Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Государственный научный центр Российской Федерации –
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики»
Национального исследовательского центра «Курчатовский
институт»

На правах рукописи

Дунин-Барковский Петр Игоревич

Пространства модулей кривых в теории струн и топологических теориях поля

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.–мат. наук
А.Ю. Морозов

Москва 2014

Оглавление

Глава 1

Введение

Теория суперструн была создана для решения таких фундаментальных проблем физики, как проблема построения квантовой теории гравитации, проблема иерархий и проблема объединения взаимодействий. Многие идеи из теории суперструн оказали значительное влияние на различные области математики.

В диссертации рассматривается вопрос построения пертурбативных амплитуд в теории суперструн и связанные с этим математические вопросы, а также определенные вопросы, возникающие при изучении топологических теорий поля, связанных с теорией струн.

Основная идея теории струн состоит в замене точечных частиц на одномерные объекты, называемые *струнами*. Различают *открытую* и *замкнутую* теории струн, рассматривающие, соответственно, случаи одномерных объектов с двумя концами и замкнутых петель. Различные наблюдаемые типы частиц при этом происходят из различных квантовых состояний струны. Таким образом, в теории струн, в отличие от Стандартной Модели, имеется ровно один тип фундаментальных объектов. При этом (для случая теории суперструн), струнные состояния естественным образом включают в себя не только все типы частиц, имеющиеся в Стандартной Модели, но и гравитоны, попытки добавления которых в саму Стандартную Модель так и не увенчались успехом. Помимо гипотетической роли теории струн как *теории всего*, которая бы описывала все наблюдаемые частицы и фундаментальные взаимодействия, теория струн также важна как инструмент, с помощью которого были получены различные интересные результаты в квантовой теории поля и других областях теоретической физики и математики.

Для самосогласованности в теории струн требуется наличие большого числа измерений пространства-времени (26 для бозонной теории струн, и 10 для теории суперструн).

В теории струн отсутствуют вершинные вклады и нет ультрафиолетовых расходимостей. При введении суперсимметрии явным образом исчезают инфракрасные расходимости. Теория струн рассматривается в первично-квантованном формализме; были определенные попытки разработки вторично-квантованного формализма для теории струн (т.н. *струнной теории поля*) [5, 12, 80, 98, 110], но на данный момент построение такого формализма не закончено.

Вместо мировых линий у частиц, для струн имеем *мировые поверхности*. В первично-квантованном формализме рассматриваются вложения мировых поверхностей в пространство-время (также называемое таргет-пространством). Можно рассматривать отображения, осуществляющие вложение, как двумерные поля на мировой поверхности.

Бозонные струны. Сначала напомним некоторые факты о бозонной теории струн.

В бозонной теории струн рассматриваются вложения римановых поверхностей в пространство-время.

Действием для струны является просто площадь ее поверхности. В подходе Полякова (см. [97]) оно записывается следующим образом:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{h}\, h^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x^\nu \tag{1.1}$$

Здесь T – натяжение струны, σ – координаты на мировой поверхности, $h_{\alpha\beta}$ – внутренняя метрика на мировой поверхности, $\eta_{\mu\nu}$ – метрика на таргет-пространстве, x^μ – отображение, вкладывающее мировую поверхность в таргет-пространство, также воспринимаемое, как поле на мировой поверхности. Таким образом, индексы α и β – двумерные индексы на мировой поверхности, т.е. принимают значения 0, 1, а индексы μ и ν – индексы в таргет-пространстве, т.е. принимают значения $0, \ldots, D-1$, где D – размерность таргет-пространства.

Можно рассматривать получающуюся теорию как двумерную гравитацию на пространствах с различной топологией (т.е. различным количеством ручек). Количество ручек, т.е. род поверхности, соответствует рассматриваемому порядку теории возмущений по константе связи. Далее, также и в случае суперструн, будем иногда говорить "в роде g", имея в виду соответствующий порядок теории возмущений. Струнная амплитуда в порядке g

имеет следующий вид:

$$A_g\left(\Lambda_1,k_1;\ldots;\Lambda_m,k_m\right)=\varkappa^{m+g-2}\int_{\text{род g}}\mathcal{D}x(\sigma^0,\sigma^1)\mathcal{D}h_{\alpha\beta}(\sigma^0,\sigma^1)\,e^{-S}\,\prod_{i=1}^{m}V_{\Lambda_i}(k_i) \tag{1.2}$$

Здесь $\varkappa$ – константа связи; Λ_i соответствуют типам входящих или исходящих частиц, а k_i – их импульсы; V_{Λ_i} – операторы, соответствующие частицам, имеющие вид

$$V_\Lambda(k)=\int d^2\sigma\sqrt{h}W_\Lambda(\sigma^0,\sigma^1)e^{ikx} \tag{1.3}$$

W_Λ специфично для конкретного типа частиц, например для гравитона W имеет следующий вид:

$$W_G^{\mu\nu}=\partial_\alpha x^\mu\partial^\alpha x^\nu \tag{1.4}$$

Заметим, что действие инвариантно относительно общекоординатных и вейлевских преобразований. Это позволяет перейти от бесконечномерного интеграла в (1.2) к конечномерному интегралу по пространству модулей римановых поверхностей $\mathcal{M}_g$. Это было проделано А. Белавиным и В. Книжником [9, 71]. Статсумму в результате можно переписать следующим образом:

$$Z_g=\int_{\mathcal{M}_g}\frac{|d\mu|^2}{(\det\mathrm{Im}\tau)^{13}}\ ,$$

где $d\mu$ – определенная голоморфная $(3g-3,0)$ форма, которая не обращается в ноль нигде на $\mathcal{M}_g$ и имеет полюса второго порядка на границе $\mathcal{M}_g$ по Делиню-Мамфорду, связанные с наличием тахиона; τ – матрица периодов. Явные формулы для $d\mu$ известны только для небольших g, для общего случая известен только факт существования и единственности [8]. Приведем формулы для младших родов (см., например, [90]).

Для рода 1 имеем:

$$Z_1=\int_{\mathcal{M}_1}\frac{1}{(\mathrm{Im}\ \tau)^{14}}\left|\frac{d\tau}{\left(\prod_e^3\theta[e](\tau)\right)^8}\right|^2 \qquad \text{т.е.} \qquad d\mu=\frac{d\tau}{\Pi^8} \tag{1.5}$$

Для рода 2 имеем:

$$Z_2=\int_{\mathcal{M}_2}\frac{1}{\big(\det\left(\mathrm{Im}\ \tau\right)\big)^{13}}\left|\frac{d\tau_{11}d\tau_{12}d\tau_{22}}{\left(\prod_e^{10}\theta[e](\tau)\right)^2}\right|^2 \qquad \text{т.е.} \qquad d\mu=\frac{\prod_{i<j}^2 d\tau_{ij}}{\Pi^2} \tag{1.6}$$

Для рода 3 имеем:

$$Z_3 = \int_{\mathcal{M}_3} \frac{1}{\big(\det(\mathrm{Im}\,\tau)\big)^{13}} \left| \frac{d\tau_{11} d\tau_{12} d\tau_{13} d\tau_{22} d\tau_{23} d\tau_{33}}{\Big(\prod_e^{36} \theta[e](\tau)\Big)^{1/2}} \right|^2 \qquad \text{т.е.} \qquad d\mu = \frac{\prod_{i<j}^3 d\tau_{ij}}{\sqrt{\Pi}} \tag{1.7}$$

В роде 4 матрицы периодов уже не заполняют полностью пространство комплексных симметрических $g \times g$ матриц с положительно определенной мнимой частью (известное также как полупространство Зигеля $\mathcal{H}_g$), а образуют в нем некоторое подмногообразие, называемое локусом якобианов $\mathcal{J}_g$. Выделение локуса якобианов в полупространстве Зигеля является сложной проблемой, называемой *проблемой Шоттки.* Она была решена в общем виде в результате работ И. Кричевера, С. Новикова, Т. Шиоты и других (обзор см., например, в [64, 73]). В роде 4 локус якобианов $\mathcal{J}_4$ выделяется как множество нулей *формы Шоттки* $J^{(4)}(\tau)$. Для струнной меры $d\mu$ тогда имеем (см. [84, 90]):

$$Z_4 = \int_{\mathcal{J}_4} \frac{1}{\big(\det(\mathrm{Im}\,\tau)\big)^{13}} \left| \frac{\prod_{ij\le j}^4 d\tau_{ij}}{J^{(4)}(\tau)} \right|^2, \qquad \text{т.е.} \qquad d\mu = \frac{\prod_{i<j}^4 d\tau_{ij}}{J^{(4)}}. \tag{1.8}$$

Здесь $\dfrac{1}{J^(4)(\tau)}$ понимается как дельта-функция на локусе якобианов.

Суперструны. Теория суперструн получается из теории бозонных струн добавлением дополнительных фермионных полей $\psi^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$ на мировой поверхности таким образом, чтобы было выполнено условие *суперсимметрии.* При этом берется D-мультиплет майорановских фермионов, преобразующихся по векторному представлению группы Лоренца $SO(D-1,1)$. Заметим, что здесь и далее рассматривается подход Невё-Шварца-Рамона (NSR) к описанию суперструн. Существуют также такие подходы к описанию суперструн, как подход Грина-Шварца и подход Берковица.

В конформной калибровке действие дополняется членом

$$-i \int d^2\sigma \bar{\psi}^{\mu,\alpha} \left(\hat{\partial}\right)_\alpha^\beta \psi_{\mu,\beta}. \tag{1.9}$$

Здесь $\hat{\partial} = \rho^\alpha \partial_\alpha$, где ρ^α – двумерные матрицы Дирака. Заметим, что у фермионов ψ индекс α - двумерный спинорный индекс, а индекс μ – D-мерный векторный индекс, нумерующий компоненты мультиплета.

Удобно записывать действие и статсумму через суперполя, рассматривая также в качестве мировой поверхности суперповерхность с двумя дополнительными нечетными координатами (см., например, [26]):

$$Z = \int DE_M{}^A D\Omega_M \delta(T) \int DX^\mu e^{-S}, \tag{1.10}$$

где

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^{2|2}\sigma \, E \, \mathcal{D}_+ X^\mu \mathcal{D}_- X^\mu \,, \qquad E \equiv \operatorname{sdet} E_M{}^A \tag{1.11}$$

Здесь $X^\mu = x^\mu + \theta\psi_+^\mu + \bar\theta\psi_-^\mu + i\theta\bar\theta F^\mu$, $\mu = 0, 1, \cdots, 9$, где θ и $\bar\theta$ – нечетные грассмановы переменные на суперповерхности. Интеграл по метрикам представлен через супердиады $E_M{}^A$ и суперсвязности Ω_M. $\delta(T)$ соответствует наложению условия обращения в ноль кручения.

Фиксацией калибровки можно привести статсумму к виду интеграла по пространству модулей суперповерхностей [26]:

$$Z_g = \int_{s\mathcal{M}_g} |\prod_A dm^A|^2 \int D(B\bar B C \bar C X^\mu) \left| \prod_A \delta(\langle H_A | B \rangle) \right|^2 e^{-S-S_{gh}} \tag{1.12}$$

Поля супердухов $B = \beta + \theta b$, $C = c + \theta\gamma$ имеют $U(1)$ веса $3/2$ и -1 соответственно, с действием

$$S_{gh} = \frac{1}{2\pi} \int d^{2|2} z \, E \Big(B \mathcal{D}_- C + \bar B \mathcal{D}_+ \bar C \Big), \tag{1.13}$$

а $H_A \equiv (H_A)_-{}^z$ – супердифференциалы Бельтрами

$$(H_A)_-{}^z \equiv (-)^{A(M+1)} E_-{}^M \frac{\partial E_M{}^z}{\partial m^A}. \tag{1.14}$$

1.1 Суперструнные меры на пространстве модулей римановых поверхностей

Имеется гипотеза (историю данного вопроса см. в [90]), состоящая в том, что в пертурбативной статсумме для суперструн (1.12) от интеграла по пространству модулей суперповерхностей можно перейти к интегралу по обычному пространству модулей римановых поверхностей.

На данный момент строго доказано, что так можно сделать, для случаев родов 0, 1 и 2. Для случаев рода 0 и 1 с самого начала [61,62] было известно, что эта мера может быть представлена в виде набора модулярных форм на пространстве модулей римановых поверхностей. В серии фундаментальных работ [26–34] Э. Д'Окер и Д. Фонг показали, что это верно и для случая рода 2, а также получили явные выражения для мер через тэта-константы.

Нахождение способа взять в общем виде интеграл по нечетным модулям оказалось очень сложным уже в случае рода 2, как можно видеть из того факта, что Д'Океру и Фонгу потребовалось 20 лет на то, чтобы провести все необходимые вычисления для данного случая. Поэтому был предложен альтернативный подход [4, 9–11, 16, 17, 23, 24, 71, 87–89], в котором вместо явных вычислений были предложены анзацы, основанные на предполагаемых требованиях, которым должна удовлетворять мера.

Если суперструнную меру можно записать в виде меры на пространстве модулей римановых поверхностей $\mathcal{M}_g$, то в g-м порядке теории возмущений формула для статсуммы должна иметь следующий вид [29]:

$$\begin{aligned} Z_g &= \int_{\mathcal{M}_g} (\det \operatorname{Im}(\tau^{(g)}))^{-5} |d\mu(\tau)|^2 \\ d\mu(\tau) &= \sum_m d\mu[m](\tau), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где τ – матрица периодов для римановой поверхности, а сумма берется по четным спин-структурам m на римановой поверхности, или, что то же самое, по четным тэта-характеристикам [6]. Множитель $(\det \operatorname{Im}(\tau))^{-5}$ возникает при взятии интеграла по внутренним импульсам, причем степень в нем соответствует половине критической размерности, как и в случае бозонных струн [25]. $d\mu[m]$ – меры на пространстве модулей $\mathcal{M}_g$.

Была выдвинута гипотеза (обсуждение истории данного вопроса см. в [17]), что НСР-меры $d\mu[m]$ могут быть представлены через модулярные формы на полупространстве Зигеля, как произведение меры Мамфорда $d\mu$, рассматриваемой как мера на локусе якобианов, и некоторых модулярных форм $\Xi[m]$, для каждой характеристики m:

$$d\mu[m] = \Xi[m] d\mu. \tag{1.16}$$

Пространство модулей $\mathcal{M}_g$ можно рассматривать как факторизацию локуса якобианов $\mathcal{J}_g$ по действию модулярной группы $\operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ (определение действия модулярной группы и определение модулярных форм различного веса см. в разделе 2.1). Если представлять $d\mu$ через модулярные формы на полупространстве Зигеля, то, чтобы правая часть формулы (1.15) была корректно определенным интегралом по $\mathcal{M}_g = \mathcal{J}_g / \operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, полная мера (определенная на $\mathcal{J}_g$) должна быть инвариантна относительно действия модулярной группы $\operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Поскольку $\det \operatorname{Im}(\tau)$ преобразуется как модулярная форма веса -2, легко видеть, что все $d\mu[m]$ должны преобразовываться как модулярные формы веса -5 относительно подгрупп $\Gamma[m]$, сопряженных $\Gamma(1,2) \subset \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, подгруппе, которая фиксирует нулевую тэта-характеристику (см. раздел 2.1). Поскольку мера Мамфорда для критической бозонной струны $d\mu$ имеет вес -13, то, таким образом, модулярные формы $\Xi[m]$ должны иметь вес 8.

Условия, которым мера должна удовлетворять, если гипотеза верна, следующие:

1. Функции $\Xi[m]$ являются модулярными формами веса 8 относительно $\Gamma[m]$ при ограничении на локус якобианов (подмножество полупространства Зигеля, образованное матрицами периодов).

2. Формы $\Xi[m]$ должны удовлетворять следующим условиям факторизации на блочно-диагональных матрицах:

$$\Xi^{(g)}_{m\times n}\begin{pmatrix}\tau^{(g-k)} & 0\\ 0 & \tau^{(k)}\end{pmatrix} = \Xi^{(g-k)}_{m}\left(\tau^{(g-k)}\right)\Xi^{(k)}_{n}\left(\tau^{(k)}\right).$$

3. След суперструнной меры (космологическая постоянная) должен обращаться в ноль, т.е.
$$\sum_m \Xi[m] = 0.$$
Кроме того, след $1,2,3$-точечных функций $\sum_m A_k[m]$ должен также обращаться в ноль[1], см. [82, 83].

4. В роде 1 анзац должен давать ранее известный ответ.

Для родов $g \leq 3$ известно [22], что имеется единственный способ удовлетворить данные условия, но в общем случае неизвестно, существуют ли подходящие модулярные формы на полупространстве Зигеля. Отношение $d\mu[m]$ к $d\mu$ может оказаться голоморфно только на локусе якобианов, и быть мероморфным в остальных точках. Локус якобианов имеет положительную коразмерность, начиная с рода 4. Размерность пространства модулярных (относительно интересующих нас подгрупп) форм на локусе якобианов неизвестна для старших родов, поэтому не ясно, приводят ли вышеописанные

[1]Конечно, обращение в ноль следа $2,3$-точечных функций даст условие на $\Xi[m]$ только в случае, если известно, как получать двух- и трехточечные функции из меры. Однако, Матоне и Вольпато недавно предложили, как это делать по крайней мере в некоторых случаях; результаты про двухточечные функции см. [86]. В [85] они показали, что связная часть трехточечной функции для анзаца Грушевского в роде 3 не обрщается в ноль, и привели доводы в пользу того, что она сокращается за счет нсвязной части.

условия к однозначному ответу для форм $\Xi[m]$. Ниже, в разделе 3.5, будет показано, что из известных на данный момент форм невозможно построить анзац, удовлетворяющий всем условиям, начиная с рода 6.

Было предложено два типа анзацев. Сначала С.Л. Каччиатори, Ф. Далла Пьяцца и Б. ван Хеемен предложили в работе [17] анзац для рода 3. Затем, он был замечательным образом обобщен на случаи рода 4 и выше (в предположении, что используемые в нем модулярные формы корректно определены) С. Грушевским в статье [65]. После этого Р. Салвати Манни доказал, что анзац Грушевского корректно определен по крайней мере вплоть до рода 5 в работе [100], после чего Салвати Манни и Грушевский модифицировали исходный анзац для того, чтобы получить обращающуюся в ноль космологическую постоянную в роде 5 в работе [66]. Однако для случая рода 6 на данный момент нет причин полагать, что данный анзац корректно определен, и, кроме того, модификация для обращения в ноль космологической постоянной, аналогичная примененной в роде 5, в случае рода 6 нарушает условие факторизации. Анзац Грушевского строится из функций $G_p^{(g)}$ (также его можно определять через другие функции $\xi_p^{(g)}$), являющимися многочленами по корням тэта-констант (определения данных функций см. в разделе 2.3).

После этого М. Оура, К. Пур, Р Салвати Манни и Д. Юэн (ОПСМЮ) предложили в работе [95] новый анзац, записываемый в терминах решеточных тэта-констант $\vartheta_p^{(g)}$ для 16-мерных самодуальных решеток (определения см. в разделе 2.4). Этот второй анзац, однако, определен только для родов $g \leq 5$.

Оба анзаца в своих окончательных версиях удовлетворяют требованиям 1, 2 и 4, и имеют обращающуюся в ноль космологическую постоянную в родах $1, \ldots, 5$. Однако, М. Матоне и Р. Вольпато в работе [86] показали, что двухточечная функция в роде 4, получаемая вырождением анзаца ОПСМЮ из рода 5, не обращается в ноль, что противоречит условию 3 из списка условий, накладываемых на суперструнные меры. Из результатов, представленных в данной диссертационной работе ниже, в главе 3, следует, что та же самая проблема имеет место и для анзаца Грушевского.

Поскольку два вышеописанных анзаца записаны в различных терминах, через римановы тэта-константы и решеточные тэта-константы соответственно, то даже для случаев $g \leq 4$ было неизвестно, как они соотносятся между собой явным образом, так как не была известна связь между решеточными тэта-константами для шестнадцатимерных самодуальных решеток и римановыми тэта-константами. Результаты, представленные в данной диссертационной работе, решают эту проблему. В главе 2 показано, что $\vartheta_p^{(g)}$ пропорциональна $\xi_p^{(g)}$, т.е. является линейной комбинацией $G_p^{(g)}$, для $0 \leq p \leq 4$ и для любого рода. Также показано, что $\vartheta_5^{(g)}$ совпадает с $G_g^{(g)}$ на локусе якобианов для $g \leq 4$. Из этих результатов следует, что анзацы совпадают вплоть до рода 4 включительно.

В главе 3 показано, что для $g \geq 5$ формы $G_g^{(g)}$ и $\vartheta_5^{(g)}$ не совпадают тождественно на локусе якобианов. Из этого следует, что анзацы ОПСМЮ и Грушевского отличаются для случая рода 5. С использованием того факта, что $\vartheta_5^{(5)} - G_5^{(5)}$ не обращается в ноль тождественно на локусе якобианов, в главе 3 предложен новый анзац для рода 5, а именно следующий:

$$\tilde{\Xi} := \Xi_{OPSMY}^{(5)} - \frac{222647008}{217}\left(\vartheta_6^{(5)} - \vartheta_7^{(5)}\right) + \frac{77245568}{17}\left(\vartheta_5^{(5)} - G_5^{(5)}\right). \quad (1.17)$$

Для данного анзаца доказано, что космологическая постоянная и двухточечная функция в роде 4, получаемая вырождением поверхности, обращаются в ноль тождественно на локусе якобианов.

1.2 Топологическая теория струн и фробениусовы многообразия

Теория струн породила большое количество идей и теорий, которые получили развитие за пределами самой теории струн. Сюда входит и суперсимметрия, на которой основаны теория супер-Янга-Миллса и различные суперсимметричные расширения Стандартной Модели, и различные топологические теории поля. В последнее время очень активно развиваются такие топологические теории, как теория Черна-Саймонса и теория Громова-Виттена.

Топологическая теория струн получается из теории суперструн в результате т.н. *топологического твиста*. Данная конструкция была представлена Э. Виттеном в работе [107] (см. обзор [94]). При этом возможны два варианта топологического твиста, приводящие к т.н. *А-модели* и к т.н. *Б-модели*. Здесь будем рассматривать случай А-модели.

Теория Черна-Саймонса в подходе теории струн возникает как струнная теория поля для открытых струн, оканчивающихся на Д2-бране, оборачивающей некоторое трехмерное лагранжево подмногообразие шестимерного пространства-времени в А-модели топологических струн. Она замечательна тем, что, помимо связи с теорией струн, представляет собой интересный пример топологической квантовой теории поля, а также, как было обнаружено в работах [101, 108], может использоваться для изучения инвариантов узлов. Это направление особенно активно развивается в последнее время. Хотя теория узлов как математическая теория довольно стара и изучалась еще с 19-го века, методы квантовой теории поля позволили достичь в ней множества совершенно новых результатов. Упомянем некоторые из них. За последнее время бурное развитие получили следующие направления: гипотеза объема [36, 69], инварианты Васильева [7, 13, 74], вычисление инвариантов узлов с использованием квантовых групп [99], интеграл Концевича и его связь с ассоциатором Дринфельда [20, 37, 50, 51, 72], а также суперполиномы узлов [43, 45, 60].

Теория Громова-Виттена изучает инварианты кэлеровых многообразий, возникающие при разложении статсуммы топологической теории струн типа A по константе связи. Данные инварианты в общем случае можно определить как числа пересечений следующим образом (см., например [102]).

Пусть X – некоторое компактное кэлерово многообразие. Обозначим за $H^*(X)$ его когомологии. Рассмотрим

$$\alpha^{u,\beta}_{g,n}(v_1,\ldots,v_n) := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}} f^*(u) ev_1^*(v_1)\cdots ev_1^*(v_1), \tag{1.18}$$

линейное отображение $H^*(X)^{\otimes n} \to \mathbb{C}$; оно зависит от $g \geq 0$, $\beta \in H_2(X)$, и $u \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Здесь $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – компактификация Деліня-Мамфорда пространства модулей римановых поверхностей (алгебраических кривых) рода g с n отмеченными точками, а $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ – пространство модулей стабильных отображений кривых рода g с n отмеченными точками в X, таких, что образом фундаментального класса является $\beta \in H_2(X)$. Такие пространства состоят из нескольких неприводимых компонент различной размерности, поэтому интеграл берется по определенному классу в гомологиях $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$, называемому виртуальным фундаментальным классом. Отображение $f\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ сопоставляет стабильному отображению $(C_g, x_1, \ldots, x_n, \phi\colon C_g \to X)$ стабилизацию исходной кривой с отмеченными точками. Отображение $ev_i\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta) \to X$, $i = 1,\ldots,n$ отображает $(C_g, x_1, \ldots, x_n, \phi\colon C_g \to X)$ в $\phi(x_i)$. Так определенные $\alpha^{u,\beta}_{g,n}$ являются симплектическими инвариантами X.

Теорию Громова-Виттена можно обобщить до т.н. *когомологической теории поля*, если рассматривать вместо когомолигий $H^*(X)$ заданного многообразия X просто некоторое линейное пространство V, и перенести интеграл с пространства модулей отображений кривых на пространство модулей кривых. Более точно, когомологическая теория поля задается линейным пространством V и набором классов когомологий $\alpha_{g,n} \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, V^{\otimes n})$ на пространстве модулей кривых со значениями в тензорных степенях V, удовлетворяющих определенным условиям, описанным ниже.

Определим следующие отображения: $\pi\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – проекцию, соответствующую забыванию точки, $\sigma\colon \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – отображение, склеивающее две отмеченные точки на кривой, и $\rho\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, $g_1 + g_2 = g$, $n_1 + n_2 = n$, – отображение, склеивающее отмеченную точку на одной кривой с отмеченной точкой на другой кривой.

Пусть $\langle e_1, \ldots, e_s \rangle$ – элементы базиса V, и на V задано невырожденное скалярное произведение η. Тогда каждый $\alpha_{g,n}$ должен удовлетворять следующим условиям:

1. $\alpha_{g,n}$ эквивариантен относительно действия симметрической группы S_n на отмеченных точках и, одновременно, компонентах $V^{\otimes n}$.

2. $\sigma^*\alpha_{g,n} = \left(\alpha_{g-1,n+2}, \eta^{-1}\right)$; $\rho^*\alpha_{g,n} = \left(\alpha_{g_1,n_1+1} \cdot \alpha_{g_2,n_2+1}, \eta^{-1}\right)$ (в обоих случая со скалярным произведением сворачиваются две компоненты V, соответствующие двум склеиваемым точкам).

3. $(\alpha_{0,3}, e_1 \otimes e_i \otimes e_j) = \eta_{ij}$, $\pi^*\alpha_{g,n} = (\alpha_{g,n+1}, e_1)$ (с e_1 сворачивается компонента V, соответствующая забываемой точке).

Легко видеть, что теория Громова-Виттена является частным случаем когомологической теории поля.

Определим *корреляторы* когомологической теории поля следующим образом:

$$\langle \tau_{d_1}(e_{i_1}) \cdots \tau_{d_n}(e_{i_n}) \rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \prod_{j=1}^{n} \psi_j^{d_j} \cdot \left(\alpha_{g,n}, \otimes_{j=1}^{n} e_{i_j}\right) \tag{1.19}$$

Из них строится свободная энергия (также часто в литературе называемая *потенциалом*) когомологической теории поля:

$$\mathcal{F} = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} \mathcal{F}_g, \tag{1.20}$$

$$\mathcal{F}_g = \sum \frac{\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2) \cdots \tau_{d_k}(\alpha_k) \rangle_g}{|\mathrm{Aut}((\alpha_i, d_i)_{i=1}^k)|} t^{d_1,\alpha_1} \cdots t^{d_k,\alpha_k}, \tag{1.21}$$

$\mathcal{F}$ является формальным рядом по бесконечному набору формальных переменных $t^{d,\alpha}$ и переменной $\hbar$. Заметим, что $\hbar$ здесь играет роль константы связи, а не постоянной Планка, но такое (не вполне корректное) обозначение общепринято в данной теории, поэтому будем его придерживаться. Члены с $t^{d,\alpha}$ для $d > 0$ называются *потомками*. Для случая теории Громова-Виттена для трехмерного лагранжева подмногообразия шестимерного пространства-времени $\mathcal{F}$ представляет из себя свободную энергию соответствующей топологической теории струн типа А.

Определим формальный ряд, получаемый при ограничении на род ноль и отбрасывании потомков:

$$F(t^1, \ldots, t^n) := \mathcal{F}_0(t^{d,\mu})|_{t^{d,\mu}=0 \quad \text{для} \quad d>0}$$

где произведено отождествление $t^\mu := t^{0,\mu}$. Оказывается, что функция F в общем случае удовлетворяет уравнению Виттена-Дайкхраафа-Верлинде-Верлинде (ВДВВ) и является потенциалом некоторого *фробениусова многообразия* (см., например, [81]). Теория фробениусовых многообразий была развита Б. Дубровиным в работах [38, 39] и других, как инструмент для изучения топологических теорий поля в роде ноль. Оказалось, что фробениусовы многообразия являются довольно универсальными структурами, у которых есть много возникающих естественным образом примеров. В частности, фробениусовы многообразия можно использовать для классификации (бездисперсионных) бигамильтоновых иерархий гидродинамического типа [40, 41]. На данный момент имеется целый набор монографий о фробениусовых многообразиях, см. [39, 68, 81].

В работах [57, 79, 105] А. Гивенталь, Й. ван де Лер и А. Лосев совместно с И. Полюбиным, соответственно, независимо открыли, что существует действие петлевой группы $GL(n)$ на пространстве n-мерных фробениусовых многообразий, см. также [19]. Гивенталь предложил процедуру квантования данного действия. Проквантованное действие, предложенное Гивенталем в работе [57], будем называть *действием группы Гивенталя*. Данное действие можно выразить как действие дифференциального оператора определенного вида на формальных рядах по $t^{d,\alpha}$. Основной результат работы [54] состоит в том, что действие группы Гивенталя можно распространить на когомологические теории поля, так, что результатом действия произвольного элемента группы Гивенталя на когомологическую теорию поля снова является когомологическая теория поля. В диссертации в главе 4 описано представление данного действия в виде суммы по графам.

Одним из важнейших результатов в теории Громова-Виттена является предложенная Гивенталем формула [57, 58] (доказательство которой для общего случая следует из работы Телемана [104]), позволяющая для произвольной теории Громова-Виттена (или когомологической теории поля) выразить статсумму данной теории через действие определенного элемента группы Гивенталя на произведение нескольких тау-функций Концевича-Виттена (т.е. тау-функций иерархии Кортевега-де Фриза). При этом единственная информация, которая используется для построения дифференциального оператора, осуществляющего это действие, – это фробениусов потенциал F. Таким образом, формула Гивенталя эффективно восстанавливает полную информацию когомологической теории поля из информации рода ноль без потомков. Из этого, в частности, следует, что когомологические теории поля естественным образом находятся в взаимно-однозначном соответствии с локальными полупростыми фробениусовыми многообразиями. См. также работы [56, 103].

В настоящее время действие группы Гивенталя играет одну из наиболее важных ролей в теории фробениусовых многообразий (и, в частности, в теории Громова-Виттена) и используется в большинстве известных приложений данной теории. Приложения включают в себя нахождение новых связей между теорией Громова-Виттена и теорией Фана-Ярвиса-Руана-Виттена и интегрируемыми иерархиями, формулировки гипотезы о крепантных разрешениях, зеркальную симметрию, общие свойства дисперсионных иерархий Дубровина-Жанга, связь гомотопических алгебр Баталина-Вилковысского и теории Бершадского-Чекотти-Оогури-Вафы, и многое другое.

В работе автора совместно с Н.Орантэном, С.Шадриным и Л.Спитцем [48] была установлена связь между когомологическими теориями поля и *топологической рекурсией на спектральных кривых*. Теория топологической рекурсии на спектральных кривых присходит из матричных моделей [2, 3, 18] и была для общего случая разработана в работе [53]. Она удивительным образом обобщает свойства различных, казалось бы, не связанных между собой объектов, таких как объемы Вейля-Петерсона, числа Гурвица и других. В работе [48] показано, что произвольной когомолоческой теории поля однозначным образом соответствует некоторая локальная спектральная кривая, для которой формы, получаемые топологической рекурсией на ней, совпадают со свободной энергией для когомологической теории поля при определенной замене переменных. Следствия данного факта еще предстоит изучать, но, например, из него следует новое доказательство гипотезы Бушара-Мариньо и формулы Экедала-Ландо-Шапиро-Вайнштена (ELSV) [44]. Интересным вопросом также является исследование квантовых спектральных кривых [1, 35, 42, 47].

В работе [39] Дубровин исследовал различные симметрии фробениусовых многообразий, и, в частности, обнаружил нетривиальную дискретную симметрию, названную им *симметрией обращения*, связанную с симметриями Шлезингера для уравнения ВДВВ. В диссертации в главе 4 показано, что данная симметрия замечательным образом соответствует действию определенного элемента группы Гивенталя, имеющего очень простой вид.

1.3 Цель и задачи

Целью диссертационной работы является решение различных вопросов, связанных с построением пертурбативных амплитуд в теории суперструн и относящихся к ним математических проблем, а также исследование действия группы Гивенталя на когомологических теориях поля и нетривиальных симметрий фробениусовых многообразий.

В рамках поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

- определение соотношений между решеточными тэта-рядами для шестнадцатимерных самодуальных решеток и тэта-константами Римана;
- явное сравнение анзацев Грушевского и Оуры-Пура-Салвати Манни-Юэна для суперструнных мер;
- получение анзаца для суперструнных мер в роде 5, который бы удовлетворял всем условиям, накладываемым на суперструнные меры;
- представление действия группы Гивенталя на когомологических теориях поля в виде суммы по графам;
- нахождение выражения для симметрии обращения для фробениусовых многообразий через действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля.

1.4 Краткое содержание диссертации

Во введении дана общая характеристика диссертационной работы: актуальность темы, поставленные задачи.

В **главе 2** рассмотрены анзацы для суперструнных мер, предложенные Грушевским и Оурой-Пуром-Салвати Манни-Юэном. Найдены выражения для решеточных тэта-рядов шестнадцатимерных самодуальных решеток, из которых строится анзац ОПСМЮ, через римановы тэта-константы, на которых основан анзац Грушевского. С использованием этого результата явным образом показано, что данные два анзаца совпадают для $g \leq 4$.

В **главе 3** рассматриваются суперструнные меры в роде 5. Доказано, что формы $G_5^{(5)}$ и ϑ_5, которые в роде 5 используются при построении анзацев Грушевского и ОПСМЮ соответственно, не совпадают тождественно на локусе якобианов (хотя в случае всех более низких родов совпадение $G_g^{(g)}$ и ϑ_5 на локусе якобианов имеет место). Из этого результата делается вывод о том, что анзацы Грушевского и ОПСМЮ не совпадают для $g = 5$. Предложен новый анзац для рода 5, который, в отличие от анзацев Грушевского и ОПСМЮ, удовлетворяет не только условию факторизации и обращения в ноль космологической постоянной, но и условию обращения в ноль двухточечной функции в роде 4, которое должно иметь место согласно теоремам о неперенормируемости.

В **главе 4** рассматривается действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля. Представлена формулировка данного действия в виде суммы по графам. С использованием данной формулировки доказано, что симметрия обращения для фробениусовых многообразий представляется в виде действия некоторого определенного элемента группы Гивенталя. Показано, что действие данного элемента группы Гивенталя порождает преобразование Шлезингера для ассоциированного специального дифференциального уравнения. Найдены выражения для деформации гамильтонианов ассоциированной главной интегрируемой иерархии под действием данного элемента группы Гивенталя.

В заключении представлены полученные результаты.

1.5 Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Явным образом продемонстрировано совпадение двух известных анзацев для суперструнных мер (анзаца Грушевского и анзаца ОПСМЮ) вплоть до четвертого порядка теории возмущений. Для этого найден способ выражения решеточных тэта-констант для 16-мерных самодуальных решеток через римановы тэта-константы.

- Показано, что анзацы Грушевского и ОПСМЮ не совпадают в пятом порядке теории возмущений.

- Предложен новый анзац для суперструнных мер в пятом порядке теории возмущений, удовлетворяющий (в отличие от ранее известных анзацев) всем условиям, накладываемым на суперструнные меры, в том числе условию обращения в ноль двухточечной функции.

- Показано, что с использованием известных на данный момент модулярных форм невозможно построить анзац для суперструнных мер в шестом порядке теории возмущений, который бы удовлетворял всем условиям.

- Получено выражение для симметрии обращения, имеющей место для определенного класса топологических теорий поля, связанных с теорией суперструн, через действие элемента группы Гивенталя.

- Найдены выражения для гамильтонианов ассоциированной главной интегрируемой иерархии, получаемых в результате действия элемента группы Гивенталя, соответствующего симметрии обращения. Также установлена связь с преобразованиями Шлезингера.

По теме диссертационного исследования в ведущих реферируемых журналах опубликованы статьи [46, 49, 52].

Благодарности

Я хотел бы особо поблагодарить моего научного руководителя А.Ю.Морозова за постановку интересных задач и разъяснения научных вопросов. Я очень признателен ему за помощь, поддержку и внимание к моей работе.

Я выражаю благодарность соавторам по совместным работам М.Казаряну, А.Миронову, М.Мулазе, П.Норбури, Н.Орантэну, А.Пополитову, А.Слепцову, А.Смирнову, Л.Спитцу, Г.Шабату, С.Шадрину и А.Штерну,
а также признательность за полезные обсуждения и разъяснения научных вопросов В.Альбе, Н.Амбург, А.Анохиной, С.Апенко, С.Артамонову, Э.Ахмедову, Ф.Бурде, А.Буряку, Д.Васильеву, Б.Воронову, Д.Галахову, С.Грушевскому, В.Диесперову, В.Долотину, И.Ждановскому, А.Забродину, Е.Крейнес, И.Кричеверу, С.Локтеву, А.Лосеву, В.Лосякову, А.Маршакову, Анд.Морозову, П.Пушкарю, Л.Рыбникову, Ю.Чеканову, Л.Чехову и Ш.Шакирову. Я также хотел бы поблагодарить Е.Суслову за поддержку и помощь.

Глава 2

Суперструнные меры в родах $g \leq 4$

Данная глава посвящена рассмотрению двух известных на данный момент анзацев для суперструнных мер для случая родов $g \leq 4$. Впервые получены явные соотношения между решеточными тэта-константами для шестнадцатимерных самодуальных решеток и римановыми тэта-константами, из которых строятся данные анзацы. С использованием этих соотношений показано явным образом, что анзацы совпадают для $g \leq 4$.

2.1 Модулярные формы

Как более подробно описано ниже, в разделе 2.2, суперструнные меры предполагается выражать через модулярные формы на полупространстве Зигеля. Определим здесь соответствующие понятия.

Обозначим за $\mathcal{H}_g$ полупространство Зигеля, т.е. множество комплексных симметрических $g \times g$-матриц с положительно определенной мнимой частью. Кроме того, обозначим за $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ симплектическую группу порядка $2g$ над $\mathbb{Z}$, которую будем также называть *модулярной группой* Γ_g. Модулярная группа действует на полупространстве Зигеля модулярными преобразованиями, которые определены следующим образом: пусть $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$. Тогда положим

$$\gamma \circ \tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}, \qquad \tau \in \mathcal{H}_g \tag{2.1}$$

Можно также определить действие данной группы на функциях на полупространстве Зигеля. Действие на функциях определяется следующим образом (для заданного k):

$$(f|_k\gamma)(\tau) := \det(C\tau + D)^{-k} f\left(\gamma \circ \tau\right). \tag{2.2}$$

Хотя, например, для пространства $\mathcal{H}_g$ индекс g не несет, вообще говоря, смысл рода поверхности, все равно будем для удобства во всех случаях называть g родом.

Тэта-характеристики – это элементы $\mathbb{F}_2^{(2g)}$, которые будем обозначать за m или записывать как $\begin{bmatrix}\epsilon\\ \delta\end{bmatrix}$, где $\epsilon, \delta \in \mathbb{F}_2^g$. В литературе они также иногда называются полуцелыми характеристиками, чтобы отличать их от рациональных характеристик общего вида, которые используются в других случаях. Будем рассматривать $\mathbb{F}_2$ как модуль над $\mathbb{C}$ с естественным произведением $\bar{1} \cdot z = z$, $\bar{0} \cdot z = 0$.

Тэта-характеристики называются четными, если скалярное произведение $\epsilon \cdot \delta$ четно, и нечетными в противном случае. Когда надо подчеркнуть, что рассматривается четная характеристика, будем иногда использовать для нее обозначение e. Всего имеется $N_{even} = 2^{g-1}(2^g + 1)$ четных характеристик в роде g.

Для тэта-характеристики $m = \begin{bmatrix}\epsilon\\ \delta\end{bmatrix}$, $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_g)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$ введем обозначения $m^* = \epsilon_1$, $m_* = \delta_1$, поскольку данные компоненты часто встречаются в разложениях Фурье-Якоби.

Модулярная группа также действует на тэта-характеристики следующим образом: для элемента γ модулярной группы, имеющего описанный выше блочный вид, положим (с обычным матричным умножением и сложением над $\mathbb{F}_2$)

$$\gamma[m] := \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{bmatrix}\epsilon\\ \delta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{diag}(CD^T)\\ \mathrm{diag}(AB^T)\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Обозначим за $\Gamma(1,2)_g$ подгруппу Γ_g, которая оставляет неподвижной нулевую характеристику при вышеописанном действии. Тогда можно обозначать подгруппы модулярной группы, сопряженные $\Gamma(1,2)_g$,
тэта-характеристиками. Для заданной характеристики m определим $\Gamma[m]_g = \gamma\Gamma(1,2)_g\gamma^{-1}$, если $\gamma[0] = m$.

Голоморфная функция f на полупространстве Зигеля $\mathcal{H}_g$ называется модулярной формой веса k относительно некоторой подгруппы $G \subset \Gamma_g$, если выполнено следующее:

$$\forall \gamma \in G, \quad (f|_k\gamma) = f. \tag{2.4}$$

Пусть C – риманова поверхность рода g. Выберем базис в группе голономий $H_1(C, \mathbb{Z})$. Тогда можно определить матрицу периодов $\tau \in \mathcal{H}_g$ кривой C. Подмножество $\mathcal{J}_g \subset \mathcal{H}_g$ всех возможных матриц периодов называется локусом якобианов, причем $\mathcal{J}_g \subsetneq \mathcal{H}_g$ для $g \geq 4$. Будем обозначать за ω_i i-й голоморфный дифференциал в базисе, соответствующем матрице периодов. Также будем использовать отображение Абеля-Якоби A, получаемое с использованием того же базиса, и введем следующее обозначение: $A_{pq} := A(p) - A(q)$. Подробности см., например, в [63].

2.2 Задача нахождения суперструнных мер

В данном разделе рассмотрим математическую задачу нахождения суперструнных мер в рамках гипотезы модулярных форм [4,11,23,87–89].

Суперструнные меры в роде g, представляют собой набор мер $\{d\mu_e\}$ на пространстве модулей алгебраических кривых рода g. Здесь индекс e соответствует определенным выше *четным характеристикам*, определяющим граничные условия для фермионных полей на кривой [61].

На пространстве модулей имеется некоторая выделенная мера – *мера Мамфорда* $d\mu$ [4,9,11,23,87–89,93]. Ее также можно рассматривать как меру на локусе якобианов.

В работах [4,9,11,23,87–89] было предложено выражать суперструнные меры в следующем виде:

$$d\mu_e = \Xi_e d\mu, \tag{2.5}$$

где Ξ_e – некоторые функции на локусе якобианов в полупространстве Зигеля, удовлетворяющие определенным условиям.

Условия таковы:

1. Ξ_e должны быть модулярными формами веса 8 относительно подгруппы Γ_e модулярной группы.

2. Ξ_e должны удовлетворять следующему *условию факторизации*:

$$\Xi^{(g)}[e]\begin{pmatrix} \tau^{(g_1)} & 0 \\ 0 & \tau^{(g-g_1)} \end{pmatrix} = \Xi^{(g_1)}_{e_1}\left(\tau^{(g_1)}\right)\Xi^{(g-g_1)}_{e/e_1}\left(\tau^{(g-g_1)}\right) \tag{2.6}$$

3. След Ξ (космологическая постоянная) должен обращаться в ноль, т.е.

$$\sum_e \Xi[e] = 0. \tag{2.7}$$

Кроме того, след 1, 2, 3-точечных функций $\sum_e A_k[e]$ должен также обращаться в ноль.

4. Для случая рода 1 должен воспроизводиться ранее известный ответ [61]:

$$\Xi_e^{(1)} = \theta^4[e] \prod_{e'}^{3} \theta[e']^4 = \theta^{16}[e] - \frac{1}{2}\theta^8[e] \left(\sum_{e'} \theta^8[e'] \right) \tag{2.8}$$

Здесь обозначение $\theta[e]\,(\tau)$ соответствует римановым тэта-константам (см. раздел 2.3).

Можно пытаться угадать суперструнные меры, исходя из того, что они должны удовлетворять данным условиям, вместо того, чтобы вычислять их из первопринципов. Если бы оказалось, что существует несколько различных наборов Ξ_e для некоторого рода, которые бы удовлетворяли всем условиям, то на этом пути возникла бы проблема. Однако ситуация пока прямо противоположная: имеется два предложенных анзаца для $g \geq 5$, и никаких предложенных ответов для $g \geq 6$. Ниже показано, что два упомянутых анзаца совпадают для $g \leq 4$ и отличаются для $g = 5$. При этом, из работы [86] известно, что для $g = 5$ они не удовлетворяют всем условиям. Можно, однако, как предложено ниже, взять определенную их линейную комбинацию, которая будет удовлетворять всем условиям.

В двух следующих разделах описаны упомянутые два анзаца.

2.3 Тэта-функции Римана и анзац Грушевского

Определим *тэта-функции Римана.* Пусть $m = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix}$ – тэта-характеристика, которая в формуле ниже рассматривается как вектор из $\mathbb{C}^{2g}$, тогда

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} (z, \tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \left\{ \pi i \left(n + \frac{1}{2}\epsilon \right)^t \tau \left(n + \frac{1}{2}\epsilon \right) + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\epsilon \right)^t \left(z + \frac{1}{2}\delta \right) \right\}. \tag{2.9}$$

Тэта-функции Римана, в которых положено тождественно $z = 0$, называются *тэта-константами* Римана (таким образом, тэта-константы Римана являются функциями от τ). Тэта-константы Римана с нечетными характеристиками тождественно равны нулю. Ниже будем также использовать обозначение $\theta_m := \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} (0, \tau)$.

Оказывается, что из римановых тэта-констант удобно строить модулярные формы на полупространстве Зигеля. В частности, тэта-константы преобразуются под действием модулярных преобразований $\gamma \in \Gamma(1, 2)$ следующим образом:

$$\theta \left[\begin{array}{c} D\vec{\delta} - C\vec{\varepsilon} \\ -B\vec{\delta} + A\vec{\varepsilon} \end{array} \right] (\gamma\tau) = \zeta_\gamma \det\left(C\tau + D\right)^{1/2} \times$$
$$\exp\left(\frac{\pi i}{4}\left(2\vec{\delta}^T B^T C\vec{\varepsilon} - \vec{\delta}^T B^T D\vec{\delta} - \vec{\varepsilon}^T A^T C\vec{\varepsilon}\right)\right) \theta \left[\begin{array}{c} \vec{\delta} \\ \vec{\varepsilon} \end{array} \right] (\tau)\,, \quad (2.10)$$

где ζ_γ – некоторый корень восьмой степени из единицы, зависящий только от γ. Легко видеть, что $\theta^{16}[0]$ является модулярной формой веса 8 относительно $\Gamma\,(1,2)$. Сумма $\theta^{16}[e]$ по всем четным характеристикам, таким образом, будет модулярной формой веса 8 относительно всей модулярной группы. Обозначение [0] соответствует нулевой характеристике, т.е. характеристике, для которой все элементы обоих векторов $\vec{\delta}$ и $\vec{\varepsilon}$ нулевые.

Для произвольного рода анзац Грушевского можно выразить через следующие комбинации тэта-констант [22, 90] (для краткости характеристики в правой части записаны в виде индексов)

$$\begin{aligned}
&\xi_0^{(g)}[e] = \theta_e^{16}, \\
&\xi_1^{(g)}[e] = \theta_e^{8} \sum_{e_1}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{8}, \\
&\xi_2^{(g)}[e] = \theta_e^{4} \sum_{e_1,e_2}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{4}\theta_{e+e_2}^{4}\theta_{e+e_1+e_2}^{4}, \\
&\xi_3^{(g)}[e] = \theta_e^{2} \sum_{e_1,e_2,e_3}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{2}\theta_{e+e_2}^{2}\theta_{e+e_3}^{2}\theta_{e+e_1+e_2}^{2}\theta_{e+e_1+e_3}^{2}\theta_{e+e_2+e_3}^{2}\theta_{e+e_1+e_2+e_3}^{2}, \\
&\quad \ldots
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\xi_p^{(g)}[e] = \sum_{e_1,\ldots,e_p}^{N_e} \left\{ \theta_e \cdot \left(\prod_i^p \theta_{e+e_i}\right) \cdot \left(\prod_{i<j}^p \theta_{e+e_i+e_j}\right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{i<j<k}^p \theta_{e+e_i+e_j+e_k}\right) \cdot \ldots \cdot \theta_{e+e_1+\ldots+e_p} \right\}^{2^{4-p}}$$

следующим образом:

$$\Xi^{(g)}[0] = \sum_{p=0}^{g} h_p^{(g)} \xi_p^{(g)}[0], \quad (2.12)$$

где

$$h_p^{(g)} = (-1)^p \cdot 2^{\frac{(g-p)^2-(g+p)}{2}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{p} \left(2^i - 1\right) \prod_{i=1}^{g-p} \left(2^i - 1\right) \right)^{-1} \tag{2.13}$$

Остальные $\Xi[e]$ получаются подстановкой e вместо 0 в $\xi[0]$. Формула (2.13) становится более компактной, если ее записать через т.н. 2-факториалы (определение q-факториалов и q-биномиальных коэффициентов можно найти, например, в [92]):

$$h_p^{(g)} = \frac{(-1)^p}{[p]_2![g-p]_2!} \cdot 2^{\frac{(g-p)^2-(g+p)}{2}} \tag{2.14}$$

В явном виде первые пять форм выглядят следующим образом (под ξ_p без характеристики подразумевается $\xi_p[0]$):

$$\Xi^{(1)}[0] = \xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_1, \tag{2.15}$$

$$\Xi^{(2)}[0] = \frac{2}{3}\,\xi_0 - \frac{1}{2}\,\xi_1 + \frac{1}{12}\,\xi_2, \tag{2.16}$$

$$\Xi^{(3)}[0] = \frac{8}{21}\,\xi_0 - \frac{1}{3}\,\xi_1 + \frac{1}{12}\,\xi_2 - \frac{1}{168}\,\xi_3, \tag{2.17}$$

$$\Xi^{(4)}[0] = \frac{64}{315}\,\xi_0 - \frac{4}{21}\,\xi_1 + \frac{1}{18}\,\xi_2 - \frac{1}{168}\,\xi_3 + \frac{1}{5040}\,\xi_4, \tag{2.18}$$

$$\Xi^{(5)}[0] = \frac{1024}{9765}\,\xi_0 - \frac{32}{315}\,\xi_1 + \frac{2}{63}\,\xi_2 - \frac{1}{252}\,\xi_3 + \frac{1}{5040}\,\xi_4 - \frac{1}{312480}\,\xi_5 \tag{2.19}$$

Можно также использовать т.н. базис Грушевского [65, 90]:

$$\begin{aligned}
&G_0^{(g)}[e] = \varkappa_0\,\theta_e^{16}, \\
&G_1^{(g)}[e] = \varkappa_1\,\theta_e^{8} \sum_{e_1 \neq 0}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{8}, \\
&G_2^{(g)}[e] = \varkappa_2\,\theta_e^{4} \sum_{\text{лин. нез.}\, e_1, e_2}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{4}\theta_{e+e_2}^{4}\theta_{e+e_1+e_2}^{4}, \\
&G_3^{(g)}[e] = \varkappa_3\,\theta_e^{2} \sum_{\text{лин. нез.}\, e_1, e_2, e_3}^{N_e} \theta_{e+e_1}^{2}\theta_{e+e_2}^{2}\theta_{e+e_3}^{2}\theta_{e+e_1+e_2}^{2}\theta_{e+e_1+e_3}^{2}\theta_{e+e_2+e_3}^{2}\theta_{e+e_1+e_2+e_3}^{2}, \\
&\quad \ldots
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$G_p^{(g)}[e] = \varkappa_p \sum_{\text{лин. нез.}\, e_1,\ldots,e_p}^{N_e} \left\{ \theta_e \cdot \left(\prod_i^p \theta_{e+e_i} \right) \cdot \left(\prod_{i<j}^p \theta_{e+e_i+e_j} \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{i<j<k}^p \theta_{e+e_i+e_j+e_k} \right) \cdot \ldots \cdot \theta_{e+e_1+\ldots+e_p} \right\}^{2^{4-p}}$$

Сумма берется по всем наборам из линейно-независимых характеристик. Коэффициенты $\varkappa_p$ определяются следующим образом:

$$\varkappa_p := \left(2^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^p \left(2^i - 1\right) \right)^{-1} \tag{2.21}$$

Также можно определять $G_p^{(g)}$ следующим образом. Пусть $V \subset \mathbb{F}_2^{(2g)}$ – некоторый набор характеристик рода g. Тогда определим

$$P(V) := \prod_{m \in V} \theta_m \,. \tag{2.22}$$

Обозначим за $\mathcal{S}_p^{(g)}$ множество всех p-мерных линейных подпространств $\mathbb{F}_2^{(2g)}$. Определим

$$G_p^{(g)} := \sum_{V \in \mathcal{S}_p^{(g)}} P(V)^{2^{4-p}}. \tag{2.23}$$

Заметим, что данное определение эквивалентно представленному выше.

Формы $G_p^{(g)}$, так же как и формы $\xi_p^{(g)}$, являются модулярными формами веса 8 относительно $\Gamma(1,2)_g$, по крайней мере, для $g \leq 4$. Для $g \geq 5$ в выражениях начинают возникать корни, но в работе [100] показано, что для $g = 5$ при ограничении на локус якобианов данные функции по прежнему являются модулярными формами. Для $g \geq 6$ статус аналогичного утверждения неизвестен.

Связь между двумя базисами такова:

$$G_p^{(g)} = \sum_{k=0}^p (-1)^{k+p} \cdot 2^{\frac{k(k-2p+1)}{2}} \cdot \left(\prod_{i=1}^k (2^i - 1) \prod_{i=1}^{p-k} (2^i - 1) \right)^{-1} \xi_k^{(g)}, \tag{2.24}$$

где выражение $\prod_{i=1}^k (2^i - 1)$ принимается равным 1 для $k = 0$.

Выражения для $\Xi^{(g)}[0]$ записываются в терминах базиса Грушевского как

$$\Xi^{(g)}[0] = \sum_{p=0}^g f_p^{(g)} G_p^{(g)}[0], \tag{2.25}$$

где

$$f_p^{(g)} = (-1)^p \cdot 2^{\frac{p(p-1)}{2} - g} \tag{2.26}$$

В явном виде первые несколько строк выглядят так:

$$\Xi^{(1)}[0] = \frac{1}{2}\left(G_0 - G_1\right),$$

$$\Xi^{(2)}[0] = \frac{1}{4}\left(G_0 - G_1 + 2\,G_2\right),$$

$$\Xi^{(3)}[0] = \frac{1}{8}\left(G_0 - G_1 + 2\,G_2 - 8\,G_3\right),$$

$$\Xi^{(4)}[0] = \frac{1}{16}\left(G_0 - G_1 + 2\,G_2 - 8\,G_3 + 64\,G_4\right),$$

$$\Xi^{(5)}[0] = \frac{1}{32}\left(G_0 - G_1 + 2\,G_2 - 8\,G_3 + 64\,G_4 - 1024\,G_5\right) \tag{2.27}$$

Обозначим сумму всех $\Xi[e]$ из анзаца Грушевского, т.е. предположительную космологическую постоянную, за $F^{(g)}$ для случая рода g. Было показано [66], что она равна (с точностью до постоянного множителя) следующей хорошо известной комбинации тэта-констант [4, 9, 11, 23, 87–89]:

$$F^{(g)} = 2^g \sum_e \theta^{16}[e] - \left(\sum_e \theta^8[e]\right)^2, \tag{2.28}$$

Можно показать, что анзац Грушевского удовлетворяет вышеупомянутым требованиям, накладываемым на суперструнные меры для родов $g \leq 4$. Однако, это уже не так для случая рода 5, т.к. космологическая постоянная $F^{(5)}$ становится ненулевой [66]. Грушевский предложил следующий способ решения данной проблемы: рассматривать вместо $\Xi[e]$ функции $\Xi[e] - N_{even}^{-1}F$. Данный подход, очевидным образом, решает проблему с космологической постоянной и, более того, не нарушает выполнение остальных условий в случае рода 5. Свойство факторизации не нарушается, т.к. $F^{(g)}$ тождественно равна нулю на локусе якобианов для всех родов вплоть до рода 4 включительно, и, тем самым, тождественно равна нулю на точках локуса якобианов, которые соответствуют факторизации.

Таким образом, после внесения небольших изменений, данный анзац, по-видимому, работает для всех случаев вплоть до рода 5 включительно. Однако, в случае рода 6 снова возникает та же проблема с космологической постоянной, и в этом случае она уже не может быть решена вышеуказанным способом, поскольку при этом начинает нарушаться условие факторизации. Кривая рода 6 может вырождаться до кривой рода 5, а в случае рода 5 функция $F^{(5)}$ уже не равна нулю тождественно даже на локусе якобианов [66].

2.4 Решеточные тэта-константы и анзац ОПСМЮ

Другой анзац для суперструнных мер предложили М.Оура, К.Пур, Р.Салвати Манни и Д. Юэн (ОПСМЮ) в своей работе [95]. Он выражается через т.н. *решеточные тэта константы* для 16-мерных самодуальных (или, что то же самое, унимодулярных) решеток, которые встречаются, в частности, при изучении струнных компактификаций [91].

h-мерная решетка Λ определяется как подмножество $\mathbb{R}^h$, порождаемое линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами некоторого набора из h линейно независимых векторов. Данный набор называется *базисом* решетки.

Для данной решетки Λ и данного рода g (напомним, что, хотя в данном случае g, вообще говоря, не несет смысла рода поверхности, мы все равно будем его так называть для удобства) соответствующая решеточная тэта-константа (являющаяся функцией на пространстве Зигеля $\mathcal{H}$) определяется как

$$\vartheta_\Lambda\left(\tau\right) \stackrel{def}{=} \sum_{(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_g)\in\Lambda^g} \exp\left(\pi i(\vec{p}_k\cdot\vec{p}_l)\tau_{kl}\right), \tag{2.29}$$

где под $(\vec{p}\cdot\vec{p}')$ понимается обычное Евклидово скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^h$, а по повторяющимся индексам k и l, как и всегда, подразумевается взятие суммы. Решеточные тэта-константы обладуют очень простым свойством факторизации – они остаются сами собой:

$$\vartheta_\Lambda^{(g_1+g_2)}\begin{pmatrix} \tau^{(g_1)} & 0 \\ 0 & \tau^{g_2)} \end{pmatrix} = \vartheta_\Lambda^{(g_1)}\left(\tau^{(g_1)}\right)\vartheta_\Lambda^{(g_2)}\left(\tau^{(g_2)}\right) \tag{2.30}$$

Решетка называется *самодуальной*, или *унимодулярной*, если она совпадает с двойственной ей решеткой, т.е. если $\Lambda = \Lambda^*$. Двойственная решетка Λ^* определяется как набор всех векторов $\vec{u}$ из $\mathbb{R}^h$, таких что $(\vec{u}\cdot\vec{v}) \in \mathbb{Z}$ *для всех* $\vec{v} \in \Lambda$. Решетка называется *четной*, если евклидовы нормы всех базисных векторов – четные целые числа. В противном случае решетку называют *нечетной.*

Решеточные тэта-константы, соответствующие h-мерным самодуальным решеткам для h, делящегося на 8, являются модулярными формами веса $h/2$ относительно $\Gamma_g\left(1,2\right)$, если решетка нечетная, и относительно всей Γ_g, если решетка четная. Таким образом, решеточные тэта-константы 16-мерных самодуальных решеток являются модулярными формами веса 8, и, тем самым, представляют особый интерес для построения суперструнных мер.

Существует ровно восемь 16-мерных самодуальных решеток [21], причем все они могут быть получены из решеток корней определенных алгебр Ли.

Приведем список данных решеток вместе с удобными обозначениями в следующей таблице:

Обозначение для тэта-ряда	Решетка	Векторы склейки
ϑ_0	$\mathbb{Z}^{16}$	–
ϑ_1	$\mathbb{Z}^8 \oplus E_8$	–
ϑ_2	$\mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$	$\left(0^4, \frac{1}{2}^{12}\right)$
ϑ_3	$\mathbb{Z}^2 \oplus (E_7 \oplus E_7)^+$	$\left(\frac{1}{4}^6, -\frac{3}{4}^2, \frac{1}{4}^6, -\frac{3}{4}^2\right)$
ϑ_4	$\mathbb{Z} \oplus A_{15}^+$	$\left(\frac{1}{4}^{12}, -\frac{3}{4}^4\right), \left(\frac{1}{2}^8, -\frac{1}{2}^8\right), \left(\frac{3}{4}^4, -\frac{1}{4}^{12}\right)$
ϑ_5	$(D_8 \oplus D_8)^+$	$\left(\frac{1}{2}^8, 0^7, 1\right)$
ϑ_6	$E_8 \oplus E_8$	–
ϑ_7	D_{16}^+	$\left(\frac{1}{2}^{16}\right)$

В первом столбце перечислены обозначения для тэта-констант, соответствующих решеткам, во втором столбце перечислены сами решетки, а в третий содержит *векторы склейки* для соответствующих решеток. Здесь $\mathbb{Z}^n$ обозначает тривиальную решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. A_k, D_k и E_k представляют собой корневые решетки соответствующих алгебр Ли. Крестик над названием решетки соответствует взятию объединения данной решетки и всех решеток, получаемых ее сдвигом на векторы склейки. Для краткости векторы склейки выписаны в обозначениях Слоана [21], где под a^n понимается $a, \ldots, a$ с n копиями a (например, $\left(\frac{1}{2}^2, -1^2, 0\right)$ означает $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1, 0\right)$). Также заметим, что $E_8 = D_8^+$ с вектором склейки $\left(\frac{1}{2}^8\right)$. Первые шесть решеток таблицы нечетны, а последние две четны.

Заметим, что в статье [95] также используются обозначения ϑ_i для решеточных тэта-констант, но приведенные в таблице выше обозначения с ними *не согласуются*. У такой смены обозначений есть причины, изложенные в конце раздела 2.5.

В анзаце ОПСМЮ данные тэта-константы используются для записи анзаца для суперструнных мер [95]. Поскольку все вышеуказанные решеточные тэта-константы являются модулярными формами веса 8 относительно подгруппы $\Gamma(1, 2)$ модулярной группы, естественно строить $\Xi[0]$ из них, а затем получать $\Xi[e]$, действуя на $\Xi[0]$ модулярными преобразованиями.

ОПСМЮ доказали, что вплоть до рода 4 данные решеточные тэта-константы порождают *все* пространство модулярных форм веса 8 относительно $\Gamma(1, 2)$, а так же нашли линейные соотношения между ними:

$g = 1:$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_2 &= \frac{3}{2}\vartheta_1 - \frac{1}{2}\vartheta_0 \\
\vartheta_3 &= \frac{7}{4}\vartheta_1 - \frac{3}{4}\vartheta_0 \\
\vartheta_4 &= \frac{15}{8}\vartheta_1 - \frac{7}{8}\vartheta_0 \\
\vartheta_5 &= 2\vartheta_1 - \vartheta_0
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

$g = 2:$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3 &= \frac{7}{4}\vartheta_2 - \frac{7}{8}\vartheta_1 + \frac{1}{8}\vartheta_0 \\
\vartheta_4 &= \frac{35}{16}\vartheta_2 - \frac{45}{32}\vartheta_1 + \frac{7}{32}\vartheta_0 \\
\vartheta_5 &= \frac{8}{3}\vartheta_2 - 2\vartheta_1 + \frac{1}{3}\vartheta_0
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

$g = 3:$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_4 &= \frac{15}{8}\vartheta_3 - \frac{35}{32}\vartheta_2 + \frac{15}{64}\vartheta_1 - \frac{1}{64}\vartheta_0 \\
\vartheta_5 &= \frac{64}{21}\vartheta_3 - \frac{8}{3}\vartheta_2 + \frac{2}{3}\vartheta_1 - \frac{1}{21}\vartheta_0
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

$g = 4:$

$$
\vartheta_5 \underset{\mathcal{J}}{=} \frac{1024}{315}\vartheta_4 - \frac{64}{21}\vartheta_3 + \frac{8}{9}\vartheta_2 - \frac{2}{21}\vartheta_1 + \frac{1}{315}\vartheta_0 \tag{2.34}
$$

Здесь символ $\mathcal{J}$ под знаком равенства означает, что данное равенство выполняется только на локусе якобианов.

На самом деле, в последнее равенство также входит выражение $\vartheta_6 - \vartheta_7$, однако оно тождественно равно нулю на локусе якобианов для случая рода 4. Выражение $\vartheta_6 - \vartheta_7$ окажется пропорциональным космологической постоянной. Для $g \geq 5$ все 8 решеточных тэта-констант, включая четные, линейно независимы, и неизвестно, порождают ли они все пространство форм, модулярных относительно $\Gamma(1,2)$.

Опишем анзац ОПСМЮ для суперструнных мер. При этом будут приведены формулы, несколько отличающиеся от написанных в работе [95]. Во-первых, как уже было упомянуто, была выбрана другая нумерация решеточных тэта-констант, а во-вторых, выбрана другая нормировка для функции Ξ в роде 1, а именно следующая:

$$
\Xi^{(1)}[0] = \vartheta_0 - \vartheta_1 = \theta^{16}[0] - \frac{1}{2}\theta^8[0]\sum_e \theta^8[e] \tag{2.35}
$$

вместо

$$\Xi^{(1)}_{OPSMY}[0] = \frac{1}{16}\vartheta_0 - \frac{1}{16}\vartheta_1 = \frac{1}{16}\theta^{16}[0] - \frac{1}{32}\theta^8[0]\sum_e \theta^8[e], \tag{2.36}$$

которая используется в статье [95]. Таким образом, $\Xi^{(g)}$ будет отличаться на множитель 2^{4g}.

Обозначим за M следующую матрицу 6×6, индексы в которой пробегают от 0 до 5:

$$\begin{aligned} &M_{ij} = 2^{j(1-i)}, \quad i = 0..4,\ j = 1..5,\\ &M_{i0} = 1, \qquad i = 0..5,\\ &M_{5j} = 0, \qquad j = 1..5 \end{aligned} \tag{2.37}$$

В явном виде имеем:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} & \frac{1}{1024} \\ 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{512} & \frac{1}{4096} & \frac{1}{32768} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Функции $\Xi[0]$ из анзаца ОПСМЮ для родов $g \le 5$ определяются следующим образом:

$$\Xi^{(g)}[0] = \sum_{k=0}^{5} \left(M^{-1}\right)_{gk} \vartheta^{(g)}_k, \quad g = 1\dots 5 \tag{2.39}$$

(для рода 5, однако, будет нужна некоторая модификация, см. ниже). Для данного анзаца нельзя написать выражения для $\Xi[e]$ для общего e таким же явным образом, как это можно сделать в случае анзаца Грушевского. $\Xi[e]$ получаются из $\Xi[0]$ действием определенного элемента γ_e модулярной группы.

В явном виде имеем:

$$\Xi^{(1)}[0] = \frac{1}{630}\,\vartheta_0 - \frac{2}{21}\,\vartheta_1 + \frac{16}{9}\,\vartheta_2 - \frac{256}{21}\,\vartheta_3 + \frac{8192}{315}\,\vartheta_4 - \frac{31}{2}\,\vartheta_5,$$

$$\Xi^{(2)}[0] = -\frac{1}{42}\,\vartheta_0 + \frac{29}{21}\,\vartheta_1 - 24\,\vartheta_2 + \frac{2944}{21}\,\vartheta_3 - \frac{4096}{21}\,\vartheta_4 + \frac{155}{2}\,\vartheta_5,$$

$$\Xi^{(3)}[0] = \frac{1}{9}\,\vartheta_0 - 6\,\vartheta_1 + \frac{808}{9}\,\vartheta_2 - 384\,\vartheta_3 + \frac{4096}{9}\,\vartheta_4 - 155\,\vartheta_5,$$

$$\Xi^{(4)}[0] = -\frac{4}{21}\,\vartheta_0 + \frac{184}{21}\,\vartheta_1 - 96\,\vartheta_2 + \frac{7424}{21}\,\vartheta_3 - \frac{8192}{21}\,\vartheta_4 + 124\,\vartheta_5,$$

$$\Xi^{(5)}[0] = \frac{32}{315}\,\vartheta_0 - \frac{64}{21}\,\vartheta_1 + \frac{256}{9}\,\vartheta_2 - \frac{2048}{21}\,\vartheta_3 + \frac{32768}{315}\,\vartheta_4 - 32\,\vartheta_5 \qquad (2.40)$$

Подставляя линейные соотношения из уравнений (2.31)-(2.34), получим:

$$\Xi^{(1)}[0] = \vartheta_0 - \vartheta_1, \qquad (2.41)$$

$$\Xi^{(2)}[0] = \frac{2}{3}\,\vartheta_0 - 2\,\vartheta_1 + \frac{4}{3}\,\vartheta_2, \qquad (2.42)$$

$$\Xi^{(3)}[0] = \frac{8}{21}\,\vartheta_0 - \frac{8}{3}\,\vartheta_1 + \frac{16}{3}\,\vartheta_2 - \frac{64}{21}\,\vartheta_3, \qquad (2.43)$$

$$\Xi^{(4)}[0] \underset{\mathcal{J}}{=} \frac{64}{315}\,\vartheta_0 - \frac{64}{21}\,\vartheta_1 + \frac{128}{9}\,\vartheta_2 - \frac{512}{21}\,\vartheta_3 + \frac{4096}{315}\,\vartheta_4, \qquad (2.44)$$

$$\Xi^{(5)}[0] = \frac{32}{315}\,\vartheta_0 - \frac{64}{21}\,\vartheta_1 + \frac{256}{9}\,\vartheta_2 - \frac{2048}{21}\,\vartheta_3 + \frac{32768}{315}\,\vartheta_4 - 32\,\vartheta_5 \qquad (2.45)$$

Оказывается, что для рода 5 космологическая постоянная для данного анзаца также пропорциональна $\vartheta_6 - \vartheta_7$, и, тем самым, не равна тождественно нулю на локусе якобианов [66]. ОПСМЮ предложили решить данную проблему тем же способом, который был применен для случая анзаца Грушевского. Они нашли численное значение константы пропорциональности между $\sum_e \Xi[e]$ и $\vartheta_6 - \vartheta_7$ и вычли из $\Xi[0]$ данное выражение с этим коэффициентом, поделенное на число характеристик. В используемой здесь нормировке это записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Xi}^{(5)}[0] = \frac{32}{315}\,\vartheta_0 - \frac{64}{21}\,\vartheta_1 + \frac{256}{9}\,\vartheta_2 - \frac{2048}{21}\,\vartheta_3 + \\ + \frac{32768}{315}\,\vartheta_4 - 32\,\vartheta_5 - \frac{686902}{24255}\vartheta_6 + \frac{686902}{24255}\vartheta_7\end{aligned} \qquad (2.46)$$

Данный анзац не может быть продолжен на род 6 и выше. Это легко понять, например, следующим образом. Из условия факторизации следует, что

$$\begin{aligned}\Xi^{(6)}\left(\tau^{(6)}_{1+1+1+1+1+1}\right) = & \,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_1\right)\,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_2\right)\,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_3\right)\,\times \\ & \times\,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_4\right)\,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_5\right)\,\Xi^{(1)}\left(\tau^{(1)}_6\right).\end{aligned}$$

Если бы $\Xi^{(6)}$ представлялась в виде линейной комбинации тэта-констант $\Xi^{(6)} = \sum\limits_{p=0}^{7} \alpha_p \vartheta_p$, то, используя уравнение (2.30), можно было бы утверждать следующее:

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{7} \alpha_p \vartheta_p^{(1),1}\, \vartheta_p^{(1),2}\, \vartheta_p^{(1),3}\, \vartheta_p^{(1),4}\, \vartheta_p^{(1),5}\, \vartheta_p^{(1),6} = \\ &= \left(\vartheta_0^{(1),1} - \vartheta_1^{(1),1}\right)\left(\vartheta_0^{(1),2} - \vartheta_1^{(1),2}\right)\left(\vartheta_0^{(1),3} - \vartheta_1^{(1),3}\right) \times \\ &\left(\vartheta_0^{(1),4} - \vartheta_1^{(1),4}\right)\left(\vartheta_0^{(1),5} - \vartheta_1^{(1),5}\right)\left(\vartheta_0^{(1),6} - \vartheta_1^{(1),6}\right) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Для $g = 1$ все решеточные тэта-константы можно выразить через следующие три линейно независимые тэта-константы: ϑ_0, ϑ_1, ϑ_6, используя соотношения (2.31). Подставим данные выражения в уравнение (2.47), раскроем скобки и перенесем все в левую часть. Получится многочлен по ϑ_0, ϑ_1, ϑ_6, все коэффициенты которого должны обращаться в ноль. Условие равенства нулю данных коэффициентов эквивалентно системе линейных уравнений на α_p. Оказывается, что для случая $g = 6$ данная система линейных уравнений не имеет решений. Для случая $g = 5$, например, аналогичная система уравнений имеет решение, приводящее к соотношению (2.45).

2.5 Связь решеточных и римановых тэта-констант

В данном разделе описана связь между решеточными и римановыми тэта-константами, и получены явные формулы, выражающие одни через другие.

А именно, ниже доказано, что

$$\vartheta_p^{(g)} = 2^{-gp} \xi_p^{(g)}, \quad p = 0 \dots 4 \tag{2.48}$$

для любого рода g. Для $p = 0$ и $p = 1$ данное утверждение является довольно простым, и уже было известно ранее.

Рассмотрим случай $p = 2$. Сначала заметим, что в данном случае множитель θ_0^4 является общим для левой и правой части уравнения (2.48), т.е.

его можно сократить. Тогда правая часть уравнения примет вид

$$\xi_2^{(g)}/\theta_0^4 = \sum_{e_1,e_2}^{N_e} \theta_{e_1}^4 \theta_{e_2}^4 \theta_{e_1+e_2}^4 =$$

$$= \sum_{e_1,e_2}^{N_e} \sum_{\substack{\vec{n}_I^a \in \mathbb{Z}^g, \\ a=1..4, \\ I \in 2^{\{1,2\}} \setminus (\emptyset)}} \exp\left(\pi i \left(\sum_a \left(\vec{n}_1^a + \frac{\vec{\delta}_1}{2}\right)^T \tau \left(\vec{n}_1^a + \frac{\vec{\delta}_1}{2}\right) + \right.\right.$$

$$+ \sum_a \left(\vec{n}_2^a + \frac{\vec{\delta}_2}{2}\right)^T \tau \left(\vec{n}_2^a + \frac{\vec{\delta}_2}{2}\right) + \sum_a \left(\vec{n}_{12}^a + \frac{\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2}{2}\right)^T \tau \left(\vec{n}_{12}^a + \frac{\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2}{2}\right) +$$

$$\left.\left. + \left(\sum_a \vec{n}_1^a\right)^T \vec{\varepsilon}_1 + \left(\sum_a \vec{n}_2^a\right)^T \vec{\varepsilon}_2 + \left(\sum_a \vec{n}_{12}^a\right)^T (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \right)\right) \quad (2.49)$$

Вычислим сумму по векторам $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$. Так как они принимают значения в $(\mathbb{Z}_2)^g$ и входят в выражение только в составе множителей вида

$$\exp\left(\pi i \left(\sum_a \vec{n}_1^a + \vec{n}_{12}^a\right)^T \vec{\varepsilon}_1\right) \quad (2.50)$$

и

$$\exp\left(\pi i \left(\sum_a \vec{n}_2^a + \vec{n}_{12}^a\right)^T \vec{\varepsilon}_2\right), \quad (2.51)$$

то все члены, где по крайней мере одна из компонент целочисленных векторов $\vec{v}_1 = \sum_a (\vec{n}_1^a + \vec{n}_{12}^a)$ и $\vec{v}_2 = \sum_a (\vec{n}_2^a + \vec{n}_{12}^a)$ нечетна, обращаются в ноль. Все члены, где все такие компоненты четны, выживают и после взятия суммы получают дополнительный коэффициент 2^{2g}. Таким образом, раскрыв также сумму по $\vec{\delta}$, получим

$$\xi_2^{(g)}/\theta_0^4 = 2^{2g} \sum_{\left(\Lambda_2^+\right)^g} \exp\left(\pi i \sum_{i,j=1}^{g} (n_i, n_j)\, \tau_{ij}\right), \quad (2.52)$$

где $\Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^{12}$ – 12-мерная решетка, определяемая следующим образом:

$$\Lambda_2 = \left\{ \left(n_1^1, \ldots, n_1^4, n_2^1, \ldots, n_2^4, n_{12}^1, \ldots, n_{12}^4\right) \in \mathbb{Z}^{12} \middle| \left(\sum_a n_1^a + \sum_a n_{12}^a\right) \vdots 2, \right.$$

$$\left. \left(\sum_a n_2^a + \sum_a n_{12}^a\right) \vdots 2 \right\},$$

а

$$\Lambda_2^+ = \Lambda_2 \cup (\Lambda_2 + \vec{\alpha}) \cup \left(\Lambda_2 + \vec{\beta}\right) \cup (\Lambda_2 + \vec{\gamma}), \tag{2.53}$$

где

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ 0, 0, 0, 0,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \tag{2.54}$$

$$\vec{\beta} = \left(0, 0, 0, 0,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \tag{2.55}$$

$$\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ 0, 0, 0, 0\right) \tag{2.56}$$

Тем самым, т.к. множители 2^{2g} и 2^{-2g} замечательным образом сокращаются, то для доказательства утверждения (2.48) для случая $p = 2$ теперь достаточно только доказать, что решетку Λ_2^+ можно преобразовать а решетку D_{12}^+ некоторым ортогональным преобразованием $A : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{12}$. Покажем, что в качестве такого преобразования можно взять преобразование, задаваемое следующей матрицей:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_4 & 0 & 0 \\ 0 & H_4 & 0 \\ 0 & 0 & H_4 \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

где H_4 определяется как

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

H_4 является одной из т.н. *матриц Адамара*, подробности об этом см. ниже.

Решетка D_{12}^+ определяется как

$$D_{12}^+ = \left\{ (m_1, \ldots, m_{12}) \in \mathbb{Z}^{12} \cup \left(\mathbb{Z}^{12} + \left(\frac{1}{2}^{12}\right)\right) \middle| \left(\sum_k m_k\right) \vdots\, 2 \right\} \tag{2.59}$$

Легко видеть, что преобразование A отображает каждую точку решетки Λ_2^+ в точку решетки D_{12}^+ и наоборот. В самом деле, Λ_2 состоит из векторов вида (e, e, e) и (o, o, o), где e представляет собой либо $(0, 0, 0, 0)$, либо $(1, 1, 1, 1)$, либо один из $C_2^4 = 6$ векторов вида $(1, 1, 0, 0)$; в то же время o является вектором типа $(1, 0, 0, 0)$ или $(1, 1, 1, 0)$. Все компоненты определены по модулю 2. Тогда

$$\Lambda_2 = \left\{ (e, e, e), (o, o, o) \right\} \tag{2.60}$$

Аналогично,

$$D_{12} = \Big\{(e,e,e),(e,o,o),(o,e,o),(o,o,e)\Big\} \tag{2.61}$$

Обозначим галочкой сдвиг 4-вектора на $(1/2,1/2,1/2,1/2)$. Тогда

$$\Lambda_2^+ = \Big\{(e,e,e),(\check{e},\check{e},e),(\check{e},e,\check{e}),(e,\check{e},\check{e}),(o,o,o),(\check{o},\check{o},o),(\check{o},o,\check{o}),(o,\check{o},\check{o})\Big\},$$

а

$$D_{12}^+ = \Big\{(e,e,e),(\check{e},\check{e},\check{e}),(e,o,o),(\check{e},\check{o},\check{o}),(o,e,o),(\check{o},\check{e},\check{o}),(o,o,e),(\check{o},\check{o},\check{e})\Big\}$$

Действие $\frac{1}{2}H_4$, $\left(\frac{1}{2}H_4\right)^2 = I$ таково:

$$\begin{array}{ccc}
(0,0,0,0) & \leftrightarrow & (0,0,0,0), \\
(1,1,0,0) & \leftrightarrow & (1,0,1,0), \\
(1,1,1,1) & \leftrightarrow & (2,0,0,0), \\
 & & \\
(1,0,0,0) & \leftrightarrow & (1/2,1/2,1/2,1/2)\,, \\
(1,1,1,0) & \leftrightarrow & (3/2,1/2,1/2,-1/2)\,, \\
 & & \\
(-1/2,1/2,1/2,1/2) & \leftrightarrow & (1/2,-1/2,-1/2,-1/2)\,,
\end{array}$$

из чего следует, что $e \leftrightarrow e$, $o \leftrightarrow \check{e}$ а $\check{o} \leftrightarrow \check{o}$. Тогда для A_{12} имеем:

$$\begin{array}{ccc}
(e,e,e) & \leftrightarrow & (e,e,e), \\
(o,o,o) & \leftrightarrow & (\check{e},\check{e},\check{e}), \\
(\check{e},\check{e},e) & \leftrightarrow & (o,o,e), \\
(\check{o},\check{o},o) & \leftrightarrow & (\check{o},\check{o},\check{e}),
\end{array}$$

Таким образом, доказано, что A_{12} в самом деле превращает решетку Λ_2^+ в D_{12}^+ и наоборот.

Интересный факт состоит в том, что, по сути, все было проделано вращением векторов с помощью *матрицы Адамара*. h-мерной матрицей Адамар называется матрица, построенная из компонент набора из h h-мерных векторов, состоящих из 1 и -1, и взаимно ортогональных друг другу. Существование матриц Адамара в произвольной размерности вида $4k$ по-прежнему является открытым вопросом. Для размерностей, равных степеням двойки, существует т.н. конструкция Сильвестра матриц Адамара, основанная на следующем факте: если $h \times h$ матрица H_h адамарова, то следующая $2h \times 2h$ матрица также будет адамаровой:

$$H_{2h} = \begin{pmatrix} H_h & H_h \\ H_h & -H_h \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Матрица H_4, использовавшаяся для вращения векторов решеток, принадлежит именно к этому типу: она получается в результате двукратного применения построения Сильвестра к 1×1 матрице

$$(1) \tag{2.63}$$

Оказывается, что для двух оставшихся случаев, а именно для случаев $p = 3$ и $p = 4$, доказательство также можно провести с помощью вращений векторов решеток матрицами Адамара. Однако, в этих случая требуется 16×16 матрица Адамара H_{16} вместо 4×4 матрицы Адамара H_4. H_{16} получается из H_4 также двукратным применением конструкции Сильвестра. Не будем приводить здесь ее явный вид, т.к. он слишком громоздок и его легко получить непосредственно.

Доказательство утверждения (2.48) для случая $p = 3$ выглядит следующим образом: после сокращения общего множителя $\theta[0]^2$ и взятия суммы по $\vec{\epsilon}$ способом, аналогичным случаю $p = 2$, получим сумму по g копиям решетки Λ_3^+. Λ_3 является подмножеством 14-мерной тривиальной целочисленной решетки с координатами

$$\left(n_1^1, n_2^1, n_{12}^1, n_3^1, n_{13}^1, n_{23}^1, n_{123}^1, n_1^2, n_2^2, n_{12}^2, n_3^2, n_{13}^2, n_{23}^2, n_{123}^2\right). \tag{2.64}$$

Обозначения для индексов у n аналогичны использовавшимся в случае $p = 2$. Обозначим $n_1^1 + n_1^2$ за m_1, $n_2^1 + n_2^2$ за m_2, и т.д. Тогда Λ_3 определяется следующими условиями:

$$m_1 + m_{12} + m_{13} + m_{123} \mathrel{\vdots} 2, \tag{2.65}$$

$$m_2 + m_{12} + m_{23} + m_{123} \mathrel{\vdots} 2, \tag{2.66}$$

$$m_3 + m_{13} + m_{23} + m_{123} \mathrel{\vdots} 2 \tag{2.67}$$

Λ_3^+ получается из Λ_3 сдвигом на векторы

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \tag{2.68}$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \tag{2.69}$$

$$\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{2.70}$$

и взятием объединения полученных таким образом решеток с исходной.

Тогда окончательное утверждение, которое требуется доказать, состоит в том, что решетка $(E_7 \oplus E_7)^+$ превращается в решетку Λ_3^+ поворотом матрицей $A_{16} = \frac{1}{4}H_{16}$, где H_{16} – 16-мерная матрица Адамара типа Сильвестра. Может возникнуть вопрос – как вращать, вообще говоря, 14-мерные решетки 16-мерной матрицей? Ответ прост – решетка E_7 обычно определяется в 8-мерном пространстве (а именно, она лежит внутри некоторой конкретной гиперплоскости в 8-мерном пространстве); тем самым, решетка $(E_7 \oplus E_7)^+$ естественным образом определена в 16-мерном пространстве, а не в 14-мерном [21]. Таким образом, решетку $(E_7 \oplus E_7)^+$ можно повернуть с помощью матрицы A_{16}. Оказывается, что после такого поворота две из координат (а именно, первая и девятая) обращаются в ноль для образов всех векторов решетки $(E_7 \oplus E_7)^+$. Тем самым, можно просто отбросить данные координаты и получить 14-мерную решетку. Несложные технические вычисления, которые мы не будем здесь приводить, показывают, что данная 14-мерная решетка в самом деле является решеткой Λ_3^+ (эти вычисления состоят в том, чтобы проверить, что образ каждого базисного вектора может быть сдвинут на один из трех векторов (2.68-2.70) таким образом, что он обратится в целочисленный вектор, удовлетворяющий условиям (2.65-2.67)). Доказательство соотношения (2.48) для случая $p = 3$, таким образом, завершено.

Доказательство для случая $p = 4$ полностью аналогично случаю $p = 3$ за исключением того, что вместо 14-мерного пространства будет рассматриваться 15-мерное. Интересно, что все можно проделать с помощью той же самой матрицы A_{16}, как и в случае $p = 3$.

Теперь становится очевидным, почему была выбрана такая нумерация для решеточных тэта-констант. Так было сделано, потому что функции ξ_p имеют естественную нумерацию, а функции ϑ_p соответствуют им для $p = 0 \ldots 4$.

Завершим раздел напоминанием хорошо известных формул для решеточных тэта-констант для четных 16-мерных решеток, т.е. для $E_8 \oplus E_8$ и D_{16}^+:

$$\vartheta_6^{(g)} = 2^{-2g} \left(\sum_e \theta^8[e] \right)^2, \tag{2.71}$$

$$\vartheta_7^{(g)} = 2^{-g} \sum_e \theta^{16}[e] \tag{2.72}$$

2.6 Странная решетка

В предыдущем разделе было показано, что для $p = 0 \ldots 4$ функции ϑ_p совпадают (с точностью до простого численного множителя) с функциями ξ_p. Т.е., решеточные тэта-ряды для решеток $\mathbb{Z}^{16}$, $\mathbb{Z}^8 \oplus E_8$, $\mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$, $\mathbb{Z}^2 \oplus (E_7 \oplus E_7)^+$ и $\mathbb{Z} \oplus A_{15}^+$ все равны комбинациям одного и того же типа из римановых тэта-констант.

Однако, имеется еще одна 16-мерная самодуальная решетка, а именно $(D_8 \oplus D_8)^+$. Удивительным образом, соответствующий ей решеточный тэта-ряд, ϑ_5, ведет себя совсем не так, как тэта-ряды для всех остальных нечетных самодуальных шестнадцатимерных решеток.

Используя линейные соотношения ОПСМЮ (2.31)-(2.34) между решеточными тэта-константами, можно выразить ϑ_5 через $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_4$ (по крайней мере, на локусе якобианов) для любого рода $g \leq 4$. Используя затем формулы из предыдущего раздела, выражающие $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_4$ через римановы тэта-константы, можно выразить ϑ_5 через римановы тэта-константы при $g \leq 4$. Оказывается, что для всех этих родов данные выражения имеют один и тот же вид:

$$\vartheta_5^{(g)} \underset{\mathcal{J}}{=} G_g^{(g)}, \quad g \leq 4 \tag{2.73}$$

Таким образом, последний оставшийся тэта-ряд удивительным образом совпадает с выражением из римановых тэта-констант *второго типа* из описанных в разделе 2.3. Это, однако, верно только на локусе якобианов, поскольку в случае рода 4, где в первый раз локус якобианов не совпадает со всем полупространством Зигеля, линейное соотношение (2.34) верно только на локусе якобианов. На всем полупространстве Зигеля формула (2.73) должна быть переписана как

$$\vartheta_5^{(4)} = G_4^{(4)} + \frac{3}{7}\left(\vartheta_6 - \vartheta_7\right) = \tag{2.74}$$

$$= G_4^{(4)} - \frac{3}{2^8 \cdot 7}\, F^{(4)} \tag{2.75}$$

Формулу (2.73) не удалось доказать прямым способом, как это было сделано для остальных решеток.

Возникает вопрос, верна ли формула аналогичная формуле (2.73) для случая рода 5 (и более старших родов)? Оказывается, что не верна. Это показано ниже в главе 3.

2.7 Связь анзацев Грушевского и ОПСМЮ

Если подставить выражения (2.48) для решеточных тэта-констант в формулы (2.41-2.44) для анзаца ОПСМЮ для родов g от 1 до 4, то непосредственно получатся формулы (2.15-2.18) для анзаца Грушевского. Таким образом, для $g \leq 4$ анзацы Грушевского и ОПСМЮ совпадают.

Случай $g = 5$ рассмотрен отдельно в следующей главе.

2.8 Выводы

В результате проделанной работы по исследованию двух анзацев для суперструнных мер (Грушевского и ОПСМЮ) и составляющих их модулярных форм:

- найдены выражения для решеточных тэта-рядов шестнадцатимерных самодуальных решеток (для всех решеток, кроме одной) через римановы тэта-константы во всех родах;
- для оставшейся решетки найдены подобные выражения для родов $g \leq 4$;
- с использованием найденных соотношений между решеточными и римановыми тэта-константами явным образом показано совпадение анзацев Грушевского и ОПСМЮ для $g \leq 4$.

Глава 3

Суперструнные меры в роде 5

В данной главе рассматриваются суперструнные меры в роде 5. Показано, что использующиеся при построении анзацев Грушевского и ОПСМЮ формы $G_5^{(5)}$ и $\vartheta_5^{(5)}$ в роде 5 не совпадают на локусе якобианов, хотя для всех $g \leq 4$ такое совпадение $G_g^{(g)}$ и $\vartheta_5^{(g)}$ имеет место. Из этого делается вывод о том, что данные анзацы не совпадают. Предложен модифицированный анзац для рода 5, который, помимо условия обращения в ноль космологической постоянной, удовлетворяет условию обращения в ноль двухточечной функции в роде 4, чему анзацы Грушевского и ОПСМЮ не удовлетворяют.

3.1 Вырождение

В данном разделе рассматривается вопрос о том, совпадают ли $G_5^{(5)}$ и $\vartheta_5^{(5)}$ на локусе якобианов $\mathcal{J}_5$. Оказывается, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Введем следующие обозначения:

$$f^{(g)} := \vartheta_5^{(g)} - G_g^{(g)} \tag{3.1}$$

$$J^{(g)} := \vartheta_6^{(g)} - \vartheta_7^{(g)}. \tag{3.2}$$

Чтобы показать, что форма $f^{(5)}$ не равна тождественно нулю на $\mathcal{J}_5$, будет использована процедура, применявшаяся Грушевским и Салвати Манни в работе [66], основанная, в свою очередь, на теореме Фэя [55]. Мотивацией для использования данного метода является то, что он был успешно применен в [66] для того, чтобы показать, что $J^{(5)}$ тождественно не равна нулю на $\mathcal{J}_5$.

Метод состоит в следующем: возьмем 1-параметрическое семейство римановых поверхностей $C_s \subset \mathcal{M}_5$ с параметром s, которое при $s \to 0$ вырождается в поверхность C рода 4 с двумя особыми точками p и p', которая принадлежит граничному дивизору $\delta_0 \subset \overline{\mathcal{M}_5}$. Рассмотрим ряд Тейлора по

s при $s \to 0$ для $f^{(5)}$ и покажем, что член первого порядка по s не равен нулю тождественно. Т.к. $f^{(5)}$ голоморфна на $\mathcal{J}_5$, из этого будет следовать, что $G_5^{(5)}$ и $\vartheta_5^{(5)}$ не совпадают друг с другом тождественно на $\mathcal{J}_5$.

Как показано в [55], можно взять такое семейство поверхностей, что их матрицы периодов τ_s имеют следующий вид:

$$\tau_s = \begin{pmatrix} \lambda & z \\ z^t & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln s + c_1 + c_2 s & A^t_{pp'} + \frac{1}{4}s(\omega(p) - \omega(p'))^t \\ A_{pp'} + \frac{1}{4}s(\omega(p) - \omega(p')) & \tau_0 + s\,\sigma \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

для некоторых констант c_1 и c_2, где τ_0 – матрица периодов C_0, а

$$\sigma_{ij} := \frac{1}{4}\left(\omega_i(p) - \omega_i(p')\right)\left(\omega_j(p) - \omega_j(p')\right), \qquad i, j \leq 4.$$

Для краткости введем следующее общепринятое в литературе обозначение:

$$q := e^{2\pi i \lambda}. \tag{3.4}$$

Если рассмотреть разложения Фурье-Якоби для $G_5^{(5)}$ и $\vartheta_5^{(5)}$, их можно использовать для того, чтобы выразить значения данных форм на матрицах периодов τ_s как ряды по s. То есть для любой функции f на $\mathcal{J}_5$, голоморфной в окрестности кривой $\{\tau_s\} \subset \mathcal{J}_5$, если

$$f(\tau_s) = f_0(\tau) + q f_1(\tau, z) + O(q^2), \tag{3.5}$$

имеем

$$f(\tau_s) = f_0(\tau_0) + s\left(\sum_{i \leq j}^{4} \frac{\partial f_0(\tau)}{\partial \tau_{ij}} \sigma_{ij}(p, p') + f_1(\tau, z)\right) + O(s^2). \tag{3.6}$$

Разложим в ряд Тейлора первые члены ряда (3.6). Пусть x – локальная координата. Рассмотрим параметр $u = x(p) - x(p')$ около $u = 0$. Следуя [66], получим:

$$\sigma_{ij}(p, p') = S_{ij} + O(u^4) \tag{3.7}$$

$$S_{ij} := u^2 \frac{1}{4} \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x} + u^3 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i(p)}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x} \tag{3.8}$$

Таким образом, если $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}$ и $\frac{\partial f_1^3}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}$ обращаются в ноль, имеем:

$$f(\tau_s(p, p')) = f_0(\tau_0) + s \sum_{i \leq j}^{4} \left(u^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_i \partial z_j} \omega_i(p)\omega_j(p) + \frac{\partial f_0}{\partial \tau_{ij}} S_{ij} + O(u^4)\right) + O(s^2). \tag{3.9}$$

Если применить такое разложение для $G_5^{(5)}$ and $\vartheta_5^{(5)}$, то можно показать, что они тождественно не равны другу другу, следуя рассуждениям из [66], что и проделано ниже.

3.1.1 Разложение $G_5^{(5)}$

Чтобы определить вид $G_5^{(5)}$ и $\vartheta_5^{(5)}$ при вышеупомянутом вырождении, рассмотрим разложение Фурье-Якоби (3.5) для $G_5^{(5)}$. Другими словами, разложим $G_5^{(5)}(\tau_s)$ в пределе $\lambda \to \infty$. Также вычислим $\frac{\partial^2 G_{5,1}^{(5)}}{\partial z_i \partial z_j}$, где под $G_{5,1}^{(5)}$ подразумевается линейный по q член в разложении $G_5^{(5)}$.

Разложение $P(V)^{\frac{1}{2}}$

Вычислим разложение Фурье-Якоби для слагаемых $P(V)^{\frac{1}{2}}$ для $V \in \mathcal{S}_5^{(5)}$. Вспомним, что $m = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix}$, $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_g)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_g)$. Введем обозначения $m^* = \epsilon_1$, $m_* = \delta_1$. Пусть π – проекция из $\mathbb{F}_2^{(2g)}$ на $\mathbb{F}_2^{(2g-2)}$, отображающая $m = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \ldots & \epsilon_g \\ \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_g \end{bmatrix}$ в $\pi(m) = \begin{bmatrix} \epsilon_2 & \ldots & \epsilon_g \\ \delta_2 & \ldots & \delta_g \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{(2g-2)}$. Воспользуемся известными формулами для разложения Фурье-Якоби римановых тэта-констант [106]:

$$\theta \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ * & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & z^t \\ z & \tau \end{pmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} + 2\, q^{1/2} e^{\pi i *}\, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} (z, \tau) + O(q^2) \tag{3.10}$$

$$\theta \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ * & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & z^t \\ z & \tau \end{pmatrix} = 2\, q^{1/8}\, e^{\pi i */2}\, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} (\frac{z}{2}, \tau) + O(q^{9/8}). \tag{3.11}$$

Поскольку каждая компонента характеристики, принадлежащей V равна 0 или 1, а $P(V)^{\frac{1}{2}}$ обращается в ноль, если V содержит хотя бы одну нечетную характеристику, можно рассмотреть три разных типа пространств V, для которых разложения $P(V)^{\frac{1}{2}}$ выглядят различным образом. Для каждого из этих типов вычислим $P(V)^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} P(V)^{\frac{1}{2}}$ до первого порядка по q.

1. Сначала рассмотрим пространства, содержащие только характеристики вида $m = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ * & \delta \end{bmatrix}$. Раскладывая $P(V_1)$ для пространств V_1 такого типа, используя (3.10), получим

$$\begin{aligned} P(V_1) = \prod_{m \in V_1} \theta_{\pi(m)} + 2q^{1/2} \sum_{m \in V_1} e^{\pi i m_*} \theta_{\pi(m)}(\tau, z) \prod_{\substack{n \in V_1 \\ v \neq e}} \theta_{\pi(n)} \\ + 2q \sum_{\substack{m,n \in V_1 \\ m \neq n}} e^{\pi i (m_* + n_*)} \theta_{\pi(m)}(\tau, z) \theta_{\pi(n)}(\tau, z) \prod_{\substack{o \in V_1 \\ o \neq m \\ o \neq n}} \theta_{\pi(o)} + O(q^2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Для таких V_1 образ $\pi(V_1)$ полностью изотропен, а значит, максимальная размерность пространства $\pi(V_1)$ равна 4. Поскольку, вдобавок, максимальная размерность ядра π равна 1 (т.к. только m_* можно выбирать свободно), то $\pi(m)$ попарно совпадают, а соответствующие пары m отличаются только в m_*. Определим $\Delta := \begin{bmatrix} 0 & 0^{g-1} \\ 1 & 0^{g-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_g^{(2g)}$. Рассуждение, изложенное выше, показывает, что $m + \Delta$ содержится в V_1. Если не выполнено условие $m = n + \Delta$, то каждый из членов m, n в сумме, стоящей в третьем члене формулы (3.12), сократится с членом вида $m + \Delta, n$. Использовав все эти факты, можно переписать данную формулу следующим образом:

$$P(V_1) = \prod_{m \in \pi(V_1)} \theta_m^2 - 4q \sum_{m \in \pi(V_1)} \theta_m^2(\tau, z) \prod_{\substack{n \in \pi(V_1) \\ n \neq m}} \theta_n^2 + O(q^2). \tag{3.13}$$

Разложив квадратный корень, получим:

$$P(V_1)^{\frac{1}{2}} = \prod_{m \in \pi(V_1)} \theta_m - 2q \sum_{m \in \pi(V_1)} \frac{\theta_m^2(\tau, z)}{\theta_m^2(\tau, 0)} \prod_{n \in \pi(V_1)} \theta_n + O(q^2). \tag{3.14}$$

Наконец, используем уравнение теплопроводности для тэта-функций (здесь δ_{ij} – дельта-символ Кронекера)

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z_i \partial z_j} = 2\pi i (1 + \delta_{ij}) \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau_{ij}} \tag{3.15}$$

а также тот факт, что $\theta_m(z)$ является четной функцией z если характеристика m четная. Получим:

$$\left. \frac{\partial^2 P(V_1)^{\frac{1}{2}}}{\partial z_i \partial z_j} \right|_{z=0} = -8\pi i (1 + \delta_{ij}) q \left(\sum_{m \in \pi(V_1)} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau_{ij}} \prod_{n \neq m} \theta_n \right) + O(q^2). \tag{3.16}$$

Заметим, что $P(V_1)$ – четная функция z, а следовательно частные производные по z нечетного порядка обращаются в ноль (с точностью до членов $O(q^2)$).

2. Затем, пусть $V_2 \in \mathcal{S}_5^{(5)}$ содержит характеристики вида $m = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, а также вида $m = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, но не содержит характеристик с $m_* = 1$.

Если существует хотя бы один элемент $m \in V_2$, такой что $m^* = 1$, то легко видеть, что для ровно половины элементов $n \in V_2$ выполняется условие $n^* = 1$, в то время как для другой половины имеем $n^* = 0$. Таким образом, используя формулы (3.10) и (3.11) для того, чтобы разложить все тэта-константы, получим:

$$P(V_2) = 2^{16} q^2 \prod_{\substack{m \in V_2 \\ m^*=0}} \theta_{\pi(m)}(\tau, 0) \prod_{\substack{n \in V_2 \\ n^*=1}} \theta_{\pi(n)}(\tau, \frac{z}{2}) + O(q^3) \tag{3.17}$$

Аналогично случаю 1), рассмотренному выше, $\pi(m)$ попарно совпадают, а соответствующие пары m отличаются только компонентой m^*. Таким образом, приходим к следующей формуле:

$$P(V_2)^{\frac{1}{2}} = 2^8 q \sqrt{\prod_{m \in \pi(V_2)} \theta_m(\tau, 0)\, \theta_m(\tau, \frac{z}{2})} + O(q^2). \tag{3.18}$$

Вспомнив, что все $m \in \pi(V_2)$ четные, и использовав уравнение теплопроводности, получим

$$\left.\frac{\partial^2 P(V_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{z=0} = 2^5 q \sum_{m \in \pi(V_2)} \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z_i \partial z_j} \prod_{n \neq m} \theta_n + O(q^2) \tag{3.19}$$

$$= 64\pi i (1 + \delta_{ij}) q \sum_{m \in \pi(V_2)} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau_{ij}} \prod_{n \neq m} \theta_n + O(q^2). \tag{3.20}$$

Заметим, что $P(V_2)^{\frac{1}{2}}$ – четная функция z, а следовательно частные производные по z нечетного порядка обращаются в ноль (с точностью до членов $O(q^2)$).

3. Наконец, рассмотрим пространства, содержащие характеристики вида $m = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$ в дополнение к характеристиками, рассмотренным в случае 2). В таких пространствах нет разбиения на пары, подобного наблюдавшемуся в предыдущих двух случаях, но все равно можно разложить тэта-константы и получить похожие выражения, которые, однако, уже не так легко упростить. Однако, оказывается, что для наших целей это не нужно. Учтем, что 16 множителей в выражении $e^{\pi i m_*}$ вместе дают 1, и получим следующее:

$$P(V_3)^{\frac{1}{2}} = 2^8 q \sqrt{\prod_{\substack{m \in V_3 \\ m^*=0}} \theta_{\pi(m)}(\tau, 0) \prod_{\substack{n \in V_3 \\ n^*=1}} \theta_{\pi(n)}(\tau, \frac{z}{2})} + O(q^2). \tag{3.21}$$

Для любого рода g, таким образом, в $\pi(V_3)$ будет по крайней мере 2^{g-2} нечетных характеристики, когда V_3 принадлежит к такому типу. Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial P(V_3)^{\frac{1}{2}}}{\partial z_i}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^2 P(V_3)^{\frac{1}{2}}}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial^3 P(V_3)^{\frac{1}{2}}}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}\right|_{z=0} = 0, \tag{3.22}$$

по крайней мере, с точностью до членов $O(q^2)$.

Выражение для $G_5^{(5)}$

Пусть $\mathcal{V}_k$ – подмножество $\mathcal{S}_5^{(5)}$, содержащее все пространства характеристик, относящиеся к типу k) из описанных выше. Заметим, что $\pi(V)$, для $V \notin \mathcal{V}_3$, является полностью изотропным элементом $\mathcal{S}_4^{(4)}$, причем $\pi(\mathcal{V}_1) = \pi(\mathcal{V}_2)$ – множество всех полностью изотропных элементов $\mathcal{S}_4^{(4)}$. Отсюда следует, что $G_5^{(5)} = G_4^{(4)} + O(q)$.

Объединив все результаты предыдущего подраздела, получим:

$$\begin{aligned} G_5^{(5)} &= \sum_{V \in \mathcal{S}_5^{(5)}} P(V)^{\frac{1}{2}} \\ &= G_4^{(4)} + 2^8 q \left(\sum_{V \in \mathcal{S}_4^{(4)}} \sqrt{\prod_{m \in V} \theta_m \, \theta_m(\tau, \frac{z}{2})} - 2^{-7} \sum_{m \in V} \frac{\theta_m^2(\tau, z)}{\theta_m^2} \prod_{n \in V} \theta_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{V_3 \in \mathcal{V}_3} \sqrt{\prod_{\substack{m \in V_3 \\ m^* = 0}} \theta_{\pi(m)} \prod_{\substack{n \in V_3 \\ n^* = 1}} \theta_{\pi(n)}(\tau, \frac{z}{2})} \right) + O(q^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Также имеем

$$\left.\frac{\partial^2 G_5^{(5)}}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{z=0} = 56\pi i (1 + \delta_{ij}) q \sum_{V \in \mathcal{S}_4^{(4)}} \sum_{m \in V} \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau_{ij}} \prod_{n \neq m} \theta_n + O(q^2) \tag{3.24}$$

$$= 56\pi i (1 + \delta_{ij}) q \frac{\partial G_4^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} + O(q^2). \tag{3.25}$$

Наконец, т.к. вклады всех $V_3 \in \mathcal{V}_3$ обращаются в ноль при $z = 0$, поскольку $\pi(V_3)$ содержат нечетные характеристики, получим:

$$\left. G_5^{(5)} \right|_{z=0} = (1 + 224\, q)\, G_4^{(4)} + O(q^2). \tag{3.26}$$

Заметим, что, т.к. первые члены разложения $G_1^{(1)}(\lambda)$ равны $1 + 224\,q$, то формула (3.26) согласуется с условием факторизации для $G_g^{(g)}$.

3.1.2 Разложение $\vartheta_5^{(5)}$

Проделаем для $\vartheta_5^{(5)}$ то же, что было выше проделано для $G_5^{(5)}$, т.е. возьмем разложение Фурье-Якоби и вычислим производные по z_i, z_j для первых членов разложения.

Заметим, что, т.к. $\vartheta_5(\tau)^{(g)} := \sum_{p_1,\dots,p_g\in\Lambda_5} e^{\pi i(p_k\cdot p_l)\tau_{kl}}$, то имеем следующее:

$$\vartheta_5\begin{pmatrix}\lambda & z^t\\ z & \tau\end{pmatrix} = \sum_{p_1,\dots,p_5\in\Lambda_5} e^{\pi i p_1\cdot p_1\lambda} e^{2\pi i\sum_i p_1 p_i z_i} e^{\pi i\sum_{i,j>1}^5 p_i p_j\tau_{ij}}. \tag{3.27}$$

Первый член в q-разложении легко получить способом, аналогичным примененному в [86], следующим образом:

$$F^{(g)}(\tau,z) := \sum_{p_1,\dots,p_g\in(D_8\oplus D_8)^+} e^{\pi i\sum_{i,j=1}^g p_i p_j\tau_{ij}} \sum_{\tilde p\cdot\tilde p=2} e^{2\pi i\sum_{i=1}^g \tilde p p_i z_i} \tag{3.28}$$

Легко видеть, что векторами нормы 2 являются векторы вида $(\dots,\pm1,\dots,\pm1,\dots,0^8)$ и $(0^8,\dots,\pm1,\dots,\pm1,\dots)$, где $\dots$ обозначает (возможно пустую) последовательность нулей. Всего имеется $2\cdot 4\cdot\binom{8}{2} = 224$ таких векторов.

Первые члены ряда по q, таким образом, имеют следующий вид:

$$\vartheta_5^{(5)}\begin{pmatrix}\lambda & z^t\\ z & \tau\end{pmatrix} = \vartheta_5^{(4)}(\tau) + qF^{(4)}(\tau,z) + O(q^2). \tag{3.29}$$

Запишем выражение для производных по $z_i z_j$ от $F^{(4)}$, линейного по q члена уравнения (3.29), тем же способом, как это было сделано выше для $G_5^{(5)}$. Поскольку векторы нормы 2 такие же, как для D_8, можно использовать тот факт, что

$$\sum_{\tilde p\in(D_8\oplus D_8)^+:\tilde p\cdot\tilde p=2} (p_i\cdot\tilde p)(p_j\cdot\tilde p) = 28\,p_i\cdot p_j, \tag{3.30}$$

который использовался в [86]. Тогда получим следующее:

$$\left.\frac{\partial^2 F^{(4)}}{\partial z_i\partial z_j}\right|_{z=0} = \sum_{p_1,\dots,p_4\in\Lambda_5} e^{\pi i\sum_{i,j=1}^g p_i p_j\tau_{ij}} \sum_{\tilde p\cdot\tilde p=2} (2\pi i)^2(\tilde p p_i)(\tilde p p_j) \tag{3.31}$$

$$= 56\pi i(1+\delta_{ij})\left.\frac{\partial F^{(4)}}{\partial\tau_{ij}}\right|_{z=0} = 56\pi i(1+\delta_{ij})\frac{\partial\vartheta_5^{(4)}}{\partial\tau_{ij}}. \tag{3.32}$$

3.1.3 Окончательное выражение

Для краткости обозначений введем функции $f^{(g)}$, $f_0^{(g)}$ и $f_1^{(g)}$, определенные следующим образом:

$$f^{(g)} := \vartheta_5^{(g)} - G_g^{(g)} \tag{3.33}$$

$$f^{(g)} = f_0^{(g)} + q f_1^{(g)} + O(q^2). \tag{3.34}$$

Рассмотрим $f^{(5)}$ как функцию s. Применив формулу (3.6) к $f^{(5)}$ и заметив, что $f_0^{(5)} = f^{(4)}$, получим

$$f^{(5)}(\tau_s) = f^{(4)}(\tau_0) + s\left(f_1^{(5)}(\tau_0, z) + \sum_{i\le j} \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} \sigma_{ij}(p, p')\right) + O(s^2). \tag{3.35}$$

Разложим данное выражение, используя формулу (3.9), положив $u := x(p) - x(p')$ для некоторой локальной координаты x. Для краткости будем писать

$$S_{ij} := \frac{u^2}{4} \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x} + \frac{u^3}{2} \frac{\partial^2 \omega_i(p)}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_j(p)}{\partial x}. \tag{3.36}$$

Вспомним, что $\sigma_{ij}(p, q) = S_{ij} + O(u^4)$. Тогда получим:

$$f^{(5)}(\tau_s) = f^{(4)}(\tau_0) + s \sum_{i\le j} \left(u^2 \frac{\partial^2 f_1^{(5)}}{\partial z_i \partial z_j} \omega_i(p)\omega_j(p) + \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} S_{ij} + O(u^4)\right) + O(s^2). \tag{3.37}$$

Из формул (3.25) и (3.32) следует, что $\frac{\partial^2 f_1^{(5)}}{\partial z_i \partial z_j} = 56\pi i(1 + \delta_{ij}) \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}}$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} f^{(5)}(\tau_s) = f^{(4)}(\tau_0) + \\ + s \sum_{i\le j} \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} \big(56\pi i(1 + \delta_{ij}) u^2 \omega_i(p)\omega_j(p) + S_{ij} + O(u^4)\big) + O(s^2). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Положим $J^{(g)} := \vartheta_6^{(g)} - \vartheta_7^{(g)}$. Так как $f^{(4)} = \frac{3}{7} J^{(4)}$, (см. раздел 2.6), то предыдущую формулу можно переписать как

$$\begin{aligned} f^{(5)}(\tau_s) = \frac{3}{7} J^{(4)}(\tau_0) + \\ + \frac{3s}{7} \sum_{i\le j} \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} \big(56\pi i(1 + \delta_{ij}) u^2 \omega_i(p)\omega_j(p) + S_{ij} + O(u^4)\big) + O(s^2). \end{aligned} \tag{3.39}$$

В [66, стр. 16-17] Грушевский и Салвати Манни получили похожее выражение для вырождения $J^{(5)}$, отличающееся только численными коэффициентами. Они показали, что член с $\omega_i(p)\omega_j(p)$ обращается в ноль, а $\sum_{i\leq j}\frac{\partial J^{(4)}}{\partial\tau_{ij}}S_{ij}$ не может быть везде тождественно равна нулю, т.к. $J^{(4)}$ является формой Шоттки. Подробности можно найти в работе [66].

Таким образом, $f^{(5)}(\tau_s)$ не обращается в ноль тождественно. Из этого следует, что

$$\vartheta_5^{(5)} \not\equiv G_5^{(5)} \tag{3.40}$$

при ограничении на $\mathcal{J}_5$, как и было обещано.

Из свойств факторизации $G_g^{(g)}$ и $\vartheta_5^{(g)}$ следует, что то же верно и для более старших родов. А именно, в предположении, что $G_g^{(g)}$ корректно определены для $g \geq 6$, из вышеизложенного следует, что $f^{(g)}$ не обращается в ноль тождественно на $\mathcal{J}_g$, для всех $g \geq 5$.

3.2 След $f^{(5)}$

В данном разделе рассмотрен *след* $f^{(5)}$, определяемый как $\sum_m f^{(5)}[m]$, поскольку он входит в формулу для космологической постоянной, и поэтому важен для суперструнных мер в роде 5.

Функции $f^{(5)}[m]$ определяются следующим образом: для произвольной модулярной формы f и элемента модулярной группы $\gamma_m = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, такого что $\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(A^TC) \\ \mathrm{diag}(B^TD) \end{bmatrix} = m$, положим $f[m] := (f|_8\,\gamma_m)$. Если f является модулярной формой относительно $\Gamma(1,2)$, то $f[m]$ не зависит от конкретного выбора γ_m.

В работе [66] Грушевский и Салвати Манни вычисляют следы форм $G_p^{(g)}$. Они используют другие обозначения: в их работе S_i равно $2^{-i}\sum_m G_i[m]$. Их результат состоит в том, что все $\sum_m G_p^{(g)}$ могут быть рекурсивно выражены через $\sum_m G_0^{(g)}$ и $\sum_m G_1^{(g)}$. Заметим, что такая формула верна только для $G_p^{(g)}$ при $p \leq g$, поскольку остальные $G_p^{(g)}$ тождественно обращаются в ноль, и для $1 \leq n \leq 4$.

$$2\sum_m G_{n+1}^{(g)}[m] = \frac{2^{2(g-n+1)}-1}{(2^n-1)\,(2^{n+1}-1)}\sum_m G_{n-1}^{(g)}[m] - \frac{3}{2^{n+1}-1}\sum_m G_n^{(g)}[m] \tag{3.41}$$

Поскольку $G_0^{(5)}[m] = \theta_m^{16}$ и $G_1^{(5)}[m] = \theta_m^8 \sum_{n\neq 0} \theta_{m+n}^8$, легко видеть, что $\sum_m G_0^{(5)}[m] = \sum_m \theta_m^{16} = \vartheta_7$, и $\sum_m G_1^{(5)}[m] = \left(\sum_m \theta_m^8\right)^2 - \sum_m \theta_m^{16} = \vartheta_6 - \vartheta_7$. Получим:

$$\sum_m G_5^{(5)}[m] = \frac{32}{217}\left(950\,\vartheta_6^{(5)} - 733\,\vartheta_7^{(5)}\right) \tag{3.42}$$

$$\sum_m G_4^{(4)}[m] = -\frac{16}{7}\left(22\,\vartheta_6^{(4)} - 29\,\vartheta_7^{(4)}\right). \tag{3.43}$$

Из [86, стр. 28] известно, что

$$\sum_m \vartheta_5^{(g)}[m] = 2^{g-1}\left(\vartheta_6^{(5)} + \vartheta_7^{(5)}\right). \tag{3.44}$$

Совмещая вышеуказанные факты, получим следующие выражения для следа $f^{(g)}$ для случаев родов 4 и 5:

$$\sum_m f^{(4)}[m] = -\frac{2^3\cdot 3\cdot 17}{7} J^{(4)} \tag{3.45}$$

$$\sum_m f^{(5)}[m] = \frac{2^4\cdot 3^2\cdot 11\cdot 17}{7\cdot 31} J^{(5)}. \tag{3.46}$$

Из этого следует, что, несмотря на то, что $f^{(5)}$ является параболической формой только для $\Gamma(1,2)_5$, $\sum_m f^{(5)}[m]$ – параболическая форма для всей Γ_5. Заметим, что, т.к. на $\overline{\mathcal{M}_5}$ существует единственный дивизор наклона 8 [67], то любая параболическая форма веса 8 относительно полной модулярной группы Γ_5 будет пропорциональна $J^{(5)}$, т.е. наличие соотношения вида (3.46) не удивительно. Конечно, появление соотношения типа (3.45) также не удивительно, поскольку существует ровно одна нетривиальная форма (форма Шоттки), обращающаяся в ноль на всем $\mathcal{J}_4$; нас, однако, в следующем разделе будут интересовать точные коэффициенты в этих соотношениях.

В роде g всего имеется $2^{g-1}(2^g+1)$ четных характеристик. Поскольку $J^{(g)}$ является модулярной формой относительно всей модулярной группы Γ_g, ее след просто равен числу четных характеристик, умноженному на $J^{(g)}$. Заметим, что $\frac{\sum_m f^{(5)}[m]}{\sum_m f^4[m]} \neq \frac{\sum_m J^5[m]}{\sum_m J^4[m]}$. Этот факт будет использован в разделе 3.4 для того, чтобы получить анзац для суперструнных мер в роде 5, для которого одновременно обращаются в ноль космологическая постоянная в роде 5 *и* двухточечная функция в роде 4; в статье [86] было показано, что, используя только формы ОПСМЮ, это невозможно, если требовать также выполнения остальных условий, накладываемых на суперструнные меры

Замечание. Заметим, что если бы $f^{(5)}$ обращалась в ноль тождественно на $\mathcal{J}_5$, то и ее след также обращался бы в ноль тождественно. Поскольку $J^{(5)}$ не равна тождественно нулю на $\mathcal{J}_5$ (см. [66]), то это может служить вторым, на этот раз неявным, доказательством того, что $f^{(5)}$ не обращается в ноль тождественно на локусе якобианов.

3.3 Различие между $f^{(5)}$ и $J^{(5)}$

Т.к. теперь известно, что форма $f^{(5)}$ не обращается в ноль тождественно на $\mathcal{J}_5$, возникает естественный вопрос, является ли она линейно независимой относительно других уже известных $\Gamma(1,2)$-модулярных форм на $\mathcal{J}_5$. Используя свойство факторизации для анзацев Грушевского и ОПСМЮ, можно исключить всех кандидатов, кроме одного. Поскольку (см. раздел 2.6) $f^{(4)} = \frac{3}{7}J^{(4)}$, имеем:

$$f^{(5)}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \vartheta_5^{(1)} f^{(4)} = \frac{3}{7}\vartheta_5^{(1)} J^{(4)}. \tag{3.47}$$

Все решеточные тэта-константы обладают простым свойством факторизации $\vartheta_p^{(g)}(\tau_1 \oplus \tau_2) = \vartheta_p^{(k)}(\tau_1)\vartheta_p^{(g-k)}(\tau_2)$, а все остальные известные модулярные формы веса 8 относительно $\Gamma(1,2)$ могут быть через них выражены, согласно результатам предыдущей главы. Единственной линейной комбинацией данных форм, обладающей свойством (3.47), является $J^{(5)}$.

Покажем, что $f^{(5)}$ и $J^{(5)}$ не могут быть пропорциональны друг другу на локусе якобианов $\mathcal{J}_5$. Вспомним, что

$$\sum_m f^{(5)}[m] = \frac{3\cdot 17}{7\cdot 31}\sum_m J^{(5)}[m]. \tag{3.48}$$

Сравним формулу для вырождения $f^{(5)}$, найденную в разделе 3.1,

$$f^{(5)} = f^{(4)} + \frac{3}{7}s\sum_{i\le j}\frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}}\left(56u^2(1+\delta_{ij})\omega_i(q)\omega_j(q) + u^2\frac{1}{4}\frac{\partial\omega_i}{\partial x}(q)\frac{\partial\omega_j}{\partial x}(q)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}u^3\frac{\partial^2\omega_i(q)}{\partial x^2}\frac{\partial\omega_j(q)}{\partial x} + O(u^4)\right) + O(s^2), \tag{3.49}$$

с аналогичным выражением для $J^{(5)}$, найденным в [66],

$$J^{(5)} = J^{(4)} + s \sum_{i \le j} \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} \left(30u^2(1+\delta_{ij})\omega_i(q)\omega_j(q) + u^2 \frac{1}{4} \frac{\partial \omega_i}{\partial x}(q) \frac{\partial \omega_j}{\partial x}(q) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} u^3 \frac{\partial^2 \omega_i(q)}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_j(q)}{\partial x} + O(u^4) \right) + O(s^2). \quad (3.50)$$

Поскольку, из [66], имеем

$$\sum_{i \le j} \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} u^2 (1+\delta_{ij}) \omega_i(q) \omega_j(q) = 0, \quad (3.51)$$

$$f^{(4)} = \frac{3}{7} J^{(4)}, \quad (3.52)$$

то можно сделать вывод, что единственная линейная комбинация $f^{(5)}$ и $J^{(5)}$, которая может обращаться в ноль в первом порядке разложения около границы, это $f^{(5)} - \frac{3}{7} J^{(5)}$, модулярная форма относительно $\Gamma(1,2)_5$. Но из уравнения (3.48) известно, что $f^{(5)} \neq \frac{3}{7} J^{(5)}$ на локусе якобианов. Следовательно, $f^{(5)}$ не может быть пропорциональна $J^{(5)}$ на всем $\mathcal{J}_5$ с фиксированным коэффициентом пропорциональности.

3.4 Двухточечная функция в роде 4

Матоне и Вольпато в работе [86] показали, что из форм ОПСМЮ невозможно построить суперструнные меры в роде 5, которые бы удовлетворяли всем требованиям, в предположении, что предложенный ими метод получения двухточечной функции в роде 4 верен. Более конкретно, если потребовать, чтобы космологическая постоянная в роде 5 обращалась в ноль, то получится, что двухточечная функция для рода 4, получаемая вырождением формулы для анзаца для рода 5, не обращается в ноль тождественно. Таким образом, возникает вопрос, можно ли получить анзац для рода 5, удовлетворяющий всем требованиям, если добавить к формам ОПСМЮ форму $G_5^{(5)}$. Оказывается, что ответ на этот вопрос положительный, что и показано ниже.

Чтобы получить двухточечную функцию в роде 4 из мер в роде 5, будем следовать процедуре, предложенной Матоне и Вольпато. Подробности данной процедуры см. в исходной работе [86]. Рассмотрим

$$X_{NS}[(\epsilon,\delta)] := \frac{1}{2} \left(\tilde{\Xi}^{(g+1)} \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & \delta \end{bmatrix} + \tilde{\Xi}^{(g+1)} \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & \delta \end{bmatrix} \right) \quad (3.53)$$

и перетянем одну ручку у семейства кривых. Тогда член, линейный по параметру возмущения, будет двухточечной функцией. Поскольку рассуждение в исходной работе [86] достаточно длинно, будем рассматривать только то, что происходит с членами $c_J J^{(5)} + c_f f^{(5)}$, которые мы добавляем к мере вместо члена $-B_5 J^{(5)}$, имеющегося там исходно. Здесь B_5 – коэффициент перед $J^{(5)}$ в космологической постоянной в исходном анзаце ОПСМЮ. При вырождении кривой в пределе $s \to 0$ получим поверхность с двумя особыми точками a и b. Положим $\nu_*^2(c) = \partial_i \theta_*(0) \omega_i(c)$ для нечетной тэта-характеристики $*$ и определим

$$E(a,b) := \frac{\theta_*(A_{ab})}{\nu_*(a)\nu_*(b)}, \tag{3.54}$$

называемую также элементарной формой (см. [55]). Пусть $A_2[m](a,b)$ – двухточечная функция. С точностью до множителя, не зависящего от e, имеем (для некоторого выбора локальных координат):

$$X_{NS}[m] = sE(a,b)^2 A_2[m](a,b) + O(s^2), \tag{3.55}$$

следуя [86]. Для ОПСМЮ-составляющей анзаца будем в данном разделе придерживаться обозначений Матоне и Вольпато, т.е. будем обозначать решеточные тэта-ряды через Θ_k с отличающейся от использовавшейся выше нумерацией для $k \leq 5$, чтобы было легче сравнивать формулы. Приведем здесь таблицу соответствия обозначений:

Обозначение из [86]	Решетка	Наше обозначение
Θ_0	$(D_8 \oplus D_8)^+$	ϑ_5
Θ_1	$\mathbb{Z} \oplus A_{15}^+$	ϑ_4
Θ_2	$\mathbb{Z}^2 \oplus (E_7 \oplus E_7)^+$	ϑ_3
Θ_3	$\mathbb{Z}^4 \oplus D_{12}^+$	ϑ_2
Θ_4	$\mathbb{Z}^8 \oplus E_8$	ϑ_1
Θ_5	$\mathbb{Z}^{16}$	ϑ_0
Θ_6	$E_8 \oplus E_8$	ϑ_6
Θ_7	D_{16}^+	ϑ_7

Пусть N_k – число векторов нормы 2 в решетке, соответствующей Θ_k. Обозначим за c_k^g коэффициент при Θ_k в анзаце ОПСМЮ для рода g, с нормировкой из [65] (c_k^g в 2^{4g} раз больше, чем соответствующие коэффициенты в [95]).

Для анзаца ОПСМЮ имеем, из [86]:

$$X_{NS}[m](s,\Omega,z=0) = \sum_{k=0}^{7} c_k^5 \left(1 + N_k s + O(s^2)\right) \Theta_k^{(4)}[m](\Omega). \tag{3.56}$$

Перепишем предыдущую формулу следующим образом:

$$X_{NS}[m](s,\tau,z) = T_0[m](\tau,z) + s\,T_1[m](\tau,z) + O(s^2). \tag{3.57}$$

Заметим, что решетки $E_8 \oplus E_8$ и D_{16}^+ содержат по 480 векторов нормы 2, а решетка $(D_8 \oplus D_8)^+$ содержит 224 таких вектора. Также отметим, что линейный по s член в выражении для $G_5^{(5)}$, представленном в формуле (3.26), равен $244\,G_4^{(4)}$ при $z = 0$. Таким образом, имеем

$$T_0[m](\tau,0) = \sum_{k=0}^{5} c_k^5 \Theta_k^{(4)}[m] + cJ^{(4)} + c_f f^{(4)} = \left(c_J - \frac{2^5 \cdot 3}{7}\right) J^{(4)} + c_f f^{(4)}, \tag{3.58}$$

$$T_1[m](\tau,0) = 128\Xi^{(4)}_{OPSMY}[m](\tau) + \left(480c_J - \frac{720 \cdot 2^5 \cdot 3}{7}\right) J^{(4)} + 224c_f f^{(4)} \tag{3.59}$$

При $s \to 0$ получим

$$\begin{aligned} X_{NS}[m] = s\sum_{i,j}^{4} 2\pi i E(a,b)^2 \omega_i(a)\omega_j(b)(1+\delta_{ij}) \left(\left(c_J - \frac{2^5 \cdot 3}{7}\right)\frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} + c_f \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}}\right) \\ + sT_1^{(4)}[m](\tau, A_{ab}) + O(s^2). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Вычислить $T_1[m](\tau, A_{ab})$ из $T_1[m](\tau,0)$ можно, используя тот факт, что $T_1[m]$ является сечением $|2\Theta|$, из-за модулярных свойств X_{NS}. Здесь Θ – дивизор $\theta_0(z)$. Матоне и Вольпато доказали, что из этого следует, что

$$T_1[m](\tau, A_{ab}) = E(a,b)^2 \left(T_1[m](\tau,0)\omega(a,b) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{4} \partial_i\partial_j T_1[m](\tau,0)\omega_i(a)\omega_j(b)\right). \tag{3.61}$$

Также имеемы $f^{(4)} = \frac{3}{7}J^{(4)}$, что является формой Шоттки, которая обращается в ноль на $\mathcal{J}_4$. Таким образом, имеем $T_1[m](\tau,0) = 128\,\Xi^{(4)}_{OPSMY}$ на локусе якобианов. Получим

$$\begin{aligned} A_2[m](a,b) = 128\,\Xi^{(4)}[m](\tau)\omega(a,b) + \sum_{i,j}^{4} 2\pi i(1+\delta_{ij})\omega_i(a)\omega_j(b)\,\cdot \\ \cdot\left(\left(c_J - \frac{2^5\cdot 3}{7}\right)\frac{\partial J^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} + c_f\frac{\partial f^{(4)}}{\partial \tau_{ij}} + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j T_1^{(4)}[e](\tau,0)\right). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Обозначим за $f_1^{(5)}$ линейный по s член в s-разложении $f^{(5)}$. Используя функции

$$F_k^{(g)}(\tau,z) := \sum_{p_1,\dots,p_g\in\Lambda_k} e^{\pi i\sum_{i,j=1}^{g} p_ip_j\tau_{ij}} \sum_{\tilde p\cdot\tilde p=2} e^{2\pi i\sum_{i=1}^{g}\tilde p p_i z_i} \tag{3.63}$$

получим следующую модифицированную формулу

$$\partial_i\partial_j T_1^{(4)}[m](\tau,0) = \partial_i\partial_j\left(\sum_{k=0}^{5} c_k^5 F_k^{(4)}[m](\tau,0) + c_J\left(F_6^{(4)} - F_7^{(4)}\right) + c_f f_1^{(5)}\right). \tag{3.64}$$

Следуя Матоне и Вольпато, введем коэффициенты s_k^g и t_k^g, определяемые из следующей формулы:

$$\partial_i\partial_j c_k^{g+1} F_k^{(g)}[m](\tau,0) = 2\pi i(1+\delta_{ij})\partial_i\partial_j s_k^g\Theta_k^{(g)}[m] - t_k^g\Theta_k^{(g)}\partial_i\partial_j\log\theta[m](\tau,0). \tag{3.65}$$

Заметим, что $f_1^{(5)}$ обладает следующим свойством: $\frac{\partial^2 f_1^{(5)}}{\partial z_i\partial z_j} = 28(2\pi i)(1+\delta_{ij})\frac{\partial f^{(4)}}{\partial\tau_{ij}}$ (см. формулы (3.25) и (3.32)). Получим:

$$\begin{aligned}\partial_i\partial_j T_1^{(4)}[m](\tau,0) = 2\pi i(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial\tau_{ij}}&\left(\sum_{k=0}^{5} s_k^4\Theta_k^{(4)}[e](\tau) + 60c_J J^{(4)} + 28c_f f^{(4)}\right)\\ &- \left(\sum_{k=0}^{5} t_k^4\Theta_k^{(4)}[m](\tau)\right)\partial_i\partial_j\log\theta[m](\tau,0).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Следуя далее вычислениям из [86], для первого члена внутри больших скобок получим:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} s_k^4\Theta_k^{(4)}[m](\tau) + 60c_J J^{(4)} + 28c_f f^{(4)} &= 32\Xi^{(4)}[m](\tau)\\ &+ \left(60c_J + \frac{3\cdot 28}{7}c_f - \frac{152\cdot 2^5\cdot 3}{7}\right)J^{(4)}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Таким образом, проведя модифицированный анзац $\tilde{\Xi}$ через вырождение, получим несколько отличающуюся формулу для двухточечной функции:

$$\begin{aligned}A_2[m](a,b) = {} & 128\Xi^{(4)}[m](\tau)\omega(a,b) \\ & - \sum_{i,j}^{4}\omega_i(a)\omega_j(b)\Bigg[128\Xi^{(4)}[m](\tau)\partial_i\partial_j\log\theta[m](\tau,0) \\ & \qquad - 2\pi i(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial\tau_{ij}}\Bigg\{16\Xi^{(4)}[e](\tau) \\ & \qquad\qquad + \left((30+1)c_J + (6+1)c_f - \frac{(76+1)\cdot 2^5\cdot 3}{7}\right)J^{(4)}\Bigg\}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.68}$$

Последним шагом является взятие суммы по всем четным характеристикам. В результате, при ограничении на локус якобианов $\mathcal{J}_4$, получим

$$\sum_m A_2[m](a,b) = 2^3(2^4+1)\,C_4\sum_{i,j}^{4}\omega_i(a)\omega_j(b)2\pi i(1+\delta_{ij})\frac{\partial J^{(4)}}{\partial\tau_{ij}} \tag{3.69}$$

$$C_4 := \left(16B_4 - 8D_4 - 77\frac{2^5\cdot 3}{7} + 31c_J + 7c_f\right). \tag{3.70}$$

Итак, чтобы выражение для $\sum_m A_2[m](a,b)$ тождественно обращалось в ноль, необходимо, чтобы было выполнено следующее условие:

$$31c_J + 7c_f = 77\frac{2^5\cdot 3}{7} + 8\frac{2^7\cdot 3}{7\cdot 17} - \frac{2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11}{7\cdot 17}. \tag{3.71}$$

Космологическая постоянная для рода 5 для анзаца ОПСМЮ, из которого удален член $-B_5J^{(5)}$, равна (см. [86]),

$$\sum_m\sum_{k=0}^{5}c_k^5\Theta_k[m] = -2^4(2^5+1)\frac{2^5\cdot 17}{7\cdot 11}J^{(5)}. \tag{3.72}$$

Из результатов раздела 3.2 для следа $f^{(5)}$ имеем:

$$\sum_m f^{(5)}[m] = \frac{2^4\cdot 3^2\cdot 11\cdot 17}{7\cdot 31}J^{(5)}. \tag{3.73}$$

Поскольку $J^{(5)}$ является модулярной формой относительно полной модулярной группы Γ_5, ее след равен числу четных характеристик, умноженному на нее саму, т.е.

$$\sum_m J^{(5)}[m] = 2^4(2^5+1)J^{(5)}. \tag{3.74}$$

Таким образом, чтобы космологическая постоянная в роде 5 обращалась в ноль, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$2^4(2^5+1)c_J + \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17}{7 \cdot 31} c_f = 2^4(2^5+1)\frac{2^5 \cdot 17}{7 \cdot 11}. \tag{3.75}$$

Решая совместно линейные уравнения (3.71) и (3.75), получим:

$$c_J = -\frac{222647008}{217}, c_f = \frac{77245568}{17}. \tag{3.76}$$

Таким образом, предлагаемый нами анзац для рода 5, который удовлетворяет всем условиям, записывается как

$$\boxed{\tilde{\Xi} := \Xi^{(5)}_{OPSMY} - \frac{222647008}{217} J^{(5)} + \frac{77245568}{17} f^{(5)}}, \tag{3.77}$$

а вышеизложенные рассуждения приводят к следующей теореме:

Теорема 3.4.1 $\tilde{\Xi}$ – *единственная линейная комбинация известных на данный момент модулярных форм веса 8 в роде 5, для которой обращаются в ноль и соответствующая ей космологическая постоянная в роде 5, и получаемая из нее двухточечная функция в роде 4.*

3.5 Случай рода 6

Коротко обсудим текущее состояние анзацев для суперструнных мер в роде 6 и возможность их улучшения с использованием полученных выше результатов.

Обозначим за $\Xi^{(6)}_m$ анзац Грушевского для рода 6[1] (см. [65, Th.22]). Введем следующее определение:

$$\tilde{\Xi}^{(6)}_m := \Xi^{(g)}_m + k_6 f^{(6)} + l_6 J^{(6)}. \tag{3.78}$$

Для рода 6 из условия факторизации следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}^{(6)}_m \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \tilde{\tau} \end{pmatrix} = \Xi^{(5)}_m \Xi^{(1)}_m + k_6 \left(\vartheta^{(1)}_5 \theta^{(5)}_5 - G^{(1)}_1 G^{(5)}_5 \right) + l_6 \left(\vartheta^{(1)}_6 \vartheta^{(5)}_6 - \vartheta^{(1)}_7 \vartheta^{(5)}_7 \right) \\ \stackrel{?}{=} \Xi^{(5)}_m \Xi^{(1)}_m + \Xi^{(1)}_m \left(k_5 f^{(5)} + l_5 J^{(5)} \right),\end{aligned} \tag{3.79}$$

[1]Заметим, что неизвестно, корректно ли он определен, т.к. он содержит корни четвертой степени из $P(V)$ для $V \in \mathcal{S}^{(6)}_6$. Из работы [100] известно, что функция $G^{(5)}_5$ на локусе якобианов определена корректно.

а, т.к. $G_1^{(1)} = \vartheta_5^{(1)}$, $\Xi^{(1)} = \frac{1}{2}\left(G_0^{(1)} - G_1^{(1)}\right)$ и $\vartheta_6^{(1)} = \vartheta_7^{(1)} = \sum_m G_0^{(1)}[m]$, из этого следует, что

$$k_6 G_1^{(1)}[m] + l_6 \sum_n G_0^{(1)}[n] = \frac{1}{2}(k_5 + l_5)\left(G_0^{(1)}[m] - G_1^{(1)}[m]\right), \tag{3.80}$$

откуда следует, что $k_6 = l_6 = k_5 + l_5 = 0$. Из теоремы 3.4.1 и формулы (3.77) следует, что $k_5 + l_5 \neq 0$. Таким образом, используя известные на данный момент модулярные формы веса 8 для рода 6, получить ответ для суперструнных мер в роде 6, который бы удовлетворял всем известным условиям, невозможно.

3.6 Выводы

В результате проведенных исследований суперструнных мер в пятом порядке теории возмущений:

- доказано, что формы $G_5^{(5)}$ и ϑ_5 не совпадают тождественно на локусе якобианов;
- доказано, что анзацы Грушевского и ОПСМЮ не совпадают для случая $g = 5$;
- предложен новый анзац для суперструнных мер в роде 5, который удовлетворяет, помимо условия факторизации, условию обращения в ноль космологической постоянной в роде 5 и двухточечной функции в роде 4;
- доказано, что из модулярных форм, используемых для построения анзацев Грушевского и ОПСМЮ, невозможно построить анзац для суперструнных мер в роде 6, который удовлетворял бы всем условиям.

Глава 4

Симметрия обращения для когомологических теорий поля

В данной главе описывается представление действия группы Гивенталя в виде суммы по графам, и с помощью этого доказывается, что преобразование обращения может быть представлено в виде действия некоторого конкретного элемента группы Гивенталя простого вида. Также рассмотрена связь с преобразованиями Шлезингера и следствия для интегрируемых иерархий.

4.1 Представление действия группы Гивенталя в виде суммы по графам

В данном разделе описывается представление действия элементов группы Гивенталя [57, 59] на когомологических теориях поля в виде суммы по графам.

4.1.1 Когомологические теории поля и фробениусовы многообразия

Рассмотрим пространство статсумм n-мерных когомологических теорий поля

$$Z = \exp(\sum_{g\geq 0} \hbar^{g-1}\mathcal{F}_g) \tag{4.1}$$

в переменных $t^{d,\mu}$, $d \geq 0$, $\mu = 1, \ldots, n$. Такая статсумма всегда ручная (определение *ручных* формальных рядов см., например, в [14]); взвешенная степень любого монома $\hbar^g t^{d_1,\mu_1} \cdots t^{d_k,\mu_k}$, входящего с ненулевым коэффициентом, не выше, чем $3g - 3 + k$. Здесь вес $\hbar$ положен равным 0, а вес $t^{d,\mu}$ положен равным d. Пусть на пространстве $V := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ примарных полей, соответствующих индексам $\mu = 1, \dots, n$ имеется фиксированное скалярное произведение η. Кроме того, за $e_{\mathbf{1}}$ обозначим вектор из V, который играет роль единицы в соответствующем семействе фробениусовых алгебр.

Будем работать в плоских координатах, т.е. $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha,n-\beta}$, а $e_{\mathbf{1}} = e_1$.

Информация, содержащаяся в составляющей рода ноль когомологической теории поля, эквивалентна информации фробениусова многообразия. Т.е. если дана когомологическая теория поля со статсуммой $\mathcal{F}_0$, то можно получить потенциал фробениусова многообразия следующим образом:

$$F(t^1, \dots, t^n) = \mathcal{F}_0(t^{d,\mu})|_{t^{d,\mu}=0 \ \text{ для } \ d>0}$$

где произведено отождествление $t^\mu := t^{0,\mu}$.

С другой стороны, если дано фробениусово многообразие, то можно восстановить члены с потомками в роде ноль, пользуясь топологической рекурсией [81].

На самом деле, верно и более сильное утверждение о том, что структуру когомологической теории поля *во всех родах* можно восстановить из информации фробениусова многообразия. Это следует из результатов Гивенталя и Телемана [57, 58, 104].

Хотя описываемая ниже конструкция дана для общего случая полного разложения по родам для когомологической теории поля, ее можно ограничить на составляющую рода ноль (с потомками или без потомков), и, таким образом, интерпретировать как действие на пространстве фробениусовых многообразий. Именно так и будет сделано ниже.

Обозначение 4.1.1 *Определим* корреляторы

$$\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2)\cdots\tau_{d_k}(\alpha_k)\rangle_g$$

из следующей формулы:

$$\mathcal{F}_g = \sum \frac{\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2)\cdots\tau_{d_k}(\alpha_k)\rangle_g}{|\mathrm{Aut}((\alpha_i, d_i)_{i=1}^k)|} t^{d_1,\alpha_1}\cdots t^{d_k,\alpha_k}, \tag{4.2}$$

где $|\mathrm{Aut}((\alpha_i, d_i)_{i=1}^k)|$ *обозначает количество автоморфизмов набора мультииндексов* (α_i, d_i)*, а сумма берется таким образом, что каждый моном* $t^{d_1,\alpha_1}\cdots t^{d_n,\alpha_n}$ *учитывается ровно один раз.*

4.1.2 Дифференциальные операторы

Изложим формулировку инфинитезимального действия группы Гивенталя в терминах дифференциальных операторов, следуя работам [75–77].

Рассмотрим последовательность операторов $r_l \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $l \geq 1$, такую что операторы с четными индексами симметрические, а с нечетными индексами кососимметрические. Обозначим за $(r_l z^l)\hat{}$ следующий дифференциальный оператор:

$$(r_l z^l)\hat{} := -(r_l)^{\mu}_{\mathbf{1}} \frac{\partial}{\partial t^{l+1,\mu}} + \sum_{d=0}^{\infty} t^{d,\nu} (r_l)^{\mu}_{\nu} \frac{\partial}{\partial t^{d+l,\mu}} \tag{4.3}$$
$$+ \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+1} (r_l)^{\mu,\nu} \frac{\partial^2}{\partial t^{i,\mu} \partial t^{l-1-i,\nu}}.$$

Из результатов Гивенталя следует, что в результате действия оператора

$$\hat{R} := \exp(\sum_{l=1}^{\infty} (r_l z^l)\hat{})$$

на ручных формальных рядах снова получаются ручные формальные ряды. В основной теореме статьи [54] утверждается, что действие такого оператора сохраняет свойство того, что Z является производящей функцией корреляторов когомологической теории поля на таргет-пространстве (V, η) (см. также [70, 104]).

Замечание. Вышеописанное действие операторов обычно называют действием *верхнетреугольной группы Гивенталя.* Имеется также действие *нижнетреугольной* группы, но здесь мы его не рассматриваем.

4.1.3 Выражение в терминах графов

Опишем действие группы Гивенталя в терминах графов. Рассмотрим связный граф γ произвольного рода, в котором отсутствуют вершины валентности 2. Все вершины валентности 1 вместе с ведущими к ним ребрами будем называть *листьями.* Говоря о вершинах данного графа, будем иметь в виду только внутренние вершины, т.е. те, у которых валентность больше, либо равна 3. Аналогично, говоря о ребрах данного графа, будем иметь в виду только внутренние ребра, т.е. такие, что вершины на обоих их концах имеют валентность большую, либо равную 3.

Каждому такому графу сопоставим определенную дополнительную структуру. Во-первых, для каждого ребра выберем произвольным образом ориентацию (вклад данного графа от этого зависеть не будет). Во-вторых, каждому элементу графа (листу, ребру или вершине) сопоставим определенный тензор на пространстве $V[[z]]$ (здесь z – формальная переменная), который также зависит от $\hbar$ и $t^{d,\mu}$ для $d \geq 0$ и $1 \leq \mu \leq n$. Правила сопоставления данных тензоров подробно описаны ниже. Граф вместе с такой дополнительной структурой будем обозначать $\check{\gamma}$, и будем также называть *раскрашенным графом.*

Обозначение 4.1.2 Полуребром *будем называть либо лист, либо ребро вместе с выбором одного из двух его концов.* Половиной внутреннего ребра *будем называть только второй из этих вариантов, т.е. ребро вместе с выбором одного из двух его концов.*

Листья

Листу будем сопоставлять один из двух типов векторов. Первый тип соответствует второму члену оператора (4.3) и задается следующим выражением:

$$\mathcal{L} := \exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} r_l z^l\right)\left(\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{n} e_\mu t^{d,\mu} z^d\right). \tag{4.4}$$

Лист с дополнительной структурой такого типа, будем также называть *обычным* листом.

Вектор второго типа определяется выражением

$$\mathcal{L}_0 := -z \cdot \left(\exp(\sum_{l=1}^{\infty} r_l z^l) - \mathbf{I}\right)(e_{\mathbf{1}}) \tag{4.5}$$

и соответствует дилатонному сдвигу (первому члену в операторе (4.3)). Лист с дополнительной структурой такого типа, будем называть *дилатонным* листом.

Ребра

Заметим, что на ребре уже выбрана ориентация. Мы собираемся сопоставить ему бивектор. Используя скалярное произведение, можно превратить любой (косо-)симметрический оператор в бивектор, однако это требует выбора знака. Некоторый выбор знака уже был сделан в дифференциальном операторе (4.3), когда в первый раз появилась запись $(r_l)^{\mu\nu}$. Зафиксируем этот выбор. В случае кососимметрического оператора, бивектор также будет кососимметрическим, поэтому чтобы зафиксировать неопределенность, используем ориентацию ребра. Ниже будет видно, что от ориентации ребер ничего не зависит.

Сопоставим ребру бивектор $\mathcal{E} \in (V[[z]])^{\otimes 2}$. Первая копия $V[[z]]$ соответствует началу ребра, а вторая – его концу. Для определенности будем обозначать формальную переменную, соответствующую первой копии, за z, а соответствующую второй копии – за w. Положим

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}\eta,$$

где $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathrm{Hom}(V, V)[[z, w]]$ определяется выражением

$$\tilde{\mathcal{E}} := -\hbar \cdot \frac{\exp\left(\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1} r_l z^l\right) \exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} r_l w^l\right) - \mathbf{I}}{z + w}.$$

Перепишем данную формулу в более удобном виде. Обозначим за $r(z)$ ряд $\sum_{l=1}^{\infty} r_l z^l$. Тогда для $\tilde{\mathcal{E}}$ получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= -\hbar \cdot \frac{\exp(r(z)^*) \exp(r(w)) - \mathbf{I}}{z + w} \\ &= -\hbar \cdot \frac{\exp\left(-r(-z)\right) \exp(r(w)) - \mathbf{I}}{z + w}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

(ср. с аналогичной формулой в [104]).

Изменение ориентации ребра соответствует замене оператора на сопряженный вместе с заменой z на w. Из уравнени (4.6) следует, что $\tilde{\mathcal{E}}^*|_{z \leftrightarrow w} = \tilde{\mathcal{E}}$. Поскольку метрика симметрична, легко видеть, что от ориентации ребер ничего не зависит.

Вершины

Набор корреляторов порядка n, соответствующих формальному ряду $\mathcal{F}_g$ по переменным $t^{d,\mu}$ можно рассматривать как тензор $\mathcal{V}_g[n] \in (V^*[[z]])^{\otimes n}$. Более конкретно, тензор $\mathcal{V}_g[n]$ отображает $e_{\mu_1} z_1^{d_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_n} z_n^{d_n}$ в коррелятор $\langle \tau_{d_1}(e_{\mu_1}) \cdots \tau_{d_n}(e_{\mu_n})_g \rangle$ (который является просто числом), а затем данное определение можно продолжить по линейности.

Определив таким образом тензоры $\mathcal{V}_g[n]$, сопоставим каждой вершине валентности n тензор

$$\mathcal{V}[n] := \sum_{g \geq 0} \hbar^{g-1} \mathcal{V}_g[n]. \tag{4.7}$$

Свертка тензоров

Рассмотрим граф с дополнительной структурой $\check{\gamma}$. Каждому листу поставлен в соответствие вектор из $V[[z]]$ (также зависящий от $\hbar$ и $t^{d,\mu}$), каждому ребру – бивектор из $(V[[z]])^{\otimes 2}$ (также зависящий от $\hbar$), причем одна копия $V[[z]]$ для ребра поставлена в соответствие его началу, а другая – его концу.

В каждой вершине валентности n свернем тензор $\mathcal{V}[n]$ с тензорным произведением дополнительных структур полуребер, приходящих в данную вершину. Произведя такую свертку в каждой вершине, получим в итоге скаляр, являющийся формальным рядом по $\hbar$ и $t^{d,\mu}$. Обозначим данный скаляр за $\mathcal{C}(\check{\gamma})$.

Окончательная формула

Итак, окончательный ответ для результата действия элемента группы Гивенталя на статсумму когомологической теории поля в виде суммы по графам можно записать в виде следующей формулы:

$$\log(\hat{R}(Z)) = \sum_{\check{\gamma}\in\check{\Gamma}} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(\check{\gamma})}\mathcal{C}(\check{\gamma}), \tag{4.8}$$

где $\check{\Gamma}$ обозначает множество всех графов с дополнительной структурой, описанных выше, а $\mathrm{Aut}(\check{\gamma})$ – множество автоморфизмов $\check{\gamma}$.

В дальнейшем, говоря о графе, будем иногда иметь в виду функцию переменных $\hbar$ и $t^{d,\mu}$, сопоставляемую ему графическим формализмом. Из комбинаторных свойств множества графов следует, что данный ответ является формальным рядом того же типа, что и ряд в формуле (4.1).

Замечание 4.1.3 *Заметим, что единственным выбором дополнительной структуры является выбор того, сопоставляется данному листу $\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}_0$. На ребрах и листьях в виде дополнительных структур изначально стоят некоторые суммы. Используя линейность функций, с которыми сворачиваются вершины, можно заменить граф, у которого на листе или ребре стоит сумма, на сумму графов, у которых на соответствующих листьях или ребрах стоят отдельные члены вышеупомянутой суммы. Ниже подобная свобода будет использована в вычислениях, т.е. мы будем работать, в частности, с графами, не являющимися элементами $\check{\Gamma}$.*

Замечание. В свертке тензоров степень формальной переменной z свернута с первым индексом переменной $t^{d,\mu}$. Таким образом, в контексте когомологической теории поля, степень z нужно интерпретировать как степень ψ-класса на соответствующем полуребре.

Тривиальный случай

Рассмотрим тривиальный случай действия группы Гивенталя, т.е. положим $r_l = 0$, $l = 1, 2, \ldots$. В данном случае $\mathcal{E} = 0$, что означает, что только графы, имеющие одну вершину и не имеющие ребер, дают ненулевой вклад. Кроме того, $\mathcal{L}_0$ также обращается в ноль, поэтому нужно вычислить только следующее выражение:

$$\frac{1}{n!}\mathcal{V}[n](\underbrace{\mathcal{L}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}}_{n\text{ раз}}),$$

которое, как легко видеть из определения $\mathcal{V}[n]$, представляет собой однородную компоненту порядка n в $\sum_{g\geq 0}\hbar^{g-1}\mathcal{F}_g$. Таким образом, сумма по всем графам от их вкладов в данном случае дает просто исходный формальный ряд Z, как и следовало ожидать.

Дилатонное уравнение и соотношение топологической рекурсии

Вспомним хорошо известные дилатонное уравнение и соотношение топологической рекурсии [109], имеющие место для любой когомологической теории поля.

В терминах корреляторов *дилатонное уравнение* имеет следующий вид:

$$\left\langle \tau_1(1)\tau_{b_1}(\alpha_1)\ldots\tau_{b_k}(\alpha_k)\right\rangle_g = (2g-2+k)\left\langle \tau_{b_1}(\alpha_1)\ldots\tau_{b_k}(\alpha_k)\right\rangle_g, \tag{4.9}$$

для любого g.

Данное уравнение также можно интерпретировать в терминах графов. Если задан граф с листом, помеченным $e_1 z$, дилатонное уравнение позволяет отбросить это лист, при условии умножения всего вклада от графа на $(2g-2+k)$, где k – результирующая валентность вершины, к которой он крепился.

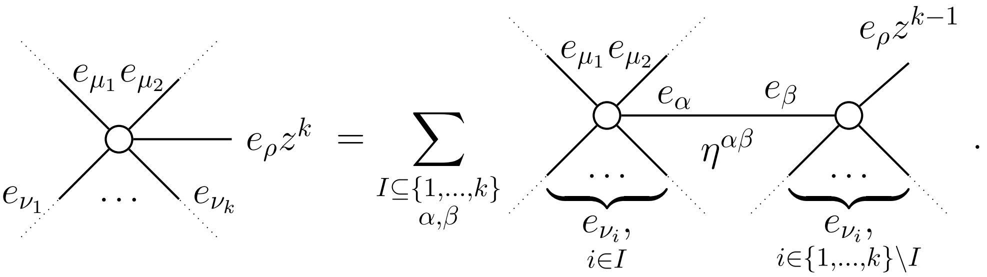
Теперь рассмотрим следующую производящую функцию для потомков:

$$D = \exp\left(\sum_{d,\alpha} t^{d,\alpha}\tau_d(\alpha)\right)$$

С использованием этого обозначения можно записать *соотношение топологической рекурсии*, в следующем виде (для $d_1 > 0$):

$$\begin{aligned}\left\langle \tau_{d_1}(\alpha_1)\tau_{d_2}(\alpha_2)\tau_{d_3}(\alpha_3)D\right\rangle_0 &= \\ &\sum_{\lambda,\sigma}\left\langle \tau_{d_1-1}(\alpha_1)\tau_0(\lambda)D\right\rangle_0\eta^{\lambda\sigma}\left\langle \tau_0(\sigma)\tau_{d_2}(\alpha_2)\tau_{d_3}(\alpha_3)D\right\rangle_0\end{aligned} \tag{4.10}$$

Соотношение топологической рекурсии можно интерпретировать в терминах графов. Если дан граф с листом, на котором стоит $e_i z^k$ для некоторого i и некоторого $k > 0$, можно убрать с него один ψ-класс (т.е. понизить степень z) следующим образом. Выберем два произвольных полуребра, прикрепленных к той же вершине (вспомним, что все вершины по крайней мере тривалентны), и разделим данную вершину на две вершины, соединенные ребром, на котором поставим $\sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta$. Разобьем все полуребра между двумя этими вершинами так, что два выбранных полуребра окажутся прикреплены к одной из них, а исходный лист (на котором изменим дополнительную структуру на $e_i z^{k-1}$) – к другой. Возьмем сумму по всем таким разбиениям. Легко видеть, что данная процедура не зависит от выбора двух упомянутых полуребер, и представляет собой соотношение топологической рекурсии. Графически это можно представить следующим образом:



Пример: симметрия обращения в двумерии

Чтобы проиллюстрировать графический формализм на практике, вычислим явным образом один из членов для двумерного случая *преобразования обращения*, которое определено и подробно изучается в общем случае ниже в разделе 4.2. Пусть F_0 – потенциал двумерного фробениусова многообразия, заданный следующим выражением:

$$F_0(t^1, t^2) = \frac{(t^1)^2 t^2}{2} + \sum_{k\geq 3} \frac{\sigma_k}{k!}(t^2)^k, \tag{4.11}$$

для некоторого набора чисел $\{\sigma_k | k \geq 3\}$, и пусть $r(z) = \sum_k r_k z^k$ – матричный ряд, определяемый как

$$r := r_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_k = 0 \text{ for all } k > 1. \tag{4.12}$$

Как и выше, используя соотношение топологической рекурсии в роде 0, можно рассматривать $F_0(t^1, t^2)$ как ограничение на малое фазовое пространство некоторого полного потенциала с потомками в роде ноль $\mathcal{F}_0\left(\{t^{1,d}, t^{2,d}\}_{d=0}^{\infty}\right)$, отождествляя t^1, t^2 с $t^{1,0}, t^{2,0}$ и принимая все остальные переменные равными нулю. Введем обозначение $\tilde{\mathcal{F}}_0$ для составляющей $\log(\exp(\widehat{r(z)})\exp(\hbar^{-1}\mathcal{F}_0))$, соответствующей роду 0.

Вычислим коэффициент $\tilde{\sigma}_5$ при $(t^{0,2})^5$ в $\tilde{\mathcal{F}}_0$, используя графический формализм (как и всюду, будем рассматривать $\tilde{\mathcal{F}}_0$ как экспоненциальную производящую функцию для своих коэффициентов).

Поскольку переменные $t^{d,\mu}$ появляются только на листьях, на которых стоит $\mathcal{L}$, графы, дающие вклад в $\tilde{\sigma}_5$, должны иметь ровно пять листьев с $\mathcal{L}$.

Более того, среди этих вкладов только члены, которые зависят только от $t^{0,2}$ из всех $t^{d,\mu}$ дадут вклад в $\tilde{\sigma}_5$. Из уравнения (4.12) имеем

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} r_l z^l\right) = 1 + rz \tag{4.13}$$

Таким образом, после разложения по линейности, упомянутого в замечании 4.1.3, все листья, на которых исходно стояло $\mathcal{L}$, будут иметь не более одного ψ-класса.

Также могут иметься дополнительные листья, на которых стоит $\mathcal{L}_0$ (заметим, что переменные $t^{d,\mu}$ не входят $\mathcal{L}_0$). Примеры двух таких графов можно увидеть на рис. 4.1. Однако, из уравнения (4.12) следует, что $\mathcal{L}_0 = 0$, что означает, что дилатонные листья не играют роли в данном вычислении.

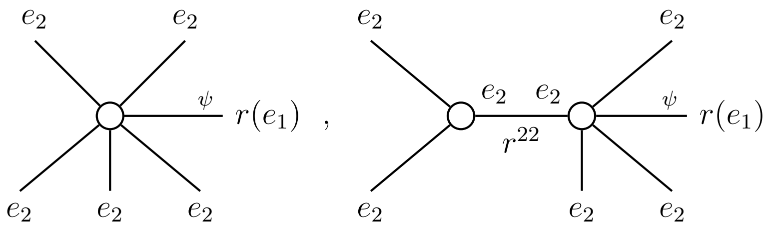


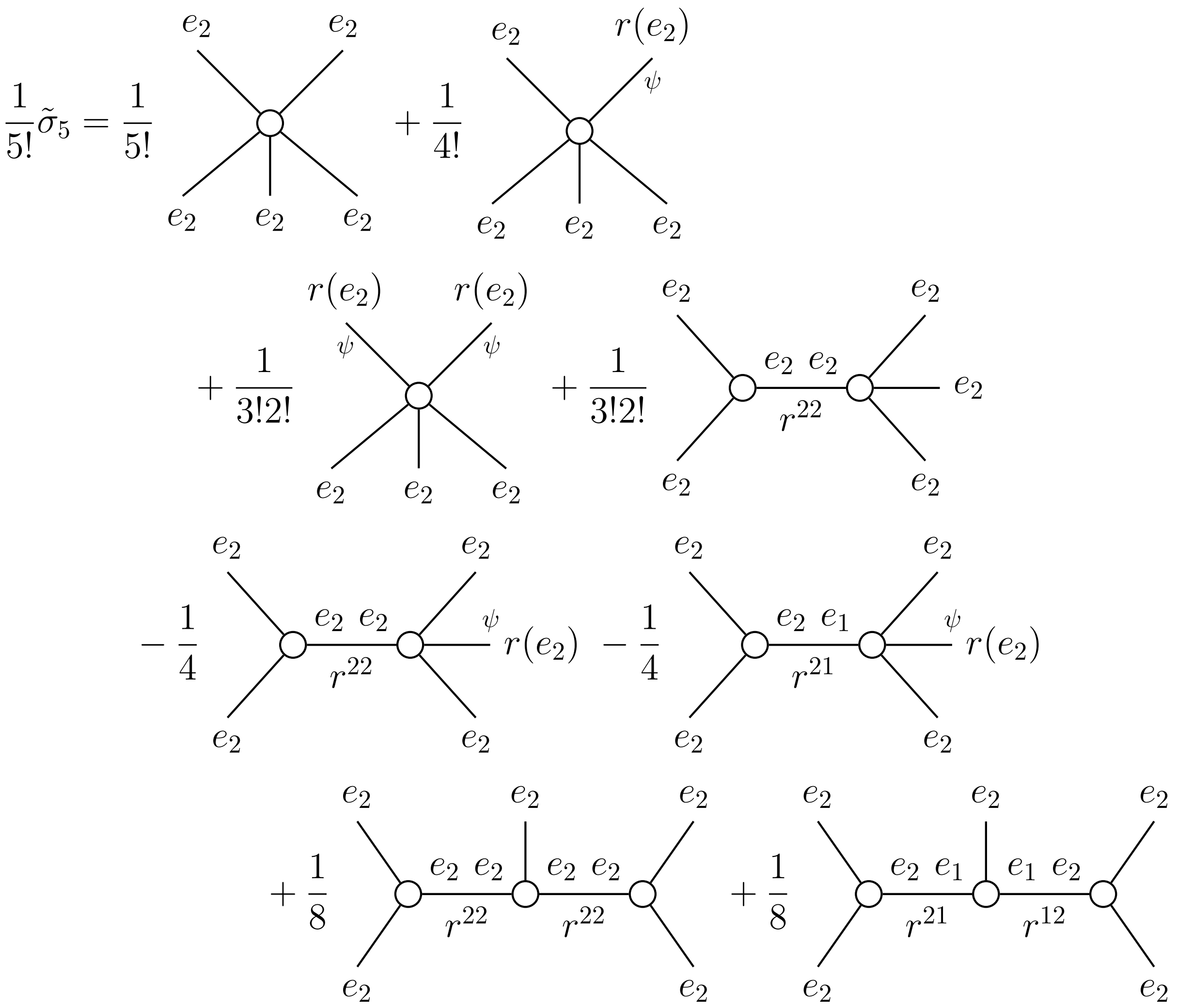
Рис. 4.1: Два графа, дающие вклад в $\tilde{\sigma}_5$, у которых на одном из листьев стоит $\mathcal{L}_0$. Заметим, что в данном случае оба этих вклада обращаются в ноль, т.к. $\mathcal{L}_0 = 0$.

Используя еще раз уравнение (4.12), можно увидеть, что в данном случае вклад ребра упрощается до

$$\mathcal{E} = -\sum_{\mu,\nu} r^{\mu,\nu} e_\mu \otimes e_\nu. \tag{4.14}$$

Поскольку рассматриваются только ручные потенциалы, любая вершина, для которой общее число ψ-классов (т.е. полная степень z) на входящих в нее полуребрах равно некоторому d, должна иметь валентность не менее $d + 3$, чтобы граф давал ненулевой вклад. Учитывая, что вершины, у которых нет

ψ-классов, должны иметь либо ровно три листа, на двух из которых стоит e_1, а на одном e_2, либо только листья, на которых стоит e_2, легко видеть, что $\tilde{\sigma}_5$ дается следующей суммой:



Поясним используемые обозначения. Комбинаторные коэффициенты перед графами соответствуют (обратным) порядкам групп автоморфизмов данных графов. Надписи на листьях соответствуют вкладам, приходящим из $\mathcal{L}$, где были отброшены переменные $t^{d,\mu}$, а z была заменена на ψ, чтобы напомнить, что степень z соответствует числу ψ-классов на листе. Вклады ребер разбиты между началом, концом и серединой ребра. Например, ребро с дополнительной структурой $r^{22}e_2 \otimes e_2$ представлено с надписями e_2 у его начала и конца и с r^{22} в середине. Отрицательный знак в третьей строке приходит из знака в уравнении (4.14).

Заметим, что в исходном описании алгоритма первые три графа были бы представлены в виде одного графа с суммами соответствующих вкладов на листьях, так же как и следующие три графа, и последние два. Для того, чтобы представить их в виде, в котором они представлены выше, было использовано свойство линейности из замечания 4.1.3.

Чтобы получить ответ, заметим, что $r^{\mu\nu} = r^{\mu}_{\rho}\eta^{\rho\nu}$. В данном случае это означает, что $r^{11} = 1$, а все остальные компоненты бивектора $r^{\mu\nu}$ равны нулю. Таким образом, выживают только первые три члена. Используя дилатонное уравнение, а также тот факт, что в данном случае $r(e_2) = e_1$, получим

$$\tilde{\sigma}_5 = \sigma_5 + 10\sigma_4 + 20\sigma_3.$$

Такой ответ согласуется с формулой (4.22) для потенциала, получаемого в результате действия преобразования обращения, как и должен.

4.1.4 Эквивалентность описаний

Из стандартного соответствия между дифференциальными операторами типа (4.3) и фейнмановскими диаграммами ([58], а также [96]) следует, что описание действия группы Гивенталя, данные в разделах 4.1.2 и 4.1.3 эквивалентны. Для простоты, предположим сначала, что $r_l(e_{\mathbf{1}}) = 0$ для всех l, что позволяет игнорировать дилатонные члены. В этом случае достаточно только показать, что

$$\begin{aligned}\hat{R} &:= \exp\left(\sum_{d\geq 0, l\geq 1} t^{d,\nu}(r_l)^{\mu}_{\nu}\partial_{d+l,\mu} + \frac{\hbar}{2}\sum_{i,j\geq 0}(-1)^{i+1}\partial_{i,\mu}(r_{i+j+1})^{\mu\nu}\partial_{j,\nu}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{d\geq 0, l\geq 1} t^{d,\nu}(r_l)^{\mu}_{\nu}\partial_{d+l,\mu}\right)\exp\left(\sum_{k,l\geq 0}(V_{k,l})^{\mu\nu}\partial_{k,\mu}\partial_{l,\nu}\right),\end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\partial_{d,\mu} = \dfrac{\partial}{\partial t^{d,\mu}}$, а $V_{k,l}$ определяется как

$$-\frac{\hbar}{2}\frac{\exp(-r(-z))\exp(r(w)) - \mathbf{I}}{z+w} = \sum V_{k,l}z^k w^l,$$

а также предполагается суммирование по всем повторяющимся греческим индексам. Уравнение (4.15) следует из формулы Кэмпбелла-Бейкера-Хаусдорфа следующим образом. Введем обозначения

$$X = \sum_{l\geq 1, d\geq 0}(r_l)^{\mu}_{\nu}t^{d,\nu}\partial_{d+l,\mu}, \quad Y = \frac{\hbar}{2}\sum_{i,j\geq 0}(-1)^{i+1}(r_{i+j+1})^{\mu\nu}\partial_{i,\mu}\partial_{j,\nu}$$

для линейной и квадратичной части показателя в $\hat{R}$ соответственно. Тогда Y коммутирует с любыми (многократными) коммутаторами X и Y, содержащими по крайней мере одну копию Y. Значит, по формуле Кэмпбелла-Бейкера-Хаусдорфа, имеем: $e^{X+Y} = e^X e^Z$, где

$$\begin{aligned} Z &:= \frac{-e^{-\mathrm{ad}_X}+1}{\mathrm{ad}_X} Y = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p (\mathrm{ad}_X)^p}{(p+1)!} Y \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{p\geq 0} \sum_{s+t=p} \sum_{f_1,\dots,f_s\geq 0} \sum_{g_1,\dots,g_t\geq 0} \sum_{i,j\geq 0} \frac{\binom{p}{s}}{(p+1)!} (-1)^{i+1+f_1+\dots+f_s+s} \cdot \\ &\qquad \cdot (r_{f_s}\cdots r_{f_1} r_{i+j+1} r_{g_1}\cdots r_{g_t})^{\mu\nu} \partial_{i+f_1+\dots+f_s,\mu} \partial_{j+g_1+\dots+g_t,\nu}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

В последнем равенстве использован тот факт, что матрица r_l симметрическая при нечетном l и кососимметрическая при четном l. Записывая $Z = \sum_{k,l} Z_{kl}\partial_k\partial_l$, легко видеть, что

$$(z+w)\sum_{k,l} Z_{kl} z^k w^l = -\frac{\hbar}{2}(\exp(-r(-z))\exp(r(w)) - \mathbf{I}), \tag{4.17}$$

разложив правую часть и используя равенство

$$\frac{1}{k!(n-k-1)!n} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!n} = \frac{1}{k!(n-k)!}.$$

Это завершает доказательство эквивалентности описаний для случая $r_l e_{\mathbf{1}} = 0$.

В общем случае легко видеть, что замена X на

$$\tilde{X} = X_1 + X_2 = -\sum_{l\geq 1} (r_l)^{\mu}_{\mathbf{1}} \partial_{l+1,\mu} + \sum_{l\geq 1, d\geq 0} (r_l)^{\mu}_{\nu} t^{d,\nu} \partial_{d+l,\mu},$$

не испортит проводимых выше рассуждений. Поскольку X_1 коммутирует с Y, те же рассуждения приводят к утверждению $e^{\tilde{X}+Y} = e^{\tilde{X}} e^Z$. Таким образом, остается только показать, что

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\sum_{l\geq 1} (r_l)^{\mu}_{\mathbf{1}} \partial_{l+1,\mu} + \sum_{d\geq 0, l\geq 1} (r_l)^{\mu}_{\nu} t^{d,\nu} \partial_{d+l,\mu} \right) \\ &\qquad = \exp\left(\sum_{d\geq 0, l\geq 1} (r_l)^{\mu}_{\nu} t^{d,\nu} \partial_{d+l,\mu} \right) \left(\sum_{l\geq 1} (W_l)^{\mu}_{\mathbf{1}} \partial_{l,\mu} \right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

где W_l определяется из

$$\sum_{l\geq 1} W_l z^l = (-z)\left(\exp\left(\sum_{l\geq 1} r_l z^l\right) - \mathbf{I}\right)$$

Поскольку X_1 коммутирует с любым (многократным) коммутатором X_1 и X_2, содержащим по крайней мере одну копию X_1, имеем: $e^{X_1+X_2} = e^{X_2}e^T$, где

$$\begin{aligned} T &:= \frac{-e^{-\mathrm{ad}_{X_2}}+1}{\mathrm{ad}_{X_2}} X_1 \\ &= -\sum_{p,l}\sum_{f_1,\ldots,f_p} \frac{1}{(p+1)!}(r_{f_p}\cdots r_{f_1} r_l)^{\mu}_{\mathbf{1}} \partial_{f_1+\cdots+f_p+l+1,\mu} = \sum_{l\geq 1}(W_l)^{\mu}_{\mathbf{1}}\partial_{l,\mu}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Таким образом, эквивалентность графического и операторного описания действия группы Гивенталя доказана.

4.2 Преобразование обращения

Так называемое *преобразование обращения* является важным примером преобразования, соответствующего дискретной симметрии фробениусовых структур. А именно, если применить такое преобразование к любому заданному фробениусову многообразию, то в результате снова получится фробениусово многообразие.

Оказывается, что данное преобразование можно особенно красивым способом представить в виде действия некоторого конкретного элемента группы Гивенталя.

Напомним определение преобразования обращения [39]. Пусть имеется фробениусово многообразие M с плоскими координатами $(t^1,\ldots,t^n)$ и потенциалом F. Тогда преобразование обращения состоит из следующей замены координат:

$$\begin{aligned} \hat{t}^1 &= \frac{1}{2}\frac{t_\sigma t^\sigma}{t^n}, \\ \hat{t}^\alpha &= \frac{t^\alpha}{t^n} \text{ для } \alpha \neq 1,\, n, \\ \hat{t}^n &= -\frac{1}{t^n}, \end{aligned}$$

вместе со следующим изменением потенциала и метрики:

$$\hat{F}(\hat{t}) = (t^n)^{-2}\left[F(t) - \frac{1}{2}t^1 t_\sigma t^\sigma\right] = (\hat{t}^n)^2 F + \frac{1}{2}\hat{t}^1\hat{t}_\sigma\hat{t}^\sigma,$$
$$\hat{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Нам также понадобится преобразование, обратное преобразованию обращения:

$$t^1 = \frac{1}{2}\frac{\hat{t}_\sigma\hat{t}^\sigma}{\hat{t}^n},$$
$$t^\alpha = -\frac{\hat{t}^\alpha}{\hat{t}^n} \text{ для } \alpha \neq 1,\, n,$$
$$t^n = -\frac{1}{\hat{t}^n}.$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 4.2.1 *Преобразование обращения дается следующим преобразованием Гивенталя* $\hat{R} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(r_k z^k\right)\hat{\ }\right)$, *где*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$r_k = 0, \quad k > 1.$$

Более точно, если $\hat{F}(\hat{t})$ *– результат преобразования обращения от* $F(t)$*, то локальное разложение* $\hat{F}(\hat{t})$ *в точке* $(0, \dots, 0, -1)$ *совпадает с составляющей рода 0 без потомков* $\hat{R}$*-преобразованного потенциала когомологической теории поля, соответствующей локальному разложению* $F(t)$ *в точке* $(0, \dots, 0, 1)$.

Доказательство будет состоять в сравнении коэффициентов разложения $\hat{F}(\hat{t})$ в точке $(0, \dots, 0, -1)$ и коэффициентов составляющей рода 0 без потомков $\hat{R}$-преобразованного потенциала когомологической теории поля, соответствующей разложению $F(t)$ в $(0, \dots, 0, 1)$.

Найдем коэффициенты разложения $\hat{F}$. Вспомним, что в плоских координатах метрика дается следующим выражением: $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$. Учитывая этот факт, для потенциала имеем:

$$F(t) = \frac{1}{2}t^1\left(t^1 t^n + \dots + t^n t^1\right) - \frac{1}{2}t^1 t^1 t^n + H\left(t^2, \dots, t^n\right), \tag{4.20}$$

для некоторой функции H.

Заметим, что когомологические теории поля, так же как и фробениусовы потенциалы, определены с точностью до добавления членов порядка 2 или ниже по t, поэтому будем отбрасывать подобные члены здесь и ниже.

Вычислим потенциал, получаемый в результате действия преобразования обращения:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\hat{t}) = \frac{1}{2}\hat{t}^1\left(\hat{t}^1\hat{t}^n + \dots + \hat{t}^n\hat{t}^1\right) - \frac{1}{2}\hat{t}^1\hat{t}^1\hat{t}^n + \\ + \frac{1}{8\hat{t}^n}\left(\hat{t}^2\hat{t}^{n-1} + \dots + \hat{t}^{n-1}\hat{t}^2\right)^2 + \hat{t}^n\hat{t}^n H\left(-\frac{\hat{t}^2}{\hat{t}^n}, \dots, -\frac{\hat{t}^{n-1}}{\hat{t}^n}, -\frac{1}{\hat{t}^n}\right). \quad (4.21)\end{aligned}$$

Вспомним корреляторную запись для коэффициентов потенциала и введем следующее обозначение

$$\frac{1}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|}\left\langle\hat{\tau}_0\left(\alpha_1\right)\dots\hat{\tau}_0\left(\alpha_N\right)\right\rangle_H^{\mathrm{I}}$$

для коэффициента при $\hat{t}^{\alpha_1}\dots\hat{t}^{\alpha_N}$ в составляющей преобразованного потенциала, приходящей из последнего члена (4.21). Также обозначим за

$$\frac{1}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|}\left\langle\hat{\tau}_0\left(\alpha_1\right)\dots\hat{\tau}_0\left(\alpha_N\right)\right\rangle_Q^{\mathrm{I}}$$

коэффициент при $\hat{t}^{\alpha_1}\dots\hat{t}^{\alpha_N}$ в составляющей преобразованного потенциала, приходящей из предпоследнего члена(4.21). Здесь $|\mathrm{Aut}((\alpha))|$ обозначает количество автоморфизмов набора индексов α_i.

Нас интересует разложение в точке $(0,\dots,0,-1)$, поэтому положим $\hat{t}^n = -1+\varepsilon$. Тогда для последнего члена имеем:

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)^2 H\left(\frac{\hat{t}^2}{1-\varepsilon}, \dots, \frac{\hat{t}^{n-1}}{1-\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \\ = \sum_{N+p\geq 3}\ \sum_{2\leq\alpha_1\leq\dots\leq\alpha_N\leq n-1} \frac{\hat{t}^{\alpha_1}\dots\hat{t}^{\alpha_N}\varepsilon^p\left(1-\varepsilon\right)^{2-p-N}}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|\, p!} H_{\alpha_1\dots\alpha_N\underbrace{n\dots n}_{p}} \\ = \sum_{\substack{N+p\geq 3\\ k\geq 0}}\ \sum_{2\leq\alpha_1\leq\dots\leq\alpha_N\leq n-1} \frac{\binom{N+k+p-3}{k}}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|\, p!} H_{\alpha_1\dots\alpha_N\underbrace{n\dots n}_{p}}\hat{t}^{\alpha_1}\dots\hat{t}^{\alpha_N}\varepsilon^{p+k}, \quad (4.22)\end{aligned}$$

где H с нижними индексами обозначает соответствующую частную производную H, взятую в точке $(0,\dots,0,1)$. В терминах корреляторов это можно переписать как

$$\begin{aligned}\langle\hat\tau_0(\alpha_1)\dots\hat\tau_0(\alpha_N)\,(\hat\tau_0(n))^q\rangle_H^{\mathrm{I}}&\\ =\sum_{p+k=q}\frac{q!}{p!}\binom{N+k+p-3}{k}H_{\alpha_1\dots\alpha_N\underbrace{n\dots n}_{p}}&\end{aligned}\tag{4.23}$$

для $2\ \leq\ \alpha_1,\dots,\ \alpha_N\ \leq\ n\ -\ 1$.

Для предпоследнего члена имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\hat t^n}\left(\hat t^2\hat t^{n-1}+\dots+\hat t^{n-1}\hat t^2\right)^2=&\\ -\sum_{\substack{2\leq\alpha\leq\beta\leq n+1-\beta\leq n+1-\alpha\leq n-1\\ k}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}\varepsilon^k\hat t^\alpha\hat t^{n+1-\alpha}\hat t^\beta\hat t^{n+1-\beta},&\end{aligned}\tag{4.24}$$

где $|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|$ определяется следующим образом. Введем следующее обозначение: $\bar\alpha=n+1-\alpha$, для произвольного $2\leq\alpha\leq n-1$. Тогда $|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|=1$, если все четыре числа $\alpha,\beta,\bar\alpha$ и $\bar\beta$ попарно различны, $|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|=2$, если ровно два из них совпадают, и $|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|=8$, если все они совпадают. В терминах корреляторов это означает следующее (для $2\leq\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta\leq n-1$):

$$\begin{aligned}\left\langle\hat\tau_0\left(\alpha\right)\hat\tau_0\left(\bar\alpha\right)\hat\tau_0\left(\beta\right)\hat\tau_0\left(\bar\beta\right)\left(\hat\tau_0\left(n\right)\right)^k\right\rangle_Q^{\mathrm{I}}&\\ =-\frac{k!\,|\mathrm{Aut}((\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta))|}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}&\end{aligned}\tag{4.25}$$

Q-корреляторы любого другого вида обращаются в ноль.

Поскольку преобразование Гивенталя действует на кубических членах тривиальным образом, часть, содержащая $\hat t^1$ в потенциале, полученном в результате действия преобразования обращения, совпадает с такой же частью результата действия преобразования Гивенталя.

Опишем результат действия преобразования Гивенталя. Будем пользоваться тем, что в нашем случае матрицы r_l имеют очень простой вид, а именно единственный ненулевой элемент r_1 это $(r_1)_n^1=1$, а для всех остальных l r_l равны нулю. Кроме того, нас интересуют только графы с дополнительной структурой, у которых в дополнительную структуру не входят $t^{d,\mu}$ для $d>0$, поскольку нас интересует результирующий фробениусов потенциал, т.е. составляющая рода 0 без потомков потенциала когомологической теории поля. Для упрощения выражений будем писать $t^\mu:=t^{0,\mu}$.

Принимая все вышеуказанное во внимание, из уравнения (4.4) для дополнительной структуры на обычных листьях имеем $\mathcal{L}=ze_1t^n+\sum_{\mu=1}^n e_\mu t^\mu$.

Поскольку выражение (4.5) в нашем случае обращается в ноль, дилатонные листья можно не учитывать. Для внутренних ребер имеем $\mathcal{E} = -e_1 \otimes e_1$, согласно формуле (4.6).

Выясним, какие раскрашенные графы дают ненулевой вклад. Заметим, что z всегда входит вместе с e_1, что позволяет использовать дилатонное уравнение (4.9) для того, чтобы выразить все графы с z через графы без z.

Поскольку свертка с тензором, стоящим в вершине, – линейная операция, можно представить данный граф в виде суммы 2^k графов,где k –число листьев, таких, что вместо суммы $ze_1t^n + \sum_{\mu=1}^{n} e_\mu t^\mu$ на каждом листе будет либо ze_1t^n, либо $\sum_{\mu=1}^{n} e_\mu t^\mu$. Тогда из дилатонного уравнения следует, что вклад каждого из этих 2^k графов пропорционален вкладу графа, получаемого отбрасыванием всех листьев с ze_1t^n из исходного графа. Для всех полученных таким образом графов, очевидным образом, z не входит в их дополнительные структуры.

Выясним, какие графы, у которых z не входит в дополнительные структуры, могут давать ненулевой вклад. Покажем, что это либо графы с одной вершиной и произвольным количеством листьев, либо тривалентные графы, у которых из каждой вершины выходит не более двух внутренних ребер. Вспомним, что тензоры $\mathcal{V}[n]$, стоящие на n-валентных вершинах, построены из компоненты однородности степени n исходного потенциала. Тогда доказываемое утверждение следует из вида дополнительной структуры на внутренних ребрах, а именно $-e_1 \otimes e_1$, а также того факта, что t^1 входит в исходный потенциал только в кубических членах. Более конкретно, если из вершины выходит некоторое ребро, то, поскольку соответствующий тензор $\mathcal{V}[n]$ сворачивается с $-e_1 \otimes e_1$, n должно быть равно 3, потому что только $\mathcal{V}[3]$ имеет ненулевые компоненты с одним из индексов, равным 1.

Если из данной вершины выходит ровно одно внутреннее ребро, то к этой вершине должны быть прикреплены два листа с дополнительной структурой $\sum_{\mu=1}^{n} e_\mu t^\mu$ на каждом из них. Принимая во внимание линейность, можно тогда представить данный граф в виде суммы n^2 графов, у которых эти два листа имеют дополнительную структуру $e_\mu t^\mu$ и $e_\nu t^\nu$ для $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$ соответственно. Из вида исходного потенциала (4.20) следует, что из этих графов только те, для которых $2 \leq \mu \leq n-1$, а $\nu = n+1-\mu$, дают ненулевой вклад.

Из аналогичных рассуждений следует, что, если имеется вершина, из которой выходят более двух внутренних ребер, то граф дает нулевой вклад. Если же к некоторой вершине прикреплены ровно два внутренних ребра, то она должна иметь ровно один лист, причем из возможных дополнительных структур на данном листе выживает только $e_n t^n$.

Используя свойство линейности, можно полностью раскрыть все раскрашенные графы, которые получаются после применения преобразования Гивенталя. Из вышеизложенных рассуждений следует, что в результате получается следующая сумма (где каждый граф поделен на порядок группы своих автоморфизмов). Во-первых, в сумму входят все графы с одной вершиной и произвольным количеством листьев, имеющих дополнительную структуру $e_\mu t^\mu$ для любых $1 \leq \mu \leq n$, а также произвольным количеством листьев с дополнительной структурой $ze_1 t^n$. Во-вторых, в сумму также входят все трехвалентные графы, у которых есть по меньшей мере одно внутреннее ребро, и из каждой вершины выходит не более двух внутренних ребер. При этом, внутренние ребра имеют дополнительную структуру $-e_1 \otimes e_1$, единственный лист, прикрепленный к вершине, из которой выходят два внутренних ребра, имеет дополнительную структуру $e_n t^n$, а два листа, прикрепленные к вершине, из которой исходит только одно ребро, имеют дополнительные структуры $e_\mu t^\mu$ и $e_{n-\mu+1} t^{n-\mu+1}$ для $2 \leq \mu \leq n-1$. Кроме того, в сумму входят всевозможные графы, получаемые из вышеописанных трехвалентных графов путем добавления любого количества листьев с дополнительной структурой $ze_1 t^n$ к любому количеству вершин. Ниже можно увидеть графическое представление всех вышеописанных графов.

Таким образом, описание графов, которые дают вклад в потенциал, получающийся в результате преобразования Гивенталя, завершено. Теперь покажем, что данный результирующий фробениусов потенциал в точности совпадает с фробениусовым потенциалом, получающимся в результате преобразования обращения.

Оказывается, что вклад одновершинных графов совпадает с последним членом формулы (4.21). Более конкретно, если обозначить вклад одновершинных графов в коэффициент при $\hat{t}^{\alpha_1} \dots \hat{t}^{\alpha_N} \varepsilon^q$ в потенциале, получающемся в результате действия преобразования Гивенталя, за

$$\frac{1}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|\, q!} \left\langle \hat{\tau}_0(\alpha_1) \dots \hat{\tau}_0(\alpha_N) \left(\hat{\tau}_0(n)\right)^q \right\rangle_H^{\mathrm{G}},$$

то получится следующее:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|\, q!} \left\langle \hat{\tau}_0(\alpha_1) \cdots \hat{\tau}_0(\alpha_N) \left(\hat{\tau}_0(n)\right)^q \right\rangle_H^{\mathrm{G}} = \\ &\qquad = \frac{1}{|\mathrm{Aut}((\alpha))|} \sum_{p+k=q} \frac{1}{k!\, p!} \Big\langle \tau_0(\alpha_1) \cdots \tau_0(\alpha_N) \left(\tau_0(n)\right)^p \left(\tau_1(1)\right)^k \Big\rangle \end{aligned} \tag{4.26}$$

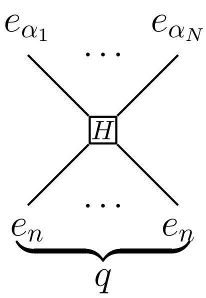
(здесь в правой части корреляторы соответствуют исходному непреобразованному потенциалу). Используя дилатонное уравнение (4.9), получим:

$$
\begin{aligned}
&\langle \hat\tau_0(\alpha_1)\cdots\hat\tau_0(\alpha_N)\,(\hat\tau_0(n))^q\rangle_H^{\mathrm{G}} \\
&\qquad = q!\sum_{p+k=q}\frac{(N+k+p-3)\cdots(N+p-2)}{p!\,k!}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\langle\tau_0(\alpha_1)\cdots\tau_0(\alpha_N)\,(\tau_0(n))^p\rangle \\
&\qquad = \sum_{p+k=q}\frac{q!}{p!}\binom{N+k+p-3}{k}\langle\tau_0(\alpha_1)\ldots\tau_0(\alpha_N)\,(\tau_0(n))^p\rangle \\
&\qquad = \sum_{p+k=q}\frac{q!}{p!}\binom{N+k+p-3}{k}H_{\alpha_1\ldots\alpha_N\underbrace{n\ldots n}_{p}},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

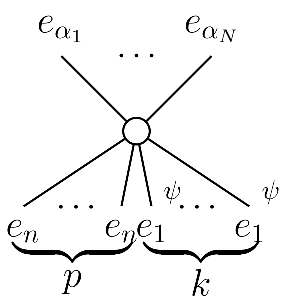
что в точности совпадает с $\langle\hat\tau_0(\alpha_1)\ldots\hat\tau_0(\alpha_N)\,(\hat\tau_0(n))^q\rangle_H^{\mathrm{I}}$ из формулы для потенциала (4.23), полученного в результате применения преобразования обращения.

В терминах графов уравнения (4.26) и (4.27) могут быть представлены следующим образом:

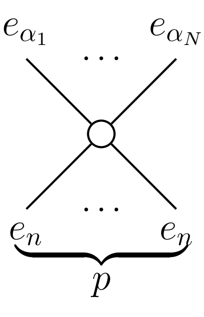
$$\langle\hat\tau_0(\alpha_1)\ldots\hat\tau_0(\alpha_N)\,(\hat\tau_0(n))^q\rangle_H^{\mathrm{G}} =: \tag{4.28}$$



$$= \sum_{p+k=q}\binom{q}{k}$$



$$= \sum_{p+k=q}\frac{q!}{p!}\binom{N+k+p-3}{k}$$



Теперь рассмотрим графы с ненулевым количеством внутренних ребер. Оказывается, что их вклад в точности соответствует предпоследнему члену формулы (4.21). Из вышеизложенных рассуждений следует, что такие графы дают вклад только в корреляторы вида

$$\left\langle \hat{\tau}_0\left(\alpha\right)\hat{\tau}_0\left(\bar{\alpha}\right)\hat{\tau}_0\left(\beta\right)\hat{\tau}_0\left(\bar{\beta}\right)\left(\hat{\tau}_0\left(n\right)\right)^k\right\rangle_Q^{\mathrm{G}}$$

(где индекс G у коррелятора означает, что этот коррелятор соответствует потенциалу, полученному в результате действия преобразования Гивенталя, а индекс Q означает, что рассматривается только вклад от графов, имеющих хотя бы одно внутреннее ребро), а этот вклад имеет следующий вид (для $2 \le \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \le n-1$):

$$\begin{aligned}
&\frac{\left\langle \hat{\tau}_0\left(\alpha\right)\hat{\tau}_0\left(\bar{\alpha}\right)\hat{\tau}_0\left(\beta\right)\hat{\tau}_0\left(\bar{\beta}\right)\left(\hat{\tau}_0\left(n\right)\right)^k\right\rangle_Q^{\mathrm{G}}}{k!\,|\mathrm{Aut}((\alpha,\beta,\bar{\alpha},\bar{\beta}))|}\\
&\quad= \frac{1}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}\Bigg(\sum_{m_1+m_2=k}\frac{1}{m_1!\,m_2!}\left\langle\tau_0\left(\alpha\right)\tau_0\left(\bar{\alpha}\right)\left(\tau_1\left(1\right)\right)^{m_1}\tau_0\left(\mu\right)\right\rangle\\
&\qquad\qquad\left(r_1\right)^{\mu\nu}\left\langle\tau_0\left(\nu\right)\tau_0\left(\beta\right)\tau\left(\bar{\beta}\right)\left(\tau_1\left(1\right)\right)^{m_2}\right\rangle\\
&\qquad+\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3\\=k-1}}\frac{1}{m_1!\,m_2!\,m_3!}\left\langle\tau_0\left(\alpha\right)\tau\left(\bar{\alpha}\right)\left(\tau_1\left(1\right)\right)^{m_1}\tau_0\left(\mu_1\right)\right\rangle\left(r_1\right)^{\mu_1\nu_1}\\
&\qquad\left\langle\tau_0\left(\nu_1\right)\tau_0\left(n\right)\left(\tau_1\left(1\right)\right)^{m_2}\tau_0\left(\mu_2\right)\right\rangle\left(r_1\right)^{\mu_2\nu_2}\left\langle\tau_0\left(\nu_2\right)\tau_0\left(\beta\right)\tau\left(\bar{\beta}\right)\left(\tau_1\left(1\right)\right)^{m_2}\right\rangle\\
&\qquad+\cdots\\
&\qquad+\left\langle\tau_0\left(\alpha\right)\tau_0\left(\bar{\alpha}\right)\tau_0\left(\mu_1\right)\right\rangle\left(r_1\right)^{\mu_1\nu_1}\left\langle\tau_0\left(\nu_1\right)\tau_0\left(n\right)\tau_0\left(\mu_2\right)\right\rangle\left(r_1\right)^{\mu_2\nu_2}\cdots\\
&\qquad\cdots\left\langle\tau_0\left(\nu_k\right)\tau_0\left(n\right)\tau_0\left(\mu_{k+1}\right)\right\rangle\left(r_1\right)^{\mu_{k+1}\nu_{k+1}}\left\langle\tau_0\left(\nu_{k+1}\right)\tau_0\left(\beta\right)\tau\left(\bar{\beta}\right)\right\rangle\Bigg).
\end{aligned}\tag{4.29}$$

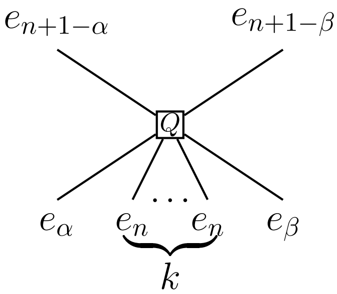
Вклад каждого из произведений корреляторов в правой части дается выражением $(-1)^p\, m_1! \cdot \dots \cdot m_{p+1}!$, где $p+1$ – число корреляторов в произведении.

В результате имеем:

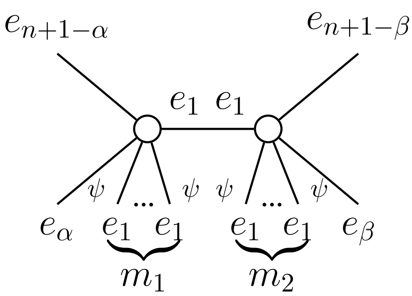
$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat\tau_0\left(\alpha\right)\hat\tau_0\left(\bar\alpha\right)\hat\tau_0\left(\beta\right)\hat\tau_0\left(\bar\beta\right)\left(\hat\tau_0\left(n\right)\right)^k\right\rangle_Q^{\mathrm{G}}
&= \frac{k!\,|\mathrm{Aut}((\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta))|}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}\sum_{p=1}^{k+1}(-1)^p\binom{k+1}{p} \\
&= -\frac{k!\,|\mathrm{Aut}((\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta))|}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}, \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

что совпадает с тем, что получается в результате действия преобразования обращения (4.25). Таким образом, доказательство закончено. В терминах графов формула (4.29) принимает следующий вид:

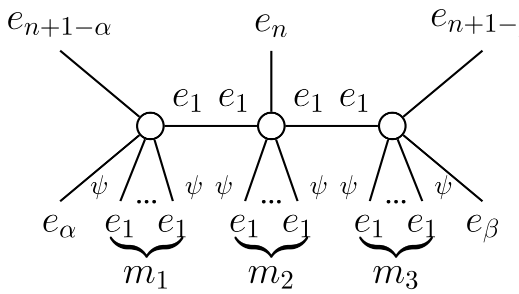
$$\left\langle \hat\tau_0\left(\alpha\right)\hat\tau_0\left(\bar\alpha\right)\hat\tau_0\left(\beta\right)\hat\tau_0\left(\bar\beta\right)\left(\hat\tau_0\left(n\right)\right)^k\right\rangle_Q^{\mathrm{G}} =:$$



$$= \frac{k!\,|\mathrm{Aut}((\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta))|}{|\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)|}\Bigg(- \sum_{m_1+m_2=k}\frac{1}{m_1!\,m_2!}$$

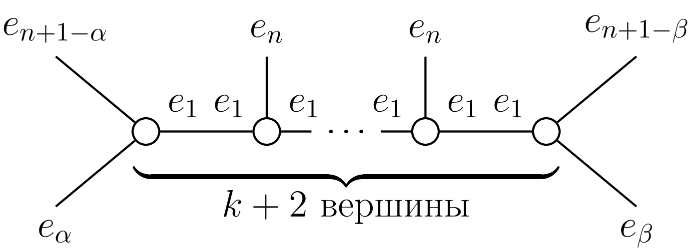


$$+ \sum_{m_1+m_2+m_3=k-1}\frac{1}{m_1!\,m_2!\,m_3!}$$



$$+ \quad \cdots$$

$$+ (-1)^{k+1}$$



$$\Bigg)$$

$$= -\frac{k!\,\mathrm{Aut}(\alpha,\beta,\bar{\alpha},\bar{\beta})}{\#\mathrm{Aut}_2(\alpha,\beta)}. \quad (4.31)$$

Замечание. Заметим, что в данном разделе нигде не была использована ни полупростота фробениусовой структуры, ни Эйлерово поле. Действие полученного нами элемента группы Гивенталя определено без всяких дополнительных предположений, кроме предположения об аналитичности $F(t)$ в точке $(0,\dots,0,1)$. Даже это предположение не является необходимым по следующим причинам. Поскольку преобразование обращения сингулярно в начале координат, в исходной конструкции Дубровина предполагалась аналитичность в какой-то другой точке, отличной от начала координат. Данная область аналитичности, в принципе, может не включать точку $(0,\dots,0,1)$. Однако в подходе Гивенталя с этим легко справиться, учтя не только действие $\hat{R}$-оператора, но и действие $\hat{\Psi}$-оператора [57], имеющее простой вид. Это, однако, сделает формулы несколько менее красивыми, поэтому здесь был рассмотрен только случай, когда потенциал $F(t)$ аналитичен в точке $(0,\dots,0,1)$. Переход к более общему случаю с помощью оператора $\hat{\Psi}$ достаточно прост.

4.3 Связь с преобразованиями Шлезингера

В полупростом случае преобразование обращения для фробениусовых структур происходит из преобразования Шлезингера специального дифференциального оператора [39]

$$\Lambda = \partial_z - U - \frac{1}{z}[\Gamma(u), U], \qquad (4.32)$$

где U – диагональная матрица канонических координат

$$U = \begin{pmatrix} u^1 & & \\ & \ddots & \\ & & u^n \end{pmatrix}, \qquad (4.33)$$

а Γ – матрица Дарбу-Егорова.

С помощью результатов, полученных в работе [15], а также используя полученный нами вид оператора $\hat{R}$, легко воспроизвести формулу преобразования Шлезингера коэффициентов вращения γ_{ij} из [39]:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ij} &= \gamma_{ij} - A_{ij}, \\ A_{ij} &= \frac{\sqrt{\partial_i t_1 \partial_j t_1}}{t_1} \end{aligned} \tag{4.34}$$

в подходе Гивенталя. Докажем следующее

Предложение 4.3.1 *Коэффициенты вращения преобразуются под действием $\hat{R}$-оператора следующим образом:*

$$\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\sqrt{\partial_i t_1 \partial_j t_1}}{1 + t_1}. \tag{4.35}$$

Следуя [15], для инфинитезимальной деформации γ имеем (будем выписывать все индексы явным образом, чтобы везде правильно учесть метрику):

$$\begin{aligned} (r_1 z)^{\hat{}}\, \gamma^{ij} &= -\left(\Psi_0\right)^i_\alpha \left(r_1\right)^\alpha_\beta \eta^{\beta\gamma} \left(\Psi_0\right)^j_\gamma, \\ (r_1 z)^{\hat{}}\, \left(\Psi_0\right)^i_\alpha &= \left(\Psi_1\right)^i_\beta \left(r_1\right)^\beta_\alpha - \left(\Psi_0\right)^i_\beta \left(r_1\right)^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta} \left(\Psi_0\right)^j_\delta \delta_{jk} \left(\Psi_1\right)^k_\alpha, \\ (r_1 z)^{\hat{}}\, \left(\Psi_1\right)^i_\alpha &= \left(\Psi_2\right)^i_\beta \left(r_1\right)^\beta_\alpha - \left(\Psi_0\right)^i_\beta \left(r_1\right)^\beta_\gamma \eta^{\gamma\delta} \left(\Psi_0\right)^j_\delta \delta_{jk} \left(\Psi_2\right)^k_\alpha, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.36}$$

Здесь за Ψ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, обозначены твистованные волновые функции мульти-КП иерархии, как делается в статье [15].

Учитывая, что r_1 содержит только один ненулевой элемент, заметим, что эта цепь прерывается в том смысле, что Ψ_2 не входит в выражение для деформации полной деформации γ. Учитывая также, что [39, 105]

$$\sum_{k=1} n \left(\Psi_0\right)^k_1 \left(\Psi_1\right)^k_1 = t_1, \tag{4.37}$$

придем к следующей формуле для преобразования коэффициентов вращения:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^{ij} &= \gamma^{ij} - \left(\Psi_0\right)^i_1 \left(\Psi_0\right)^j_1 \Big(1 - t_1 + (t_1)^2 - (t_1)^3 + \ldots\Big) \\ &= \gamma^{ij} - \frac{\sqrt{\partial_i t_1 \partial_j t_1}}{1 + t_1}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Здесь следует вспомнить, что для того, чтобы получить рассматриваемый оператор $\hat{R}$, был сделан сдвиг в точку $(0, \ldots, 0, 1)$. Поскольку плоская метрика анти-диагональна, а ее ненулевые компоненты равны 1, имеем $t_1 = t^n$. Это означает, что правая часть уравнения (4.38) совпадает с правой частью (4.34). Утверждение доказано.

4.4 Следствия для интегрируемых иерархий

Результаты раздела 4.2 позволяют также в явном виде получить результаты действия преобразования обращения на гамильтонианы ассоциированной главной иерархии. Докажем следующее

Предложение 4.4.1 *Линейная оболочка $\hat{R}$-преобразованных гамильтонианов главной иерархии совпадает с линейной оболочкой гамильтонианов, полученных в результате применения преобразования обращения в работе [78].*

Чтобы доказать данное предложение, воспользуемся результатами работы [14] о деформациях $\Omega_{\alpha,p;\beta,q}$ под действием преобразований Гивенталя, где

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t^{\alpha,p} \partial t^{\beta,q}}, \tag{4.39}$$

где $\mathcal{F}_0$ – полный потенциал в роде ноль с потомками.

Для случая рода 0 и используемого $\hat{R}$-оператора, для инфинитезимальных деформаций гамильтонианов

$$\theta_{\alpha,p} = \Omega_{\alpha,p;1,0}, \tag{4.40}$$

имеем (следуя [14]):

$$(r_1 z)^{\wedge}\, \theta_{\alpha,p} = U\, \theta_{\alpha,p} + \delta^n_\alpha \theta_{1,p+1}, \tag{4.41}$$

где оператор U дается выражением

$$U = -v^n - \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1} n v^\gamma v^{n+1-\gamma} \frac{\partial}{\partial v^1} + v^n \sum_{\gamma=1} n v^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma}. \tag{4.42}$$

В результате экспоненциирования данной инфинитезимальной деформации можно получить выражение для гамильтонианов:

$$\hat{\theta}_{\alpha,p}(\hat{v}) = \left(\exp\left(U(v)\right)\theta_{\alpha,p}(v) + \delta^n_\alpha \exp\left(U(v)\right)\theta_{1,p+1}(v)\right)\Big|_{v=\hat{v}}. \tag{4.43}$$

Данное выражение можно сравнить с ответом из статьи [78], где получаемые гамильтонианы представлены в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}^{LXZ}_{1,0}(\hat{v}) = -\frac{1}{v^n}, \quad \hat{\theta}^{LXZ}_{1,p}(\hat{v}) = -\frac{\theta_{n,p-1}(v)}{v^n}, \quad p \geq 1, \\ &\hat{\theta}^{LXZ}_{\alpha,p}(\hat{v}) = \frac{\theta_{\alpha,p}(v)}{v^n}, \quad 2 \leq \alpha \leq n-1,\ p \geq 0, \\ &\hat{\theta}^{LXZ}_{n,p}(\hat{v}) = \frac{\theta_{1,p+1}(v)}{v^n}, \quad p \geq 0, \end{aligned} \tag{4.44}$$

Применяя обратное преобразование обращения, получим (для $2 \le \alpha \le n-1$):

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{LXZ}_{\alpha,p}(\hat{v}) &= -\hat{v}^n\theta_{\alpha,p}\left(\frac{\sum_{i=1} n\hat{v}^i\hat{v}^{n+1-i}}{2\hat{v}^n}, -\frac{\hat{v}^2}{\hat{v}^n}, \dots, -\frac{\hat{v}^{n-1}}{\hat{v}^n}, -\frac{1}{\hat{v}^n}\right) \\ &= (1-\varepsilon)\theta_{\alpha,p}\left(\hat{v}^1 - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=2} n-1\hat{v}^i\hat{v}^{n+1-i}}{1-\varepsilon}, \frac{\hat{v}^2}{1-\varepsilon}, \dots, \frac{\hat{v}^{n-1}}{1-\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{4.45}$$

Теперь легко видеть, что оператор из (4.43) производит в точности такую же замену переменных в функции $\theta_{\alpha,p}$, что доказывает совпадение гамильтонианов $\theta_{\alpha,p}$ для $2 \le \alpha \le n-1$. Аналогичным образом, для $\alpha = 1$ и $\alpha = n$ видно, что полученные нами гамильтонианы не совпадают с полученными в работе [78], а вместо этого являются их некоторыми линейными комбинациями, что ничему не противоречит, поскольку только линейная оболочка гамильтонианов определена однозначно.

Замечание. В работе [14] также содержится формула для гамильтонианов полной иерархии Дубровина-Жанга, которая приводится к (4.41) в роде 0. Преимуществом уравнения (4.41) является то, что это обыкновенное дифференциальное уравнение, правая часть которого линейна по гамильтонианам, и поэтому можно сразу же написать замкнутую формулу для его решения. В общем случае правая часть оказывается квадратичной. Такое уравнение все равно можно формально проинтегрировать, но из получающихся в результате формул трудно извлечь информацию о результирующих гамильтонианах. То же самое можно сказать о тау-функциях.

4.5 Выводы

В результате проделанной работы по изучению действия группы Гивенталя на когомологических теориях поля и изучению преобразования обращения:

- представлено описание действия группы Гивенталя в виде суммы по графам, доказана эквивалентность такого описания операторной формулировке;
- найден элемент группы Гивенталя, действие которого на когомологических теориях поля эквивалентно преобразованию обращения для фробениусовых многообразий;
- из действия найденного элемента группы Гивенталя выведено преобразование Шлезингера для коэффициентов вращения;

- найдены выражения для деформации гамильтанианов ассоциированной иерархии при действии указанного элемента группы Гивенталя.

Глава 5

Заключение

В диссертации рассмотрен вопрос построения пертурбативных амплитуд в теории суперструн. Изучены два анзаца для суперструнных мер на пространствах модулей римановых поверхностей – анзацы Грушевского и Оуры-Пура-Салвати Манни-Юэна. Найдены ранее неизвестные соотношения между решеточными тэта-рядами для шестнацатимерных самодуальных решеток и тэта-константами Римана. С использованием этого результата явным образом продемонстрировано совпадение анзацев Грушевского и ОПСМЮ для случаев родов $g \leq 4$. Доказано, что в случае рода 5 указанные анзацы не совпадают.

Предложен новый анзац для суперструнных мер в роде 5, который, в отличие от ранее известных анзацев, помимо условий факторизации и обращения в ноль космологической постоянной, также удовлетворяет условию обращения в ноль двухточечной функции в роде 4, которое должно быть выполнено согласно теоремам о неперонормируемости. Показано, что из форм, используемых в анзацах Грушевского и ОПСМЮ, невозможно построить анзац для суперструнных мер в роде 6, который бы удовлетворял всем условиям, накладываемым на данные меры.

Несомненно интересен и заслуживает дальнейшего исследования вопрос, существуют ли другие модулярные формы на локусе якобианов в роде 5, которые бы удовлетворяли условиям, накладываемым на суперструнные меры, а также существуют ли вообще такие модулярные формы в старших родах, начиная с рода 6.

Также в диссертации рассмотрено действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля (обобщающих теории Громова-Виттена). Предложено представление данного действия в виде суммы по графам. Рассмотрена нетривиальная дискретная симметрия фробениусовых многообразий, называемая симметрией обращения. Доказано, что данную симметрию можно представить через действие определенного элемента группы Гивенталя, имеющего очень простой вид. Установлена связь действия данного элемента группы Гивенталя с симметриями Шлезингера уравнения ВДВВ. Найдены выражения для деформации гамильтанианов ассоциированной главной интегрируемой иерархии под действием данного элемента группы Гивенталя.

Действие группы Гивенталя на когомологических теориях поля также несомненно заслуживает дальнейшего исследования, особенно в связи с недавно обнаруженной связью с топологической рекурсией на спектральных кривых. Интересен вопрос о возможности построения глобальной спектральной кривой для произвольной теории Громова-Виттена, а также аналогичный вопрос о построении квантовых спектральных кривых.

Литература

[1] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino, and C. Vafa, "Topological strings and integrable hierarchies," *Comm.Math.Phys.* **261** (2006) 451–516.

[2] A. Alexandrov, A. Mironov, and A. Morozov, "M-theory of matrix models," `hep-th/0605171`.

[3] A. Alexandrov, A. Mironov, and A. Morozov, "Instantons and merons in matrix models," *Physica D* **235** (2007) 126–167, `hep-th/0608228`.

[4] L. Alvarez-Gaume, G. Moore, P. Nelson, C. Vafa, and J. Bost, "Bosonization in arbirary genus," *Phys.Lett.B* **178** (1986) 41.

[5] I. Aref'eva, P. Medvedev, and A. Zubarev, "New representation for string field solves the consistency problem for open superstring field theory," *Nucl.Phys.B* **341** (1990) 464.

[6] M. Atiyah, "Riemann surfaces and spin structures," *Ann.Scient.Ec.Norm.Sup.* **4** (1971) 47–62.

[7] D. Bar-Natan, "On the Vassiliev knot invariants," *Topology* **34** (1995) 423–472.

[8] A. Beilinson and Y. Manin, "The Mumford form and the Polyakov measure in string theory," *Comm.Math.Phys.* **107** (1986) 359–376.

[9] A. Belavin and V. Knizhnik, "Algebraic geometry and the geometry of quantum strings," *Phys.Lett.B* **168** (1986) 201.

[10] A. Belavin and V. Knizhnik, "Complex geometry and the theory of quantum strings," *Sov.Phys.Uspekhi* **64** (1986) 214.

[11] A. Belavin, V. Knizhnik, A. Morozov, and A. Perelomov, "Two and three loop amplitudes in the bosonc string theory," *Phys.Lett.B* **177** (1986) 324.

[12] N. Berkovits, "Super-Poincare invariant superstring field theory," *Nucl.Phys.B* **450** (1995) 90.

[13] J. Birman and X. Lin, "Knot polynomials and Vassiliev's invariants," *Invent.Math.* **111** (1993) 225–270.

[14] A. Buryak, H. Posthuma, and S. Shadrin, "A polynomial bracket for the Dubrovin–Zhang hierarchies," `arXiv:1009.5351`.

[15] A. Buryak and S. Shadrin, "A remark on deformations of Hurwitz Frobenius manifolds," *Lett.Math.Phys.* **93** (2010) 243–252.

[16] S. Cacciatori, F. Dalla Piazza, and B. van Geemen, "Genus four superstring measures," *Lett.Math.Phys.* **85** (2008) 185–193, `arXiv:0804.0457`.

[17] S. Cacciatori, F. Dalla Piazza, and B. van Geemen, "Modular forms and three-loop superstring amplitudes," *Nucl.Phys.B* **800** (2008) 565–590.

[18] L. Chekhov and B. Eynard, "Matrix eigenvalue model: Feynman graph technique for all genera," *JHEP* **0612** (2006) 026, `math-ph/0604014`.

[19] Y. Chen, M. Kontsevich, and A. Schwarz, "Symmetries of WDVV equations," *Nuclear Phys. B* **730** (2005) 352–363.

[20] S. Chmutov and S. Duzhin, "The Kontsevich integral," *Acta Applicandae Mathematicae* **66** (2001) 155–190.

[21] J. Conway and N. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer-Verlag, 1998.

[22] F. Dalla Piazza and B. van Geemen, "Siegel modular forms and finite symplectic groups," *Adv.Theor.Math.Phys.* **13** (2009) 1771–1814.

[23] E. D'Hoker and D. Phong, "The geometry of string perturbation theory," *Rev.Mod.Phys.* **60** (1987) 917.

[24] E. D'Hoker and D. Phong, "Superholomorphic anomalies and supermoduli space," *Nucl.Phys.B* **292** (1987) 317.

[25] E. D'Hoker and D. Phong, "Lectures on two-loop superstrings," `hep-th/0211111`.

[26] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. I. Main formulas," *Phys.Lett.B* **529** (2002) 241–255, `hep-th/0110247`.

[27] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. II. The chiral measure on moduli space," *Nucl.Phys.B* **636** (2002) 3–60, `hep-th/0110283`.

[28] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. III. Slice independence and absense of ambiguities," *Nucl.Phys.B* **636** (2002) 61–79, `hep-th/0111016`.

[29] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. IV. The cosmological constant and modular forms," *Nucl.Phys.B* **639** (2002) 129–181, `hep-th/0111040`.

[30] E. D'Hoker and D. Phong, "Asyzygies, modular forms and the superstring measure. I," *Nucl.Phys.B* **710** (2005) 58–82, `hep-th/0411159`.

[31] E. D'Hoker and D. Phong, "Asyzygies, modular forms and the superstring measure. II," *Nucl.Phys.B* **710** (2005) 83–116, `hep-th/0411182`.

[32] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. V. Gauge slice dependence of the n-point function," *Nucl.Phys.B* **715** (2005) 91–119, `hep-th/0501196`.

[33] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. VI. Non-renormalization theorems and the 4-point functions," *Nucl.Phys.B* **715** (2005) 3–90, `hep-th/0501197`.

[34] E. D'Hoker and D. Phong, "Two loop superstrings. VII. Cohomology of chiral amplitudes," *Nucl.Phys.B* **804** (2005) 421–506, `arXiv:0711.4314 [hep-th]`.

[35] R. Dijkgraaf, L. Hollands, and P. Sułkowski, "Quantum curves and $\mathcal{D}$-modules," *JHEP* **0911** (2009) 047, `arXiv:0810.4157 [hep-th]`.

[36] T. Dimofte and S. Gukov, "Quantum field theory and the volume conjecture," *Contemp.Math.* **541** (2011) 41–68.

[37] V. Drinfeld, "On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{Q}}/\mathrm{Q})$," *Leningrad Math. J.* **2** (1991) 829–860.

[38] B. Dubrovin, "Integrable systems and classification of 2-dimensional topological field theories," in *Integrable systems*, pp. 313–359. Springer, 1993.

[39] B. Dubrovin, "Geometry of 2d topological field theories," in *Integrable Systems and Quantum Groups*, pp. 120–348. Springer, 1996.

[40] B. Dubrovin and Y. Zhang, "Bi-Hamiltonian hierarchies in 2D TFT at one loop approximation," *Comm.Math.Phys.* **198** (1998) 311–361.

[41] B. Dubrovin and Y. Zhang, "Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants," `math/0108160`.

[42] O. Dumitrescu and M. Mulase, "Quantum curves for Hitchin fibrations and the Eynard-Orantin theory," `arXiv:1310.6022 [math.AG]`.

[43] N. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, "The superpolynomial for knot homologies," *Experimental Math.* **15** (2006) 129–159, `math/0505662`.

[44] P. Dunin-Barkowski, M. Kazarian, N. Orantin, S. Shadrin, and L. Spitz, "Polynomiality of Hurwitz numbers, Bouchard-Mariño conjecture, and a new proof of the ELSV formula," `arXiv:1307.4729 [math.AG]`.

[45] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, and A. Smirnov, "Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators," *JHEP* **1303** (2013) 021, `arXiv:1106.4305 [hep-th]`.

[46] P. Dunin-Barkowski, A. Morozov, and A. Sleptsov, "Lattice theta constants vs Riemann theta constants and NSR superstring measures," *JHEP* **0910** (2009) 072, `arXiv:0908.2113 [hep-th]`.

[47] P. Dunin-Barkowski, M. Mulase, P. Norbury, A. Popolitov, and S. Shadrin, "Quantum spectral curve for the Gromov-Witten theory of the complex projective line," `arXiv:1312.5336 [math-ph]`.

[48] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, and L. Spitz, "Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure," *Comm.Math.Phys.* (2014) , `arXiv:1211.4021 [math-ph]`.

[49] P. Dunin-Barkowski, S. Shadrin, and L. Spitz, "Givental graphs and inversion symmetry," *Lett.Math.Phys.* **103** (2013) 533–557, `arXiv:1201.4930 [math-ph]`.

[50] P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, and A. Smirnov, "Explicit computation of the Drinfeld associator in the case of the fundamental representation of gl(n)," *J.Phys.A* **45** (2012) 385204, `arXiv:1201.0025 [hep-th]`.

[51] P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, and A. Smirnov, "Kontsevich integral for knots and Vassiliev invariants," *Int.J.Mod.Phys.A* **17** (2013) 1330025, `arXiv:1112.5406 [hep-th]`.

[52] P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, and A. Stern, "NSR superstring measures in genus 5," *Nucl.Phys.B* **872** (2013) 106–126, `arXiv:1208.2324 [hep-th]`.

[53] B. Eynard and N. Orantin, "Invariants of algebraic curves and topological expansion," `math-ph/0702045`.

[54] C. Faber, S. Shadrin, and D. Zvonkine, "Tautological relations and the r-spin Witten conjecture," `math/0612510`.

[55] J. Fay, "Theta functions on Riemann surfaces," *Lecture Notes in Mathematics* **352** (1973) .

[56] E. Feigin, J. van de Leur, and S. Shadrin, "Givental symmetries of Frobenius manifolds and multi-component KP tau-functions," *Adv.Math.* **224** (2010) 1031–1056.

[57] A. Givental, "Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians," *Mosc.Math.J.* **1** (2001) 551–568.

[58] A. Givental, "Semisimple Frobenius structures at higher genus," *IMRN* **23** (2001) 1265–1286.

[59] A. Givental, "Symplectic geometry of Frobenius structures," in *Frobenius manifolds*, pp. 91–112. Springer, 2004.

[60] E. Gorsky and A. Negut, "Refined knot invariants and Hilbert schemes," `arXiv:1304.3328`.

[61] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory: volume 1, introduction.* Cambridge University Press, 1987.

[62] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory: volume 2, loop amplitudes, anomalies and phenomenology.* Cambridge University Press, 1988.

[63] P. Griffiths and J. Harris, "Principles of algebraic geometry,".

[64] S. Grushevsky, "The Schottky problem," `arXiv:1009.0369`.

[65] S. Grushevsky, “Superstring scattering amplitudes in higher genus,” *Comm.Math.Phys.* **287** (2009) 749, arXiv:0803.3469.

[66] S. Grushevsky and R. Salvati Manni, “The superstring cosmological constant and the Schottky form in genus 5,” *American journal of mathematics* **133** (2011) 1007–1027.

[67] J. Harris and I. Morrison, “Slopes of effective divisors on the moduli space of stable curves,” *Invent.Math.* **99** (1990) 321–355.

[68] C. Hertling, *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities.* Cambridge University Press, 2002.

[69] R. Kashaev, “The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm,” *Lett.Math.Phys.* **39** (1997) 265вЂ“269.

[70] M. Kazarian, “Deformations of cohomological field theories,”.

[71] V. Knizhnik, “Multiloop amplitudes in the theory of quantum strings and complex geometry,” *Sov.Phys.Uspekhi* **64** (1986) 214.

[72] M. Kontsevich, “Vassiliev’s knot invariants,” *Adv.Sov.Math.* **16** (1993) 137.

[73] I. Krichever and T. Shiota, “Soliton equations and the Riemann-Schottky problem,” arXiv:1111.0164 [math.AG].

[74] J. Labastida and E. Perez, “Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light-cone gauge,” *J.Math.Phys.* **39** (1998) 5183–5198, hep-th/9710176.

[75] Y.-P. Lee, “Witten’s conjecture, Virasoro conjecture, and invariance of tautological equations,” math/0311100.

[76] Y.-P. Lee, “Invariance of tautological equations I: conjectures and applications,” *J.Eur.Math.Soc.* **10** (2008) 399–413.

[77] Y.-P. Lee, “Invariance of tautological equations II: Gromov–Witten theory (with Appendix A by Y. Iwao and Y.-P. Lee),” *J.Amer.Math.Soc.* **22** (2009) 331–352.

[78] S.-Q. Liu, D. Xu, and Y. Zhang, “The inversion symmetry of the WDVV equations and tau functions,” *Physica D* **241** (2012) 2168–2177.

[79] A. Losev and I. Polyubin, "On compatibility of tensor products on solutions to commutativity and WDVV equations," *JETP Lett.* **73** (2001) 53–58.

[80] S. Mandelstam, "Interacting string picture of the dual resonance models," *Nucl.Phys.B* **64** (1973) 205.

[81] Y. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces.* American Mathematical Soc., 1999.

[82] E. Martinec, "Non-renormalization theorems and fermionic string finiteness," *Phys.Lett.B* **171** (1986) 189.

[83] E. Martinec, "Conformal field theory on a (super) Riemann surface," *Nucl.Phys.B* **281** (1987) 157.

[84] M. Matone, "Extending the Belavin-Knizhnik "wonderful formula" by the characterization of the Jacobian," *JHEP* **1210** (2012) 175, `arXiv:1208.5994`.

[85] M. Matone and R. Volpato, "Superstring measure and non-renormalization of the three-point amplitude," *Nucl.Phys.B* **806** (2009) 735–747.

[86] M. Matone and R. Volpato, "Getting superstring amplitudes by degenerating Riemann surfaces," *Nucl.Phys.B* **839** (2010) 21–51.

[87] G. Moore, "Modular forms and two-loop string physics," *Phys.Lett.B* **176** (1986) 369.

[88] A. Morozov, "Analytical anomaly and heterotic string in the formalism of continual integration," *Phys.Lett.B* **184** (1987) 177.

[89] A. Morozov, "Explicit formulae for one, two, three and four loop string amplitudes," *Phys.Lett.B* **184** (1987) 171.

[90] A. Morozov, "NSR superstring measures revisited," *JHEP* **0805** (2008) 086, `arXiv:0804.3167`.

[91] A. Morozov and M. Olshanetsky, "Statistical sum of the bosonic string, compactified on an orbifold," *Nucl.Phys.B* **299** (1988) 389–406.

[92] K. Morrison, "Integer sequences and matrices over finite fields," *J.Int.Seq.* **9** (2006) , `math/0606056`.

[93] D. Mumford, "Stability of projective varieties," *LeЂ™Enseignement Math.* **23** (1977) 39–110.

[94] A. Neitzke and C. Vafa, "Topological strings and their physical applications," `arXiv:hep-th/0410178`.

[95] M. Oura, C. Poor, R. Salvati Manni, and D. Yuen, "Modular forms of weight 8 for $\Gamma_g(1,2)$," *Mathematische Annalen* **346** (2010) 477–498.

[96] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing, 1995.

[97] A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*. Harwood, Chur, 1987.

[98] C. Preitschopf, C. Thorn, and S. Yost, "Superstring field theory," *Nucl.Phys.B* **337** (363) 1990.

[99] N. Reshetikhin and V. Turaev, "Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups," *Comm.Math.Phys.* **127** (1990) 1–26.

[100] R. Salvati Manni, "Remarks on superstring amplitudes in higher genus," *Nucl.Phys.B* **801** (2008) 163–173.

[101] A. Schwarz, "New topological invariants arising in the theory of quantized fields," in *Baku International Topological Conference Abstracts, Vol. 2*. 1987.

[102] S. Shadrin, "BCOV theory via Givental group action on cohomological field theories," *Mosc.Math.J.* **9** (2009) 411–429, `arXiv:0810.0725`.

[103] S. Shadrin and D. Zvonkine, "A group action on Losev-Manin cohomological field theories," `arXiv:0909.0800`.

[104] C. Teleman, "The structure of 2D semi-simple field theories," *Invent.Math.* **188** (2012) 525–588.

[105] J. van de Leur, "Twisted GL_n loop group orbit and solutions of the WDVV equations," *Internat. Math. Res. Notices* **11** (2001) 551–573.

[106] B. van Geemen, "Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves," *Invent.Math.* **78** (1984) 329–349.

[107] E. Witten, "Topological sigma models," *Comm.Math.Phys.* **118** (1988) 411.

[108] E. Witten, "Quantum field theory and the Jones polynomial," *Comm.Math.Phys.* **121** (1989) 351.

[109] E. Witten, "Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space," *Surveys in Differential Geom.* **1** (1991) 243–310.

[110] E. Witten, "Noncommutative geometry and string field theory," *Nucl.Phys.B* **253** (363) 1986.