранее неизвестные соотношения между решеточными тэта-рядами для шестнадцатимерных самодуальных решеток и римановыми тэта-константами.

Анзац Грушевского определяется через тэта-константы Римана, которые являются следующими функциями на полупространстве Зигеля:
$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \delta\end{bmatrix}(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i\left(n+\frac{1}{2}\epsilon\right)^t \tau\left(n+\frac{1}{2}\epsilon\right) + \pi i\left(n+\frac{1}{2}\epsilon\right)^t \delta\right\}. \tag{4}$$
Для построения анзаца Грушевского используются следующие комбинации тэта-констант:
$$\xi_p^{(g)}[e] = \sum_{e_1,\ldots,e_p}^{N_e} \left\{\theta_e \cdot \left(\prod_i^p \theta_{e+e_i}\right) \cdot \left(\prod_{i<j}^p \theta_{e+e_i+e_j}\right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{i<j<k}^p \theta_{e+e_i+e_j+e_k}\right) \cdot \ldots \cdot \theta_{e+e_1+\ldots+e_p}\right\}^{2^{4-p}}, \tag{5}$$
через которые анзац выражается следующим образом:
$$\Xi_{\mathrm{Gr}}^{(g)}[0] = \sum_{p=0}^{g} (-1)^p \cdot 2^{\frac{(g-p)^2-(g+p)}{2}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{p}\left(2^i-1\right)\prod_{i=1}^{g-p}\left(2^i-1\right)\right)^{-1} \xi_p^{(g)}[0], \tag{6}$$

Также анзац Грушевского можно записать через другие комбинации тэта-констант, обозначаемые $G_p^{(g)}$ (называемые в совокупности *базисом Грушевского*), которые определяются следующим образом. Пусть $V \subset \mathbb{F}_2^{(2g)}$ – некоторый набор характеристик рода g, тогда определим

$$P(V) := \prod_{m \in V} \theta_m\,. \tag{7}$$

Введем обозначение $\mathcal{S}_p^{(g)}$ для множества всех p-мерных линейных подпространств $\mathbb{F}_2^{(2g)}$. Определим

$$G_p^{(g)} := \sum_{V \in \mathcal{S}_p^{(g)}} P(V)^{2^{4-p}}. \tag{8}$$

Выражения для $\Xi^{(g)}[0]$ можно записать в терминах базиса Грушевского как

$$\Xi_{\mathrm{Gr}}^{(g)}[0] = \sum_{p=0}^{g} (-1)^p \cdot 2^{\frac{p(p-1)}{2} - g}\, G_p^{(g)}[0], \tag{9}$$

Вторым известным на данный момент анзацем для суперструнных мер является анзац ОПСМЮ, который определяется через решеточные тэта-ряды для шестнадцатимерных самодуальных решеток.

h-мерная решетка Λ определяется как подмножество $\mathbb{R}^h$, порождаемое линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами некоторого набора из h линейно независимых векторов. Этот набор называется *базисом* решетки.

Для данной решетки Λ и данного рода g соответствующий решеточный тэта-ряд, являющийся функцией на пространстве Зигеля $\mathcal{H}$, определяется как

$$\vartheta_\Lambda\,(\tau) \stackrel{def}{=} \sum_{(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_g) \in \Lambda^g} \exp\big(\pi i (\vec{p}_k \cdot \vec{p}_l) \tau_{kl}\big), \tag{10}$$

где под $(\vec{p} \cdot \vec{p}')$ понимается обычное Евклидово скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^h$. Для шестнадцатимерных самодуальных решеток такой тэта-ряд является модулярной формой веса 8. Всего имеется 8 таких решеток: $\mathbb{Z}^{16}$, $\mathbb{Z}^8 \oplus E_8$, $\mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$, $\mathbb{Z}^2 \oplus (E_7 \oplus E_7)^+$, $\mathbb{Z} \oplus A_{15}^+$, $(D_8 \oplus D_8)^+$, $E_8 \oplus E_8$ и D_{16}^+; соответствующие им тэта-ряды будем обозначать $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_7$ соответственно. Введем обозначение M для следующей матрицы 6×6, индексы в которой меняются от 0 до 5:

$$M_{ij} = 2^{j(1-i)}, \quad i = 0..4,\ j = 1..5, \tag{11}$$

$$M_{i0} = 1, \qquad i = 0..5, \tag{12}$$

$$M_{5j} = 0, \qquad j = 1..5 \tag{13}$$

Функции $\Xi[0]$ из анзаца ОПСМЮ для родов $g \leq 5$ определяются следующим образом:

$$\Xi^{(g)}_{\text{OPSMY}}[0] = \sum_{k=0}^{5} \left(M^{-1}\right)_{gk} \vartheta_k^{(g)}, \quad g = 1 \ldots 5 \tag{14}$$

В главе 2 диссертации впервые найдены выражения для всех решеточных тэта-рядов для шестнадцатимерных самодуальных решеток, кроме одного (ϑ_5), через римановы тэта-константы во всех родах. Доказано, что

$$\boxed{\vartheta_p^{(g)} = 2^{-gp} \xi_p^{(g)}, \quad p = 0 \ldots 4} \tag{15}$$

для любого рода g.

Для оставшегося тэта-ряда доказано, что

$$\vartheta_5^{(g)} \underset{\mathcal{J}}{=} G_g^{(g)}, \quad g \leq 4 \tag{16}$$

Символ $\mathcal{J}$ под знаком равенства соответствует тому, что оно выполняется только на локусе якобианов. Выражения для последних двух тэта-рядов были известны ранее:

$$\vartheta_6^{(g)} = 2^{-2g} \left(\sum_e \theta^8[e] \right)^2, \tag{17}$$

$$\vartheta_7^{(g)} = 2^{-g} \sum_e \theta^{16}[e] \tag{18}$$

С использованием новых соотношений между решеточными тэта-рядами и римановыми тэта-константами явным образом показано совпадение анзацев Грушевского и ОПСМЮ для $g \leq 4$:

$$\boxed{\Xi^{(g)}_{\mathrm{Gr}} \underset{\mathcal{J}}{=} \Xi^{(g)}_{\mathrm{OPSMY}}, \quad g \leq 4} \tag{19}$$

В **главе 3** рассматриваются суперструнные меры в пятом порядке теории возмущений. Доказано, что формы $G_5^{(5)}$ и ϑ_5, которые в роде 5 используются при построении анзацев Грушевского и ОПСМЮ соответственно, не совпадают тождественно на локусе якобианов (хотя в случае всех более низких родов совпадение $G_g^{(g)}$ и ϑ_5 на локусе якобианов имеет место). Из этого результата делается вывод о том, что анзацы Грушевского и ОПСМЮ не совпадают для $g = 5$. Предложен новый анзац для рода 5, который, в отличие от анзацев Грушевского и ОПСМЮ, удовлетворяет не только условию факторизации и обращения в ноль космологической постоянной, но и условию обращения в ноль двухточечной функции в роде 4, которое должно иметь место согласно теоремам о неперенормируемости.

Несовпадение $\vartheta_5^{(5)}$ и $G_5^{(5)}$ доказывается следующим образом. Введем следующие обозначения:

$$f^{(g)} := \vartheta_5^{(g)} - G_g^{(g)} \tag{20}$$

$$J^{(g)} := \vartheta_6^{(g)} - \vartheta_7^{(g)}. \tag{21}$$

Также будем обозначать ω_i i-й голоморфный дифференциал на римановой поверхности в базисе, соответствующем ее матрице периодов. Кроме того, будем использовать отображение Абеля-Якоби A, получаемое с использованием того же базиса, и введем следующее обозначение: $A_{pq} := A(p) - A(q)$. Рассмотрим такое семейство поверхностей C_s (где s – вещественный параметр), что их матрицы периодов τ_s имеют следующий вид:

$$\tau_s = \begin{pmatrix} \lambda & z \\ z^t & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln s + c_1 + c_2 s & A^t_{pp'} + \frac{1}{4} s(\omega(p) - \omega(p'))^t \\ A_{pp'} + \frac{1}{4} s(\omega(p) - \omega(p')) & \tau_0 + s\,\sigma \end{pmatrix} \tag{22}$$

для некоторых констант c_1 и c_2, где τ_0 – матрица периодов C_0, p и p' – особые точки на C_0, возникающие при перетягивании ручки, а

$$\sigma_{ij} := \frac{1}{4} \left(\omega_i(p) - \omega_i(p')\right) \left(\omega_j(p) - \omega_j(p')\right), \qquad i, j \leq 4. \tag{23}$$

В главе 3 диссертации проделаны соответствующие вычисления и показано, что первые члены разложения $f^{(5)}(\tau_s)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f^{(5)}(\tau_s) = \frac{3}{7} J^{(4)}(\tau_0) + \\ + \frac{3s}{7} \sum_{i \leq j} \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} \left(56\pi i (1 + \delta_{ij}) u^2 \omega_i(p) \omega_j(p) + S_{ij} + O(u^4)\right) + O(s^2), \end{aligned} \tag{24}$$

где $u := x(p) - x(p')$, для некоторой локальной координаты x, а

$$S_{ij} := \frac{u^2}{4} \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x} + \frac{u^3}{2} \frac{\partial^2 \omega_i(p)}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x}. \tag{25}$$

При этом член формулы (24) с $\omega_i(p)\omega_j(p)$ обращается в ноль, а $\sum_{i \leq j} \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} S_{ij}$ не может быть везде тождественно равна нулю, т.к. $J^{(4)}$ является формой Шоттки.

Таким образом, $f^{(5)}(\tau_s)$ не обращается в ноль тождественно. Из этого следует, что

$$\vartheta^{(5)}_5 \not\equiv G^{(5)}_5 \tag{26}$$

при ограничении на $\mathcal{J}_5$.

Из этого утверждения сделан вывод о том, что анзацы Грушевского и ОП-СМЮ не совпадают для $g = 5$.

Из работы М. Матоне и Р. Вольпато следует, что анзацы ОПСМЮ и Грушевского для рода 5 не удовлетворяют условию обращения в ноль двухточечной функции в роде 4, которое должно иметь место согласно теоремам о неперенормируемости.

В главе 3 диссертации предложен новый анзац для суперструнных мер в роде 5, который удовлетворяет этому условию. Он имеет следующий вид:

$$\boxed{\tilde{\Xi}^{(5)} := \Xi^{(5)}_{OPSMY} - \frac{222647008}{217} J^{(5)} + \frac{77245568}{17} f^{(5)}} \tag{27}$$

Кроме этого, доказано, что из модулярных форм, используемых для построения анзацев Грушевского и ОПСМЮ, невозможно построить анзац для суперструнных мер в роде 6, который удовлетворял бы всем условиям.

В **главе 4** рассматривается действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля. Представлена формулировка данного действия в виде суммы по графам. Найдено представление для симметрии обращения для фробениусовых многообразий через действие определенного элемента группы Гивенталя.

Свободную энергию для когомологической теории поля можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{F} = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{g-1} \mathcal{F}_g, \tag{28}$$

$$\mathcal{F}_g = \sum \frac{\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2)\cdots\tau_{d_k}(\alpha_k)\rangle_g}{|\mathrm{Aut}((\alpha_i, d_i)_{i=1}^k)|} t^{d_1,\alpha_1}\cdots t^{d_k,\alpha_k}, \tag{29}$$

Корреляторы $\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2)\cdots\tau_{d_k}(\alpha_k)\rangle_g$ выражаются через числа пересечений на пространстве модулей римановых поверхностей, а $t^{d,\alpha}$ – формальные переменные.

Рассмотрим последовательность операторов $r_l \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $l \geq 1$, такую что операторы с четными индексами симметрические, а с нечетными индексами кососимметрические. Будем использовать обозначение $(r_l z^l)\hat{}$ для следующего дифференциального оператора:

$$(r_l z^l)^{\wedge} := -(r_l)_{\mathbf{1}}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t^{l+1,\mu}} + \sum_{d=0}^{\infty} t^{d,\nu} (r_l)_{\nu}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t^{d+l,\mu}} + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+1} (r_l)^{\mu,\nu} \frac{\partial^2}{\partial t^{i,\mu} \partial t^{l-1-i,\nu}}. \tag{30}$$

Действие группы Гивенталя на формальных рядах определяется через действие следующего дифференциального оператора:

$$\hat{R} := \exp(\sum_{l=1}^{\infty} (r_l z^l)^{\wedge}) \tag{31}$$

Преобразование обращения определяется следующим образом. Пусть имеется фробениусово многообразие M с плоскими координатами $(t^1, \ldots, t^n)$ и потенциалом F. Потенциал F фробениусова многообразия связан со свободной энергией $\mathcal{F}$ соответствующей когомологической теории поля следующим образом:

$$F(t^1, \ldots, t^n) = \mathcal{F}_0(t^{d,\mu})|_{t^{d,\mu}=0 \ \text{ для } \ d>0}$$

где произведено отождествление $t^{\mu} := t^{0,\mu}$. Преобразование обращения состоит из следующей замены координат:

$$\begin{aligned} \hat{t}^1 &= \frac{1}{2} \frac{t_\sigma t^\sigma}{t^n}, \\ \hat{t}^\alpha &= \frac{t^\alpha}{t^n} \text{ для } \alpha \neq 1,\, n, \\ \hat{t}^n &= -\frac{1}{t^n}, \end{aligned} \tag{32}$$

вместе со следующим изменением потенциала и метрики:

$$\hat{F}(\hat{t}) = (t^n)^{-2} \left[F(t) - \frac{1}{2} t^1 t_\sigma t^\sigma \right] = (\hat{t}^n)^2 F + \frac{1}{2} \hat{t}^1 \hat{t}_\sigma \hat{t}^\sigma, \tag{33}$$

$$\hat{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

В главе 4 диссертации доказано, что преобразование обращения представлено следующим преобразованием Гивенталя $\hat{R} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(r_k z^k\right)\hat{}\,\right)$, где

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$r_k = 0, \quad k > 1. \tag{35}$$

Более точно, если $\hat{F}(\hat{t})$ – результат преобразования обращения от $F(t)$, то локальное разложение $\hat{F}(\hat{t})$ в точке $(0, \dots, 0, -1)$ совпадает с составляющей рода 0 без потомков $\hat{R}$-преобразованного потенциала когомологической теории поля, соответствующей локальному разложению $F(t)$ в точке $(0, \dots, 0, 1)$.

Также показано, что данное преобразование Гивенталя соответствует преобразованию Шлезингера для специального дифференциального оператора

$$\Lambda = \partial_z - U - \frac{1}{z}[\Gamma(u), U], \tag{36}$$

где U – матрица канонических координат, а Γ – матрица Дарбу-Егорова.

Кроме того, найдены выражения для деформации гамильтонианов ассоциированной главной интегрируемой иерархии:

$$\hat{\theta}_{\alpha,p}\left(\hat{v}\right) = \left(\exp\left(U\left(v\right)\right)\theta_{\alpha,p}\left(v\right) + \delta_\alpha^n \exp\left(U\left(v\right)\right)\theta_{1,p+1}\left(v\right)\right)\Big|_{v=\hat{v}}. \tag{37}$$

В **заключении** (глава 5) представлены полученные в работе результаты и описано возможное направление дальнейших исследований.

Основные публикации по теме диссертации

1. P. Dunin-Barkowski, A. Morozov and A. Sleptsov, “Lattice theta constants vs Riemann theta constants and NSR superstring measures,” ***JHEP*** **0910** (2009) 072;

2. P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov and A. Stern, “NSR superstring measures in genus 5,” ***Nucl.Phys.B*** **872** (2013) 106–126;

3. P. Dunin-Barkowski, S. Shadrin and L. Spitz, “Givental graphs and inversion symmetry,” ***Lett.Math.Phys.*** **103** (2013) 533–557.