

ФГБУ ГНЦ РФ "Институт Теоретической и Экспериментальной Физики"
НИЦ "Курчатовский институт"

на правах рукописи

ГЛАЗЫРИН Семен Игоревич

Свойства фронтов горения в сверхновых типа Ia

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
С. И. Блинников

Москва – 2014

Оглавление

Введение	4
1 Общая картина взрыва термоядерной сверхновой	16
1.1 Свойства невозмущённого горения	16
1.2 Аналитическая модель взрыва	17
1.3 Механизмы перехода горения в детонацию	23
2 Исследование плоской волны горения	26
2.1 Постановка задачи	26
2.2 Свойства среды белого карлика	27
2.3 Ядерные реакции	32
2.4 Экранирование ядерных реакций	34
2.5 Уравнение состояния	34
2.6 Модель	36
2.7 Численная реализация	38
2.8 Постановка численных расчётов	40
2.9 Результаты	42
3 Термопульсационная неустойчивость	47
3.1 Упрощенная модель пульсаций	48
3.2 Исследование устойчивости упрощённой модели	50
3.3 Численное исследование упрощённой модели	52
3.4 Модификация упрощённой модели	56
3.5 Термопульсационная неустойчивость в сверхновой	57
4 Неустойчивость Ландау–Даррье при горении в канале	63
4.1 Численный метод	65

Оглавление	3
4.2 Расчёт пламени в канале	68
5 Распространение турбулентного пламени	72
5.1 Неустойчивость Рэля–Тейлора–Ландау	73
5.2 Влияние турбулентности на пламя	75
5.3 Модель турбулентности	76
5.4 Постановка задачи	81
5.5 Результаты	83
Заключение	88
Список иллюстраций	90
Список таблиц	92
Список литературы	93

Введение

Современное состояние проблемы

Сверхновые звёзды – одни из наиболее мощных явлений во Вселенной. Они наблюдались с давних времен, самая ранняя запись подобного наблюдения – сверхновой SN 185, вспыхнувшей в 185 году нашей эры. Изначально считалось, что эти вспышки связаны с рождением новой звезды, по-латыни Nova. Позже, когда поняли масштаб энергии взрыва, их переименовали в “сверхновые” – supernova. Попытки представить модели данного события привели к пониманию, что это, наоборот, последняя стадия эволюции некоторых звёзд. Подробные наблюдения разделили вспышки на несколько классов [1]. Эта классификация в настоящее время постепенно расширяется по мере открытия новых объектов (см., например, [2]): в конце XX века с развитием спутниковых и наземных станций началась эра автоматических поисков. В результате количество открываемых объектов выросло на порядки и продолжает расти. Так, например, за 2012 год было открыто 247 сверхновых по списку IAU (МАС, Международный Астрономический Союз) [3].

Сверхновые разделяются по наличию линий водорода в их спектре на I (нет H) и II (есть H) типы. Тип I, в свою очередь, подразделяется на подтипы Ia (присутствует сильная линия кремния), Ib (отсутствуют линии кремния, присутствуют линии гелия), Ic (отсутствуют линии как кремния, так и гелия). Согласно современным моделям, тип Ia относится к термоядерным сверхновым (взрыв связан с быстрым термоядерным прогоранием звезды), а Ib, Ic, II – к коллапсирующим (взрыв вызывается коллапсом ядра массивной звезды и сопутствующими процессами [4, 5]).

Такие вспышки, как SNIa, являются одними из самых ярких во Вселенной, и позволяют заглянуть в самые удалённые области. Хорошая повторяемость параметров от вспышки к вспышке даёт возможность проводить количественные из-

мерения. Благодаря этому свойству они получили название “стандартные свечи”. Космологические измерения эволюции масштабного фактора с помощью SNIa позволили сделать недавнее важнейшее открытие ускоренного расширения Вселенной [6, 7], которое было удостоено Нобелевской премии по физике 2011 года. Поэтому понимание физики таких взрывов необходимо для надёжного обоснования подобных наблюдений.

С другой стороны, исследование термоядерных сверхновых важно для физики горения. В сверхновых реализуются условия горения, уникальные для земных экспериментов. И дело не только в высоких температурах и плотностях. Горение в сверхновых происходит практически в среде без границ: характерные масштабы многих основных процессов на много порядков меньше размеров звезды. Это делает возможным развитие различных неустойчивостей и турбулентности в течение значительного времени и в значительных объёмах. Таким образом, проблема взрывов сверхновых типа Ia является хорошей академической задачей для изучения физики горения и неустойчивостей.

Термин “стандартные свечи”, о котором упоминалось выше, иногда используется не совсем аккуратно. Его смысл в том, что светимость в максимуме практически одинакова для всех вспышек SNIa. На самом деле они не являются стандартными свечами в непосредственном понимании – их светимость в максимуме может различаться довольно сильно. Но, как было показано двумя астрономами – Псковским [8] и Филлипсом [9], светимость в максимуме полностью коррелирует со скоростью спада кривой блеска. Таким образом, эти вспышки могут быть стандартизованы, то есть правильная светимость каждой SNIa может быть восстановлена из других наблюдаемых параметров: процесс стандартизации записан в виде “соотношения Псковского–Филлипса”. Именно на него опираются все космологические наблюдения. И оно является их слабым местом: соотношение проверено только для близких расстояний, а используется на далёких. Сомнения в его справедливости связаны в первую очередь с тем, что состав Вселенной динамичен и раньше были другие распространённости элементов (тяжелые элементы, особенно железного пика, образуются как раз в сверхновых, поэтому их доля со временем увеличивается). Изменённый химсостав может влиять на стандартизованность SNIa [10], тем самым значительно искажать наблюдаемые параметры Вселенной на космологических расстояниях. Кроме этого, соотношение Псковского–Филлипса чисто эмпирическое и не имеет строгого доказательства из первых принципов или механизма взрыва, что является задачей для исследователей SNIa.

Опишем наблюдательные характеристики сверхновых типа Ia. Как уже упомина-

лось ранее, тип Ia характеризуется в основном двумя особенностями: отсутствием линий поглощения водорода и присутствием сильной линии ионизованного кремния SiII в красной части спектра на начальной и максимальной стадии свечения. Уже эти два наблюдения сильно ограничивают возможные модели взрыва. Также в спектре SNIa в видимом диапазоне вблизи максимума блеска присутствуют линии нейтральных и однократно ионизованных атомов Ca, Mg, S, O. Это указывает на то, что внешние слои состоят в основном из промежуточных элементов. Свечение звезды определяется цепочкой радиоактивных распадов $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$. На поздней стадии хорошо наблюдается экспоненциальный закон спада свечимости, соответствующий периодам полураспада этих элементов.

Есть работы в которых удалось восстановить радиальное распределение элементов для некоторых вспышек [11, 12]. Они подтверждают хорошую стратификацию элементов: в центре расположены элементы железного пика, далее промежуточные элементы (Mg, Si, S, Ca, ...), внешние слои практически полностью состоят из кислорода (любопытно заметить, что до недавнего времени практически не наблюдался углерод (хотя, согласно моделям, он должен присутствовать, см. ниже); первое наблюдение сильной линии CII в нормальной SNIa описано в работе [13], где удалось пронаблюдать сверхновую на очень ранней стадии). Этот факт является сильным признаком различных режимов горения в SNIa. В работе [11] представлены оценки для масс различных элементов: $M_{\text{Mg}} = 0.08M_{\odot}$, $M_{\text{Si}} = 0.22M_{\odot}$, $M_{\text{S}} = 0.07M_{\odot}$, $M_{\text{Fe}} = 0.36M_{\odot}$, $M_{\text{Ni}} = 0.52M_{\odot}$. Видно, что масса промежуточных элементов сравнима с массой элементов железного пика.

Подробные спектральные данные SNIa могут быть найдены в [11, 12, 14]. При взрыве выделяется около $E_{\text{kin}} \approx 10^{51}$ эрг кинетической энергии разлетающегося остатка, и $E_{\text{rad}} \approx 10^{49}$ эрг уходит в излучение (эти значения по порядку величины характерны для всех типов сверхновых). Ещё одно важное свойство именно SNIa – они вспыхивают везде по Вселенной, в отличие от типов Ib, Ic, II, которые бывают только в галактиках с активным звёздообразованием.

Также существует особый подкласс типа Ia – его прототипом является сверхновая SN2002cx. Это слабые вспышки, которые по всем признакам соответствуют SNIa, но имеют сильно меньшую светимость в пике.

Наблюдательные данные позволяют сделать вывод, что происходит взрыв звезды, в которой успел выгореть весь водород, но основная масса звезды состоит из элемен-

тов не тяжелее кремния (в противном случае, обратно образовать значительную массу кремния было бы невозможно). Хорошим кандидатом для такой звезды являются белые карлики (БК) [15], последний этап эволюции маломассивных звезд, вырожденные звезды, состоящие в основном из ^{12}C и ^{16}O , при отсутствии водорода. Важной особенностью таких звёзд является теоретическое наличие у них максимальной массы – чандрасекаровского предела $M_{\text{Ch}} \approx 1.4M_{\odot}$. Предположение, что взрываются звёзды близкие к этому пределу позволяет объяснить факт похожести всех вспышек друг на друга. Так как удельное энерговыделение взрыва $E_{\text{kin}}/M_{\text{ch}} \sim 4 \times 10^{17}$ эрг/г ~ 4 МэВ/нуклон сравнимо с выделением энергии при термоядерном сгорании всей звезды, это указывает на то, что в какой-то момент за короткое время (сравнимое с гидродинамическим временем системы $R_{\text{WD}}/c_s \sim 1$ с) БК целиком прогорает. Но БК сам по себе – “мёртвая звезда”, в которой отсутствуют ядерные реакции. Для того, чтобы началась его активная динамика, нужна звезда-компаньон в двойной системе. Важно то, что двойных звёзд во Вселенной подавляющее большинство, около 2/3, и при определённых условиях они могут вести активную жизнь [16]. Тут различают два варианта (сценария взрыва):

- Одновырожденный сценарий [17]. В двойной системе одна из звёзд является белым карликом, другая – массивная невырожденная звезда. При достаточной близости звёзд друг к другу, может начаться перетекание вещества с массивной звезды на белый карлик (он, являясь более компактным образованием, обладает большей силой гравитации). Именно это приводит к росту массы БК, доводит его до неустойчивого состояния около M_{Ch} и взрыва.
- Двувырожденный сценарий [18]. В этом случае обе звезды являются белыми карликами. Из-за потери энергии на гравитационное излучение, они со временем сближаются друг с другом, и в конце-концов сталкиваются. Такое столкновение заканчивается взрывом.

В принципе эти два варианта могут быть различены при наблюдениях: например, по следам взаимодействия разлетающихся остатков с массивной звездой в первом случае, или по излучению системы-предшественника (также для одновырожденного сценария, существуют работы которые таким образом ограничивают вероятность этого сценария [19]). Но, на сегодняшний момент, нет окончательных данных, отдающих предпочтение одной из этих версий: всё может развиваться как по первому, так и по второму сценарию, или по обоим (см., например, [20]).

В диссертации рассматривается только один сценарий – одновырожденный. Согласно ему, падение вещества на поверхность БК приводит к его поджатию и повышению температуры в центре. В результате в белом карлике образуется конвективное ядро, в котором происходят неактивные ядерные реакции. Этот процесс длится значительное время – сотни лет. В некоторый момент около центра звезды возникает пламя, которое начинает распространяться к поверхности. Это даёт начало активной фазе взрыва сверхновой. Как будет подробнее разобрано ниже, существуют два режима стационарного распространения горения: дефлаграционный (медленное, дозвуковое горение) и детонационный (сверхзвуковое). В дефлаграционном режиме при горении БК образуется большое количество промежуточных элементов, детонационный, с другой стороны, приводит к прогоранию до элементов железного пика (при чистой детонации волна идёт по начальному распределению плотности в БК – плотному веществу и сжигает почти всю массу до Ni; при дефлаграционном горении в центре также образуется Ni, но звезда расширяется и плотность падает, поэтому большая масса теперь будет гореть при низкой плотности – до промежуточных элементов; детонация при низкой плотности тоже выдаёт промежуточные элементы). Как было указано выше, остаток сверхновой наполовину состоит из промежуточных элементов, а наполовину из элементов железного пика. Из расчётов возникновения пламени получается, что оно зажигается в дефлаграционном режиме (кроме этого, в работах [21–23] показано, что детонация в центре белого карлика неустойчива). Работы, в которых БК прогорает только дефлаграционно, показывают, что никакого взрыва не происходит: из-за сильно дозвукового горения звезда успевает расширяться как целое, тем самым охлаждаясь. В некоторый момент температура и плотность падают настолько, что распространение волны прекращается. Кроме этого, для успешного взрыва необходимо выделить энергию, превышающую энергию связи звезды $E_{\text{WD}} = E_G + E_{\text{therm}} \approx -3.0 \times 10^{51} + 2.5 \times 10^{51} \approx -0.5 \times 10^{51}$ эрг. Так как энергия черпается из ядерных реакций, то должна прогореть вся звезда $E_{\text{nuc}} \sim M_{\text{Ch}} q_{\text{C} \rightarrow \text{Ni}} \approx 3 \times 10^{51}$ эрг (здесь предполагается, что углерод с массой M_{\odot} прогорает до самого конца – никеля, это является оценкой сверху). Также чисто дефлаграционное горение противоречит наблюдаемой стратификации элементов – оно полностью перемешало бы элементы по радиусу звезды. Все эти факторы указывают на то, что в сверхновой типа Ia должны реализовываться два режима горения: всё начинается с дефлаграционного, который в дальнейшем переходит в детонацию. Такой вариант является одним из самых популярных на сегодняшний момент, несмотря на то,

что механизм перехода не известен до сих пор.

Хорошие обзоры по физике SNIa это [4, 24], по физике пламени в SNIa [25–27]. Первоначальные попытки описания взрывов сверхновых типа Ia отталкивались от предположения, что звезда сгорает либо чисто дефлаграционно [28–30], либо число детонационно [31–33]. В детонационных вариантах было получено перепроизводство элементов железного пика, что противоречило наблюдениям [33]. Дефлаграционные варианты сами по себе к взрыву не приводили. В результате была предложена модель с дефлаграционно–детонационным переходом (DDT) [34] (необходимо заметить, что ещё в работе [28] успешный взрыв произошел за счёт того, что в дефлаграционном режиме удалось вызвать пульсации всей звезды, которые привели к переходу в детонацию). Сейчас такая модель является одной из самых популярных и активно развивается [35–44].

Полноценные исследования взрывов сверхновых типа Ia основываются на расчётах звезды целиком. В этих расчётах до сих пор не получена правдоподобная модель взрыва из первых принципов. Они включают в себя гидродинамическое описание звезды с учётом самогравитации и термоядерного горения. Из-за слишком грубого пространственного разрешения пламя приходится задавать “вручную”: каким-либо алгоритмом двигать тонкую границу, на которой выделяется энергия. Существуют два широко используемых подхода: метод уровней [45], метод Хохлова (“flame-capturing technique”) [46, 47]. Эти подходы не позволяют просчитать детальную кинетику ядерных реакций и узнать, например, распределение элементов по звезде, но позволяют проводить гидродинамические расчёты. Такая кинетика рассматривается отдельно: вычисляется эволюция химсостава в большом количестве пассивных пробных частиц на фоне результатов гидродинамических расчётов [42, 48]. В дальнейшем, имеющиеся данные о распределении плотностей, скоростей, химсоставе сравниваются с наблюдениями. Это единственный способ экспериментально проверить достоверность результатов.

Из-за затухания дефлаграции в расчётах всей звезды детонацию вводят искусственно. В некоторых работах используется простой критерий: когда пламя достигает критической плотности $\rho_{\text{ст}} \sim (1 - 3) \times 10^7 \text{ г/см}^3$ [40]. Такие расчёты позволяют хорошо описывать наблюдаемые данные, хотя физика такого перехода не раскрывается. В других работах используются более сложные критерии как, например в [44]: определяется расчётная площадь поверхности пламени, она пересчитывается на реальную площадь A в предположении, что фронт фрактален (фрактальная размерность как параметр моде-

ли), исходя из модели турбулентности вычисляется вероятность возникновения пульсаций со скоростью больше некоторой критической $P(v' > v'_{\text{crit}})$. Площадь, подверженная детонации за счёт турбулентности, тогда равна $A_{\text{det}} = AP(v' > v'_{\text{crit}})$. Если площадь превышает некоторую критическую $A_{\text{det}} > A_{\text{crit}}$, то в расчёте задаётся детонация. Все используемые критерии не имеют хорошего обоснования из микрофизики горения.

Фрактальность пламени исследуется в различных задачах, в том числе и не связанных со сверхновыми, [44, 49–53].

Из-за отсутствия полной физической картины взрыва в рассмотренных моделях появились и получили распространение альтернативные модели взрыва. Модель гравитационно–связной детонации (GCD) [54–59], в которой задают специальные начальные условия, приводящие к горению, всплывающему к поверхности звезды в виде струи. Горячие продукты горения огибают звезду и сталкиваются в противоположной точке, в результате чего и рождается детонация. Пульсационная детонация [28, 60, 61]: в результате неудавшегося перехода дефлаграции в детонацию (пламя затухло) остаточное движение приводит к пульсирующему движению всей звезды, со временем эти пульсации приводят к детонации. Пульсационная гравитационно–связная детонация [62]: объединение двух предыдущих моделей. Спонтанное рождение детонации [63–65]: рождение детонации с помощью спонтанного механизма. Модель дефлаграции с неудавшейся детонацией [66].

Также отдельно продолжают исследования чисто дефлаграционных моделей [55, 67–70]. В таком случае может произойти низкоэнергитический взрыв, что успешно объясняет подкласс слабых вспышек Ia, похожих на SN2002cx.

Одновременно с расчётами всей звезды активно проводились и проводятся работы по исследованию микрофизики горения SNIa (на всех масштабах от толщины фронта до радиуса звезды). Это включает в себя исследование структуры дефлаграции и детонации [71–75], так и различных неустойчивостей горения. Последнее до сих пор широко рассматривается в литературе из-за сложности задачи и как возможное объяснение дефлаграционно–детонационному переходу.

Термопульсационная неустойчивость рассматривалась как влияющая на распространение пламени в SNIa [76]. Эта неустойчивость была проанализирована в работе [77], результаты которой подробно рассматриваются ниже, где показано, что горение в SNIa стабильно по отношению к ней. **Неустойчивость Ландау–Даррье** рассматривалась в работах [53, 78–86] и является очень сложной для модельного описания: она

затрагивает широкий диапазон мод возмущений поверхности пламени. Не существует полноценной модели, которая бы учитывала эту неустойчивость в расчётах SNIa. **Неустойчивость Рэлея–Тейлора–Ландау**¹ [87–92] активно изучается как в земных, так и в звездных приложениях. Считается, что она является основным источником турбулентности. **Турбулентность** [41, 46, 84, 93–101] значительно влияет на горение в SNIa, более того в последних работах считается, что из-за неё и происходит дефлаграционно–детонационный переход.

Отдельная большая задача связана с эволюцией белого карлика до активной фазы взрыва сверхновой, то есть до появления пламени. Он проходит довольно сложную и длительную эволюцию в неустойчивом состоянии (~ 100 лет) при котором ядро звезды испытывает сильную конвекцию, сопровождающуюся неактивным термоядерным горением. Этот процесс определяет начальные условия для распространения горения по всей звезде. Работы, в которых рассматривается этот период перед взрывом вместе с процессом поджига [102–108].

В результате на сегодняшний день сверхновые типа Ia недоисследованы. С одной стороны их характеристики воспроизводятся в расчётах с искусственным вмешательством. С другой стороны эти вмешательства не имеют под собой строгого теоретического доказательства из первых принципов. Но, самое главное, что используемое в космологических наблюдениях соотношение Псковского–Филлипса не обосновано расчётами и неизвестна его справедливость при больших красных смещениях.

Цели и задачи

Общая цель работ, включенных в настоящую диссертацию – развитие моделей горения в сверхновых типа Ia. В настоящий момент задача о переходе дефлаграции в детонацию в условиях SNIa не решена. Необходимость такого перехода, как было показано ранее, следует из наблюдений. Естественным объяснением для такого перехода является развитие неустойчивостей медленного горения. В результате, основной целью представленных работ является изучение различных неустойчивостей пламени в условиях SNIa и построение моделей для их описания.

Для этого решаются следующие задачи:

¹см. ниже раздел 5.1

1. Исследуется микроскопическая структура пламени в сверхновой, вычисляются основные параметры нормального фронта горения.
2. Исследуется устойчивость фронта горения по отношению к термопульсационной неустойчивости.
3. Исследуется неустойчивость Ландау–Даррье в условиях сверхновой Ia, но при горении в ограниченном пространстве – канале.
4. Выводится полуэмпирическая модель турбулентности с учётом горения в режиме искривлённого пламени, учитывающая возникновение турбулентности за счёт гидродинамических неустойчивостей.
5. Вычисляется интенсивность возникающей при горении белого карлика турбулентности и оценивается её влияние на ускорение фронта горения.

Научная новизна

1. Разработан одномерный численный гидродинамический метод для расчёта структуры горения в условиях сверхновой типа Ia, учитывающий все необходимые физические процессы: лучистую и электронную теплопроводности, кинетику термоядерного горения. Данным методом рассчитана одномерная структура плоского фронта горения и получены характеристики нормального фронта: его скорость, толщина, перепад основных термодинамических величин.
2. Горение в SNIa исследовано на условия возникновения термопульсационной неустойчивости. Показано, что оно является устойчивым по отношению к этой неустойчивости.
3. Разработан трехмерный численный гидродинамический метод для расчёта задач гидродинамики горения. Этот метод позволяет рассчитывать распространение пламени как с учётом кинетики, так и с помощью метода слежения за фронтом горения (считая его бесконечно тонким). Рассчитана эволюция возмущений тонкого фронта при горении в канале.
4. Разработана модель турбулентности с учётом горения в режиме искривлённого пламени. В одномерных расчётах всей звезды получена интенсивность возника-

ющей при горении белого карлика турбулентности. Оценено влияние турбулентности на скорость распространения горения и показано, что пламя ускоряется до $\sim 5\%$ от скорости звука.

Научная и практическая ценность

Полученные результаты будут использованы при построении моделей вспышек сверхновых типа Ia, позволяющих описывать распространение пламени на масштабах всей звезды. Свойства неустойчивостей горения составляют отдельную академическую задачу. Кроме того, они проявляются в различных условиях, в том числе и в земных экспериментах.

В ходе работы создан комплекс многомерных программ для решения задач гидродинамики, гидродинамики горения и исследования турбулентности. Применение этого комплекса не ограничено астрофизическими приложениями: он позволяет рассчитывать гидродинамические течения в различных условиях, горение газовых смесей, а также эксперименты по физике высоких плотностей энергии.

Методология и методы исследования

Основной метод исследования – построение аналитических и численных моделей гидродинамики горения. Также исследования опираются на численные коды, созданные автором диссертации.

Положения, выносимые на защиту

1. Рассчитана одномерная структура плоского фронта горения. Получены характеристики нормального фронта: его скорость, толщина, перепад основных термодинамических величин.
2. Представлена упрощенная модель, показывающая основные свойства термопульсационной неустойчивости.
3. Показано, что горение в сверхновых является устойчивым по отношению к термопульсационной неустойчивости. Получены критические значения чисел

Зельдовича, определяющие её развитие, для условий в сверхновой.

4. Рассчитана эволюция возмущений тонкого фронта при горении в канале. Вычислено возникающее увеличение скорости фронта.
5. Представлена модель турбулентности с учётом горения в режиме искривлённого пламени.
6. Рассчитана интенсивность возникающей при горении белого карлика турбулентности. Показано, что она приводит к ускорению пламени до $\sim 5\%$ от скорости звука.

Апробация работы и публикации

Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на отечественных и международных конференциях – “11th Symposium on Nuclei in the Cosmos (NIC XI)” (Germany, Heidelberg, 2010), “Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра” (Москва, ИКИ РАН, 2011), “XI международная конференция Забабахинские научные чтения” (Челябинская обл., Снежинск, 2012), “The 13th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing” (UK, Woburn, 2012), “Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра” (Москва, ИКИ РАН, 2012), “Магнитоплазменные процессы в релятивистской астрофизике” (Калужская обл., Таруса, 2013), “Heavy elements nucleosynthesis and galactic chemical evolution” (Москва, ИТЭФ, 2013), “Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем” (Москва, ИПМех РАН, 2013), “Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра” (Москва, ИКИ РАН, 2013), а также на семинарах ИТЭФ.

По теме диссертационного исследования опубликовано пять статей в реферируемых журналах [77, 109–112] и одна статья в трудах конференции [113].

Краткое содержание работы

Диссертация имеет следующую структуру:

В **главе 1** описываются общие свойства горения и известные механизмы перехода горения в детонацию. Также строится простая качественная модель, показывающая динамику горения белого карлика.

В **главе 2** исследуются свойства плоского пламени при различных плотностях вещества в условиях белых карликов. Представлены условия, при которых происходит горение. Сформулирована и решена численно гидродинамическая модель плоского горения, получены его характеристики.

В **главе 3** исследуется устойчивость горения по отношению к термопульсационной неустойчивости в условиях сверхновой, а также представлена простая аналитическая модель пульсаций.

В **главе 4** представлен численный метод, позволяющий проводить многомерные расчёты горения предполагая, что фронт является бесконечно тонким. С помощью данного метода рассчитано горение в канале, неустойчивое по отношению неустойчивости Ландау–Даррье.

В **главе 5** рассматривается генерация турбулентности неустойчивостью Рэлея–Тейлора–Ландау, её влияние на распространение горения. Представлена модель турбулентности, описывающее турбулентное горение в режиме искривленного пламени. Рассчитано распространение турбулентного пламени по белому карлику.

Глава 1

Общая картина взрыва термоядерной сверхновой

1.1 Свойства невозмущённого горения

Рассмотрим невозмущённое горение по звезде. Оно является предсмешанным, то есть топливо распределено по всей звезде. Существуют два стационарных режима распространения горения: дефлаграционный и детонационный.

При дефлаграционном режиме, или пламени, тепло от горячих прореагировавших слоёв передаётся холодным непрореагировавшим за счёт теплопроводности, диффузии или похожих кинетических явлений (в сверхновых Ia теплопроводность гораздо сильнее диффузии, что количественно показывает безразмерное число Льюиса $Le \equiv \kappa/c_p D \sim 10^7$, см. [73] и ниже). В результате после достаточного прогрева начинается реакция. Из этого видно, что для существования стационарного пламени необходимо равенство характерных времен теплопроводности и энерговыделения:

$$\left(\tau_{\text{therm}} = \frac{\delta^2}{\kappa} \right) = \left(\tau_{\text{nucl}} = \frac{q}{\dot{S}} \right), \quad (1.1)$$

где δ – ширина фронта горения, κ – коэффициент температуропроводности, q – калорийность реакции на единицу массы, \dot{S} – скорость энерговыделения. Это соотношение позволяет получить теоретическую оценку для параметров пламени, толщины фронта

$$\delta = \left(\frac{\kappa q}{\dot{S}} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

и нормальной скорости

$$u_n = \frac{\delta}{\tau_{\text{nucl}}} = \left(\frac{\kappa \dot{S}}{q} \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что скорость зависит как от теплопроводности, так и от энергосвободного степенным образом. Так как этот процесс определяется теплопроводностью, то он медленный – дозвуковой.

Если рассматривать пламя на масштабе много большем его толщины, то можно использовать модель бесконечно тонкой границы, на которой скачком меняются параметры течения (и происходит энергосвободное). Изменение параметров течения определяется с помощью соотношений Гюгонию на фронте горения (при известной нормальной скорости u_n , которая зависит от микроструктуры горения):

$$\rho_1(v_1 - u_n) = \rho_2(v_2 - u_n), \quad (1.4)$$

$$\rho_1(v_1 - u_n)^2 + p_1 = \rho_2(v_2 - u_n)^2 + p_2, \quad (1.5)$$

$$\frac{(v_1 - u_n)^2}{2} + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + q = \frac{(v_2 - u_n)^2}{2} + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2}, \quad (1.6)$$

здесь e – внутренняя энергия на единицу массы. Из-за того, что скорости горения значительно меньше скорости звука, в первом приближении выполняется $p_1 \approx p_2$.

Детонация – сверхзвуковое распространение горения. В отличие от дефлаграции разогрев среды происходит на ударной волне, которая движется по среде: на ней подскакивают все гидродинамические параметры, в том числе и температура. Если за фронтом она становится достаточно высокой, то начинаются реакции. Если характерное время прогорания вещества в этих условиях – τ , то длина горящего хвоста определяется как $\delta_{\text{deton}} = v_{\text{deton}}\tau$. На масштабе много большем δ_{deton} параметры среды до и после детонации связаны теми же соотношениями Гюгонию (1.4)–(1.6). При этом в решении надо выбрать другой корень (эта система уравнений сводится к уравнению 2-ой степени для v_2 с корнями, соответствующими дефлаграции и детонации).

1.2 Аналитическая модель взрыва

Построим простую аналитическую модель, которая покажет общие закономерности горения в сверхновых и послужит основой для некоторых аналитических оценок.

Белый карлик описывается сложным уравнением состояния, а также имеет различный химсостав по радиусу. Но для приближенного его описания подходит сферическое изотропное тело, в котором уравниваются силы тяжести и давления. Последнее определяется вырожденным электронным газом. Так как интересующие нас

плотности $\gtrsim 10^6$ г/см³, то электроны будут релятивистские и вырожденные. Их уравнение состояния хорошо описывается политропой с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$. Уравнения гравитационного равновесия политропных шаров хорошо изучено и сводится к уравнению Эмдена, которое имеет один безразмерный параметр $n \equiv 1/(\gamma - 1)$. Аналитические решения этого уравнения являются неплохой аппроксимацией к рассматриваемой нами звезде. Гидростатическое равновесие означает

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\nabla\phi, \quad (1.7)$$

гравитационный потенциал ϕ определяется из распределения плотности

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.8)$$

политропное уравнение состояния

$$p = A\rho^\gamma. \quad (1.9)$$

Подставим одно уравнение в другое и сделаем замену:

$$\rho = \lambda\theta(\xi)^n, \quad r = \alpha\xi, \quad (1.10)$$

тогда в результате получим уравнение Эмдена

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = -\theta^n, \quad (1.11)$$

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)A\lambda^{-1+1/n}}{4\pi G}. \quad (1.12)$$

Граничные условия для звезды $\theta(0) = 1$, $\partial_\xi\theta(0) = 0$. Численное решение этого уравнения для $n = 3$ представлено на рисунке 1.1. Звезда при этом имеет конечный радиус, то есть $\theta(\xi_0) = 0.0$, где $\xi_0 \approx 6.90$.

В случае $\gamma = 4/3$ масса звезды не зависит от λ – центральной плотности и составляет:

$$M_0 = \lambda\alpha^3 \int_0^{\xi_0} 4\pi\theta^n \xi^2 d\xi \approx 25.4 \left(\frac{A}{\pi G} \right)^{3/2} \approx 1.44M_\odot. \quad (1.13)$$

Используем это решение для описания горения белого карлика. Будем считать, что всё сферически-симметрично. Пламя распространяется из центра и делит звезду на сгоревшую и несгоревшую область. Пламя распространяется в дозвуковом режиме, поэтому предположим, что внешние слои успевают выйти на равновесие и принять

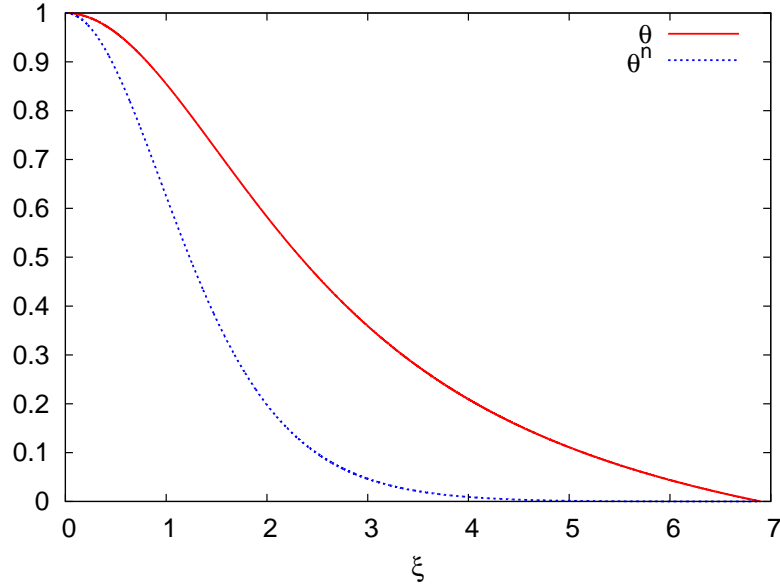


Рис. 1.1: Решение уравнения Эмдена $\theta(\xi)$ для $n = 3$, плотность $\rho \propto \theta^n$.

эмденовское решение (этим упрощением мы пренебрегаем кинетической энергией вещества звезды). Пусть R , M – текущий радиус фронта горения и его положение в массовых координатах (если фронт загорается точно в центре, то это масса несгоревшего вещества), ρ_1 – плотность среды перед фронтом пламени (несгоревшей). Фронт движется относительно вещества с нормальной скоростью v_n , тогда

$$\frac{dM}{dt} = -v_n(\rho_1)4\pi R^2 \rho_1. \quad (1.14)$$

Пусть фронт движется со скоростью v_f относительно центра звезды (покоящейся системы отсчёта):

$$\frac{dR}{dt} = v_f(\rho_1). \quad (1.15)$$

Эта скорость v_f полностью связана с v_n и определяется ниже. Наше предположение, что звезда успевает выйти на равновесие позволяет найти плотность перед фронтом горения ρ_1 : нужно построить решение уравнения Эмдена (найти α) с массой M в области $r > R$. Обозначим:

$$m(\xi_1) \equiv \int_{\xi_1}^{\xi_0} 4\pi \xi^2 \theta^n d\xi, \quad (1.16)$$

где $\theta(\xi)$ – найденное выше решение. Система уравнений для поиска α и ξ_1 имеет вид:

$$M = \lambda(\alpha)\alpha^3 m(\xi_1), \quad (1.17)$$

$$R = \alpha \xi_1. \quad (1.18)$$

В случае произвольного n нужно решить относительно ξ_1 неявное уравнение:

$$\frac{m(\xi_1)}{\xi_1^{\frac{n-3}{n-1}}} = \frac{M}{K_2 R^{\frac{n-3}{n-1}}}, \quad (1.19)$$

$$K_2 \equiv \left(\frac{(n+1)A}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \text{const}. \quad (1.20)$$

Для $n = 3$ все сильно упрощается и остается только¹:

$$m(\xi_1) = \frac{M}{K_2}, \quad K_2 = 1.14 \times 10^{32} \text{ г}. \quad (1.21)$$

Зная ξ_1 можно найти α из (1.18) и далее, из (1.10) и (1.12), получить ρ_1 .

Определим скорость фронта v_f относительно центра звезды. Если сферически-симметричное распределение вещества поджечь в центре, то сгоревшее вещество будет покоиться, а несгоревшее совершать движение. Тогда скорость фронта будет

$$v_f = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_n, \quad (1.22)$$

где ρ_2 – плотность за фронтом. Это соотношение в точности верно для однородной по радиусу смеси. Для неоднородного распределения вещества, как в нашем случае, примем приближение, что такая картина течения сохраняется, и вещество за фронтом покоится, то есть уравнение (1.22) справедливо, но величины ρ_1 , ρ_2 , v_n меняются со временем при движении пламени по радиусу звезды. Таким образом, для определения v_2 нужно определить скорость сгоревшего относительно фронта, если налетающее вещество движется со скоростью v_n . Из законов сохранения на фронте в системе покоя последнего:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (1.23)$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2, \quad (1.24)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + q = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (1.25)$$

Здесь q – энергосодержание на единицу массы. После небольших преобразований получим:

$$v_2 = \frac{\gamma v_1 + \frac{c_1^2}{v_1} \pm (\gamma-1) \sqrt{\frac{(v_1^2 - c_1^2)^2}{(\gamma-1)^2 v_1^2} - 2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} q}}{\gamma+1}, \quad (1.26)$$

¹Здесь мы используем выражение

$$A = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{m_p \mu} \right)^{4/3} \approx 4.92 \times 10^{14} \text{ СГС},$$

для подробностей см. [114]

$c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ – скорость звука. Два корня соответствуют дефлаграции и детонации, в нашем случае в дальнейшем используется корень со знаком “–”. Выражение (1.26) и будет $v_f(\rho_1)$ после подстановки $v_n(\rho_1) \rightarrow v_1$. В качестве нормальной скорости горения в SNIa используем аппроксимацию из статьи [73]. Для описания энерговыделения положим $q = \text{const} = 7 \times 10^{17}$ эрг/г (это соответствует переходу к статистическому равновесию при горении углерода [93]).

Таким образом, полная система, которая описывает эволюцию дефлаграционного фронта пламени, выглядит следующим образом:

$$\frac{dM}{dt} = -v_n(\rho_1)4\pi R^2 \rho_1, \quad (1.27)$$

$$\frac{dR}{dt} = v_f(\rho_1), \quad (1.28)$$

$$M = \lambda(\alpha)\alpha^3 m(\xi_1), \quad (1.29)$$

$$R = \alpha \xi_1, \quad (1.30)$$

$$\rho_1 = \lambda(\alpha)\theta(\xi_1)^n. \quad (1.31)$$

Данная система с легкостью может быть проинтегрирована численно. Перед этим сделаем упрощение этой системы, которое возможно для случая $n = 3$, и рассмотрим некоторые особенности решения.

В качестве независимой переменной будем использовать ξ_1 . Так как в случае $n = 3$ выполняется соотношение $\lambda\alpha^3 = K_2 = \text{const}$, то масса зависит только от ξ_1 . Поэтому для изменения радиуса можно написать

$$dR = -\frac{dM}{4\pi R^2 \rho_2} = -\frac{K_2 \theta(\xi_1)^n \xi_1^2 d\xi_1}{R^2 \rho_2}, \quad (1.32)$$

где ρ_2 – плотность сразу за фронтом горения. Если ρ_c , α_0 – значения центральной плотности и α для звезды до взрыва, то для всех будущих равновесных конфигураций

$$\rho(\xi = 0) = \frac{\rho_c \alpha_0^3}{\alpha^3}, \quad \alpha = \frac{R}{\xi_1}. \quad (1.33)$$

После подстановки данного выражения в уравнение на dR , получим упрощение системы (1.27)–(1.31):

$$dR = R \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d\xi_1}{\xi_1}, \quad (1.34)$$

$$\rho_1 = \frac{K_2}{R^3} \xi_1^3 \theta(\xi_1)^n. \quad (1.35)$$

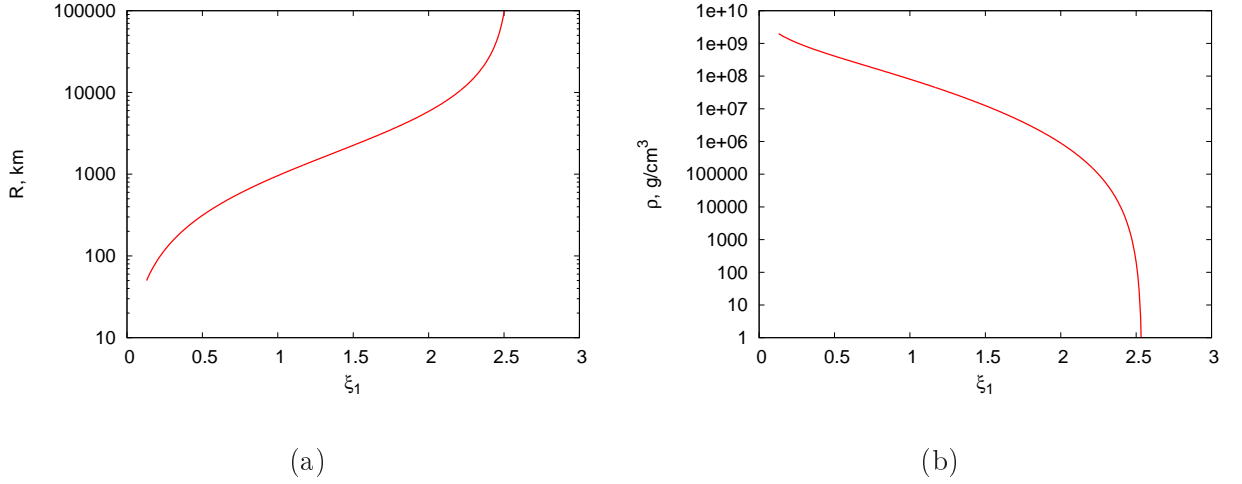


Рис. 1.2: Расчёт расширения белого карлика по аналитической модели

Уравнение (1.34) показывает, что звезда испытывает расширение, близкое, к гомологическому. Если коэффициент расширения постоянен $\rho_1/\rho_2 = \kappa$, то

$$R = C_1 \xi_1^\kappa. \quad (1.36)$$

Это означает, что плотность перед фронтом падает как

$$\rho_1 \sim \xi_1^{3-3\kappa} \theta(\xi_1)^n. \quad (1.37)$$

Для решения системы (1.34)–(1.35) необходимо задать начальные данные. Будем рассматривать белый карлик с центральной плотностью $\rho_c = 2 \times 10^9$ г/см³. Начальное положение пламени (точку поджига) возьмём из работы [108]: $R = 50$ км. Задание начальной плотности позволяет определить α и, тем самым, вычислить начальное значение ξ_1 .

Результаты интегрирования представлены на рисунке 1.2. Видно, что плотность падает до “нуля” при конечном значении $\xi_1 \approx 2.5$, то есть в этой модели звезда прогорает не полностью: этому значению соответствует сгоревшая масса $M = K_2 m(\xi_1) = 1.0 M_\odot$ (конечно, в реальности горение остановится гораздо раньше при некоторой конечной плотности).

Важная особенность полученного решения состоит в том, что оно слабо зависит от скорости пламени (в данном случае скорость определяет только время прогорания). Действительно, если рассматривать сильно дозвуковое течение и положить $v_1/c_1 \ll 1$ в уравнении (1.26), то после разложения получается, что лидирующий член степени

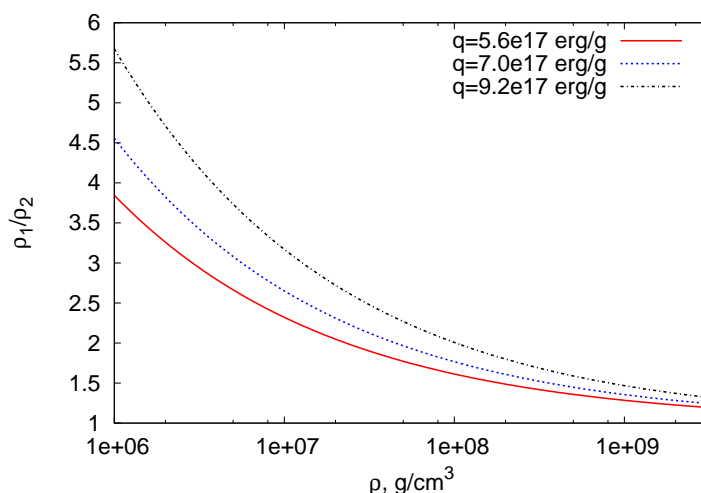


Рис. 1.3: Коэффициент расширения среды для различной плотности при горении с различными калорийностями, характерными для SNIa (для политропного уравнения состояния).

сжатия не зависит от v_1 :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + \frac{(\gamma - 1)q}{c_1^2}. \quad (1.38)$$

(На рисунке 1.3 приведена зависимость коэффициента расширения от плотности для различных калорийностей). Так как наша система (1.34)–(1.35) не зависит явно от скорости, а только от коэффициента расширения ρ_1/ρ_2 (и через него от скорости), то полученная зависимость плотности перед фронтом от радиуса фронта является универсальной для данной модели и сильно дозвукового горения.

Предложенная модель позволяет проводить оценки для дефлаграционной стадии горения БК, а также для чисто дефлаграционного сценария взрыва.

1.3 Механизмы перехода горения в детонацию

Обсудим условия, которые необходимы для перехода медленного горения в детонацию. Для начала рассмотрим два возможных механизма перехода горения в детонацию.

- Основная идея первого механизма перехода была предложена К.И. Щёлкиным в работах [115, 116] на основе экспериментов в трубах. За счёт шероховатостей поверхности трубы пламя турбулизуется и, тем самым, ускоряется. Это приводит к появлению волн сжатия, уходящих вперед фронта. Каждая следующая волна бежит с большей скоростью, что создаёт условия для их слияния. Это порождает

ударную волну, которая нагревает вещество до достаточной для возникновения горения температуры. Эта модель объясняет, почему детонация всегда возникает немного впереди фронта горения.

Модификацию эта модель получила в экспериментальных работах [117, 118]. Там показано, что детонация возникает не за счёт возникновения ударной волны, а за счёт объёмного взрыва области перед пламенем, созданной простой волной сжатия. При этом необходимость в ускорении фронта сохраняется.

- Второй механизм называется спонтанным переходом в детонацию [119]. Предположим, что в некоторый момент времени среда находится в неоднородном состоянии (например, присутствует градиент температуры). У каждой точки в пространстве своё время прогорания вещества τ_b . При наличии пространственного градиента, только из-за неоднородного самосгорания, в среде может возникнуть волна, которая, в отличие от дефлаграции, не связана с какой-либо передачей тепла в соседние слои. Скорость такой волны определяется, как

$$v_{\text{spont}} = \left(\frac{d\tau_b}{dx} \right)^{-1}, \quad (1.39)$$

и может быть сколь угодно большой. При скоростях такой волны, близких к звуковым в среде формируется ударная волна, которая и приводит к детонации.

Нужно заметить, что второй механизм в определённом смысле связан с первым – объёмный взрыв соответствует спонтанной волне горения, распространяющейся с бесконечной скоростью. Оба механизма перехода требуют течений со скоростями, близкими к скорости звука – только таким образом можно создать область повышенного давления для объёмного взрыва, или подготовить неоднородное распределение параметров среды. Так как пламя в сверхновых изначально медленное, то в первую очередь требуется ускорить его. В ранних работах по обычной детонации считалось, что это происходит за счёт турбулизации течения при наличии стенок. Чуть позже была открыта гидродинамическая неустойчивость тонкого фронта – неустойчивость Ландау–Даррье [120], которая может играть значительную роль в этом процессе, но не изучена до конца. В сверхновых при отсутствии стенок имеются свои механизмы генерации турбулентности.

Интересный результат в этом контексте получен в экспериментальной работе [121]: различные стехиометрические смеси поджигались в сферах и полусферах большого объёма. В результате пламя распространялось в свободном объёме и для всех смесей

выходило на автомодельный самоускоряющийся режим, с зависимостью радиуса пламени от времени

$$R(t) = R_1 + At^{3/2}, \quad (1.40)$$

где R_1 , A – некие эмпирические константы, зависящие от вещества (и, возможно, от способа поджига). Тем самым, экспериментально показано ускорение пламени самого по себе. Окончательного теоретического объяснения эти эксперименты не имеют.

Глава 2

Исследование плоской волны горения

2.1 Постановка задачи

Свойства плоского пламени для различных условий среды являются основой для проведения любых расчётов сверхновых Ia. Из-за огромной разницы в пространственных масштабах задачи: толщина пламени доли сантиметра [73], а размер звезды ~ 1000 км, прямое моделирование всех процессов горения на масштабе звезды целиком недоступно для современных вычислительных возможностей. А это означает, что в таких расчётах получить корректное значение скорости пламени, которое зависит от микрофизики, невозможно. В результате, полную задачу горения белого карлика разбивают на две: исследование микрофизики горения (с полным разрешением структуры фронта горения) и исследование динамики фронта на масштабах всей звезды (при этом горение описывается с помощью информации, полученной из микрофизики горения). Первая задача рассматривается в этой главе. Данное исследование повторяет работу [73], но это необходимо для обоснования дальнейших исследований и для независимой проверки работы Тиммеса и Вусли.

Пространственные масштабы всех кинетических процессов в белом карлике (см. ниже) позволяют использовать гидродинамический подход. В первую очередь рассмотрим, какие физические процессы играют основную роль.

2.2 Свойства среды белого карлика

Как было сказано ранее, белый карлик состоит из смеси $^{12}\text{C}+^{16}\text{O}$. Данная смесь на момент начала взрыва (около центра звезды) находится при условиях $T \sim 10^9$ К и $\rho \sim 10^9$ г/см³. Для дальнейших оценок предположим, что ионы только одного типа – ^{12}C . Для таких условий энергия Ферми электронов

$$\epsilon_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3} \gg k_B T, \quad (2.1)$$

импульс Ферми

$$p_F \gg m_e c, \quad (2.2)$$

параметр неидеальности плазмы (отношение средней энергии кулоновской связи между ионами к температуре):

$$\Gamma = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{Z_i^2 e^2}{a_i} \right) = \frac{Z_i^2 e^2}{k_B T} \left(\frac{4\pi}{3} n_i \right)^{1/3} \sim 1. \quad (2.3)$$

При этом для ионов $\epsilon_F^{(i)} \ll k_B T$ и $k_B T \ll m_i c$. Здесь n_e – концентрация электронов, n_i – концентрация ионов, Z_i – заряд ионов, a_i – среднее расстояние между ионами, e – заряд электрона, c – скорость света. Эти соотношения позволяют сделать вывод, что среда состоит из релятивистских вырожденных электронов и нерелятивистских невырожденных ионов. При этом кристаллическая решетка отсутствует (она образуется при $\Gamma \sim 170$ [122]), то есть нет корреляции между положениями ионов.

Рассмотрим кинетические коэффициенты в такой среде. Так как электроны, в отличие от ионов, релятивистские и вырожденные, то они играют основную роль в процессах переноса. Что означает, что вклад в горение теплопроводности, которая определяется динамикой электронов, должен превышать вклад диффузии, которая определяется динамикой ионов. Таким образом, рассмотрим коэффициент теплопроводности в среде. Функция распределения электронов в фазовом пространстве $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$. Она подчиняется уравнению Больцмана¹:

$$\frac{df}{dt} = \text{St}f = - \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [f(1-f') - f'(1-f)] \frac{2d^3 p'}{(2\pi)^3}, \quad (2.4)$$

где $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ – вероятность рассеяния из состояния \mathbf{p} в \mathbf{p}' , а интегрирование идёт по всему импульсному объёму. Основной вклад оказывает рассеяние электронов на

¹ в этом разделе мы будем использовать систему единиц $c=\hbar=k_B=1$, а в конце восстановим размерность

ионах: сечения электрон–ионных и электрон–электронных столкновений соотносятся как $\sigma_{ei}/\sigma_{ee} \sim Z^2 \gg 1$ для нашего случая, см., например, [123]. Необходимо заметить, что, все-таки, учёт σ_{ee} важен в некоторых случаях [124].

Предполагаем, что рассеяние электронов происходит только на ионах, а функция распределения последних не меняется. В условиях предсверхновой ионы невырождены и нерелятивистские, и, так как их масса гораздо больше, чем масса электронов, их можно считать покоящимися. Подход, когда рассматривается рассеяние только на одном ионе (отдельно от других) неверен при $\Gamma \gg 1$, так как будет существовать корреляция между позициями ионов – возбуждаются фоновые колебания (но, как было сказано выше, это происходит при $\Gamma \sim 170$). Сечение рассеяния на покоящихся ионах σ (с вектор–потенциалом взаимодействия $A_0(r) = Ze/r$) выглядит следующим образом [123] (здесь используется короткое обозначение $d\mathbf{p}' \equiv 2d^3p'/(2\pi)^3$):

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{p}'} = \pi e^2 \delta(\epsilon_{p'} - \epsilon_p) |A_0(\mathbf{q})|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\epsilon_p^2}\right) \frac{\epsilon_p}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.5)$$

где $A_0(\mathbf{q}) = 4\pi Ze/\mathbf{q}^2$, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Наличие дельта–функции показывает, что рассеяние упругое. Из-за того, что ионы покоятся, можно записать:

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}'} v n_i. \quad (2.6)$$

Равновесное распределение электронов при условиях (2.1)–(2.2) – фермиевское:

$$f_p^0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/T} + 1}, \quad (2.7)$$

здесь μ – химпотенциал. Согласно стандартной процедуре в физической кинетике рассмотрим небольшое отклонение от равновесного распределения ϕ_p . Для удобства определим его как:

$$f_p = f_p^0 - \frac{\partial f_p^0}{\partial \epsilon_p} \phi_p = f_p^0 + \frac{1}{T} f_p^0 (1 - f_p^0) \phi_p. \quad (2.8)$$

Уравнение Больцмана, при подстановке постоянного градиента температуры, выглядит следующим образом:

$$-\frac{\partial f_p^0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - w}{T} (\mathbf{v} \nabla) T = -\frac{1}{T} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (\phi - \phi') f_p^0 (1 - f_p^0) \frac{2d^3p'}{(2\pi)^3}, \quad (2.9)$$

здесь w – тепловая функция, которая для вырожденного газа равна химпотенциалу $w \approx \mu$. Сделаем сокращение $\Gamma_{p \rightarrow p'} \equiv w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_p^0 (1 - f_p^0)$. После умножения этого уравнения на ϕ и интегрирования по всему объёму p можно привести уравнение Больцмана к виду:

$$\frac{j_E^2}{\kappa T} = \frac{1}{2T} \int (\phi - \phi')^2 \Gamma_{p \rightarrow p'} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2d^3p'}{(2\pi)^3}, \quad (2.10)$$

где поток энергии:

$$\mathbf{j}_E = \int (f - f^0) \mathbf{v} (\epsilon - \mu) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (2.11)$$

а коэффициент теплопроводности κ определен следующим образом:

$$\mathbf{j}_E = -\kappa \nabla T. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.10) имеет ясный физический смысл: можно показать [125], что в правой части этого уравнения стоит скорость генерации энтропии от рассеяния частиц, а в левой части скорость изменения энтропии через теплопроводность. Метод определения кинетических коэффициентов через это уравнение очень удобен — можно подставлять произвольные функции ϕ и получать ответы для κ , и существует теорема, которая утверждает, что максимально возможное κ , среди всех, что получается при различных ϕ , является точным решением нашей задачи [125].

Наш случай очень простой — изотропная среда. Поэтому мы можем угадать точный ответ, так как есть только небольшой набор величин, через которые может выражаться ϕ :

$$\phi = A(\epsilon_p - \mu) p_\alpha \partial_\alpha T. \quad (2.13)$$

Это выражение легко объясняется: ϕ должно быть пропорционально градиенту температуры, единственная величина, которая может сделать скаляр с градиентом — это импульс. Кроме того, выражение должно быть пропорционально $(\epsilon_p - \mu)$, так как все величины должны задаваться через f_0 , а не через поправки, пропорциональные ϕ . Множитель A — это размерная константа, но она сокращается при подстановке в (2.10) и не играет роли.

Рассмотрим интегрирование

$$\mathbf{j}_E = \frac{1}{T} \int (\epsilon_p - \mu) \mathbf{v} f_p^0 (1 - f_p^0) \phi d\mathbf{p}. \quad (2.14)$$

Для определенности положим $\partial_\alpha T = (0, 0, \nabla T)$, и, используя факт сильной вырожденности электронов (т.е. $\int_0^\infty \psi(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\epsilon = -\psi(\mu) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \psi''(\mu) - \frac{7\pi^4}{360} T^4 \psi''''(\mu) + \dots$), получим

$$j_{Ez} = \frac{1}{9} (\nabla T) T^2 (\mu^2 - m_e^2)^{3/2}. \quad (2.15)$$

Правая часть уравнения (2.10):

$$\text{RHS} = \int (\phi - \phi')^2 \Gamma_{p \rightarrow p'} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2d^3p'}{(2\pi)^3}, \quad (2.16)$$

после всех подстановок принимает вид

$$\text{RHS} = \int (\epsilon_p - \mu)^2 q_\alpha (\partial_\alpha T) q_\beta (\partial_\beta T) \pi e^2 \delta(\epsilon - \epsilon') |A_0|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\epsilon_p^2}\right) \frac{\epsilon_p}{p} f_p^0 (1 - f_p^0) n_i v \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2d^3 p'}{(2\pi)^3}. \quad (2.17)$$

Точно так же, как и раньше, интегрируя, получим

$$\text{RHS} = \frac{1}{18\pi} e^2 n_i T^3 \mu (\mu^2 - m_e^2)^{1/2} (\nabla T)^2 \frac{\epsilon}{p} \int_0^{2p} q^3 |A_0(q)|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) dq. \quad (2.18)$$

Определим кулоновский логарифм (вспомнив, что $A_0(q) = 4\pi Ze/q^2 = 4\pi Ze\varphi(q)$):

$$\Lambda_{ei} = \int_0^{2p} q^3 |\varphi(q)|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\mu^2}\right) dq, \quad (2.19)$$

$$\text{RHS} = \frac{8\pi}{9} Z^2 e^4 n_i T^3 \mu (\mu^2 - m_e^2)^{1/2} (\nabla T)^2 \frac{\epsilon}{p} \Lambda_{ei}. \quad (2.20)$$

После подстановки (2.15) и (2.20) в (2.10), и определения $v_F \equiv p/\epsilon$ получаем:

$$\kappa = \frac{1}{36\pi} \frac{T(\mu^2 - m_e^2)^{5/2} v_F}{Z^2 e^4 n_i \mu \Lambda_{ei}}. \quad (2.21)$$

Восстановим размерность:

$$\kappa_e = \frac{1}{36\pi} \frac{k_B^2 T (\mu^2 - m_e^2 c^4)^{5/2} v_F}{(\hbar c)^3 Z^2 e^4 n_i \mu \Lambda_{ei}}. \quad (2.22)$$

Это конечное значение теплопроводности (оно впервые было получено в [126]).

Теперь перейдем к вычислению кулоновского логарифма. Наше рассеяние квантовое (см. критерий в [127])

$$\frac{|ee'|}{\hbar v} \approx \frac{Ze^2}{\hbar c} = Z\alpha \ll 1, \quad (2.23)$$

следовательно минимальный переданный импульс: $q_{\min} = \hbar/l$, где l – характерная длина взаимодействия. Тогда (2.19) переписывается следующим образом

$$\Lambda_{ei} = \ln \left(\frac{2p\epsilon l}{\hbar} \right) - \frac{v_F^2}{2c^2}. \quad (2.24)$$

Для такой плотной среды $l \approx a_i$, то есть в этом случае кулоновский логарифм

$$\Lambda_{ei} = \ln \left((18\pi)^{1/3} Z^{1/3} \right) - \frac{v_F^2}{2c^2} = \ln (3.838 Z^{1/3}) - \frac{v_F^2}{2c^2}. \quad (2.25)$$

В гидродинамике есть общие выражения для потоков массы и тепла [128]:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \\ \mathbf{q} &= -\delta \nabla \mu - \gamma \nabla T. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Используем определение \mathbf{q} за вычетом $\mu \mathbf{i}$. Восстановим члены с $\nabla \mu$ в кинетическом уравнении

$$-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - \mu}{T} (\mathbf{v} \nabla) T + \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} (\mathbf{v} \nabla) \mu = \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (\phi - \phi') \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\mathbf{p}'. \quad (2.27)$$

По той же логике, что и раньше, будем искать решение в виде

$$\phi = A(\epsilon - \mu)(\mathbf{p} \nabla) T + B(\mathbf{p} \nabla) \mu. \quad (2.28)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \phi &= A(\epsilon - \mu)(\mathbf{p} \nabla) T + AT(\mathbf{p} \nabla) \mu, \\ A &= -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mu^2 - m_e^2) v_F}{Z^2 e^4 n_i \mu \Lambda_{ei} T}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

По определению потоков

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\int \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \phi d\mathbf{p}', \\ \mathbf{q} &= -\int (\epsilon - \mu) \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \phi d\mathbf{p}', \end{aligned} \quad (2.30)$$

получаем соотношение Онсагера $\delta = T\beta$ и, в нашем частном случае (вырожденных электронов), $\alpha = -AT \frac{v_F^2}{3} \mu$; $\beta = 0$; $\delta = 0$; $\gamma = \kappa$.

Под конец приведем некоторые пределы для применимости выражения для κ . При вычислении было использовано выражение

$$\int_0^\infty \psi(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\epsilon = -\psi(\mu) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \psi''(\mu) - \frac{7\pi^4}{360} T^4 \psi''''(\mu) + \dots \quad (2.31)$$

При этом опускались все члены, начиная с 3-го. Если потребовать, чтобы он был меньше 2-ого, получим условие

$$T < \sqrt{\frac{60}{7\pi^2} \frac{\psi''(\mu)}{\psi''''(\mu)}} = 0.16\mu, \quad (2.32)$$

В последнем равенстве использовано явное выражение для ϕ в нашей задаче.

Используя приведённые выше выражения нетрудно вычислить длину свободного пробега электронов в среде. Транспортное сечение:

$$\sigma_{\text{tr}} = \int \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}'} (1 - \cos \theta) d\mathbf{p}'. \quad (2.33)$$

После интегрирования, получаем

$$l_e = \frac{1}{n_i \sigma_{\text{tr}}} = \frac{p^2 v^2}{4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}. \quad (2.34)$$

Для электронов на поверхности ферми при параметрах $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³, $T \sim 10^9$ К, ¹²C получается $l_e \sim 3 \times 10^{-8}$ см. Эта длина показывает границы применимости гидродинамического приближения, используемого в расчётах.

Также оценим два безразмерных числа, которые показывают относительное влияние разных кинетических процессов в условиях горения белых карликов: теплопроводности, диффузии, вязкости. Диффузия может быть оценена как

$$D \sim \lambda_i v_T, \quad (2.35)$$

где длину свободного пробега ионов λ_i в условиях $\Gamma \sim 1$ можно оценить как среднее расстояние между ионами, v_T – тепловая скорость ионов. Тогда число Льюиса

$$\text{Le} = \frac{\kappa}{\rho C_p D} \approx 10^4 \quad (2.36)$$

показывает, что диффузией можно пренебречь. Аналогично вязкость

$$\eta \sim mn\lambda_i v_T, \quad (2.37)$$

и число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{C_p \eta}{\kappa} \approx 10^{-4} \quad (2.38)$$

показывает что ей тоже можно пренебречь.

2.3 Ядерные реакции

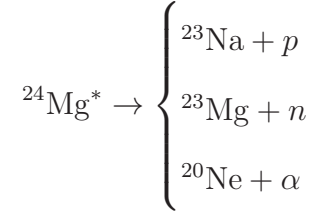
Для исследования микроструктуры пламени необходимо точно считать кинетику термоядерных реакций, которые протекает по разветвленной сетке реакций. Полная сетка реакций включает более сотни изотопов и непрактична в использовании (но она необходима для вычисления химсостава остатка сверхновой). Для гидродинамических расчётов пламени в SNIa целесообразно использовать упрощённые варианты схемы ядерных реакций.

В данной работе будем использовать два варианта:

- Упрощённая сетка реакций, состоящая только из одной реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}^*$. Данная реакция используется во многих работах как первое приближение к полному набору. В случае, если белый карлик состоит преимущественно из ¹²C это будет самая первая реакция в сети. А, из-за того, что кулоновских барьер довольно большой, можно считать что она будет “узким горлышком” для всей сетки (как

будет видно из дальнейшего исследования, это не совсем так). Скорость данной реакции может быть найдена в [129].

Mg^* означает, что магний находится в возбуждённом состоянии и в дальнейшем распадается по 3 каналам:



Скорость, указанная в [129], учитывает полную ширину распада. Выпишем выражения для скоростей, которые будем использовать в дальнейшем (определение всех введённых смотри ниже в гидродинамической системе уравнений):

$$R_{C12} = -F_{scr} A_{C12}^{-1} X_{C12}^2 R(T), \quad (2.39)$$

$$R_{Mg24} = -R_{C12},$$

$$\dot{S} = q R_{Mg24},$$

$$R(T) = 4.27 \times 10^{26} \frac{T_{9A}^{5/6}}{T_9^{1.5}} e^{-84.165/T_{9A}^{1/3} - 2.12 \times 10^{-3} T_9^3},$$

$$T_{9A} \equiv \frac{T_9}{1 + 0.0396 T_9}.$$

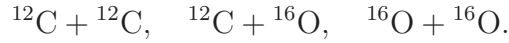
При расчёте всех термодинамических величин мы используем приближение, что конечный продукт – это ${}^{24}Mg$. Тогда калорийность данной реакции $q = 5.6 \times 10^{17}$ эрг/г.

Также, в этом варианте можно смоделировать дальнейшее прогорание среды до Ni за счёт повышения калорийности до

$$q_{Ni} = 9.2 \times 10^{17} \text{ эрг/г.} \quad (2.40)$$

- Второй вариант сетки реакций использует приближение α -цепи. В работе [75] показано, что такая сетка реакций, состоящая из стабильных изотопов, с переходом между ними за счёт α -реакций, является очень хорошим приближением к полному набору всех реакций для термоядерного горения в сверхновых. То есть, учитываются следующие переходы





Численная реализация данной сети свободно доступна на сайте Ф. Тиммеса [130]. Она содержит собственный интегратор по времени и способна точно проинтегрировать эволюцию горения для любого заданного шага по времени Δt . Эта численная реализация используется в данной работе.

2.4 Экранирование ядерных реакций

Из-за того, что плазма в сверхновых сильно ионизованная и находится при большой плотности, электроны могут влиять на кулоновские барьеры, которые окружают ядра [131, 132]. При некоторых условиях такое влияние может увеличивать скорость реакции на много порядков.

Так как параметр неидеальности плазмы $\Gamma \sim 1$ (2.3), то в сверхновых влияние экранирования может быть сильно (этот параметр находится на границе сильного и слабого экранирования). Эффект экранирование сводится к увеличению скорости реакции на фактор [132]:

$$F_{\text{scr}} = \exp(H_{12}(0)), \quad (2.42)$$

где H_{12} – функция экранирования. Для реакции ионов с зарядами Z_1 и Z_2 она равна

$$H_{12}(0) = -\frac{F(Z_1 + Z_2) - F(Z_1) - F(Z_2)}{T}, \quad (2.43)$$

где F – свободная энергия. В первом порядке из ячейки Вигнера–Зейца $F/T = -0.9\Gamma$, где Γ зависит от соответствующих ядер, но, из-за экспоненциальной зависимости фактора экранирования, необходимо более точное выражение. Будем использовать аппроксимацию для свободной энергии, выраженную через фактор неидеальности, полученную в работе [133] с помощью метода Монте–Карло:

$$\frac{F}{T} = A_1 \left\{ \sqrt{\Gamma(A_2 + \Gamma)} - A_2 \ln(\sqrt{\Gamma/A_2} + \sqrt{1 + \Gamma/A_2}) \right\} + 2A_3(\sqrt{\Gamma} - \text{atan} \sqrt{\Gamma}), \quad (2.44)$$

где константы $A_1 = -0.9052$, $A_2 = 0.6322$, $A_3 = 0.27243$.

2.5 Уравнение состояния

Очень плотная плазма в условиях белого карлика требует специального уравнения состояния. В первую очередь это связано с вырождением электронной компоненты.

Так как в результате прогорания вещества условия будут сильно меняться (температура возрастает на порядок), используемые выражения должны учитывать любую степень вырождения и переходить в УРС идеального газа. Уравнение состояния в общем виде выводится из термодинамического потенциала. Для Ферми–газа электронов в релятивистском случае [134]:

$$\Omega = -\frac{8\pi Vc}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{(p^2 + m_e^2 c^2)^{1/2} \left[\exp\left(\frac{(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}}{T} - \frac{\mu}{T}\right) + 1 \right]}, \quad (2.45)$$

где V – объём газа, m_e – масса электрона. Из термодинамического потенциала можно вычислить любые величины. Давление

$$p = -\Omega/V, \quad (2.46)$$

концентрация электронов

$$n_e = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) \Big|_{T,V}, \quad (2.47)$$

Энтропия S :

$$\frac{S}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) \Big|_{V,\mu}, \quad (2.48)$$

Внутренняя энергия

$$E = N\mu + TS - pV. \quad (2.49)$$

Если в качестве независимых параметров использовать температуру T , плотность ρ и химсостав среды X_i , что легко переводится в комбинацию (T, n_e) , то для вначале находится химпотенциал из уравнения (2.47). А в дальнейшем из интеграла (2.45) и его интегралов определяются остальные величины. Как видно, основная сложность заключается в вычислении Ферми–Дираковских интегралов, как в уравнении (2.45). В работе [114], Д. К. Надёжиным предложен метод, позволяющий вычислять эти интегралы с любой заданной точностью. Также им реализован численный код, выполняющий эти процедуры. Эти наработки используются в численном моделировании в представляемых исследованиях.

Как было показано выше, для описания ионов подходит уравнение состояния идеального газа

$$p = \frac{\rho}{\bar{A}} RT, \quad (2.50)$$

где \bar{A} – усреднённая по всем сортам ионов атомарная масса. Правило усреднения получается из закона Дальтона:

$$p = \sum p_i = \sum \frac{\rho X_i}{A_i} RT, \quad (2.51)$$

то есть

$$\bar{A} = \left(\sum_i \frac{X_i}{A_i} \right)^{-1}. \quad (2.52)$$

При некоторых условиях в звёздах давление излучения сравнимо или даже превышает давление вещества. Для корректного учёта таких условий в УРС добавлено давление и энергия излучения [134]:

$$p_{\text{rad}} = \frac{4\sigma_{\text{SB}}}{3c} T^4, \quad E = 3pV, \quad (2.53)$$

где $\sigma_{\text{SB}} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ г с}^{-3} \text{ К}^{-4}$ – постоянная Стефана–Больцмана.

В данном уравнении состояния считается, что время установления термодинамического равновесия в среде очень мало, поэтому температуры ионов, электронов и излучения одинаковы. Это справедливо для горения сверхновых Ia: пробеги всех частиц (а пробег электронов, как один из наибольших, вычислен в разделе 2.2) малы по сравнению с масштабами интересующих процессов (см. ниже).

Все три составляющие полного уравнения состояния: электроны, ионы, излучение, учитываются и реализованы в численном коде Надёжина, упомянутом ранее. В качестве базовых термодинамических параметров в нём используются T , ρ , X_i . При необходимости работы в других переменных (например (T, p, X_i)), уже в наших кодах, в добавок к коду Надёжина, используется численный решатель с методом Ньютона.

Практически все вопросы свойств среды белых карликов (теплопроводность, ядерные реакции, уравнения состояния), которые обсуждались выше, рассмотрены в книге [135].

2.6 Модель

Выпишем систему уравнений гидродинамики, которая описывает процесс горения в сверхновых:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j(\rho v_j) = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial(\rho X_i)}{\partial t} + \partial_j(X_i \rho v_j) = \rho R_i, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) = -\partial_i p, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \partial_j(v_j(E + p) + Q_j) = \rho \dot{S}, \quad (2.57)$$

$$Q_j = -\kappa \partial_j T, \quad (2.58)$$

Таблица 2.1: Теоретические оценки нормальной скорости горения и толщины пламени для одной реакции $2^{12}\text{C} \rightarrow 24\text{Mg}^*$ для различных плотностей среды:

ρ , г/см ³	v , км/с	Δx , см
2×10^8	203	2.5×10^{-5}
7×10^8	742	3.0×10^{-6}
2×10^9	1300	1.0×10^{-6}

$$E \equiv \frac{\rho v^2}{2} + \rho e. \quad (2.59)$$

Определим ещё раз все величины: ρ – плотность, v_i – скорость, p – давление, $X_i = \rho_i/\rho$ – массовая доля i -ого элемента (элементы в газовом состоянии, поэтому смесь гомогенная), e – внутренняя энергия на единицу массы, Q_i – тепловой поток, κ – коэффициент теплопроводности, R_i – скорость реакции, \dot{S} – энергосвободное от реакций.

Стационарная плоская волна горения является решением данной системы при котором все величины зависят от $f(x - u_n t)$, где u_n – нормальная скорость распространения волны. Эта скорость не является параметром, а находится из полного решения системы, и зависит в первую очередь от скорости энергосвободения и процессов энергопередачи.

В разделе 1.1 приведена простая аналитическая оценка скорости волны горения. В единицах, соответствующих приведённой системе, получается:

$$u_n = \left(\frac{\kappa \dot{S}}{c_p q} \right)^{1/2}, \quad (2.60)$$

где c_p – теплоёмкость при постоянном давлении. Используя выражения для коэффициента теплопроводности (2.22) и скорости энергосвободения из раздела 2.3 (по одной реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow 24\text{Mg}^*$), сделаем оценку для получающихся скоростей фронта горения. Результаты представлены в таблице 2.1. Как будет показано ниже, они являются очень грубой оценкой. Точные значения параметров пламени могут быть получены только при численном решении системы (2.54)–(2.59).

2.7 Численная реализация

Представленная система уравнений гидродинамики реализована в нашем одномерном коде FRONT1D. Приведём некоторые подробности численной реализации. В одномерных расчётах удобнее и точнее использовать лагранжев подход, поэтому перепишем систему в лагранжевых переменных

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 \frac{dX_i}{dt} &= R_i, \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \dot{S}, \\
 q &= -\kappa \partial_x T, \\
 \dot{S} &= \sum R_i B_i, \\
 p &= p(\rho, X_i, e),
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Эта система содержит уравнения разного типа, поэтому для её решения используется метод разделения по физическим процессам: гидродинамика, теплопроводность, ядерные реакции. На каждом из этапов в методе разделения некоторые величины являются динамическими, а некоторые постоянными.

- Гидродинамический этап. Решается система:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 p &= p(\rho, X_i, e).
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

При этом величины X_i считаются постоянными и переносятся вместе с массой как пассивный скаляр. Для решения этой системы используются лагранжевы массовые координаты, то есть вводится $ds \equiv \rho dx$. Система расписывается в виде неявной схемы, которая решается итерационным методом Ньютона. Данная схема предложена и подробно рассмотрена в книге [136]. Для расчёта разрывных решений используется квадратичная искусственная вязкость.

- Этап теплопроводности. На этом этапе плотность ρ , массовые доли веществ X_i остаются постоянными. Тогда уравнение теплопроводности принимает вид

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2.63)$$

Где c_v – теплоёмкость при постоянном объёме (если бы в численной схеме использовалось предположение постоянства давления, что с хорошей точностью выполняется для медленных пламён, то необходимо было использовать c_p ; так как решается полная система газовой динамики, выравнивание давления в медленных течениях происходит автоматически и конечный эффект соответствует c_p). В левой части этого уравнения мы перешли от лагранжевой производной к эйлеровой так как адвекционное слагаемое $v \partial_x e$ уже было учтено ранее. Для решения этого уравнения используем схему Кранка–Никольсона [137]. После получения нового поля температур пересчитывается внутренняя энергия e и давление p .

- Этап ядерных реакций. На нём решается система

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial t} &= R_i, \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= \dot{S}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Для устойчивости численного алгоритма необходимо следить, чтобы строго выполнялись соотношения $\forall i : X_i \geq 0$. Решатель APROX13 имеет собственные алгоритмы, которые следят за этим соотношением. В случае упрощённой цепочки ядерных реакций (см. раздел 2.3) уравнение для концентраций можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial X_{C12}}{\partial t} = -W_{C12} X_{C12}^2, \quad (2.65)$$

где величина W_{C12} зависит от полной плотности среды и температуры, при малых шагах по времени (см. ниже) может считаться постоянной. Тогда это выражение интегрируется аналитически

$$X_{C12}(t + \Delta t) = \frac{X_{C12}(t)}{1 + X_{C12}(t) W_{C12} \Delta t}. \quad (2.66)$$

Видно, что это выражение при малых Δt (при котором оно и справедливо) переходит в (2.65), если заменить производную на численную разность. Последнее выражение (2.66) обладает преимуществом, что при выполнении условия

$$\Delta t < \frac{1}{W_{C12} X_{C12}(t)} \quad (2.67)$$

всегда приводит к неотрицательному значению X_{C12} . Поэтому оно используется для интегрирования системы ядерной кинетики с одной реакцией.

Как обычно, разностные методы требуют ограничение на счётный шаг по времени Δt . Из-за наличия трёх физически разных процессов (разделённых по трём этапам решения системы), шаг по времени определяется по минимальному шагу среди всех процессов:

$$\Delta t = \min_i(\Delta t_{\text{courant},i}, \Delta t_{\text{nucl},i}, \Delta t_{\text{cond},i}), \quad (2.68)$$

где i – номер счетной ячейки (минимум берётся по всем ячейкам). Гидродинамическое ограничение:

$$\Delta t_{\text{courant},i} = C_1 \frac{\Delta x_i}{c_{s,i} + |v_i|}. \quad (2.69)$$

Здесь Δx_i – размер счётной ячейки, v_i , c_s – скорость вещества и звука в ячейке, соответственно. Ограничение по ядерным реакциям (сетка APROX13 не требует явного ограничения шага по времени, в неё внутри встроен интегратор, который, при необходимости, делает несколько шагов по времени для получения изменения за заданное время Δt) для упрощенной сетки:

$$\Delta t_{\text{nucl},i} = C_2 \frac{1}{W_{C12,i} X_{C12,i}(t)}. \quad (2.70)$$

Ограничение по теплопроводности:

$$\Delta t_{\text{cond},i} = C_3 \rho_i c_{v,zi} \frac{\Delta x_i^2}{\kappa_i}. \quad (2.71)$$

Константы Куранта в численных расчётах выбраны как $C_1 = C_3 = 0.25$, $C_2 = 0.01$.

Численная реализация системы (2.61) проверена на стандартных тестах, таких как распространение ударной волны, распад разрыва, распространение тепла от перегретой области и др.

2.8 Постановка численных расчётов

Точные параметры фронта горения в сверхновых типа Ia могут быть получены только с помощью численного решения представленной ранее системы с учётом всех эффектов, указанных выше. В среде с определённой плотностью ρ существует только одна скорость горения (которая, конечно, определяется коэффициентом теплопроводности и скоростями реакций). Сложные нелинейные выражения для коэффициента теплопроводности и разветвлённая сетка ядерных реакций не позволяют в качестве начальных

данных расчёта задать правильное распределение всех термодинамических величин на фронте горения. В результате в расчётах такую волну необходимо создать динамически. Будем использовать подход, который назовём “поджиг от горячей стенки”.

Рассмотрим следующую постановку. В области $x \in [0; L]$ на начальный момент времени $t = 0$ задаём среду с однородными параметрами ρ_0 , T_0 , X_{i0} . Плотность ρ_0 и химсостав X_{i0} определяют исследуемое состояние среды. Выбор начальной температуры T_0 обсуждается ниже. Левое граничное условие для гидродинамики – жёсткая стенка:

$$v|_{x=0} = 0. \quad (2.72)$$

Граничные условия на этой стенке для уравнения теплопроводности: температура, которая зависит от времени и линейно поднимается от T_0 до T_1 , выходя в конце на стационарное значение:

$$T(x=0) = \begin{cases} T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\tau} t, & t < \tau \\ T_1, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (2.73)$$

При этом параметры T_0 , T_1 и τ подбираются в каждом расчёте чтобы удовлетворить условиям: самопрогорание вещества при начальной температуре T_0 (то есть значительное изменение химсостава) происходит за характерное время много большее чем то, в течении которого мы наблюдаем за системой. Для T_1 условие обратное – при этой температуре скорость сгорания должна быть очень высока. Как будет видно из дальнейшего, если T_1 меньше температуры полностью сгоревшего вещества T_b , то оно не будет оказывать никакого влияния на распространение образовавшегося стационарного пламени: вещество прогреется до T_b и произойдет отщепление пламени от стенки, которая выполняет только роль “искры”.

При выборе τ необходимо учитывать медленность пламени. А именно, при дозвуковом течении давление во всей области должно оставаться практически постоянным. Такое условие мы можем обеспечить, если потребовать

$$\tau \gg \frac{L}{c_s}, \quad (2.74)$$

где c_s – скорость звука в среде. В этом случае звуковые волны будут успевать выравнивать давление во всей области. L – размер области, в которой мы наблюдаем за пламенем. Для того, чтобы исключить влияние правого граничного условия вся счётная область распространяется далеко за пределы L и занимает $[0; L_0]$, где $L \ll L_0$,

$L_0 > c_s t_{\text{simul}}$, t_{simul} – полное время моделирования. Для выполнения этих условий область от L до L_0 заполняется неоднородной сеткой с размерами ячеек, растущими по геометрической прогрессии.

Подход, используемый в этих расчётах, близок к подходу в работе [73].

2.9 Результаты

В расчёте с описанными выше начальными и граничными условиями за время $t \sim \tau$ в системе появляется пламя, распространяющееся с постоянной скоростью. Весь процесс состоит из двух этапов: сначала окружающая среда разогревается за счёт теплопроводности, потом, в некоторый момент в небольшой области недалеко от стенки подъём температуры начинает происходить, в основном, за счёт ядерных реакций, что быстро приводит к появлению пламени, которое “отщепляется” от стенки (то есть свойства пламени не зависят от незначительных вариаций параметров задания расчёта, а также от процессов, происходящих на левой стенке $x = 0$). Для получения скорости горения определим положение фронта в зависимости от времени $x(t)$. Центр фронта определяется как точка с $X_{\text{C12}} = 0.5$ (для стационарного пламени выбор этой точки не играет роли). На рисунке 2.1 представлен пример зависимости координаты фронта от времени и последовательные профили температуры для одного набора параметров. Видно, что через некоторое время пламя стабилизируется и распространяется с постоянной скоростью. Угол наклона прямого участка на графике 2.1а определяет скорость волны горения относительно стенки. Но это ещё не искомая величина: нормальная скорость распространения пламени, ведь вещество перед фронтом движется со своей скоростью. Для её получения необходимо определить плотности сгоревшего ρ_b и несгоревшего ρ_u веществ. Тогда из закона сохранения массы получается:

$$v_n = \frac{\rho_b}{\rho_u} v. \quad (2.75)$$

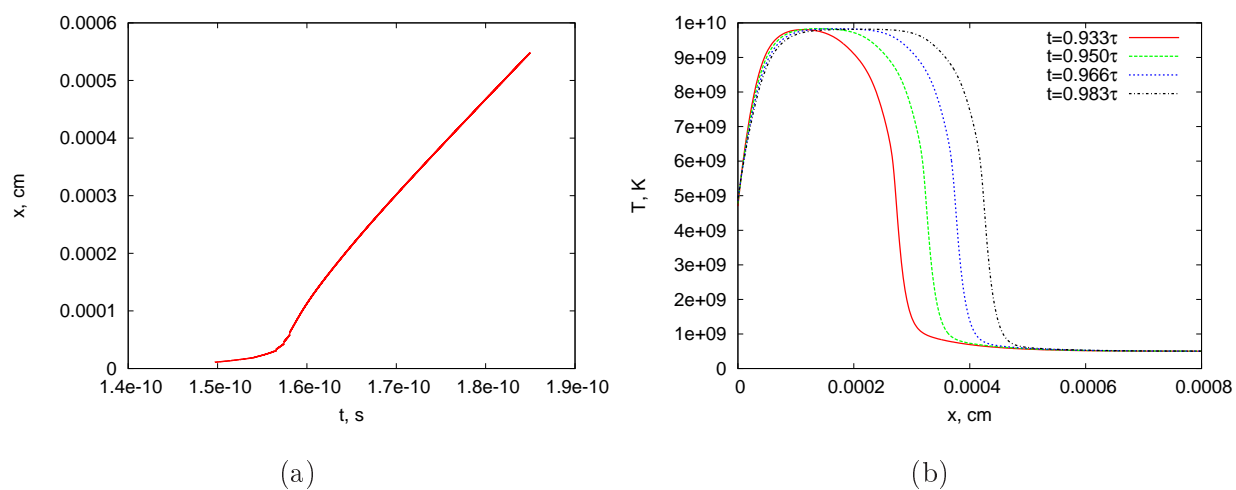


Рис. 2.1: Пример зависимости координаты центра фронта от времени (a), последовательных профилей температуры (b). Расчёт $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³, начальный состав ¹²C, сетка реакций APROX13

Таблица 2.2: Результаты моделирования. ρ_0 – начальная плотность, “Calor.” – вариант сетки ядерных реакций (см. раздел 2.3), T_{\max} – температура сгоревшего вещества, ρ_u/ρ_b – коэффициент расширения, v_n – нормальная скорость пламени, Δx_{fr} – толщина фронта горения (определяемая по ширине области подъема температуры), v_{TW} – скорость пламени по интерполяционным функциям из работы [73] (нужно сравнивать только с результатами по APROX13). Характерный временной масштаб горения $\Delta x_{\text{fr}}/v_n$ для наших результатов и из работы [73] (v_n определяются по уравнениям (43), (44) из [73], ширина пламени по интерполяции таблиц 3–4 там же).

Химсостав	ρ_0 , г/см ³	Calor.	T_{\max} , 10 ⁹ К	ρ_u/ρ_b	v_n , км/с	Δx_{fr} , см	$\Delta x_{\text{fr}}/v_n$, с	v_{TW} , км/с	$(\Delta x_{\text{fr}}/v_n)_{\text{TW}}$, с
¹² C	2×10^8	Mg	6.9	1.54	70.1	1.7×10^{-4}	2.4×10^{-11}	26.7	5.1×10^{-10}
		Ni	7.9	1.85	122	1.2×10^{-4}	9.8×10^{-12}		
		APROX13	6.8	1.60	18.2	3.0×10^{-4}	1.6×10^{-10}		
	7×10^8	Mg	9.1	1.33	302	1.8×10^{-5}	6.0×10^{-13}	73.2	2.9×10^{-11}
		Ni	10.7	1.57	470	1.5×10^{-5}	3.2×10^{-13}		
		APROX13	8.5	1.35	55.4	4×10^{-4}	7.2×10^{-11}		
2×10^9	Mg	11.3	1.26	854	5.5×10^{-6}	6.4×10^{-14}	170	2.2×10^{-12}	
	Ni	13.8	1.40	1241	1.0×10^{-5}	8.1×10^{-14}			
	APROX13	9.8	1.23	134	1×10^{-4}	7.5×10^{-12}			
¹⁶ O	2×10^8	APROX13	6.1	1.38	0.94	2×10^{-2}	2.1×10^{-7}	2.0	1.3×10^{-7}
	2×10^9	APROX13	8.8	1.17	22.1	5×10^{-4}	2.3×10^{-10}	23.0	1.5×10^{-10}

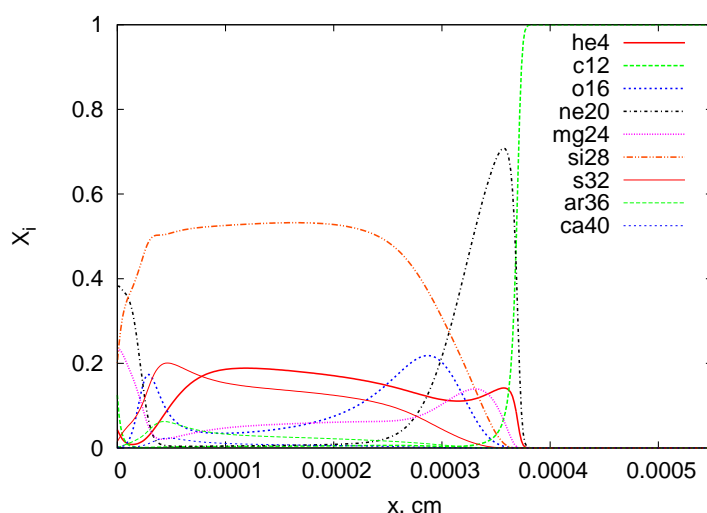


Рис. 2.2: Распределение концентраций различных элементов для расчёта с APROX13, $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³, начальный химсостав ¹²C.

Результаты моделирования представлены в таблице 2.2. Рисунок 2.2 показывает координатную зависимость массовых долей элементов X_i на некоторый момент времени для сетки реакций APROX13. Видно, что довольно быстро после прогорания устанавливается состояние близкое к ядерному статистическому квази-равновесию (область от 1×10^{-4} до 2×10^{-4} см на рис. 2.2, химический состав около левой границы $x = 0$ в первую очередь возмущен граничным условием). Результаты, полученные по одноступенчатой реакции находятся в неплохом соответствии с аналитическими оценками (таблица 2.1). Скорость пламени, полученная в расчётах по APROX13 на порядок меньше, чем в одноступенчатой реакции. Это важный результат, который показывает, что несмотря на то, что горение углерода преобладает в начале сгорания, реакция $2^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}^*$ не является хорошим приближением для описания процесса горения, хотя и используется во многих работах.

Скорость пламени, полученная по расчётам с APROX13 (которая близка к реальной скорости горения в белом карлике), может быть вычислена аналитически, если в уравнение (2.60) подставить скорость реакции $^{24}\text{Mg}(\alpha, \gamma)^{28}\text{Si}$ вместо $2\text{C} \rightarrow \text{Mg}$. В результате аналитически вычисленная скорость уменьшится в $\sqrt{R_{\text{CMg}}(T_9 \approx 10)/R_{\text{MgSi}}(T_9 \approx 10)} \sim 10$ раз. Этот результат соответствует результатам численного моделирования, также видно, что при горении накапливается скорее ²⁸Si, чем ²⁴Mg. Реакции с α частицами доминируют в горении и имеют более-менее одинаковые скорости (заряд тяжелых ионов Z , участвующих в реакциях не изменяется

значительно), то эта оценка годится для всех α -реакций.

Если сравнивать данные результаты с полученными в работе Тиммеса и Вусли [73] (здесь имеется в виду сравнение результатов по APPROX13), то видно хорошее (но не отличное) согласие на уровне 20%–30% (худший случай для наиминимальной плотности). Пробеги излучения и теплопроводности одинаковы в обеих работах. Разница может быть объяснена различными скоростями ядерных реакций, например, скорость реакции $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ изменилась со времен работы [73] (из частной беседы с Ф. Тиммесом). Но это единственное выявленное изменение не влияет на скорость, оно было проверено на приведённых здесь результатах: если установить старую скорость реакции, то получим те же 134 км/с для случая ^{12}C и плотности $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³ (см. таблицу 2.2). Также необходимо заметить, что неопределенность в кулоновском логарифме и скоростях ядерных реакций приводит к точности знания нормальной скорости в несколько десятков процентов.

Полученные результаты показывают структуру медленного горения в белых карликах. Такой плоский фронт является “начальным состоянием”, на котором начинают развиваться различные неустойчивости.

Глава 3

Термопульсационная неустойчивость

В реагирующих системах может присутствовать, так называемая, термопульсационная неустойчивость, которая приводит к пульсирующему характеру распространения самого фронта. Для её возникновения необходимы условия, которым может удовлетворять горение в сверхновых: число Льюиса $Le \gg 1$, число Зельдовича,

$$Ze = \left(\frac{\partial \ln \dot{S}}{\partial \ln T} \right)_{p, X_i} \Big|_{T_b}, \quad (3.1)$$

должно быть больше некоторого критического [138, 139]. Эта производная при постоянном давлении и химсоставе должна быть взята при температуре сгоревшего вещества. Это безразмерное число показывает “силу” температурной зависимости скорости реакции. Качественно природу самой неустойчивости можно описать следующим образом: сильная зависимость скорости реакции от температуры приводит к тому, что небольшое возмущение, например, в температуре приводит к значительному изменению энерговыделения в данной точке (а теплопроводность не успевает компенсировать такое энерговыделение). Температура локально начинает быстро расти, вещество выгорать, уже после чего вступает в действие теплопроводность и размазывает возмущение. Это действие теплопроводности не компенсируется энерговыделением при горении уже из-за малой концентрации горючего в данной точке. В результате соседняя несгоревшая область разогревается с возмущением и процесс циклически продолжается.

Величина критического числа Зельдовича зависит от конкретных свойств среды (коэффициент теплопроводности, скорость реакции). Как показано в [138] для аррениусовской скорости реакции и в предположении бесконечно тонкой области реакции критическое число Зельдовича $Ze_{cr} = 4 + 2\sqrt{5} = 8.47$. В работе [140] с помощью числен-

ного моделирования найдено критическое значение перехода в пульсирующий режим при $Ze_{cr} = 8.24 - 8.29$. Для условий сверхновых эта неустойчивость рассматривалась в работе [76], где получено критическое значение $Ze_{cr} = 8 + 4\sqrt{5}$, что ровно в 2 раза больше, чем значение из [138]. Как утверждали авторы в той статье, горение в сверхновых должно быть неустойчиво при плотности $\rho < 5 \times 10^8$ г/см³ для реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, и $\rho \lesssim 10^{10}$ г/см³ для реакции $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$. В расчётах, которые проведены в разделе 2 не наблюдались никакие пульсации при предсказанных условиях. Также необходимо заметить, как показано в разделе 2, реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ и $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ сами по себе не являются решающими при горении. А число Зельдовича, которое получается для сложной цепочки реакций, можно оценить следующим образом: отношение толщины зоны прогрева к толщине зоны реакции равно эффективному числу Зельдовича [141]. По рисунку 3 из работы [73] можно получить $Ze_{eff} \approx 2 - 5$. Это значение меньше критических, предложенных в различных работах, что скорее свидетельствует о стабильности пламени. В данной главе вопрос о пульсациях будет тщательно рассмотрен.

3.1 Упрощенная модель пульсаций

Для того, чтобы аккуратно исследовать эффект термопульсационной неустойчивости, рассмотрим некоторую упрощенную модель пульсаций. Эта модель содержит только две величины: температуру среды T и концентрацию недостающего реагента c . Модель полностью одномерная, поэтому все зависимости будут только от t и x . В условиях $Le \gg 1$ для уравнения для температуры и концентрации выглядят как

$$C\partial_t T = \kappa\partial_x^2 T + W\omega c\Theta(T - T_0), \quad \partial_t c = -\omega c\Theta(T - T_0), \quad (3.2)$$

где Θ – тета-функция (ступенька). Такая система физически соответствует горению в твердых телах. Нет движения, но присутствует теплопроводность и реакции. В данной системе C – теплоёмкость на единицу объёма, W – калорийность реакции (на единицу концентрации); ω – скорость реакции (с размерностью с⁻¹). Пусть до реакции концентрация недостающего реагента c_0 , тогда после реакции температура возрастет на

$$T_f = \frac{Wc_0}{C}. \quad (3.3)$$

Предполагая, что температура перед горением $T(0)$ много меньше, чем T_f , то без потери общности можно положить $T(0) = 0$. Теперь введем безразмерные величины, обознача-

емые значком “ $\tilde{}$ ” и определённые как

$$t = \tau \tilde{t}, \quad x = l \tilde{x}, \quad c = c_0 \tilde{c}, \quad T = T_f \tilde{T}, \quad (3.4)$$

где

$$l = \sqrt{\frac{\kappa}{C\omega} \left(\frac{T_f}{T_0} - 1 \right)}, \quad \tau = \frac{Cl^2}{\kappa}. \quad (3.5)$$

Масштабы для x , t , T , c выбраны так, чтобы все характерные параметры распространяющейся волны в безразмерных величинах равнялись 1. Это относится к скорости волны, к концентрации недостающего реагента далеко перед фронтом горения, температуре далеко за фронтом горения. В дальнейшем будем опускать знак “ $\tilde{}$ ”. Таким образом, конечная безразмерная система¹:

$$\partial_t T = \partial_x^2 T + \omega_0 c \Theta(T - T_0), \quad \partial_t c = -\omega_0 c \Theta(T - T_0), \quad (3.6)$$

где $\omega_0 = \tau T_0 / (1 - T_0)$ ($0 < T_0 < 1$). Тут температура зажигания T_0 в безразмерных единицах, она соответствует $T_0 T_f$ в первоначальной системе (3.2).

Стационарно распространяющаяся волна зависит только от комбинации $\xi = x - vt$, поэтому перейдем от переменных (t, x) к (t, ξ) .

Важно отметить, что система (3.6) линейная в областях где выполняется $T < T_0$ или $T > T_0$. Нелинейность возникает только в точках, где осуществляется переход $0 \rightarrow 1$ в Θ -функции. Уравнения (3.6) показывают, что T , $\partial_x T$, c непрерывны в точках $T = T_0$. Это является условием сшивки решений, полученных в областях $T < T_0$ и $T > T_0$. Перепишем систему в следующем виде, удобном для дальнейшего

$$\partial_t T_+ = v \partial_\xi T_+ + \partial_\xi^2 T_+ + \omega_0 c_+, \quad \partial_t c_+ = v \partial_\xi c_+ - \omega_0 c_+, \quad \text{для } T_+ > T_0, \quad (3.7)$$

и

$$\partial_t T_- = v \partial_\xi T_- + \partial_\xi^2 T_-, \quad c_- = 1, \quad \text{для } T_- > T_0, \quad (3.8)$$

Здесь мы использовали граничное условие для концентрации в несгоревшей области. Также, положим, что в системе присутствует только одно пламя с координатой $\xi_f(t)$. Тогда все функции разбиваются на:

$$f(\xi, t) = \begin{cases} f_-(\xi, t) & \text{для } \xi > \xi_f(t), \\ f_+(\xi, t) & \text{для } \xi < \xi_f(t). \end{cases} \quad (3.9)$$

¹эта модель изначально предложена П.В. Сасоровым

Условия сшивки:

$$T_+(\xi_f, t) = T_-(\xi_f, t) = T_0, \quad \partial_\xi T_+(\xi_f, t) = \partial_\xi T_-(\xi_f, t), \quad c_+(\xi_f, t) = 1. \quad (3.10)$$

Граничные условия стационарного пламени

$$\xi \rightarrow \infty : T = 0, \quad c = 1, \quad \xi \rightarrow -\infty : \partial_x T = 0, \quad c = 0, \quad (3.11)$$

а также в переменных (t, ξ) :

$$\partial_t c = 0, \quad \partial_t T = 0, \quad \xi_f(t) = 0. \quad (3.12)$$

Последнее равенство можно потребовать из-за трансляционной инвариантности задачи. Представленная система (3.7)–(3.12) – нелинейная задача на собственное значение v . У неё существует единственное решение:

$$\begin{aligned} v &= 1 \\ \xi > 0 : \quad c &= 1, \quad T = T_- = T_0 e^{-\xi}, \\ \xi < 0 : \quad c &= c_+ = e^{\omega_0 \xi}, \quad T = T_+ = 1 - \frac{1}{\omega_0 + 1} e^{\omega_0 \xi}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Скорость движения волны в размерных величинах равна

$$v = \sqrt{\frac{\kappa \omega}{C} \left(\frac{T_f}{T_0} - 1 \right)}. \quad (3.14)$$

Функциональная зависимость скорости реакции в нашей модели разрывная, поэтому можно определить только эффективное число Зельдовича, $Ze = \omega_0$.

3.2 Исследование устойчивости упрощённой модели

Исследуем устойчивость по отношению к малым возмущениям стационарного решения предложенной модели. Полученное в предыдущем разделе решение будем называть невозмущённым и будем обозначать индексом “ (0) ”. Полное решение можно разложить

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}, \quad c = c^{(0)} + c^{(1)}, \quad \xi_f = \xi_f^{(1)}. \quad (3.15)$$

Допустим, что возмущения малые $T^{(1)} \ll T^{(0)}$, $c^{(1)} \ll c^{(0)}$ и $\xi_f^{(1)} \ll 1$. В таком случае систему можно линеаризовать. Так как в областях $\xi \lesssim \xi_f$ уравнения уже линейны,

то процесс линеаризации сводится только к добавлению индекса ⁽¹⁾ и замене $v \rightarrow 1$. Соотношения сшивки в $T = T_0$ менее тривиальны, они принимают вид:

$$\xi_f^{(1)} \partial_\xi T_+^{(0)}(0, t) + T_+^{(1)}(0, t) = 0, \quad (3.16)$$

$$\xi_f^{(1)} \partial_\xi T_-^{(0)}(0, t) + T_-^{(1)}(0, t) = 0, \quad (3.17)$$

$$\xi_f^{(1)} \partial_\xi^2 T_+^{(0)}(0, t) + \partial_\xi T_+^{(1)}(0, t) = \xi_f^{(1)} \partial_\xi^2 T_-^{(0)}(0, t) + \partial_\xi T_-^{(1)}(0, t), \quad (3.18)$$

$$\xi_f^{(1)} \partial_\xi c_+^{(0)}(0, t) + c_+^{(1)}(0, t) = 0. \quad (3.19)$$

Граничные условия для возмущений

$$T_+^{(1)}, c_+^{(1)} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \quad T_-^{(1)} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty, \quad (3.20)$$

и $c_- = 0$ везде, так как нет возмущений концентрации перед фронтом.

Так как получающиеся уравнения не содержат явной зависимости от времени, то ищем решение в виде $\propto e^{pt}$, где p – собственное значение задачи. Возмущения положения фронта имеют аналогичный вид

$$\xi_f(t) = \chi e^{pt}. \quad (3.21)$$

В результате из решения уравнений (3.7) и (3.8) для возмущений, получим

$$T_-^{(1)} = \alpha e^{pt+\lambda\xi}, \quad (3.22)$$

$$c_+^{(1)} = \beta e^{pt+(p+\omega_0)\xi}, \quad (3.23)$$

$$T_+^{(1)} = \gamma e^{pt-(1+\lambda)\xi} - \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2 + \omega_0} \beta e^{pt+(p+\omega_0)\xi}, \quad (3.24)$$

где

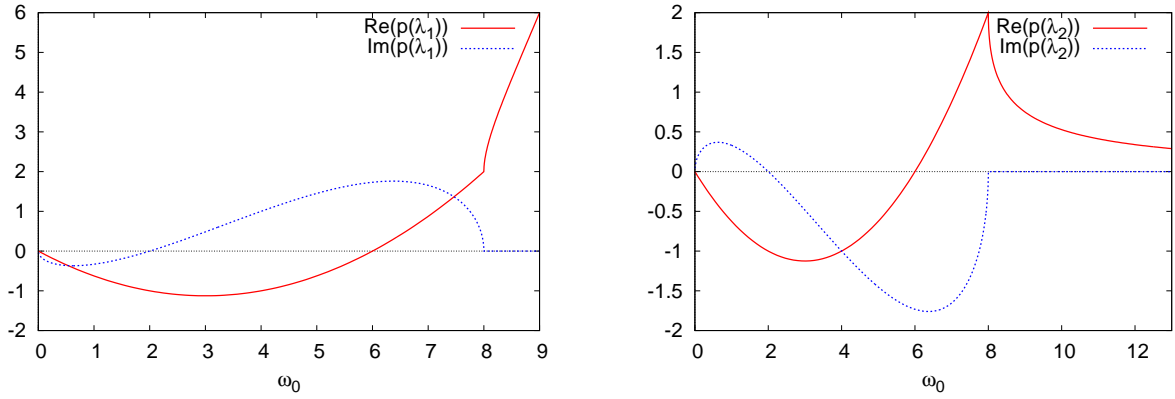
$$p \equiv \lambda^2 + \lambda, \quad (3.25)$$

и должно выполняться $\text{Re} \lambda < 0$ для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на $+\infty$. Представленное решение содержит 4 произвольные константы $\chi, \alpha, \beta, \gamma$. Оно должно удовлетворять условиям сшивки (3.16)–(3.19). В результате получается система из 4-х однородных линейных уравнений на 4 неизвестные. Ненулевое решение существует только, если детерминант системы равен 0. В результате получается уравнение на собственное значение p , выраженное через λ при условии, что $(p + \omega_0)^2 + \omega_0 \neq 0$:

$$\frac{2\omega_0\lambda^3 + (\omega_0^2 + 2\omega_0)\lambda^2 + 2\omega_0^2\lambda + \omega_0^2}{(\omega_0 + 1)\lambda^2 + \omega_0^2 + \omega_0} = 0. \quad (3.26)$$

Решения кубического уравнения могут быть легко получены:

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 8\omega_0} + \omega_0}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 8\omega_0} - \omega_0}{4}, \quad \lambda_3 = -1. \quad (3.27)$$

Рис. 3.1: Зависимости $p_1(\lambda_1(\omega_0))$ (слева) и $p_2(\lambda_2(\omega_0))$ (справа)

Здесь третий корень λ_3 приводит к $p_3 = 0$, $\alpha_3 = -\omega_0/(1 + \omega_0)$, $\beta_3 = 1$, $\gamma_3 = 0$. Это собственное значение соответствует смещению всего фронта целиком. Существование этого решения можно было предугадать заранее из-за трансляционной инвариантности задачи. Другие корни более содержательны. Действительные и мнимые части $p_{1,2}$ в зависимости от ω_0 изображены на рисунке 3.1. Если $\omega_0 \geq 8$, то и λ_1 и λ_2 действительные, а $p_{1,2}$ положительные. Если $\omega_0 < 8$, то

$$p_{1,2} = \frac{\omega_0^2 - 6\omega_0 \pm i(\omega_0 - 2)\sqrt{8\omega_0 - \omega_0^2}}{8}. \quad (3.28)$$

Следовательно решение стационарно распространяющейся волны устойчиво к малым возмущениям при $\omega_0 < 6$, неустойчиво при $\omega_0 > 6$. На границе $\omega_0 = 6$ значения $p_{1,2} = \pm 4i/\sqrt{3}$, то есть возмущения чисто осциллирующие.

Выражая этот результат в терминах числа Зельдовича, определённого ранее, можно сказать, что дозвуковая дефлаграция в нашей модели устойчива к термопульсационной неустойчивости при $Ze < Ze_{cr} = 6$ и нет устойчивого распространения в обратном случае при $Ze > Ze_{cr} = 6$.

3.3 Численное исследование упрощённой модели

Система (3.6) может быть легко решена численно. Таким образом можно проверить как аналитические предсказания об устойчивости, так и возможности численного метода разрешать подобные неустойчивости. Для решения этой системы используем метод Кранка–Никольсона [137], который реализован в численном коде FRONT1D, описанном выше (при этом в коде была полностью отключена адвекция, что требовало

незначительных модификаций последнего).

Вся область вычисления занимала $[0; L]$. Использовались два варианта задания начальных данных. Первый, как и ранее, метод “поджига от стенки” со следующими граничными и начальными условиями:

$$T(t, x = 0) = 1, \quad T(t, x = L) = 0, \quad T(t = 0, x \in (0, L)) = 0, \quad c(t = 0, x \in (0, L)) = 1. \quad (3.29)$$

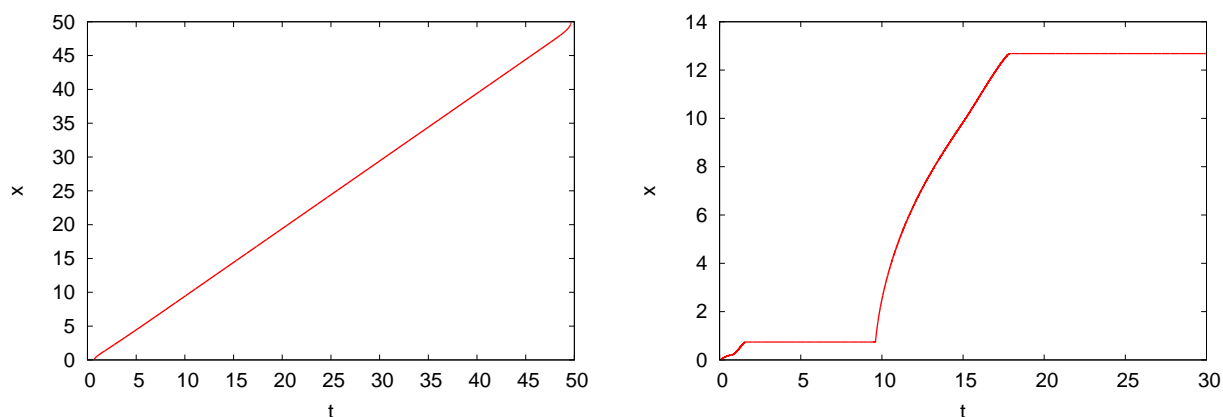
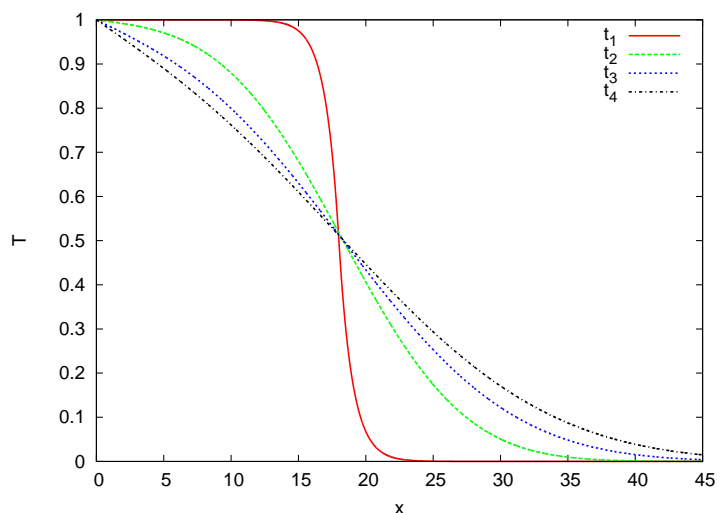
Второй вариант – задать распределение температуры и концентрации согласно аналитическому решению (3.13).

Так же, как и ранее, численный шаг по времени определяется исходя из ограничений по разным процессам. При исследуемом диапазоне ω_0 основное ограничение устанавливает горения, поэтому было выбрано условие на максимальный шаг $\Delta t_{\max} = 10^{-2} \omega_0^{-1}$. Кроме этого для получения корректных характеристик пламени нужно полностью разрешить зону горения. Ограничение на размер счётной ячейки получим из аналитического решения. Согласно ему в системе есть два характерных масштаба: 1 и ω_0^{-1} . Тогда размер счётной ячейки $\Delta x \ll \Delta x_0 = \min(1, \omega_0^{-1})$. В ходе моделирования были посчитаны несколько вариантов с $\Delta x > \Delta x_0$, для того чтобы определить влияние ошибочной численной дискретизации подобных задач. Координата центра фронта определялась по точке $c = 0.5$ (это определение расходится с тем, что использовалось в аналитическом решении – $T = T_0$, но для стационарной волны разница будет на постоянную величину).

На рисунке 3.2 представлена зависимость координаты фронта от времени $x(t)$ для случая $\omega_0 = 1$ ($\Delta x \ll \Delta x_0$). Видно, что пламя движется с постоянной скоростью и стабильно. Если подогнать эту зависимость линейной функцией, то получим скорость движения фронта $v = 1.00$, что очень хорошо согласуется с теорией.

Необходимо заметить, что, несмотря на почти идеальную линейную зависимость координаты от времени на крупном временном масштабе, при более подробном рассмотрении зависимости, присутствуют пульсации. Эти пульсации имеют явный численный эффект, так как их период в точности $T = \Delta x/v$, что легко проверяется вариацией Δx .

Также на рисунке 3.2 представлена зависимость $x(t)$ для варианта с качественно другим поведением, при $\omega_0 = 7$. Согласно теории этот вариант должен быть нестабильным, что и наблюдается при моделировании: режим распространения с непостоянной скоростью сменяется режимом остановки пламени. После момента $t \sim 20$ пламя уже не

Рис. 3.2: Координата фронта от времени $x(t)$ для $\omega_0 = 1$ (слева) и $\omega_0 = 7$ (справа)Рис. 3.3: Последовательные профили распределения температуры на моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ для режима “therm”, $\omega_0 = 8$.

продолжит движение, этот факт объясняется ниже.

В таблице 3.1 представлены результаты для первого варианта задания начальных данных. Последний столбец показывает режим распространения: “flame” – стационарное пламя, “therm” – эволюция параметров, пример которой показан на рисунке 3.3 (что соответствует неустойчивому режиму). В этом случае температура изменяется согласно чистой теплопроводности без горения. Комбинации “flame” и “therm” в таблице 3.1 означают, что существует переходный режим перед тем, как установится окончательный. Этот окончательный режим указан последним словом в такой комбинации. Результаты, полученные при задании начальных данных из аналитического решения, показаны в таблице 3.2. Из всех результатов обоих вариантов начальных данных можно сделать вывод, что $\omega_0 = 6$ – критическое значение параметра системы. Если $\omega_0 < 6$, то в системе

Таблица 3.1: Результаты моделирования с поджигом от стенки. ω_0 – параметр расчёта, Δx – размер счётной ячейки, v – измеренная в расчёте скорость, “comm.” – режим горения (смотри описание в тексте).

ω_0	Δx	v	comm.
1.0	0.05	1.000	flame
4.0	0.05	0.996	flame
5.0	0.05	0.992	flame
5.5	0.05	0.993	therm-flame
5.8	0.05	0.993	therm-flame
6.0	0.05	6.15÷1.24	therm-flame
6.5	0.05	5.56÷0.99	therm-flame-therm
7.0	0.05	6.40÷1.04	therm-flame-therm
8.0	0.05	4.32÷1.08	therm-flame-therm
1.0	1.5	0.711	flame
4.0	0.5	4.74÷0.94	therm-flame-therm

Таблица 3.2: Результаты расчётов при задании начальных условий из аналитического решения, обозначения такие же как в таблице 3.1.

ω_0	Δx	v	comm.
1.0	0.05	1.000	flame
4.0	0.05	0.996	flame
5.5	0.02	1.006	flame
5.8	0.02	1.010	flame
6.0	0.01	1.019	flame
7.0	0.01	–	therm
8.0	0.01	–	therm
9.0	0.01	–	therm
1.0	1.5	0.711	flame
4.0	0.5	–	therm

существует стационарный пламя. Иначе, когда $\omega_0 > 6$, фронт появляется, но имеет непостоянную скорость и живёт ограниченное время. Пример зависимости $x(t)$ для такого случая представлен на рисунке 3.2.

Если положить $\Delta x > \Delta x_0$ (такие расчёты сделаны для $\omega_0 = 1$ и $\omega_0 = 4$, смотри последние два варианта в таблицах 3.1 и 3.2), то это приводит к некорректному режиму распространения фронта: он может присутствовать, но с ошибочной скоростью, либо перейти в режим, похожий на неустойчивый, в области устойчивых параметров.

3.4 Модификация упрощённой модели

Представленная выше модель интегрируется аналитически, но при этом имеет нефизическое поведение: когда $T < T_0$ горение полностью прекращается. Именно из-за этого пламя прекращает движение в некоторый момент (только постепенный разогрев от левого граничного условия может вызвать дальнейшее движение). Сделаем небольшую модификацию скорости горения в этой модели:

$$\partial_t T = \partial_x^2 T + R(c, T), \quad \partial_t c = -R(c, T), \quad (3.30)$$

$$R(c, T) = \omega_0 c \Theta(T - T_0) + \omega_1 c \frac{T^2}{T_0^2} \Theta(T_0 - T) \Theta(T). \quad (3.31)$$

Данная модификация приводит к горению при всех температурах, что более корректно физически. Малость модификации определяется условием $\omega_1 \ll \omega_0$, которое очень слабо влияет на аналитическое решение стационарной волны и критерий перехода в неустойчивость, полученные ранее. При $\omega_0 < 6$ пламя распространяется с постоянной скоростью. При $\omega_0 > 6$ поведение качественно меняется: сначала, как и ранее, стационарный фронт распадается и размывается за счет режима “теплопроводности”, но теперь из-за слабого прогорания в области $T < T_0$ температура постепенно повышается и пламя вспыхивает заново. Такое поведение, ожидаемое теоретически, полностью подтверждается численными расчётами. Пример эволюции при $\omega_0 > 6$ представлен на рисунке 3.4 вместе с зависимостью $x(t)$.

Подобная неустойчивая эволюция и есть пульсации фронта в данной модели. Но такой режим несколько отличается от “классических” пульсаций, когда скорость имеет вид $v_{\text{fr}} = v_0 + v_1 \sin at$. В этой модели пламя останавливается, загорается, останавливается снова, и так по кругу. Оно движется рывками.

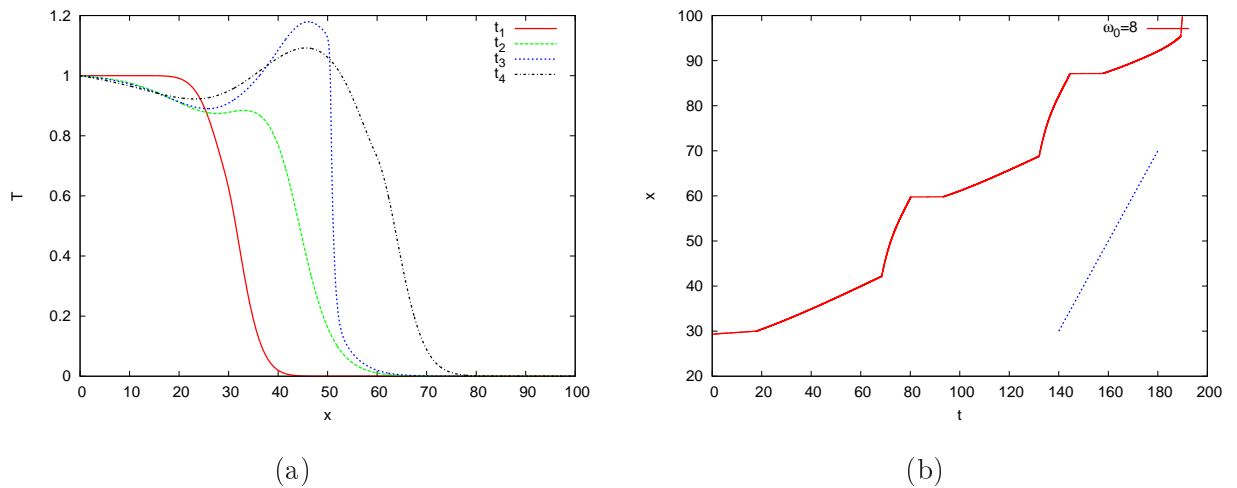


Рис. 3.4: Последовательные профили температуры для $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ (а) и координата фронта от времени $x(t)$ (б) для $\omega_0 = 8$ (пульсирующий режим пламени). Прямая линия на правом графике, нарисованная для примера, соответствует скорости $v = 1$

Представленная модель описывает поведение и основные свойства термопульсационной неустойчивости: в расчётах с более реальной постановкой будет получена такая же динамика. Также данная модель может быть использована для тестирования численных кодов, и проверки решателей теплопроводности и реакционной кинетики.

3.5 Термопульсационная неустойчивость в сверхновой

Рассмотрим задачу о пульсациях в реальной сверхновой. Результаты моделирования, представленные в главе 2 не показывали неустойчивость пламени, при этом воспроизводя результаты других научных групп по одномерным свойствам горения.

В данном разделе покажем, что пульсации фронта в принципе могут существовать в условиях сверхновой, но только при искусственно увеличенном числе Зельдовича. Тем самым будет получена стабильность горения в сверхновой по отношению к данной неустойчивости. Для того, чтобы увеличить Ze , необходимо изменить скорость реакций. Для этого воспользуемся упрощённой сеткой реакций – считаем, что горения происходит одностадийно. При этом скорость горения будет определяться законом Аррениуса (а не реальной скоростью горения углерода как ранее):

$$R(T) = Ae^{-B/T_0}. \quad (3.32)$$

Напомним, что определение $R(T)$ представлено в (2.39). Здесь T_0 – температура в еди-

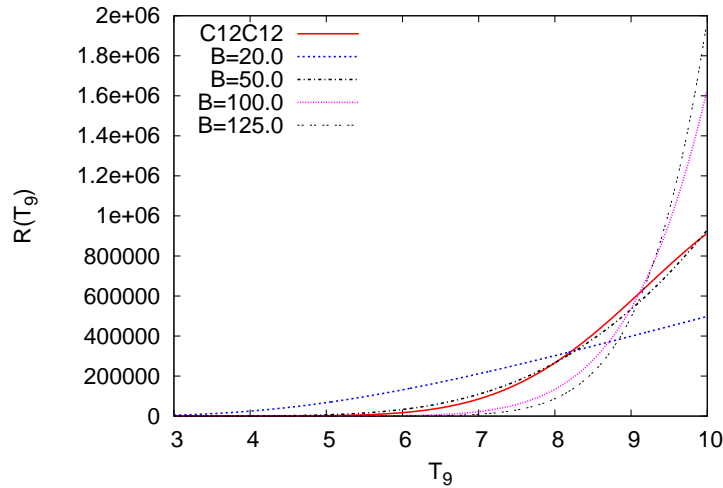


Рис. 3.5: Сравнение скоростей реакций аррениусовского типа, используемых в расчётах, со скоростью реакции $2C \rightarrow Mg$.

ницах 10^9 К. В таком случае константа \mathcal{B} определяет число Зельдовича следующим образом

$$Ze_{\text{Arren}} = \frac{\mathcal{B}}{T_9 \text{ burned}}, \quad (3.33)$$

$T_9 \text{ burned}$ – температура прогоревшего вещества. Такая замена реакции позволяет параметризовать число Зельдовича задачи. Изменяя \mathcal{B} мы изменяем Ze . Константа A не играет особой роли в данном исследовании, но для определённости будем вычислять её следующим образом

$$\int_{T_1}^{T_2} R(T_9) dT_9 = \int_{T_1}^{T_2} R_{\text{real}}(T_9) dT_9, \quad (3.34)$$

то есть

$$A(\mathcal{B}) = \int_{T_1}^{T_2} R_{\text{real}}(T_9) dT_9 \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\mathcal{B}/T_9} dT_9 \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Под $R_{\text{real}}(T)$ здесь подразумевается скорость горения $2C \rightarrow Mg$, представленная в системе (2.39). В расчётах использовались калорийности реакции, соответствующие горению $^{12}C \rightarrow ^{24}Mg$ и $^{12}C \rightarrow ^{56}Ni$. Из результатов главы 2 граничные температуры выбраны как $T_1 = 1$, $T_2 = 10$ (в единицах T_9). На рисунке 3.5 представлено сравнение используемых скоростей реакций с $R_{\text{real}}(T)$. Видно, что скорость реакции с параметром $\mathcal{B} \approx 50$ лучше всего соответствует горению углерода. В таком случае при $T_9 \text{ burned} \approx 10$ получается $Ze \approx 5$, что согласуется с оценкой $Ze \approx 2 - 5$, указанной ранее по работе [73]. Таблица 3.3 представляет результаты расчётов для плотности $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³. В рас-

Таблица 3.3: Варианты расчётов пламени с законом Аррениуса и различным числом Зельдовича, плотность среды $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³.

№	A	B	$q, 10^{17}$ эрг/г	$T_{9\text{burned}}$	Ze	comm.
1	3.68×10^6	20.0	9.2	13.5	1.5	flame
2	1.38×10^8	50.0	9.2	13.5	3.7	flame
3	7.62×10^{12}	150.0	5.6	11	13.6	flame
4	1.47×10^{15}	200.0	5.6	14	14.3	deton.
5	7.62×10^{12}	150.0	2.8	10	15.0	puls.
6	3.60×10^{10}	100.0	2.8	8	12.5	flame
7	5.32×10^{11}	125.0	2.8	8	15.6	puls.
8	1.39×10^{11}	112.5	2.8	8.2	13.7	flame
9	1.39×10^{11}	112.5	2.0	7.8	14.4	puls.
10	1.39×10^{11}	112.5	2.4	8	14.1	puls.
11	4.44×10^{11}	123.3	3.5	9.0	13.7	puls.
12	3.11×10^{11}	120.0	3.5	9.0	13.3	flame

Таблица 3.4: Критические числа Зельдовича для условий сверхновой при различных плотностях.

$\rho, \text{ г/см}^3$	Ze_{cr}
2×10^8	$18.4 < Ze < 20.4$
7×10^8	$14.6 < Ze < 15.6$
2×10^9	$13.5 < Ze < 13.9$

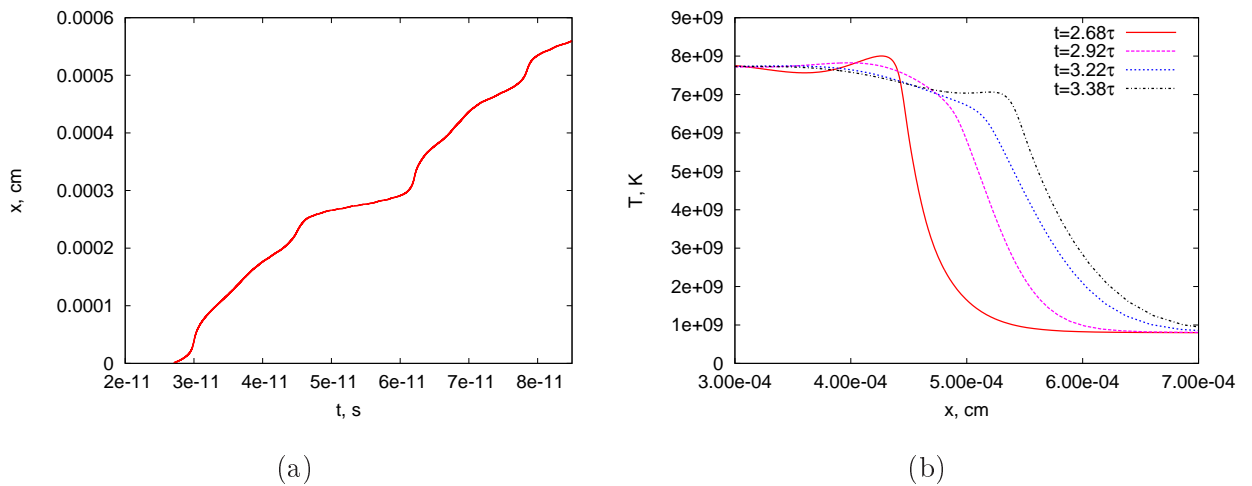


Рис. 3.6: Зависимость $x(t)$ (a) и профили температуры на несколько моментов времени (b) для пульсационного режима распространения пламени с искусственно увеличенным числом Зельдовича, $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³, $\mathcal{B} = 112.5$, $q = 2.4 \times 10^{17}$ эрг/г

чѐтах изменялся показатель экспоненты \mathcal{B} и одновременно уменьшали калорийность (от Ni до Mg) чтобы избежать значительного ускорения пламени. В результате видно, что для “нормальной” калорийности ($q = (5.6 - 9.2) \times 10^{17}$ эрг/г, варианты 1–4 в таблице) никаких пульсаций не возникает для широкого диапазона числа Зельдовича. Дальнейшее увеличение Ze возможно, если уменьшить $T_{9 \text{ burned}}$. Это возможно, если уменьшить калорийность до $q = 5 - 7$ МэВ на реакцию (или $q = (2.0 - 2.8) \times 10^{17}$ эрг/г). В этом случае, как видно из результатов, пульсации возникают при $\mathcal{B} > \mathcal{B}_{\text{crit}} \simeq 112.5$ (варианты 5–10 в таблице 3.3). Пример зависимости координаты пламени от времени для пульсирующего режима и последовательные профили температуры показаны на рисунке 3.6.

Варианты 11–12 соответствуют дополнительным расчѐтам с промежуточной калорийностью $q = 3.5 \times 10^{17}$ эрг/г. Эти варианты показывают такое же критическое число Зельдовича (с точностью до неопределѐнности результатов).

В результате получается, что в условиях сверхновой (то есть с физически правильным уравнением состояния и теплопроводностью) пульсации могут существовать, но только при нефизических параметрах ядерных реакций: число Зельдовича должно быть увеличено в ~ 4 раза. Таблица 3.4 представляет результаты критических чисел Зельдовича для набора плотностей. Таким образом можно утверждать, что пламя в сверхновой является стабильным по отношению к термопульсационной неустойчивости.

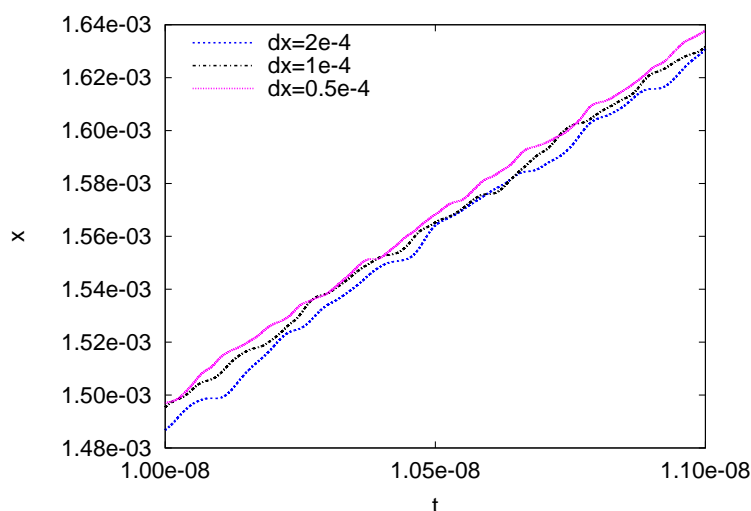


Рис. 3.7: Зависимость $x(t)$ для расчёта с ^{16}O , $\rho = 2 \times 10^8$ г/см³, APROX13. Три расчёта с одинаковыми параметрами, но различным разрешением (размером ячеек сетки).

Вернёмся в расчётам из раздела 2: один из вариантов параметров с полной сеткой реакций APROX13 (здесь уже анализируются расчёты с полной сеткой реакций, а не аррениусовской кинетикой) показывает мнимую неустойчивость, поэтому исследовался отдельно. Это вариант с начальной плотностью $\rho = 2 \times 10^8$ г/см³ и начальным химсоставом ^{16}O (предпоследний в таблице 2.2). Такой вариант является хорошим кандидатом на пульсирующий из-за сильной зависимости скорости горения от температуры у кислородной смеси и низкой T_{burned} . Зависимость $x(t)$ показывает нерегулярность (см. рисунок 3.7, но период этой нерегулярности $\tau_1 = 3 \times 10^{-10}$ с близок в характерному времени прохождения пламени по численной ячейке $\tau_2 = \Delta x \rho_b / (u_n \rho_u) = 1.5 \times 10^{-9}$ с (здесь Δx – размер счётной ячейки). Для того, чтобы проверить, что это действительно счётный эффект, были проведены дополнительные расчёты с разными Δx . На рисунке 3.7 видно, что период пульсаций уменьшается вместе с размером ячейки. Также другой критерий, который показывает физичность пульсаций, – эволюция температуры как на рисунках 3.4 и 3.6.

Необходимо заметить, что критические числа Зельдовича, которые получены выше, близки к значениям, полученным в [76]. С другой стороны, число Зельдовича для пламени с близкой к реальной сеткой реакций (в нашем случае APROX13) оказывается гораздо ниже, чем указано в работе [76]. Это означает, что рассмотренные там модели, которые не учитывают вторичных реакций, слишком упрощённые. Именно сложность сетки реакций и ответственна за стабильность.

В заключительной части работы [73] указано, что эффект электронного захвата играет стабилизирующую роль для другой неустойчивости – Рэлея–Тейлора–Ландау. Этот эффект не оказывает влияние на термопульсационную неустойчивость так как электронные захваты происходят на масштабе времени слабых процессов, то есть $> 10^{-4}$ с (это, в том числе, видно из графика в работе [73]), а временной масштаб данной неустойчивости гораздо меньше (см. таблицу 2.2).

Глава 4

Неустойчивость Ландау–Даррье при горении в канале

Неустойчивость, открытая в работе [120]¹, возникает на бесконечно тонкой границе несгоревшего и сгоревшего веществ, когда граница между ними движется внутрь более плотного несгоревшего вещества. В результате дисперсионное соотношение для гармонических возмущений выглядит как [138]:

$$\omega(k) = kv_n \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\sqrt{1 + \mu - \frac{1}{\mu}} - 1 \right), \quad (4.1)$$

где v_n – нормальная скорость горения, $\mu = \rho_u/\rho_b > 1$ – отношение плотностей несгоревшего и сгоревшего веществ. Из выражения (4.1) видно, что $\forall k : \omega > 0$, то есть все моды абсолютно неустойчивы. На первый взгляд этот результат противоречит эксперименту, так как в природе наблюдается стабильное медленное горение. На самом деле существуют несколько факторов, стабилизирующих эту неустойчивость.

Первый фактор – так называемая “стабилизация по Маркштейну”. Согласно уравнению (4.1) самыми быстро растущими возмущениями являются самые коротковолновые. Но именно для них уже нарушается приближение бесконечно тонкого фронта горения. Для того, чтобы учесть эффект толщины, Маркштейн [142] предложил ввести зависимость нормальной скорости горения от кривизны фронта:

$$u_n = u_n^0 \left(1 - \frac{\mu}{\mathcal{R}} \right), \quad (4.2)$$

¹Даррье не имеет опубликованной работы, а только доклад “Propagation d’un front de flamme” на конференции La Technique Moderne (1938) от которого не осталось никаких данных [139]

где u_n^0 , u_n – невозмущенная и возмущенная нормальные скорости горения, соответственно, μ – коэффициент Маркштейна, а \mathcal{R} – кривизна фронта горения. В результате в пламени появляется длина волны k_m , которая начинает расти быстрее остальных. Таким образом, возникает ячеистая структура пламени, которая хорошо просматривается в экспериментах. Характерный размер ячейки – как раз $\sim k_m^{-1}$.

Второй эффект связан уже с нелинейным развитием возмущения фронта. Из-за различия в эволюции выпуклых и вогнутых участков в пламени образуются “угловые точки” (их образованию, в том числе, способствует возникающая по эффекту Маркштейна ячеистая структура пламени), скорость которых относительно несгоревшего вещества больше нормальной. Это приводит к выходу амплитуды возмущений на стационарное значение. Данный эффект был впервые рассмотрен в работе [143], количественно разбирался в [144]. Подробно данная неустойчивость разобрана в книге [138].

Такая неустойчивость может играть большую роль в эволюции пламени в сверхновой из-за практически идеальных условий для её развития. Как было показано выше (см. таблицу 2.2), толщина пламени на много порядков меньше, чем характерные размеры области медленного горения, которые сравнимы с радиусом звезды, ~ 1000 км. Это известно из-за ограничения на позднюю детонацию – значительная часть звезды должна прогореть до промежуточных элементов (около ^{28}Si).

Такая неустойчивость может приводить к фрактализации пламени, тем самым значительно влияя на её скорость [53]. Количественно это описывается следующим образом. В результате фрактализации площадь поверхности пламени возрастает как

$$S = S_0 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{D-2}, \quad (4.3)$$

где S_0 – площадь нефрактального пламени, $\lambda_{\min, \max}$ – минимальная и максимальная длина возмущения, D – фрактальная размерность. Фрактальная размерность плоской поверхности равна 2, поэтому в данном выражении стоит комбинация $(D-2)$. Вопрос о том, действительно ли пламя в условиях сверхновой является фрактальным, не имеет ответа до сих пор. Существующие работы, как теоретические [53, 83, 145], так и численные [146], предсказывают эффект фрактализации за счёт данной неустойчивости. Есть также экспериментальные работы в земных пламенах, результаты которых могут быть объяснены с помощью фрактальности пламени [121]². Роль этой неустойчивости

²Здесь необходимо заметить что, как было указано ранее, фрактализация пламени в сверхновой может происходить и из-за других неустойчивостей, например, Рэлея–Тейлора–Ландау, см. [44]

для перехода дефлаграции в детонацию при горении в трубах рассматривался также в диссертации [147].

В данной главе исследуется один эффект стабилизации данной неустойчивости, который был рассмотрен теоретически в работе [144]. При отсутствии внешнего источника все возмущения поверхности пламени сливаются в одну угловую точку – касп. Такое состояние оказывается устойчивым и площадь поверхности пламени, а заодно и скорость, перестают увеличиваться. Этот эффект противодействует фрактализации и его вклад в горение сверхновых плохо изучен.

Рассмотрим задачу о горении в канале – области, ограниченной в перпендикулярном распространению пламени направлению.

4.1 Численный метод

В теории развития неустойчивости Ландау–Даррье фронт пламени предполагается бесконечно тонкой границей раздела сгоревшего и несгоревшего веществ, то есть все рассматриваемые процессы происходят на масштабе много большем толщины пламени. Для корректного расчёта развития данной неустойчивости необходимо использовать численный код, который способен рассматривать пламя в таком же приближении. Прямое моделирование этого эффекта требует недоступных в настоящее время ресурсов (необходимо как разрешить структуру фронта горения, то и масштабы, на порядки превышающие её же).

Для решения подобных задач был создан численный код FRONT3D. Это трёхмерный параллельный гидродинамический код. Для моделирования горения в нём используется “метод уровней” (в английском варианте level-set method), который позволяет следить за перемещением бесконечно тонкого фронта. Существует множество различных реализаций метода уровней. Алгоритм для описания пламени, который используется в коде FRONT3D, был предложен в работах [45, 82, 148]. Рассмотрим краткое описание этого алгоритма, как и самого кода FRONT3D.

Различные физические процессы, представленные в данном коде, разбиваются на несколько групп. Каждая из этих групп считается отдельно (в отдельном модуле). То есть мы используем подход “разделения по физическим процессам”, так же как это было сделано в его предшественнике – коде FRONT1D, представленном в главе 2.

В многомерном случае лагранжев подход становится очень сложен. Так как он не

обязателен для рассматриваемых задач, то используется эйлеров подход. В этом случае гидродинамическая система уравнений может быть записана в дивергентном виде. Для случая идеальной гидродинамики она имеет вид:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad (4.4)$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0, \quad (4.5)$$

$$\partial_t E + \partial_i(v_i(E + p)) = 0, \quad (4.6)$$

$$E = \rho e + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (4.7)$$

Или, если коротко:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u})}{\partial z} = 0, \quad (4.8)$$

с вектором

$$\mathbf{u} \equiv (\rho, \rho \mathbf{v}, E). \quad (4.9)$$

Для решения систем таких уравнений разработано множество численных схем. В коде реализованы несколько подобных схем (решателей) гиперболических систем уравнений: Курганова–Тадмора [149], MUSCL–Hancock [150], WENO [151]. Эти решатели отличаются по сложности вычислений (то есть процессорного времени счёта на один численный шаг по времени) и приведены в порядке усложнения. С другой стороны, более сложный решатель (как в нашем случае WENO) обладает наименьшей численной диффузией и в конце-концов на некоторых задачах выигрывает по соотношению точность/затраченные ресурсы у более простых [152]. Несмотря на своё различие, все эти методы выдают одинаковые результаты в непрерывном пределе (то есть при уменьшении размера ячейки сетки к нулю).

Данные гидродинамические решатели реализованы на прямоугольной сетке размером $N_x \times N_y \times N_z$. Для расчётов на больших сетках код распараллелен с помощью стандарта MPI. Вся счётная область покрывается сеткой размером $N_x^p \times N_y^p \times N_z^p$, каждая такая подобласть решается в своём процессе, который обычно запускается на своём процессоре.

Для решения задач с горением, как было сказано выше, используется “метод уровней”. Опишем его подробнее. Введём дополнительное скалярное поле $G(\mathbf{x}, t)$. Оно разделяет всё пространство на сгоревшее и несгоревшее вещества:

$$G < 0 \quad \text{— несгоревшее вещество,}$$

$$G > 0 \quad \text{— сгоревшее вещество.}$$

При этом поверхность $G = 0$ будет описывать математически тонкий фронт горения (скалярное поле всегда нормировано так, что $\nabla G \neq 0$). Для эволюции этой величины запишем уравнение:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (v \nabla G) = -u_n(x) |\nabla G|. \quad (4.10)$$

Добавим его к системе уравнений гидродинамики (4.4)–(4.7). В таком случае фронт будет переноситься вместе с веществом за счёт адвекционного слагаемого $(v \nabla G)$ и распространяться по принципу Гюйгенса за счёт правой части $u_n |\nabla G|$. Здесь u_n – нормальная скорость горения фронта. В данном уравнении явно показано, что эта скорость может быть своя у каждой точки фронта (и зависеть, например, от параметров среды в данной точке).

Уравнение (4.10) решается с помощью простой противопоточной схемы (upwind), независимо от используемого решателя гидродинамики. Основная сложность возникает со смешанными ячейками, в которых присутствует как несгоревшее, так и сгоревшее вещество. Реализованный алгоритм восстанавливает поверхность пламени внутри таких ячеек, для того, чтобы корректно вычислять гидродинамические потоки (4.8) на границе ячеек. Тогда для потока вдоль X :

$$\mathbf{F} = \beta \mathbf{F}_u + (1 - \beta) \mathbf{F}_b, \quad (4.11)$$

где β – площадь поверхности несгоревшего вещества на границе, \mathbf{F}_u и \mathbf{F}_b – потоки гидродинамических величин несгоревшего и сгоревшего веществ, соответственно. Аналогичные соотношения записываются по всем направлениям. Такая процедура восстановления фронта необходима, если в расчётах требуется, чтобы фронт был математически тонким. Она реализована в коде FRONT3D только в двумерном случае, для 3D расчётов может быть использован упрощённый метод level-set, без процедуры восстановления (но тогда метод становится более диффузионным, а эффективная толщина фронта больше).

В результате для описания пламени необходимо знать только две функции, которые задаются до расчёта: нормальную скорость горения в зависимости от параметров среды $u_n(\rho, X_i, \dots)$ и энерговыделение на фронте горения $q(\rho, X_i, \dots)$. Пламя будет перемещаться как бесконечно тонкий фронт, при этом взаимодействовать с окружающим течением, удовлетворяющим уравнениям гидродинамики.

4.2 Расчёт пламени в канале

Рассмотрим стационарное плоское течение в канале: поток вещества направлен вдоль оси X . Параметры втекающего вещества коротко записываются как (ρ_u, v_u, p_u) . После пересечения фронта горения, который расположен на прямой $x = 0$, параметры меняются на (ρ_b, v_b, p_b) . Пусть горение происходит в области ограниченной вдоль оси Y : $y \in [0; L]$, при этом на границах задаются периодические условия. То есть для любой величины A : $A(x, 0, t) = A(x, L, t)$.

Зададим параметры, соответствующие горению в центре белого карлика. Плотность $\rho = 2 \times 10^9$ г/см³, энерговыделение соответствует реакции $2^{12}\text{C} \rightarrow 2^4\text{Mg} - q = 5.6 \times 10^{17}$ эрг/г. В качестве уравнения состояния использовался идеальный газ с постоянной $\gamma = 4/3$ – значение, близкое к условиям в белом карлике, где основную роль в давлении играют вырожденные релятивистские электроны. Из-за такого упрощённого УРСа необходимо подобрать нормальную скорость горения так, чтобы она соответствовала коэффициенту расширения μ в реальном БК (см. таблицу 2.2). С другой стороны, согласно уравнению (1.38), коэффициент расширения не зависит явно от скорости при $v \ll c_s$. В данном расчёте используется скорость на порядок выше реальной $u_n = 1.7 \times 10^8$ см/с: такое увеличение приводит к большей устойчивости численной схемы (коэффициенты расширения при такой скорости $\mu = 1.236$ и при реальной скорости $\mu = 1.226$ отличаются незначительно). Кроме этого, основное влияние на развитие неустойчивости оказывает как раз коэффициент расширения, а относительное ускорение пламени не должно зависеть от абсолютного значения скорости в дозвуковом горении.

На фронте горения должны выполняться соотношения непрерывности всех потоков:

$$\rho_1(v_1 - u_n) = \rho_2(v_2 - u_n), \quad (4.12)$$

$$\rho_1(v_1 - u_n)^2 + p_1 = \rho_2(v_2 - u_n)^2 + p_2, \quad (4.13)$$

$$\frac{(v_1 - u_n)^2}{2} + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + q = \frac{(v_2 - u_n)^2}{2} + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (4.14)$$

Если разрешить эту систему и выбрать дозвуковой корень, то

$$v_2^* = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(v_1^* + \frac{p_1}{\rho_1 v_1^*} \right) - \sqrt{\frac{1}{(\gamma-1)^2} \left(v_1^* - \frac{\gamma p_1}{\rho_1 v_1^*} \right)^2 - 2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} q}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad (4.15)$$

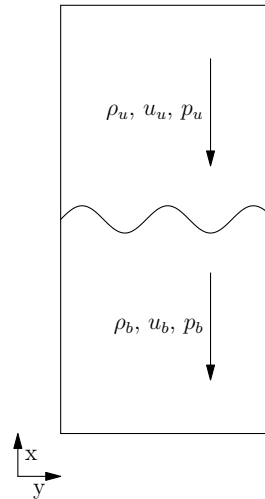
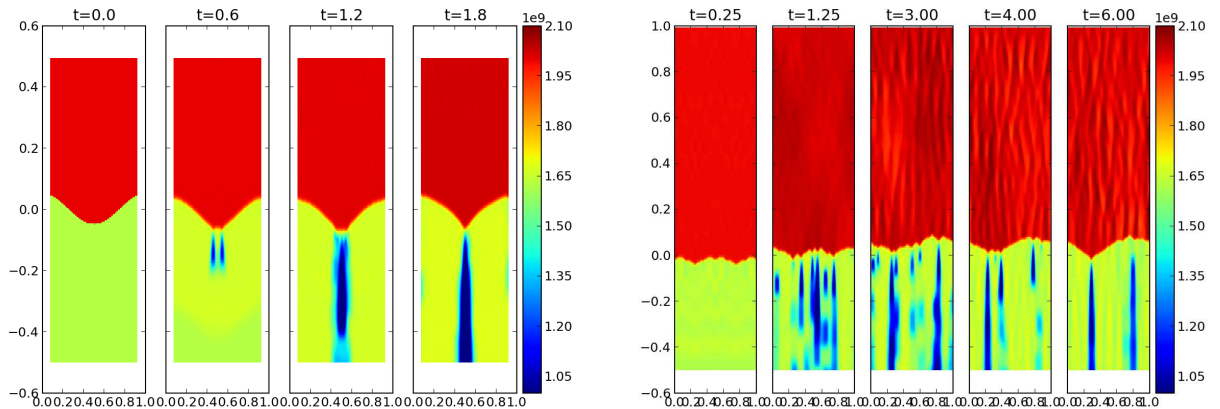


Рис. 4.1: Постановка начальных условия для расчётов горения в канале.

Рис. 4.2: Распределение плотности на разные моменты времени для двух расчётов: одномодовое возмущение (слева), многомодовое возмущение (справа). Время в единицах 10^{-8} с

где обозначено $v_1^* \equiv v_1 - u_n$, $v_2^* \equiv v_2 - u_n$. Плотность и давление легко находятся по v_2^* . Эти соотношения используются для определения величин после фронта.

Плоская граница останется плоской в численном расчёте, хотя в реальном течении всегда присутствуют шумы. В расчётах, представленных ниже, граница изначально возмущается с помощью одной или многих мод (в этом случае амплитуды и длины волн мод случайны), что схематически показано на рисунке 4.1.

Эволюция поверхности пламени в обоих случаях качественно одинакова – все возмущения сливаются постепенно в один касп, см. рисунок 4.2. В многомодовом расчёте перед фронтом явно видны звуковые волны, которые усиливаются за счёт отражения от верхнего граничного условия, что является численным эффектом. Какова физическая

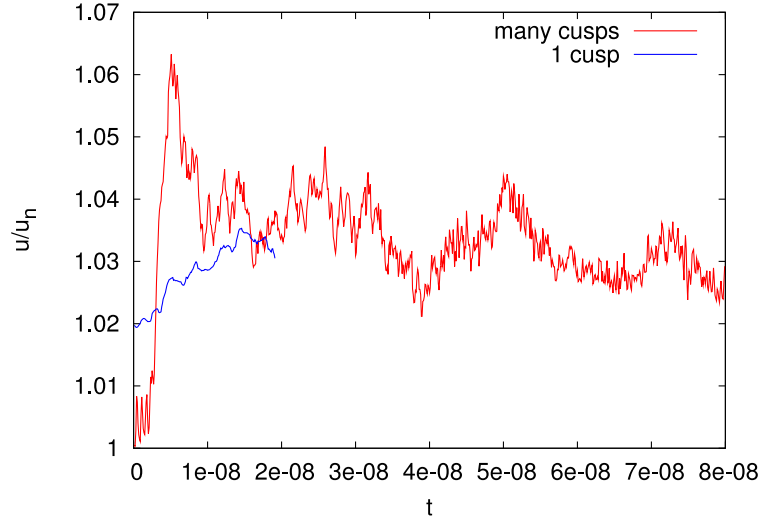


Рис. 4.3: Скорость пламени относительно набегающего вещества, полученная в расчёте, в зависимости от времени

амплитуда возмущений волн перед фронтом – важный вопрос для изучения перехода горения в детонацию, который не рассматривался в данном исследовании. Эти волны возмущают поверхность пламени в многомодовом случае и не дают образоваться гладкой поверхности, как в случае одной моды.

Для тонкого пламени увеличение скорости фронта связано с увеличением площади поверхности последнего. На рисунке 4.3 представлена полученная в расчёте скорость фронта в зависимости от времени. Видно, что скорость довольно быстро становится постоянной на уровне $(1.03 - 1.04)u_n$.

Этот результат согласуется с аналитическими оценками установившейся скорости горения в канале, представленными в работе [153]. В ней в рамках модели стабилизации горения в каспах [144] и аппроксимации формы искривлённого фронта параболами получено выражение для скорости

$$v = \frac{u_n}{2} \left(\frac{1}{\pi f(\mu)} \operatorname{Arcsh}(\pi f(\mu)) + \sqrt{1 + (\pi f(\mu))^2} \right), \quad (4.16)$$

где $f(\mu)$ – безразмерное дисперсионное соотношение для неустойчивости Ландау–Даррье

$$f(\mu) \equiv \frac{\omega}{kv_n} = \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\sqrt{1 + \mu} - \frac{1}{\mu} - 1 \right). \quad (4.17)$$

Подстановка численных значений приводит к ответу $v = 1.018u_n$, что по порядку величины согласуется с нашим результатом. Схожий результат получен близким к нашему методом и в работе [86], где при плотности $\rho = 1 \times 10^9$ г/см³ получено $v/u_n = 1.09$.

Представленный метод расчёта довольно универсален и хорошо подходит для задачи горения в сверхтонких, когда толщина пламени гораздо меньше характерных размеров доступных счётных ячеек. Этот метод позволяет учитывать различные неразрешаемые эффекты в подсеточных моделях путём изменения функций $u_n(\rho, X_i, \dots)$ и $q(\rho, X_i, \dots)$. Таким образом можно учитывать вклад неустойчивости Ландау–Даррье в крупномасштабных расчётах (например, всей звезды). Относительно простой подход – через постоянную фрактальную размерность. Хорошо бы написать динамические уравнения на характеристики, показывающие стадию развития неустойчивости тонкого фронта, но эта программа пока не выполнена.

Полученное значение увеличения скорости незначительно для рассматриваемой глобальной задачи дефлаграционно–детонационного перехода. С другой стороны, в случае сферического пламени возмущения не смогут стабилизироваться на какой-то определённой длине волны, как это происходит при течении в канале, – радиус пламени монотонно растёт. Этот фактор должен приводить к более сильному росту рассматриваемой неустойчивости и требует дальнейшего изучения, как и вопрос о фрактализации пламени.

Глава 5

Распространение турбулентного пламени

Турбулентность играет большую роль в распространении горения в сверхновой типа Ia. Обычно она возникает в результате развития какой-нибудь неустойчивости гидродинамического течения. Согласно современным тенденциям в исследованиях, она и является причиной перехода в детонацию в моделях с поздней детонацией. Описание турбулентности само по себе является сложнейшей задачей из-за большой разницы масштабов генерации турбулентной энергии и её диссипации при большом числе Рейнольдса, которое характеризует турбулентность. Турбулентное горение вводит дополнительный масштаб – размер области горения. В результате, для многих задач, в частности в SNIa, для описания течений необходимо применять различные модели.

В расчётах, которые проводятся различными группами в мире, используются, в основном, две модели. Первая, будем называть её моделью Шмидта, представлена в работах [94, 95]. Это однопараметрическая подсеточная LES-модель. Вторая, модель LEM (“linear eddy model”, “модель линейного вихря”), долгое время разрабатывалась в Сандийской национальной лаборатории (её автор – А. Керштейн) для земных пламён, была применена к расчёту сверхновых в работе [100]. Расчёты, проведённые с данными моделями, предсказывают значительную турбулизацию пламени.

В данной диссертации рассматривается модель из класса усреднённых по Рейнольдсу (RANS), в отличие от метода больших вихрей (LES), который основан на фильтрации, который рассматривался в [94]. Подобная модель рассматривалась в работе [154] для задачи термоядерного горения на поверхности нейтронных звёзд.

5.1 Неустойчивость Рэлея–Тейлора–Ландау

Неустойчивость Рэлея–Тейлора проявляется в течениях с неоднородным распределением плотности и наличием силы тяжести [155, 156], подробные обзоры по этой неустойчивости [157, 158]. В сверхновых пламя распространяется по радиусу звезды наружу (то есть против направления силы тяжести), при этом сгоревшее вещество всегда менее плотное, чем несгоревшее. Это означает, что условие для роста неустойчивости $\mathbf{g}\nabla\rho < 0$ выполняется. Для пламени эта неустойчивость была рассмотрена в той же работе Ландау [120] (классическая неустойчивость Рэлея–Тейлора вводится для невзаимодействующих сред), поэтому мы будем для пламени её называть неустойчивостью Рэлея–Тейлора–Ландау (РТЛ). Дисперсионное соотношение для скорости роста возмущения с волновым числом k имеет вид (это выражение переходит в (4.1) при стремлении $g \rightarrow 0$):

$$\omega = ku_n \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\sqrt{1 + \mu - \frac{1}{\mu} + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \frac{g}{ku_n^2}} - 1 \right). \quad (5.1)$$

Если устремить $u_n \rightarrow 0$, то получим классический ответ для неустойчивости Рэлея–Тейлора:

$$\omega = \sqrt{kg \frac{\mu - 1}{\mu + 1}}. \quad (5.2)$$

Когда амплитуда возмущения становится сравнимой с длиной волны, закон роста (5.1) нарушается. На этом этапе появляется ярко выраженная грибовидная структура возмущённой границы. Возникающие сдвиговые течения приводят к сильной турбулизации области и, как следствие, возникает область турбулентного перемешивания с гладким монотонным профилем изменения плотности. Ширина такой зоны перемешивания растёт как

$$\Delta = \alpha \frac{\mu - 1}{\mu + 1} gt^2 \quad (5.3)$$

в гидродинамическом случае (при $u_n = 0$). Здесь α – некоторая константа зависящая от конкретных сред, известная из эксперимента (она равна $\alpha \approx 0.03 - 0.04$, но в некоторых случаях есть зависимость от начальных возмущений).

В случае горения закон роста остаётся таким же, но немного меняется константа [89]. В сверхновых эта неустойчивость важна, так как считается, что она является основным источником турбулентности на масштабах звезды.

Используя аналитическую модель из раздела 1.2 можно оценить, в какой момент рассматриваемая неустойчивость начинает играть роль. Если k – обратная длина волны

возмущения, то характерное время роста неустойчивости РТЛ равно

$$\tau_{\text{RTL}} \sim \frac{1}{\sqrt{A_t k g}}, \quad (5.4)$$

где $g = Gm(R)/R^2$ – сила тяжести, $A_t = (\mu - 1)/(\mu + 1)$ – число Атвуда. С другой стороны, характерное время горения на таком масштабе

$$\tau_{\text{fl}} \sim \frac{1}{kv_{\text{fl}}}. \quad (5.5)$$

Неустойчивость РТЛ начинает играть значительную роль если $\tau_{\text{RTL}} < \tau_{\text{fl}}$. Этот результат также получается из дисперсионного соотношения (5.1). На рисунке 5.1 представлены характерные времена τ_{RTL} и τ_{fl} , рассчитанные по модели из раздела 1.2, для самых крупных возмущений $k \sim 1/R$. В результате получается, что такие возмущения растут с самого начала возникновения горения. В этой модели предполагается, что пламя

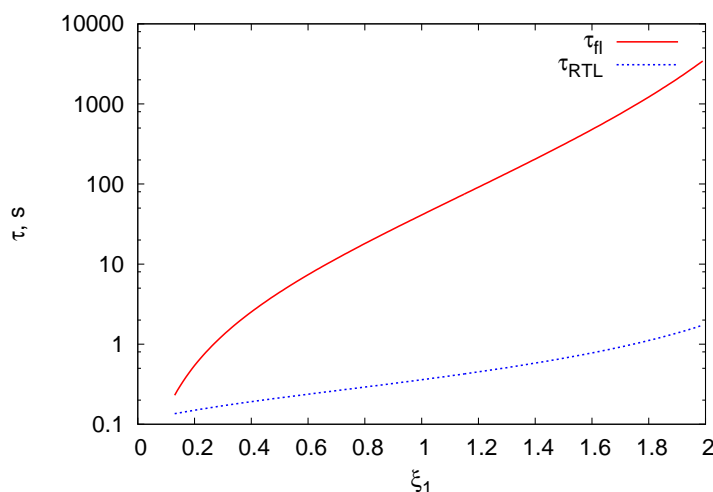


Рис. 5.1: Зависимости характерного времени пламени τ_{fl} и роста неустойчивости РТЛ τ_{RTL} от безразмерного радиуса пламени ξ_1

распространяется с нормальной скоростью горения – пламя движется очень медленно (поэтому и получаются такие большие масштабы времени у τ_{fl}). На самом деле такая оценка более–менее корректна, так как именно турбулентность способна значительно ускорить пламя (это будет показано ниже). Но турбулентность возникает как раз за счёт РТЛ неустойчивости, поэтому для получения критерия роста РТЛ необходимо использовать невозмущённую скорость. Из-за того, что $\tau_{\text{fl}} \propto k^{-1}$, $\tau_{\text{RTL}} \propto k^{-1/2}$, можно сделать вывод, что коротковолновые возмущения начинают расти позже длинноволновых.

5.2 Влияние турбулентности на пламя

Турбулентность, как режим гидродинамического течения, может оказывать сильное влияние на горение и его структуру. В зависимости от характера и интенсивности турбулентного течения это влияние может проявляться различным образом. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Турбулентность характеризуется появлением каскада: интервала в пространстве волновых чисел с универсальным законом распределения, в котором энергия переносится от внешнего до диссипационного масштаба. В результате энергия распределена по вихрям разного размера, интенсивность турбулентных пульсаций скорости v' зависит от пространственного масштаба. Определим масштаб Гибсона l_G как такой, на котором турбулентные пульсации сравниваются с нормальной скоростью горения:

$$v'(l_G) = u_n. \quad (5.6)$$

Физический смысл гибсоновского масштаба следующий: турбулентность не затрагивает структуру пламени на масштабах $l < l_G$, только искривляя фронт горения; при $l > l_G$ структура, наоборот, возмущается. Тогда можно ввести число Карловича, основной безразмерный параметр, определяющий характер взаимодействия пламени с турбулентностью:

$$\text{Ka} = \left(\frac{\delta}{l_G} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Здесь δ – толщина фронта горения (см. уравнение (1.2)). Второй безразмерный параметр – число Дамкохлера:

$$\text{Da} = \frac{L}{v'_L \tau_{\text{nucl}}}. \quad (5.8)$$

Здесь L – внешний размер исследуемой системы, v'_L – турбулентные пульсации на этом масштабе, τ_{nucl} – временной масштаб прогорания вещества (см. уравнение (1.1)). Эти параметры позволяют ввести следующие основные режимы турбулентного горения:

- Режим искривлённого пламени (в английской литературе “flamelet regime”):

$$\text{Ka} \lesssim 1. \quad (5.9)$$

Турбулентные пульсации слабы и неспособны разрушить структуру фронта горения. Турбулентность постепенно искривляет поверхность фронта горения, увеличивая область контакта несгоревшего и сгоревшего вещества, таким образом

турбулентная скорость пламени на крупном масштабе определяется как

$$v_{\text{turb}} = u_n \frac{A}{A_0}, \quad (5.10)$$

где A , A_0 – искривленная и неискривлённая площади поверхности пламени.

- Перемешанный режим (в английской литературе “stirred flame regime” или “thin reaction zone”):

$$\text{Ka} \gg 1, \quad \text{Da} > 1. \quad (5.11)$$

В этом случае турбулентные вихри проникают в микроструктуру пламени, изменяя её. При этом само пламя, как локализованная граница между сгоревшим и несгоревшим веществами, сохраняется, но его толщина и скорость определяются турбулентным переносом. То есть вместо уравнения (1.3) можно записать

$$u_{\text{turb}} = \frac{\delta}{\tau_{\text{nucl}}} = \left(\frac{(\kappa + \kappa_T) \dot{S}}{q} \right)^{1/2}, \quad (5.12)$$

где κ_T – коэффициент турбулентной теплопроводности.

- Сильно перемешанный реактор (в английской литературе “well-stirred reactor regime”):

$$\text{Ka} \gg 1, \quad \text{Da} < 1. \quad (5.13)$$

В этом случае турбулентность становится такой сильной, что теоретическая толщина пламени, которая пропорциональна $(\kappa_T)^{1/2}$, становится больше внешнего масштаба турбулентности L . В этом случае применимо (5.12) при $\kappa_T \sim v'_L L$. Такой режим как раз реализуется в центре белого карлика перед появлением пламени, но не возникает при его распространении.

5.3 Модель турбулентности

Турбулентная модель, которая используется в данной работе относится к двухпараметрическому семейству моделей, которое впервые было предложено в статье [159]. Эти модели должны удовлетворять нескольким требованиям, в частности, они должны воспроизводить уравнения Навье–Стокса при занулении турбулентных величин, и их лидирующие члены при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. Простейший способ удовлетворить этим требованиям – строить модель путём усреднения точных

гидродинамических уравнений и пытаться замкнуть получающуюся систему на некотором уровне корреляторов. Будем следовать этому алгоритму.

Ещё раз выпишем систему уравнений гидродинамики горения

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad (5.14)$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j) + \partial_i p = \partial_j \tau_{ij}, \quad (5.15)$$

$$\partial_t(\rho e) + \partial_i(\rho e v_i) + p \partial_i v_i + \partial_i Q_i = \tau_{ij} \partial_j v_i + \rho \dot{S}, \quad (5.16)$$

здесь ρ – плотность среды, v_i – скорость, p – давление, e – внутренняя энергия на единицу массы, τ_{ij} – тензор вязкости, Q_i – поток тепла, \dot{S} – энерговыделение при горении.

При описании горения не будем приводить явные выражения для Q_i и \dot{S} в данном разделе, так как это здесь не требуется. Как было указано многократно ранее, как раз динамика пламени и определяется этими двумя процессами: теплопроводностью и энерговыделением. Если \varkappa это коэффициент температуропроводности системы, q – калорийность, то толщина пламени должна удовлетворять

$$\frac{\delta^2}{\varkappa} = \frac{q}{\dot{S}} = \tau_{\text{flame}}. \quad (5.17)$$

Это время и есть временной масштаб горения: энергия должна быть передана теплопроводностью на толщину пламени за время энерговыделения [128].

Будем рассматривать случай, когда масштаб времени горения гораздо меньше характерного времени турбулентности (ниже приведем точный критерий). В таком случае можно считать пламя бесконечно тонкой границей, разделяющей сгоревшее и не сгоревшее вещества. После этого теплопроводность может быть исключена из системы (5.14)–(5.16), а пламя необходимо будет двигать “руками”. Для полного его задания необходима нормальная скорость пламени u_n (как функция состояния вещества) и энерговыделение на фронте. В общем трехмерном случае динамика пламени может быть описана, например, методом, представленном в главе 4.

Режим турбулентного горения, который рассматривается, удовлетворяет соотношению на число Карловича

$$\text{Ka} \equiv \left(\frac{\delta}{l_G} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (5.18)$$

то есть это “режим искривлённого пламени”.

Для того, чтобы построить модель турбулентности, будем усреднять уравнения гидродинамики. Для начала определим усреднение по Рейнольдсу:

$$\bar{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(\mathbf{x}, t + \tau) d\tau, \quad (5.19)$$

здесь T это характерный масштаб времени турбулентных пульсаций. Если среда сжимаема, то для некоторых величин удобнее использовать усреднение по Фавру:

$$\tilde{A} = \frac{\bar{\rho} \bar{A}}{\bar{\rho}}. \quad (5.20)$$

По Фавру будем усреднять v , e . Остальные величины, ρ , p , τ_{ij} , – по Рейнольдсу. В результате любая величина может быть разбита на усредненную и пульсирующую часть:

$$A = \bar{A} + A' = \tilde{A} + A'', \quad A' = A'' + \frac{\bar{\rho}' A'}{\bar{\rho}}. \quad (5.21)$$

Последнее равенство выводится из определения.

После усреднения уравнений гидродинамики, получим (детали этой процедуры могут быть найдены в [160, 161]):

$$\partial_t \bar{\rho} + \partial_i (\bar{\rho} \tilde{v}_i) = 0, \quad (5.22)$$

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \partial_j (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) + \partial_j R_{ij} + \partial_i \bar{p} = \partial_j \bar{\tau}_{ij}, \quad (5.23)$$

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{e}) + \partial_i (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{v}_i) + \partial_i (\bar{\rho} \tilde{e}'' v_i'') + \bar{p} \partial_i \tilde{v}_i + \bar{p}' \partial_i v_i' = \bar{\tau}_{ij} \partial_j \tilde{v}_i + \overline{\tau_{ij} \partial_j v_i''} + \bar{\rho} \tilde{S}, \quad (5.24)$$

где $R_{ij} \equiv \overline{\rho v_i'' v_j''}$, $R_{ij..k} \equiv \overline{\rho v_i'' v_j'' \dots v_k''}$. Здесь R_{ij} – тензор напряжений Рейнольдса.

Задача модели турбулентности состоит в вычислении неизвестных членов, корреляторов пульсационных величин второго и более высокого порядков, R_{ij} , $\overline{\rho e'' v_i''}$, и др. Основная идея моделей k - ϵ состоит в введении двух дополнительных динамических величин: энергии турбулентных пульсаций (здесь v'' – пульсации на масштабе генерации турбулентности, сравни с (5.6)) и её диссипации:

$$k \equiv \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\overline{\rho (v_i'')^2}}{2}, \quad \epsilon \equiv \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\tau_{ij}' \partial_j v_i'}. \quad (5.25)$$

Эти величины определяют турбулентный масштаб времени $\tau_T = k/\epsilon$, и заодно коэффициент турбулентной диффузии

$$D \sim (v'')^2 \tau_T \sim \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (5.26)$$

Этот коэффициент диффузии позволяет вычислить турбулентные средние вида $\overline{v''A'}$ с помощью “градиентного приближения” [162]:

$$\overline{v''A'} \propto -D\partial_i A. \quad (5.27)$$

В этом выражении для каждой величины A своя константа пропорциональности.

Рейнольдсовский тензор в этом приближении (с учётом симметричных свойств):

$$R_{ij} = -\rho D \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_l v_l \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (5.28)$$

первый член здесь – турбулентная вязкость, второй – турбулентное давление. При этом константа пропорциональности в (5.26) выбирается так, чтобы в данном выражении коэффициент был 1.

Для вывода уравнения на турбулентную энергию воспользуемся (5.15) и (5.23). В результате точное выражение для k :

$$\partial_t(\bar{\rho}k) + \partial_j(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) + \frac{1}{2}\partial_j R_{ij} + R_{ij}\partial_j\tilde{v}_i = -\overline{v''\partial_i p} + \overline{v''\partial_j \tau_{ij}}. \quad (5.29)$$

Кратко рассмотрим различные члены в этом уравнении: $-R_{ij}\partial_j\tilde{v}_i$ это сдвиговый генерационный член турбулентности G_1 . Другая добавка появляется из

$$-\overline{v''\partial_i p} = -\overline{v''\partial_i \bar{p}} - \overline{v''\partial_i p'} = \frac{\overline{\rho'v'_i}}{\bar{\rho}}\partial_i p - \overline{v''\partial_i p'}, \quad (5.30)$$

здесь пренебрегаем вторым членом в правой части (он мал для течений с низким числом Маха, так как $\sim \text{Ma}^3$), остаётся генерационный член

$$G_2 \equiv \frac{\overline{\rho'v'_i}}{\bar{\rho}}\partial_i p. \quad (5.31)$$

Выражение $-\partial_j R_{ij}/2$ аппроксимируется с помощью градиентного приближение как диффузионный член $\partial_j(c_k \rho D \partial_j k)$. Член $\overline{v''\partial_j \tau_{ij}}$ это диссипация $\rho\epsilon$ для течений с большим числом Маха. В результате конечное модельное уравнение для турбулентной энергии принимает вид (в конечных уравнениях мы будем опускать знаки усреднения):

$$\partial_t(\rho k) + \partial_i(\rho k v_i) = G_1 + G_2 - \rho\epsilon + \partial_i(\rho c_k D \partial_i k). \quad (5.32)$$

Аналогично в уравнении (5.24) $\overline{\tau_{ij}\partial_j v''_i}$ аппроксимируем как $\rho\epsilon$, членами $\overline{p'\partial_i v'_i}$ и $\overline{\tau_{ij}\partial_j \tilde{v}_i}$ пренебрегаем (первый член из-за малости при низких числах Маха, а также для сохранения энергии (смотри ниже); второй – столкновительная вязкость, он мал по сравнению с турбулентной вязкостью), $\overline{\rho e''v''_i}$ – турбулентная теплопроводность

$Q_i^T = -c_e \rho D \partial_i e$. В члене $\bar{\rho} \partial_i \bar{v}_i$ скорость должна быть заменена на фавровскую с помощью (5.21), это приводит к появлению $\partial_i(\rho a_i)$ в конечном уравнении (вектор $a_i \equiv \overline{\rho' v_i' / \bar{\rho}}$). Необходимо заметить, что конечный вариант уравнения для внутренней энергии должен быть согласован с уже имеющимися уравнениями для кинетической $\rho v^2/2$ и турбулентной ρk энергии для её сохранения. Такое согласование присутствует для предложенной схемы аппроксимации.

Точное уравнение на диссипацию ϵ содержит большое количество сложных членов и не аппроксимируется напрямую в рамках предложенного подхода. Поэтому обычно его записывают в виде, аналогичном уравнению для k :

$$\partial_t(\rho \epsilon) + \partial_i(\rho \epsilon v_i) = \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} G_1 + c_{\epsilon 2} G_2 - c_{\epsilon 3} \rho \epsilon) + \partial_i(\rho c_\epsilon D \partial_i \epsilon), \quad (5.33)$$

Предложенная выше процедура “вывода” системы уравнение не является строгой, основная цель была показать соответствие между модельными членами и членами в точных усреднённых уравнениях. Более подробное рассмотрение некоторых членов приведено в [160, 161].

Полная система полученной модели турбулентности:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad (5.34)$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = -\partial_j R_{ij}, \quad (5.35)$$

$$\partial_t E + \partial_i(v_i(E + p)) = -G_2 + \rho \epsilon + \partial_i(\rho a_i - Q_i^T), \quad (5.36)$$

$$R_{ij} = -\rho D \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k v_k \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (5.37)$$

$$\partial_t(\rho k) + \partial_i(\rho k v_i) = G_1 + G_2 - \rho \epsilon + \partial_i(\rho c_k D \partial_i k), \quad (5.38)$$

$$\partial_t(\rho \epsilon) + \partial_i(\rho \epsilon v_i) = \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} G_1 + c_{\epsilon 2} G_2 - c_{\epsilon 3} \rho \epsilon) + \partial_i(\rho c_\epsilon D \partial_i \epsilon), \quad (5.39)$$

$$E = \rho e + \frac{\rho v^2}{2}, \quad D = c_D \frac{k^2}{\epsilon}, \quad a_i = -c_\alpha D \frac{\partial_i \rho}{\rho}, \quad (5.40)$$

$$G_1 = -R_{ij} \partial_i v_j, \quad G_2 = a_i \partial_i p, \quad Q_i^T = -c_e \rho D \partial_i e. \quad (5.41)$$

Одно из слабых мест подобных моделей – неизвестные константы. В настоящее время не существует процедуры вывода этих уравнений, которая бы чётко фиксировала значения всех констант. Для того чтобы получить их значения существуют различные подходы: сравнение с экспериментом, с помощью прямого численного моделирования [163], а также существуют теоретические подходы, как, например, ренорм–группа [164–166]. В данной работе используется следующий набор констант [163]: $c_\alpha = 1.7$, $c_D = 0.12$,

$c_e = 3$, $c_{e1} = 1.15$, $c_{e2} = 1$, $c_{e3} = 1.7$, $c_k = c_\epsilon = 4/3$ (они были подобраны по нескольким лабораторным экспериментам: Рэлей–Тейлоровскому перемешиванию [167], перемешиванию Кельвина–Гельмгольца [168], прямому численному моделированию этих процессов [163]; полный список экспериментов представлен в работе [163]). Данный набор констант подбирался в экспериментах без горения, но применим к задачам горения в режиме искривлённого пламени. Возможность использования данной модели и соответствующие константы для других режимов горения необходимо отдельно исследовать.

Для того чтобы завершить модель для задач горения необходимо добавить влияние турбулентности на пламя (пламя влияет на турбулентность создавая пространственные градиенты величин). В данной работе влияние приводит к изменению скорости пламени. При выполнении условия (5.18), эффект турбулентности заключается только в искривлении поверхности пламени. Такой режим был рассмотрен в работе [169] (см. также [170]) с помощью ренорм–группового анализа. Результат записывается в виде:

$$\frac{v_{\text{turb}}}{v_{\text{lam}}} = \exp\left(\frac{2k}{v_{\text{turb}}^2}\right), \quad (5.42)$$

где v_{lam} – ламинарная скорость пламени (из работы [73]), v_{turb} – турбулентная скорость пламени. Предложенное выражение является полностью теоретическим и, хотя сравнивалось с некоторыми экспериментальными данными [169], требует дополнительного рассмотрения и проверки.

5.4 Постановка задачи

Предложенная выше модель позволяет проводить моделирование всей звезды целиком. Рассмотрим белый карлик с массой близкой к чандрасекаровской и пламя, которое распространяется от центра к поверхности. Медленное горение приводит к расширению вещества, следовательно около пламени выполняются условия для возникновения РТЛ неустойчивости. На масштабе времени распространения пламени (здесь имеется в виду $\sim R_{\text{WD}}/u_n$, а не (5.17)) неустойчивость РТЛ успевает перейти на нелинейную стадию и развить турбулентность, интенсивность которой и её влияние на пламя и являются основными вопросами в данной главе.

Для того, чтобы ответить на эти вопросы используется численное моделирование. Уравнения (5.34)–(5.41) реализованы в трёхмерном случае в виде модуля в численном

гидрокоде FRONT3D, представленном в главе 4. Как было сказано выше, представленная модель может корректно воспроизводить трёхмерные свойства турбулентности в одномерных расчётах. Поэтому для определения масштаба турбулентности будем проводить одномерные расчёты в сферических координатах. Для того, чтобы не сталкиваться с проблемой задания равновесного белого карлика в эйлеровом коде, как ещё один модуль к FRONT3D реализована одномерная лагранжева численная схема. Для этого используется неявная численная схема в массовых координатах [136]. Эта схема использует разнесённый шаблон: координаты r_i и скорости v_i заданы на границе ячеек, другие величины в центрах $p_{i+1/2}$, $\rho_{i+1/2}$ и т.д. Также в ней присутствует искусственная вязкость для расчётов с ударными волнами. Рассматриваемое нами течение является дозвуковым, поэтому искусственная вязкость не оказывает влияния; более того турбулентная вязкость в модели значительно превышает искусственную. Детали реализации могут быть найдены в документации к коду¹. Турбулентные члены в данной схеме включаются как внешние источники.

Для того, чтобы корректно описывать свойства вещества белого карлика использовано табличное уравнение состояния “Тельмгольца” [171]. Начальное гидростатическое распределение всех величин в самосогласованном поле тяжести выставляется с вычислительной точностью с помощью следующей процедуры. Точность установки начальных данных очень важна в задачах исследования всей звезды целиком. В большинстве случаев, особенно при использовании эйлеровых схем, звезда успевает разлетаться из-за численных дисбалансов за время, сравнимое с временем расчёта, именно поэтому в данном расчёте была использована лагранжева схема. Установка начальных данных состоит из двух шагов. Первым шагом задаются массовые координаты m_i (это несложно сделать так как масса звезды известна) и центральная плотность ρ_c . Далее, рекурсивная процедура задаёт профили остальных величин в звезде:

$$4\pi r_i^2 \frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{\Delta m_i} = -\frac{Gm_i}{r_i^2}, \quad (5.43)$$

$$\rho_{i+1/2} = \text{EOS}(p_{i+1/2}, T_{i+1/2}), \quad (5.44)$$

$$r_{i+1}^3 = r_i^3 + \frac{3}{4\pi} \frac{\Delta m_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}}. \quad (5.45)$$

Эти соотношения в точности совпадают с членами в используемой разностной схеме, если положить производные по времени равными нулю. Такая процедура требует, что-

¹Данная численная схема совпадает с использованной в коде FRONT1D, но теперь она была переписана для FRONT3D

бы распределение температуры $T(\rho, r)$ было известно заранее. Так как температура после прогорания поднимается значительно, до $\sim 10^{10}$ К, то мы можем использовать любую малую температуру как начальную. Так как теплопроводность в белом карлике велика, то звезда обычно в центре изотермична. В результате мы можем задать постоянную T_{initial} по всей звезде. Выбор T_{initial} представлен ниже. После интегрирования мы получаем состояние белого карлика, близкое к эмденовскому решению, но с учётом “реального” УРСа.

Метод уровней, представленный в главе 4, описывает эволюцию поверхности пламени для общей ситуации. В нашем случае можно упростить процесс описания пламени. Будем задавать пламя в лагранжевых координатах m_{flame} . Тогда уравнение движение можно записать как

$$\frac{dm_{\text{flame}}}{dt} = 4\pi r_{\text{fl}}^2 \rho v_{\text{fl}}, \quad (5.46)$$

где r_{fl} текущая позиция пламени, ρ , v_{fl} – плотности и скорость пламени (как функция состояния среды) в этой точке. На каждом шаге по времени выделяется энергия $\Delta Q = q\Delta m$, где Δm – масса, прогорающая за шаг по времени. Пламя в начала расчёта задаётся как точка m_{ign} , от которой начинают двигаться два фронта (по радиусу и против радиуса). На каждом шаге в коде скорость пламени находится из решения неявного уравнения (5.42).

5.5 Результаты

Параметры начального белого карлика, которые задаются в расчётах, следующие: центральная плотность $\rho_c = 2 \times 10^9$ г/см³, начальный химсостав: чистый ¹²С или смесь 0.5¹²С+0.5¹⁶О. Начальная температура вычисляется с помощью аппроксимации кривой зажигания, представленной в работе [107]: для ¹²С это $T_{\text{initial}} = 2.7 \times 10^8$ К, для 0.5¹²С+0.5¹⁶О – $T_{\text{initial}} = 3.8 \times 10^8$ К (обе температуры гораздо меньше температуры продуктов горения 5×10^9 К, что соответствует сказанному в прошлом параграфе). Расчёты проводились для нескольких вариантов калорийности горящего вещества: $q_1 = 5.6 \times 10^{17}$ эрг/г (что соответствует переходу С→Mg), $q_2 = 9.2 \times 10^{17}$ эрг/г (С→Ni), и промежуточный $q_3 = 7 \times 10^{17}$ эрг/г (соответствует переходу к статистическому равновесию при горении углерода [93]). С подобными вариантами перекрывается значительный диапазон q и можно проверить зависимость результатов от значения калорийности. Параметры конвекции прямо перед поджигом представлены в работе [108]: пламя в наших расчётах

поджигается в точке $r_{\text{ign}} = 50$ км, начальная турбулентная скорость $v_0'' = \sqrt{2k_0} = 16$ км/с, турбулентный масштаб $L_{\text{turb}} = k_0^{3/2}/\epsilon_0 = 200$ км.

Пример эволюции плотности со временем представлен на рисунке 5.2. Видно, что скачок плотности, создаваемый пламенем распространяющимся наружу, размывается за счёт возникающей турбулентности. Она поддерживается за счёт неустойчивости

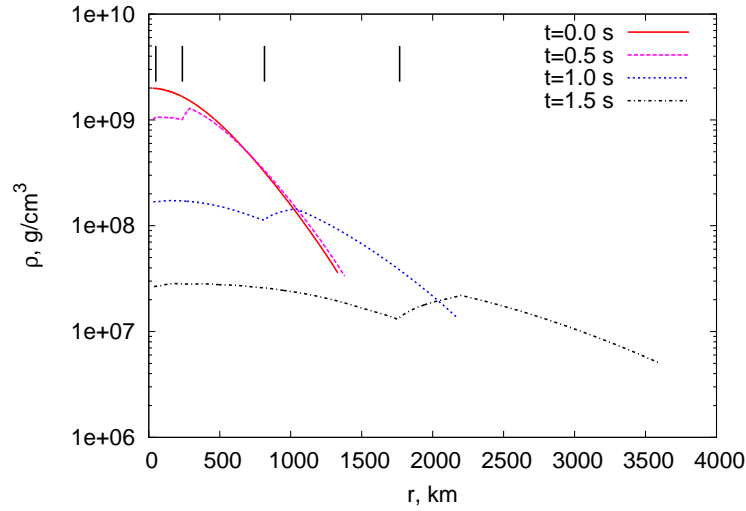


Рис. 5.2: Профили плотности на разные моменты времени, вариант с $q = 9.2 \times 10^{17}$ эрг/г, начальный химсостав ^{12}C . Вертикальные риски показывают положения фронта горения на соответствующие моменты времени

РТЛ, скорость роста которой пропорциональна гравитационному ускорению в точке, где находится пламя:

$$g_{\text{fl}} = \frac{Gm_{\text{flame}}}{r_{\text{flame}}^2}. \quad (5.47)$$

Положение пламени m_{flame} растёт со временем, как и r_{flame} , поэтому полный эффект развития неустойчивости неизвестен заранее. Профили турбулентной энергии для расчёта как на рисунке 5.2 показаны на рис. 5.3. Видно, что максимум турбулентной энергии $\sim 2 \times 10^{15}$ эрг/г (для рассмотренного варианта) поддерживается около фронта горения. Такая интенсивная турбулентность, которая превышает начальные значения возникает очень рано. Поэтому эффект от вариаций начальной турбулентной энергии k_0 или турбулентного масштаба L_{turb_0} не оказывает влияния на конечный результат, что будет показано ниже. Турбулентные скорости пламени для всех вариантов показаны на рисунке 5.4. Возрастание скорости пламени, которое наблюдается с самого начала связано с ростом турбулентной энергии (без турбулентности скорость бы только мо-

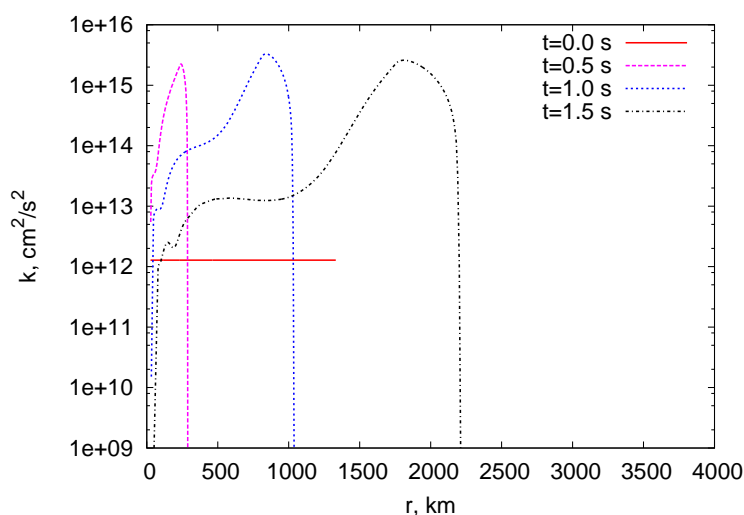


Рис. 5.3: Профили турбулентной энергии на разные моменты времени, вариант с $q = 9.2 \times 10^{17}$ эрг/г, химсостав ^{12}C

тонно спадала). Скорость пламени равняется $v_{\text{flame}} \approx \sqrt{2k}$ практически всё время, поэтому более точное выражение вместо (5.42) не требуется в данных расчётах, как и более точное $u_n(\rho, X_i)$. Видно, что турбулентность поддерживает скорость на уровне (200 – 300) км/с, или (3 – 7)% от скорости звука, что недостаточно для осуществления перехода дефлаграции в детонацию. Рисунок 5.5 представляет положения фронта горения в зависимости от массовой координаты для всех вариантов расчётов. Видно, что большая калорийность приводит к большему расширению звезды.

Дополнительные варианты расчётов с изменёнными значениями k_0 и $L_{\text{turb}0}$ (что соответствует вариации интенсивности начальной турбулентности) представлены на рисунке 5.6. Полученная скорость пламени не зависит от фоновой и начальной турбулентности.

Предложенная модель позволяет рассчитывать горение в сверхновых в режиме искривленного пламени. Параметры возникающей турбулентности согласуются с более сложными вычислениями как, например [97]. Полученное ускорение пламени (конечное число Маха) до $\approx 0.05c_s$ не приводит к возникновению детонации. Это позволяет утверждать, в согласии с работой [100], что переход в детонацию происходит в другом режиме турбулентного горения или на границе режимов (см. раздел 5.2). Необходимо заметить, что это заключение относится ко всему пламени целиком, какое мы рассматривали в сферически-симметричном случае. В работах [41, 97] указывается на возможность пе-

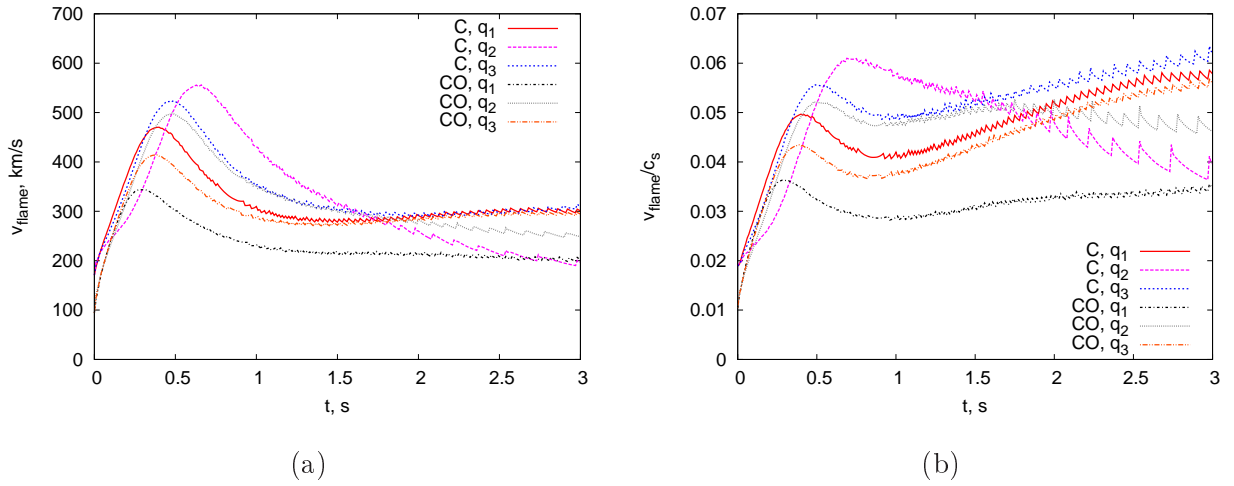


Рис. 5.4: Скорости пламени (а) и числа Маха (б) для всех вариантов

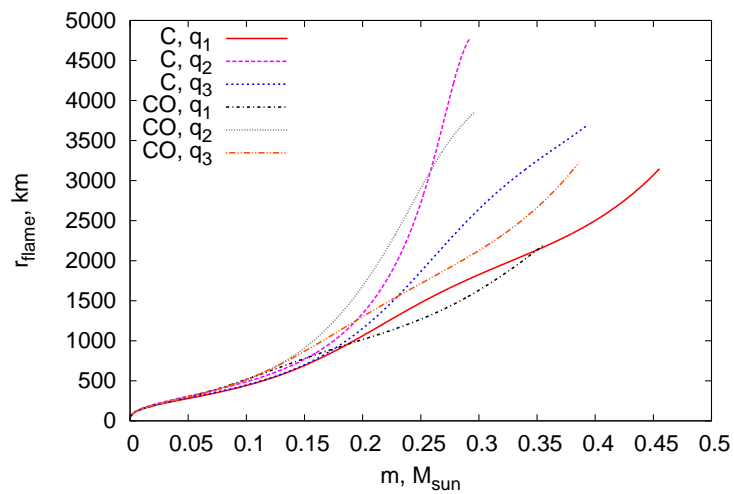


Рис. 5.5: Радиус фронта пламени в зависимости от массовой координаты для всех вариантов

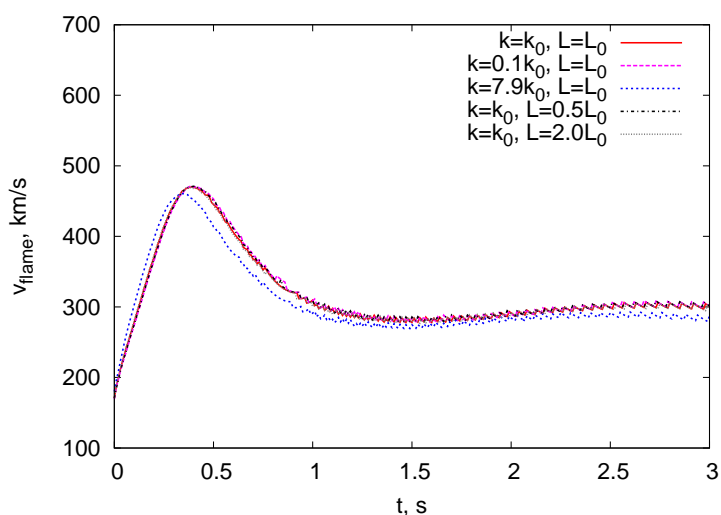


Рис. 5.6: Скорости пламени для варианта с ^{12}C и $q = q_1$, но различными параметрами начальной турбулентности k_0 и L_0

рехода в детонацию в редких высокоскоростных турбулентных пульсациях. Подобные флуктуации плохо описываются предложенной моделью, что требует её модификации.

Коэффициенты представленной модели тестировались на земных экспериментах по турбулентному перемешиванию, поэтому не до конца ясна их применимость к задачам в SNIa, этот вопрос будет рассматриваться в дальнейших работах. Рассмотренная модель имеет преимущество, позволяющее проводить расчёты в низких размерностях (1D, 2D), при этом турбулентные свойства воспроизводятся корректно. В дальнейшем планируется проведение многомерных расчётов с её использованием, а также её дальнейшее совершенствование для учёта всевозможных режимов турбулентного горения.

Заключение

В диссертации представлено исследование горения в сверхновых типа Ia. При этом рассматривались задачи, связанные с отдельными, играющими важную роль, эффектами при горении. Такое исследование должно являться базисом для построения единой модели горения сверхновых Ia. Согласно полученным результатам, каждый из рассмотренных эффектов по отдельности, не приводит к главной цели всего исследования – получению перехода дефлаграции в детонацию.

Основные итоги исследования следующие:

1. Рассчитана одномерная структура плоского фронта горения с применением разработанного одномерного численного метода. Получены характеристики нормального фронта: его скорость, толщина, перепад основных термодинамических величин.
2. Представлена упрощенная модель, показывающая основные свойства термопульсационной неустойчивости.
3. Показано, что горение в сверхновых является устойчивым по отношению к термопульсационной неустойчивости. Получены критические значения чисел Зельдовича, определяющие её развитие, для условий в сверхновой.
4. Разработан трехмерный численный гидродинамический метод для расчёта задач гидродинамики горения в приближении бесконечно тонкого фронта.
5. Рассчитана эволюция возмущений тонкого фронта при горении в канале. Вычислено возникающее увеличение скорости фронта, которое составляет 3 – 4% от нормальной скорости горения.
6. Разработана модель турбулентности с учётом горения в режиме искривлённого пламени.

7. Рассчитана интенсивность возникающей при горении белого карлика турбулентности. Показано, что она приводит к ускорению пламени до $\sim 5\%$ от скорости звука.

Как видно, наиболее сильное влияние на пламя оказывает турбулентность, которая развивается за счёт неустойчивости Рэлея–Тейлора–Ландау. В дальнейшем необходимо более тщательное изучение её вклада во взрыв SNIa: в диссертации проведено исследование только одного из нескольких режимов турбулентного горения.

Взрыв термоядерной сверхновой содержит в себе богатую физику и охватывает множество разделов науки. Такая сложность до сих пор не позволяет построить полное теоретическое и численное описание явления, несмотря на активное его изучение большим количеством групп исследователей. Такие исследования важны как с фундаментальной (как ключ к пониманию Вселенной), так и прикладной (горение в SNIa в определённой степени воспроизводит эффекты в лабораторных условиях) точек зрения.

Я благодарен Сергею Ивановичу Блинникову за научное руководство. Хочу поблагодарить П. В. Сасорова, В. А. Жмайло, В. П. Стаценко и отца за многочисленные полезные обсуждения. Также благодарен родителям и жене за поддержку и помощь.

Список иллюстраций

1.1	Решение уравнения Эмдена $\theta(\xi)$ для $n = 3$, плотность $\rho \propto \theta^n$	19
1.2	Расчёт расширения белого карлика по аналитической модели	22
1.3	Коэффициент расширения среды для различной плотности при горении с различными калорийностями, характерными для SNIa (для политропного уравнения состояния).	23
2.1	Пример зависимости координаты центра фронта от времени (а), последовательных профилей температуры (б). Расчёт $\rho = 2 \times 10^9$ г/см ³ , начальный состав ¹² C, сетка реакций APROX13	43
2.2	Распределение концентраций различных элементов для расчёта с APROX13, $\rho = 2 \times 10^9$ г/см ³ , начальный химсостав ¹² C.	45
3.1	Зависимости $p_1(\lambda_1(\omega_0))$ (слева) и $p_2(\lambda_2(\omega_0))$ (справа)	52
3.2	Координата фронта от времени $x(t)$ для $\omega_0 = 1$ (слева) и $\omega_0 = 7$ (справа)	54
3.3	Последовательные профили распределения температуры на моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ для режима “therm”, $\omega_0 = 8$	54
3.4	Последовательные профили температуры для $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ (а) и координата фронта от времени $x(t)$ (б) для $\omega_0 = 8$ (пульсирующий режим пламени). Прямая линия на правом графике, нарисованная для примера, соответствует скорости $v = 1$	57
3.5	Сравнение скоростей реакций аррениусовского типа, используемых в расчётах, со скоростью реакции $2C \rightarrow Mg$	58
3.6	Зависимость $x(t)$ (а) и профили температуры на несколько моментов времени (б) для пульсационного режима распространения пламени с искусственно увеличенным числом Зельдовича, $\rho = 2 \times 10^9$ г/см ³ , $\mathcal{B} = 112.5$, $q = 2.4 \times 10^{17}$ эрг/г	60

3.7	Зависимость $x(t)$ для расчёта с ^{16}O , $\rho = 2 \times 10^8 \text{ г/см}^3$, APROX13. Три расчёта с одинаковыми параметрами, но различным разрешением (размером ячеек сетки).	61
4.1	Постановка начальных условия для расчётов горения в канале.	69
4.2	Распределение плотности на разные моменты времени для двух расчётов: одномодовое возмущение (слева), многомодовое возмущение (справа). Время в единицах 10^{-8} с	69
4.3	Скорость пламени относительно набегающего вещества, полученная в расчёте, в зависимости от времени	70
5.1	Зависимости характерного времени пламени τ_{fl} и роста неустойчивости РТЛ τ_{RTL} от безразмерного радиуса пламени ξ_1	74
5.2	Профили плотности на разные моменты времени, вариант с $q = 9.2 \times 10^{17} \text{ эрг/г}$, начальный химсостав ^{12}C . Вертикальные риски показывают положения фронта горения на соответствующие моменты времени	84
5.3	Профили турбулентной энергии на разные моменты времени, вариант с $q = 9.2 \times 10^{17} \text{ эрг/г}$, химсостав ^{12}C	85
5.4	Скорости пламени (a) и числа Маха (b) для всех вариантов	86
5.5	Радиус фронта пламени в зависимости от массовой координаты для всех вариантов	86
5.6	Скорости пламени для варианта с ^{12}C и $q = q_1$, но различными параметрами начальной турбулентности k_0 и L_0	87

Список таблиц

2.1	Теоретические оценки нормальной скорости горения и толщины пламени для одной реакции $2^{12}\text{C} \rightarrow 24\text{Mg}^*$ для различных плотностей среды:	37
2.2	Результаты моделирования . ρ_0 – начальная плотность, “Calor.” – вариант сетки ядерных реакций (см. раздел 2.3), T_{max} – температура сгоревшего вещества, ρ_u/ρ_b – коэффициент расширения, v_n – нормальная скорость пламени, Δx_{fr} – толщина фронта горения (определяемая по ширине области подъема температуры), v_{TW} – скорость пламени по интерполяционным функциям из работы [73] (нужно сравнивать только с результатами по APROX13). Характерный временной масштаб горения $\Delta x_{\text{fr}}/v_n$ для наших результатов и из работы [73] (v_n определяются по уравнениям (43), (44) из [73], ширина пламени по интерполяции таблиц 3–4 там же).	44
3.1	Результаты моделирования с поджигом от стенки. ω_0 – параметр расчёта, Δx – размер счётной ячейки, v – измеренная в расчёте скорость, “comb.” – режим горения (смотри описание в тексте).	55
3.2	Результаты расчётов при задании начальных условий из аналитического решения, обозначения такие же как в таблице 3.1.	55
3.3	Варианты расчётов пламени с законом Аррениуса и различным числом Зельдовича, плотность среды $\rho = 2 \times 10^9$ г/см ³	59
3.4	Критические числа Зельдовича для условий сверхновой при различных плотностях.	59

Литература

- [1] Minkowski R. Spectra of Supernovae // Pub. Astron. Soc. Pacific. 1941. Vol. 53. p. 224.
- [2] Turatto M. Classification of Supernovae // Supernovae and Gamma-Ray Bursters / Ed. by K. Weiler. Vol. 598 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. 2003. P. 21–36.
- [3] <http://www.cbat.eps.harvard.edu/lists/Supernovae.html>.
- [4] Woosley S. E., Weaver T. A. The physics of supernova explosions // Annual Review on Astronomy and Astrophysics. 1986. T. 24. C. 205–253.
- [5] Burrows A. Colloquium: Perspectives on core-collapse supernova theory // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85. P. 245–261.
- [6] Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al. // The Astronomical Journal. 1998. Vol. 116. P. 1009–1038.
- [7] Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae / S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 517. P. 565–586.
- [8] Pskovskii I. P. Light curves, color curves, and expansion velocity of type I supernovae as functions of the rate of brightness decline // Soviet Astronomy. 1977. Vol. 21. P. 675–682.
- [9] Phillips M. M. The absolute magnitudes of Type IA supernovae // The Astrophysical Journal Letters. 1993. Vol. 413. P. L105–L108.

- [10] The influence of chemical composition on models of Type Ia supernovae / A. C. Calder, B. K. Krueger, A. P. Jackson et al. // *Frontiers of Physics*. 2013. Vol. 8. P. 168–188.
- [11] Abundance stratification in Type Ia supernovae - I. The case of SN 2002bo / M. Stehle, P. A. Mazzali, S. Benetti et al. // *MNRAS*. 2005. Vol. 360. P. 1231–1243.
- [12] Abundance stratification in Type Ia supernovae - II. The rapidly declining, spectroscopically normal SN2004eo / P. A. Mazzali, D. N. Sauer, A. Pastorello et al. // *MNRAS*. 2008. Vol. 386. P. 1897–1906.
- [13] The Very Young Type Ia Supernova 2013dy: Discovery, and Strong Carbon Absorption in Early-time Spectra / W. Zheng, J. M. Silverman, A. V. Filippenko et al. // *The Astrophysical Journal Letters*. 2013. Vol. 778. p. L15.
- [14] Filippenko A. V. Optical Spectra of Supernovae // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1997. Vol. 35. P. 309–355.
- [15] Hoyle F., Fowler W. A. Nucleosynthesis in Supernovae. // *The Astrophysical Journal*. 1960. Vol. 132. p. 565.
- [16] Postnov K. A., Yungelson L. R. The Evolution of Compact Binary Star Systems // *Living Reviews in Relativity*. 2006. Vol. 9. p. 6.
- [17] Whelan J., Iben Jr. I. Binaries and Supernovae of Type I // *The Astrophysical Journal*. 1973. Vol. 186. P. 1007–1014.
- [18] Iben Jr. I., Tutukov A. V. Supernovae of type I as end products of the evolution of binaries with components of moderate initial mass (M not greater than about 9 solar masses) // *The Astrophysical Journal Supplement*. 1984. Vol. 54. P. 335–372.
- [19] Woods T. E., Gilfanov M. He II recombination lines as a test of the nature of SN Ia progenitors in elliptical galaxies // *MNRAS*. 2013. Vol. 432. P. 1640–1650.
- [20] Evidence for Two Distinct Populations of Type Ia Supernovae / X. Wang, L. Wang, A. V. Filippenko et al. // *Science*. 2013. Vol. 340. P. 170–173.
- [21] Koldoba A. V., Tarasova E. V., Chechetkin V. M. Instability of the detonation wave in a thermonuclear supernova model // *Astronomy Letters*. 1994. Vol. 20. P. 377–381.

- [22] Kriminski S. A., Bychkov V. V., Liberman M. A. On the stability of thermonuclear detonation in supernovae events // *New Astronomy*. 1998. Vol. 3. P. 363–377.
- [23] Is the detonation burning in a degenerate carbon-oxygen core of a presupernova possible? / V. S. Imshennik, N. L. Kal'yanova, A. V. Koldoba et al. // *Astronomy Letters*. 1999. Vol. 25. P. 206–214.
- [24] Hillebrandt W., Niemeyer J. C. Type IA Supernova Explosion Models // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2000. Vol. 38. P. 191–230.
- [25] Niemeyer J. C., Woosley S. E. The Thermonuclear Explosion of Chandrasekhar Mass White Dwarfs // *The Astrophysical Journal*. 1997. Vol. 475. p. 740.
- [26] Niemeyer J. C. On the propagation of thermonuclear flames in type Ia supernovae. Ph.D. thesis: Technical University of Munich, also available as MPA-911. 1995.
- [27] Modeling the Diversity of Type Ia Supernova Explosions / F. K. Röpkе, W. Hillebrandt, D. Kasen et al. // *Numerical Modeling of Space Plasma Flows, Astronom-2009* / Ed. by N. V. Pogorelov, E. Audit, G. P. Zank. Vol. 429 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. 2010. p. 142.
- [28] Ivanova L. N., Imshennik V. S., Chechetkin V. M. Pulsation regime of the thermonuclear explosion of a star's dense carbon core // *Astrophysics and Space Science*. 1974. T. 31. C. 497–514.
- [29] Nomoto K., Sugimoto D., Neo S. Carbon deflagration supernova, an alternative to carbon detonation // *Astrophysics and Space Science*. 1976. Vol. 39. P. L37–L42.
- [30] Nomoto K., Thielemann F.-K., Yokoi K. Accreting white dwarf models of Type I supernovae. III - Carbon deflagration supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1984. Vol. 286. P. 644–658.
- [31] Arnett W. D. A Possible Model of Supernovae: Detonation of ^{12}C // *Astrophysics and Space Science*. 1969. Vol. 5. P. 180–212.
- [32] Hansen C. J., Wheeler J. C. A Calculation of a White Dwarf Supernova // *Astrophysics and Space Science*. 1969. Vol. 3. P. 464–474.

- [33] Arnett W. D., Truran J. W., Woosley S. E. Nucleosynthesis in Supernova Models. II. The ^{12}C Detonation Model // *The Astrophysical Journal*. 1971. Vol. 165. p. 87.
- [34] Khokhlov A. M. Delayed detonation model for type IA supernovae // *Astronomy and Astrophysics*. 1991. Vol. 245. P. 114–128.
- [35] Livne E., Arnett D. On the Instability of Deflagration Fronts in White Dwarfs // *The Astrophysical Journal Letters*. 1993. Vol. 415. p. L107.
- [36] Khokhlov A. M., Oran E. S., Wheeler J. C. Deflagration-to-Detonation Transition in Thermonuclear Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1997. Vol. 478. p. 678.
- [37] Lisewski A. M., Hillebrandt W., Woosley S. E. Constraints on the Delayed Transition to Detonation in Type IA Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 2000. Vol. 538. P. 831–836.
- [38] Gamezo V. N., Khokhlov A. M., Oran E. S. Three-dimensional Delayed-Detonation Model of Type Ia Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 623. P. 337–346.
- [39] Röpke F. K., Niemeyer J. C. Delayed detonations in full-star models of type Ia supernova explosions // *Astronomy and Astrophysics*. 2007. Vol. 464. P. 683–686.
- [40] Evaluating Systematic Dependencies of Type Ia Supernovae: The Influence of Deflagration to Detonation Density / A. P. Jackson, A. C. Calder, D. M. Townsley et al. // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 720. P. 99–113.
- [41] Turbulence in a Three-Dimensional Deflagration Model For Type Ia Supernovae. II. Intermittency and the Deflagration-to-Detonation Transition Probability / W. Schmidt, F. Ciaraldi-Schoolmann, J. C. Niemeyer et al. // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 710. P. 1683–1693.
- [42] Three-dimensional delayed-detonation models with nucleosynthesis for Type Ia supernovae / I. R. Seitenzahl, F. Ciaraldi-Schoolmann, F. K. Röpke et al. // *MNRAS*. 2013. Vol. 429. P. 1156–1172.
- [43] One-dimensional delayed-detonation models of Type Ia supernovae: confrontation to observations at bolometric maximum / S. Blondin, L. Dessart, D. J. Hillier et al. // *MNRAS*. 2013. Vol. 429. P. 2127–2142.

- [44] Ciaraldi-Schoolmann F., Seitenzahl I. R., Röpke F. K. A subgrid-scale model for deflagration-to-detonation transitions in Type Ia supernova explosion simulations. Numerical implementation // *Astronomy and Astrophysics*. 2013. Vol. 559. p. A117.
- [45] A new model for deflagration fronts in reactive fluids / M. Reinecke, W. Hillebrandt, J. C. Niemeyer et al. // *Astronomy and Astrophysics*. 1999. Vol. 347. P. 724–733.
- [46] Khokhlov A. M. Propagation of Turbulent Flames in Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1995. Vol. 449. p. 695.
- [47] Zhiglo A. V. Analysis of reaction-diffusion systems for flame capturing in type Ia supernova simulations. Ph.D. thesis: The University of Chicago, also available as arXiv:0906.0393. 2009.
- [48] Nucleosynthesis in multi-dimensional SN Ia explosions / C. Travaglio, W. Hillebrandt, M. Reinecke et al. // *Astronomy and Astrophysics*. 2004. Vol. 425. P. 1029–1040.
- [49] Kerstein A. Fractal Dimension of Turbulent Premixed Flames // *Combustion Science and Technology*. 1988. Vol. 60. P. 441–445.
- [50] Kerstein A. R. Fractal dimension of propagating interfaces in turbulence // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 3633–3635.
- [51] Sreenivasan K. R. Fractals and multifractals in fluid turbulence // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 23. P. 539–600.
- [52] Bravo E., Garcia-Senz D. Smooth Particle Hydrodynamics Simulations of Deflagrations in Supernovae // *The Astrophysical Journal Letters*. 1995. Vol. 450. p. L17.
- [53] Blinnikov S. I., Sasorov P. V. Landau-Darrieus instability and the fractal dimension of flame fronts // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4827–4841.
- [54] Plewa T., Calder A. C., Lamb D. Q. Type Ia Supernova Explosion: Gravitationally Confined Detonation // *The Astrophysical Journal Letters*. 2004. Vol. 612. P. L37–L40.
- [55] Livne E., Asida S. M., Höflich P. On the Sensitivity of Deflagrations in a Chandrasekhar Mass White Dwarf to Initial Conditions // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 632. P. 443–449.

- [56] Flame Evolution During Type Ia Supernovae and the Deflagration Phase in the Gravitationally Confined Detonation Scenario / D. M. Townsley, A. C. Calder, S. M. Asida et al. // *The Astrophysical Journal*. 2007. Vol. 668. P. 1118–1131.
- [57] Three-Dimensional Simulations of the Deflagration Phase of the Gravitationally Confined Detonation Model of Type Ia Supernovae / G. C. Jordan, IV, R. T. Fisher, D. M. Townsley et al. // *The Astrophysical Journal*. 2008. Vol. 681. P. 1448–1457.
- [58] Initiation of the Detonation in the Gravitationally Confined Detonation Model of Type Ia Supernovae / I. R. Seitenzahl, C. A. Meakin, D. Q. Lamb et al. // *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 700. P. 642–653.
- [59] Study of the Detonation Phase in the Gravitationally Confined Detonation Model of Type Ia Supernovae / C. A. Meakin, I. Seitenzahl, D. Townsley et al. // *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 693. P. 1188–1208.
- [60] Khokhlov A., Mueller E., Hoefflich P. Type IA supernovae - Theoretical light curves with a slow pre-maximum rise // *Astronomy and Astrophysics*. 1992. Vol. 253. P. L9–L12.
- [61] Pulsating Reverse Detonation Models of Type Ia Supernovae. II. Explosion / E. Bravo, D. García-Senz, R. M. Cabezón et al. // *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 695. P. 1257–1272.
- [62] The Detonation Mechanism of the Pulsationally Assisted Gravitationally Confined Detonation Model of Type Ia Supernovae / G. C. Jordan, IV, C. Graziani, R. T. Fisher et al. // *The Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 759. p. 53.
- [63] Blinnikov S. I., Khokhlov A. M. Development of Detonations in Degenerate Stars // *Soviet Astronomy Letters*. 1986. Vol. 12. P. 131–134.
- [64] Bychkov V. V., Liberman M. A. On the theory of Type IA supernova events // *Astronomy and Astrophysics*. 1995. Vol. 304. p. 440.
- [65] Spontaneous Initiation of Detonations in White Dwarf Environments: Determination of Critical Sizes / I. R. Seitenzahl, C. A. Meakin, D. M. Townsley et al. // *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 696. P. 515–527.

- [66] Plewa T. Detonating Failed Deflagration Model of Thermonuclear Supernovae. I. Explosion Dynamics // *The Astrophysical Journal*. 2007. Vol. 657. P. 942–960.
- [67] García-Senz D., Bravo E. Type Ia Supernova models arising from different distributions of igniting points // *Astronomy and Astrophysics*. 2005. Vol. 430. P. 585–602.
- [68] A Three-Dimensional Deflagration Model for Type Ia Supernovae Compared with Observations / F. K. Röpkе, W. Hillebrandt, W. Schmidt et al. // *The Astrophysical Journal*. 2007. Vol. 668. P. 1132–1139.
- [69] Three-dimensional Simulations of Pure Deflagration Models for Thermonuclear Supernovae / M. Long, G. C. Jordan, IV, D. R. van Rossum et al. // arXiv:1307.8221. 2013.
- [70] Three-dimensional pure deflagration models with nucleosynthesis and synthetic observables for Type Ia supernovae / M. Fink, M. Kromer, I. R. Seitenzahl et al. // *MNRAS*. 2014. Vol. 438. P. 1762–1783.
- [71] Imshennik V. S., Khokhlov A. M. Detonation-Wave Structure and Nucleosynthesis in Exploding Carbon-Oxygen Cores and White Dwarfs // *Soviet Astronomy Letters*. 1984. Vol. 10. P. 262–265.
- [72] Khokhlov A. M. Hugoniot adiabates for the waves of combustion in degenerate matter of supernovae // *Astrophysics and Space Science*. 1988. Vol. 149. P. 91–106.
- [73] Timmes F. X., Woosley S. E. The conductive propagation of nuclear flames. I - Degenerate C + O and O + NE + MG white dwarfs // *The Astrophysical Journal*. 1992. Vol. 396. P. 649–667.
- [74] Khokhlov A. M. Stability of Detonations in Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1993. Vol. 419. p. 200.
- [75] Timmes F. X., Hoffman R. D., Woosley S. E. An Inexpensive Nuclear Energy Generation Network for Stellar Hydrodynamics // *The Astrophysical Journal Supplement*. 2000. Vol. 129. P. 377–398.
- [76] Bychkov V. V., Liberman M. A. Thermal Instability and Pulsations of the Flame Front in White Dwarfs // *The Astrophysical Journal*. 1995. Vol. 451. p. 711.

- [77] Glazyrin S. I., Blinnikov S. I., Dolgov A. Flame fronts in Type Ia supernovae and their pulsational stability // MNRAS. 2013. Vol. 433. P. 2840–2849.
- [78] Niemeyer J. C., Hillebrandt W. Microscopic Instabilities of Nuclear Flames in Type IA Supernovae // The Astrophysical Journal. 1995. Vol. 452. p. 779.
- [79] Bychkov V., Liberman M. A. Hydrodynamic instabilities of the flame front in white dwarfs. // Astronomy and Astrophysics. 1995. Vol. 302. p. 727.
- [80] Blinnikov S. I., Sasorov P. V., Woosley S. E. Self-Acceleration of Nuclear Flames in Supernovae // Space Science Reviews. 1995. Vol. 74. P. 299–311.
- [81] Bychkov V. V., Liberman M. A. On the dynamics of a curved deflagration front // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1997. Vol. 84. P. 281–288.
- [82] Röpke F. K., Niemeyer J. C., Hillebrandt W. On the Small-Scale Stability of Thermonuclear Flames in Type Ia Supernovae // The Astrophysical Journal. 2003. Vol. 588. P. 952–961.
- [83] Bychkov V. Importance of the Darrieus-Landau instability for strongly corrugated turbulent flames // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. p. 066304.
- [84] Röpke F. K., Hillebrandt W., Niemeyer J. C. The cellular burning regime in type Ia supernova explosions. II. Flame propagation into vortical fuel // Astronomy and Astrophysics. 2004. Vol. 421. P. 783–795.
- [85] Direct Numerical Simulations of Type Ia Supernovae Flames. I. The Landau-Darrieus Instability / J. B. Bell, M. S. Day, C. A. Rendleman et al. // The Astrophysical Journal. 2004. Vol. 606. P. 1029–1038.
- [86] Röpke F. K., Hillebrandt W., Niemeyer J. C. The cellular burning regime in type Ia supernova explosions. I. Flame propagation into quiescent fuel // Astronomy and Astrophysics. 2004. Vol. 420. P. 411–422.
- [87] Mueller E., Arnett W. D. Carbon combustion supernovae - Numerical studies of the final evolution of degenerate carbon-oxygen cores // The Astrophysical Journal. 1986. Vol. 307. P. 619–643.

- [88] Direct Numerical Simulations of Type Ia Supernovae Flames. II. The Rayleigh-Taylor Instability / J. B. Bell, M. S. Day, C. A. Rendleman et al. // *The Astrophysical Journal*. 2004. Vol. 608. P. 883–906.
- [89] Three-dimensional Numerical Simulations of Rayleigh-Taylor Unstable Flames in Type Ia Supernovae / M. Zingale, S. E. Woosley, C. A. Rendleman et al. // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 632. P. 1021–1034.
- [90] The physics of flames in Type Ia supernovae / M. Zingale, S. E. Woosley, J. B. Bell et al. // *Journal of Physics Conference Series*. 2005. Vol. 16. P. 405–409.
- [91] Cabot W. H., Cook A. W. Reynolds number effects on Rayleigh-Taylor instability with possible implications for type Ia supernovae // *Nature Physics*. 2006. Vol. 2. P. 562–568.
- [92] Hicks E. P., Rosner R. Gravitationally Unstable Flames: Rayleigh-Taylor Stretching versus Turbulent Wrinkling // *The Astrophysical Journal*. 2013. Vol. 771. p. 135.
- [93] Niemeyer J. C., Hillebrandt W. Turbulent Nuclear Flames in Type IA Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1995. Vol. 452. p. 769.
- [94] Schmidt W., Niemeyer J. C., Hillebrandt W. A localised subgrid scale model for fluid dynamical simulations in astrophysics. I. Theory and numerical tests // *Astronomy and Astrophysics*. 2006. Vol. 450. P. 265–281.
- [95] A localised subgrid scale model for fluid dynamical simulations in astrophysics. II. Application to type Ia supernovae / W. Schmidt, J. C. Niemeyer, W. Hillebrandt et al. // *Astronomy and Astrophysics*. 2006. Vol. 450. P. 283–294.
- [96] Dynamics of bubbles in supernovae and turbulent vortices / V. Bychkov, M. V. Popov, A. M. Oparin et al. // *Astronomy Reports*. 2006. Vol. 50. P. 298–311.
- [97] Röpke F. K. Flame-driven Deflagration-to-Detonation Transitions in Type Ia Supernovae? // *The Astrophysical Journal*. 2007. Vol. 668. P. 1103–1108.
- [98] Woosley S. E. Type Ia Supernovae: Burning and Detonation in the Distributed Regime // *The Astrophysical Journal*. 2007. Vol. 668. P. 1109–1117.

- [99] Turbulence-Flame Interactions in Type Ia Supernovae / A. J. Aspden, J. B. Bell, M. S. Day et al. // *The Astrophysical Journal*. 2008. Vol. 689. P. 1173–1185.
- [100] Type Ia Supernovae: Calculations of Turbulent Flames Using the Linear Eddy Model / S. E. Woosley, A. R. Kerstein, V. Sankaran et al. // *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 704. P. 255–273.
- [101] Jackson A. P., Townsley D. M., Calder A. C. Power-Law Wrinkling Turbulence-Flame Interaction Model for Astrophysical Flames // arXiv:1402.4527. 2014.
- [102] Wunsch S., Woosley S. E. Convection and Off-Center Ignition in Type Ia Supernovae // *The Astrophysical Journal*. 2004. Vol. 616. P. 1102–1108.
- [103] Woosley S. E., Wunsch S., Kuhlen M. Carbon Ignition in Type Ia Supernovae: An Analytic Model // *The Astrophysical Journal*. 2004. Vol. 607. P. 921–930.
- [104] Kuhlen M., Woosley S. E., Glatzmaier G. A. Carbon Ignition in Type Ia Supernovae. II. A Three-dimensional Numerical Model // *The Astrophysical Journal*. 2006. Vol. 640. P. 407–416.
- [105] Multi-spot ignition in type Ia supernova models / F. K. Röpkе, W. Hillebrandt, J. C. Niemeyer et al. // *Astronomy and Astrophysics*. 2006. Vol. 448. P. 1–14.
- [106] Chugunov A. I., Dewitt H. E. Nuclear fusion reaction rates for strongly coupled ionic mixtures // *Phys. Rev. C*. Vol. 80. p. 014611.
- [107] Potekhin A. Y., Chabrier G. Thermonuclear fusion in dense stars. Electron screening, conductive cooling, and magnetic field effects // *Astronomy and Astrophysics*. 2012. Vol. 538. p. A115.
- [108] High-resolution simulations of convection preceding ignition in type Ia supernovae using adaptive mesh refinement / A. Nonaka, A. J. Aspden, M. Zingale et al. // *The Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 745. p. 73.
- [109] Glazyrin S. I., Blinnikov S. I. Coulomb corrections and thermo-conductivity of a dense plasma // *Journal of Physics A Mathematical General*. 2010. Vol. 43. p. 075501.
- [110] Glazyrin S. I., Sasorov P. V. Simple model of propagating flame pulsations // *MNRAS*. 2011. Vol. 416. P. 2090–2095.

- [111] Глазырин С. И. Исследование горения в сверхновых типа Ia // Письма в астрономический журнал. 2013. Т. 39. С. 249–254.
- [112] Glazyrin S. I. Turbulence model for simulation of the flame front propagation in SNIa // *Astrophysics and Space Science*. 2014. Vol. 350. P. 683–689.
- [113] Glazyrin S., Blinnikov S. Properties of nuclear flame in presupernova white dwarf // in proceedings of the conference “Nuclei in the Cosmos”, published online id. 250. 2010. URL: <http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=100>.
- [114] Blinnikov S. I., Dunina-Barkovskaya N. V., Nadyozhin D. K. Equation of State of a Fermi Gas: Approximations for Various Degrees of Relativism and Degeneracy // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 1996. Vol. 106. p. 171.
- [115] Щёлкин К. И. О теории развития детонации в газах // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23, № 7. С. 636–640.
- [116] Щёлкин К. И. Влияние шероховатости трубы на возникновение и распространение детонации в газах // ЖЭТФ. 1940. Т. 10, № 7. С. 823–827.
- [117] Солоухин Р. И. Переход горения в детонацию в газах // ПМТФ. 1961. № 4. С. 128–132.
- [118] Oppenheim A. K., Soloukhin R. I. Experiments in Gasdynamics of Explosions // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1973. Vol. 5. P. 31–58.
- [119] О возникновении детонации в неравномерно нагретом газе / Я. Б. Зельдович, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе [и др.] // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1970. № 2. С. 76–84.
- [120] Ландау Л. Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 240–244.
- [121] Гостинцев Ю. А., Истратов А. Г., Шуленин Ю. В. Автомодельный режим распространения свободного турбулентного пламени в перемешанных газовых смесях // Физика горения и взрыва. 1988. № 5. С. 63–70.
- [122] Jones M. D., Ceperley D. M. Crystallization of the One-Component Plasma at Finite Temperature // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 76. P. 4572–4575.

- [123] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
- [124] Urpin V. A., Yakovlev D. G. Thermal Conductivity due to Collisions Between Electrons in a Degenerate Relativistic Electron Gas // *Soviet Astronomy*. 1980. Vol. 24. p. 126.
- [125] Займан Дж. Электроны и фононы. Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.
- [126] Yakovlev D. G., Urpin V. A. Thermal and Electrical Conductivity in White Dwarfs and Neutron Stars // *Soviet Astronomy*. 1980. Vol. 24. p. 303.
- [127] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [128] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [129] Caughlan G. R., Fowler W. A. Thermonuclear Reaction Rates V // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. 1988. Vol. 40. p. 283.
- [130] APROX13 alpha-chain reaction network. URL: http://cococubed.asu.edu/code_pages/burn_helium.shtml.
- [131] Salpeter E. E., van Horn H. M. Nuclear Reaction Rates at High Densities // *The Astrophysical Journal*. 1969. Vol. 155. p. 183.
- [132] Dewitt H. E., Graboske H. C., Cooper M. S. Screening Factors for Nuclear Reactions. I. General Theory // *The Astrophysical Journal*. 1973. Vol. 181. P. 439–456.
- [133] Chabrier G., Potekhin A. Y. Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 4941–4949.
- [134] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, часть 1. М.: Наука, 1976.
- [135] Бисноватый-Коган Г. С. Физические вопросы теории звёздной эволюции. М.: Наука, 1989.
- [136] Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
- [137] Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.

- [138] Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович [и др.]. М.: Наука, 1980.
- [139] Williams F. A. *Combustion Theory*. Benjamin/Cummings Publishing Company, 1985.
- [140] Bayliss A., Matkowsky B. J. Two Routes to Chaos in Condensed Phase Combustion // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1990. Vol. 50. P. 437–459.
- [141] Clavin P. Premixed combustion and gasdynamics // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1994. Vol. 26. P. 321–352.
- [142] Нестационарное распространение пламени / под ред. Дж. Г. Маркштейна. М.: Мир, 1968.
- [143] Petersen R. E., Emmons H. W. Stability of Laminar Flames // *Physics of Fluids*. 1961. Vol. 4. P. 456–464.
- [144] Зельдович Я. Б. Об одном эффекте, стабилизирующем искривленный фронт ламинарного пламени // *ПМТФ*. 1966. № 1. С. 273–302.
- [145] Creta F., Fogla N., Matalon M. Turbulent propagation of premixed flames in the presence of Darrieus-Landau instability // *Combustion Theory Modelling*. 2011. Vol. 15. P. 267–298.
- [146] Garcia-Senz D., Bravo E., Serichol N. A Particle Code for Deflagrations in White Dwarfs. I. Numerical Techniques // *The Astrophysical Journal Supplement*. 1998. Vol. 115. p. 119.
- [147] Valiev D. The Role of Landau-Darrieus Instability in Flame Dynamics and Deflagration-to-Detonation Transition. Ph.D. thesis: School of Industrial Engineering and Management, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. 2007.
- [148] Smiljanovski V., Moser V., Klein R. A capturing - tracking hybrid scheme for deflagration discontinuities // *Combustion Theory Modelling*. 1997. Vol. 1. P. 183–215.
- [149] Kurganov A., Tadmor E. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations // *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 160. P. 241–282.

- [150] Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, 1999.
- [151] Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws: Tech. Rep.: CR-97-206253: NASA, 1997.
- [152] Zhang R., Zhang M., Shu C.-W. On the Order of Accuracy and Numerical Performance of Two Classes of Finite Volume WENO Schemes // Communications in Computational Physics. 2010. Vol. 9. p. 807.
- [153] Flame propagation in tubes: hydrodynamics and stability / Y. B. Zeldovich, A. G. Istratov, N. I. Kidin et al. // Combustion Science and Technology. 1980. Vol. 24. P. 1–13.
- [154] Studying the influence of turbulent mixing on thermonuclear burning regimes during X-ray bursts of neutron stars using the K- ϵ model / V. A. Simonenko, D. A. Gryaznykh, N. G. Karlykhanov et al. // Astronomy Letters. 2007. Vol. 33. P. 80–92.
- [155] Rayleigh, Lord. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proceedings of the London Mathematical Society. 1883. Vol. 14. P. 170–177.
- [156] Taylor G. The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I // Royal Society of London Proceedings Series A. 1950. Vol. 201. P. 192–196.
- [157] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press, 1961.
- [158] Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сон Э. Е. Гидродинамика перемешивания. М.: Изд-во МФТИ, 1999.
- [159] Jones W. P., Launder B. E. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 301–314.
- [160] Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания сжимаемых сред. Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009.

- [161] Turbulence transport equations for variable-density turbulence and their relationship to two-field models: Tech. Rep.: LA-12303-MS / D. Besnard, F. Harlow, R. Rauenzahn et al.: Los Alamos, 1992.
- [162] Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. с. 207.
- [163] Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант k - ϵ модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // Вопросы Атомной Науки и Техники, серия Теоретическая и Прикладная Физика. 2005. № 3. с. 37.
- [164] Yakhot V., Orszag S. A. Renormalization group analysis of turbulence. I - Basic theory // Journal of Scientific Computing. 1986. Vol. 1. p. 3.
- [165] Canuto V. M., Dubovikov M. S. A dynamical model for turbulence. II. Shear-driven flows // Physics of Fluids. 1996. Vol. 8. P. 587–598.
- [166] Canuto V. M., Dubovikov M. S., Dienstfrey A. A dynamical model for turbulence. IV. Buoyancy-driven flows // Physics of Fluids. 1997. Vol. 9. P. 2118–2131.
- [167] Dimonte G., Schneider M. Density ratio dependence of Rayleigh-Taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories // Physics of Fluids. 2000. Vol. 12. P. 304–321.
- [168] Browand F. K., Latigo B. O. Growth of the two-dimensional mixing layer from a turbulent and nonturbulent boundary layer // Physics of Fluids. 1979. Vol. 22. P. 1011–1019.
- [169] Yakhot V. Propagation Velocity of Premixed Turbulent Flames // Combustion Science and Technology. 1988. Vol. 60. P. 191–214.
- [170] Kerstein A. R. Simple Derivation of Yakhot's Turbulent Premixed Flamespeed Formula // Combustion Science and Technology. 1988. Vol. 60. P. 163–165.
- [171] Timmes F. X., Swesty F. D. The Accuracy, Consistency, and Speed of an Electron-Positron Equation of State Based on Table Interpolation of the Helmholtz Free Energy // The Astrophysical Journal Supplement. 2000. Vol. 126. P. 501–516.