

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова — начальник управления научной политики и организации научных исследований доктор физико-математических наук, профессор



А.А.Федянин

\_\_\_\_\_ 2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ  
о диссертационной работе Александры Сергеевны АНОХИНОЙ  
«Приложение  $\mathcal{R}$ -матричных методов к вычислению топологически инвариантных наблюдаемых в квантовой теории поля»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация Александры Сергеевны Анохиной «Приложение  $\mathcal{R}$ -матричных методов к вычислению топологически инвариантных наблюдаемых в квантовой теории поля», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, посвящена развитию подходов к вычислению топологических инвариантов методами квантовой теории поля.

Текст диссертации изложен на 156 страницах и состоит из семи разделов, в которых первый — Введение, шестой — Заключение и седьмой — Благодарности, а также списка литературы и четырех приложений. Работа сопровождается 21 иллюстрацией и семью таблицами. Список цитированной литературы содержит 138 наименований. Работа носит теоретический характер.

Тема диссертации находится на стыке двух дисциплин — квантовой теории поля и топологии. История знает немало примеров, когда физические теории не только являются источником постановок математических задач, но и приводят

к решению проблем, изначально поставленных математиками. Топология является тем разделом математики, взаимодействие которого с физикой интенсивно идет в обе стороны. Проникновение в топологию формализма статистической физики и квантовой теории поля произвело в 1980-х годах настоящую революцию в области, называемой маломерной топологией, и, в частности, в теории узлов.

Так, открытие В.Джонсом полиномиального инварианта и его запись в виде статистической суммы, предложенная Л.Кауффманом, привели к доказательству старых гипотез П.Тейта, дающих эффективную классификацию альтернированных узлов (Л.Кауффман, К.Мурасуги, У.Менэско, М.Тистлетуэйт). Наблюдение, по-видимому, принадлежащее В.Тураеву, о связи решений уравнения Янга–Бакстера с представлениями групп кос инициировало построение обширного класса так называемых квантовогрупповых (или просто квантовых) инвариантов узлов и трехмерных многообразий, связанных с представлениями квантовых групп. Первое доказательство интегрируемости весовых систем до инвариантов конечного порядка было получено Д.Бар-Натаном, С.Аксельродом и И.Зингером, исходя из комбинаторики пертурбативной теории Черна–Саймонса. Другое доказательство было дано М.Концевичем с помощью интегрирования уравнений Книжника–Замолодчикова.

Определение или построение каких-либо топологических инвариантов само по себе еще недостаточно для решения топологических задач, помимо этого принципиально важно иметь возможность практического их вычисления. Многие инварианты содержат в своем определении суммы, количество слагаемых в которых экспоненциально растет с увеличением сложности рассматриваемого объекта. Это относится, в частности, ко всем квантовогрупповым топологическим инвариантам и затрудняет их вычисление для узлов с не малым числом пересечений в проекции на плоскость.

В диссертации А.С.Анохиной изучается так называемый многочлен  $\text{Homfly}$  и его обобщения — крашенные многочлены  $\text{Homfly}$ . Это квантовые инварианты, которые могут быть построены по представлениям квантовых групп  $SU(N)$ . Непосредственное вычисление их, исходя из определения, представляет большие трудности из-за необходимости перемножать матрицы огромных размеров. Особенно это относится к крашеным многочленам  $\text{Homfly}$ , которые в то же время значительно информативнее, чем простой  $\text{Homfly}$ .

Для преодоления этих трудностей изучается структура используемых в конструкции представлений квантовой группы. Формально требуется проводить вычисления в тензорном произведении представлений, отвечающим цветам нитей, но прямое вычисление можно значительно упростить, раскладывая эти произведения на неприводимые представления и проводя вычисления отдельно в каждом из них, а затем учитывая кратность его вхождения. При этом для получения инварианта зацепления, представленного замкнутой косой, кроме вычисления действия косы еще нужна «подкрутка», которая в каждом неприводимом представлении действует умножением на свою константу.

Такая процедура вычисления квантовых инвариантов называется разложением по характерам. Для того, чтобы сделать ее эффективной, нужно уметь вычислять коэффициенты разложения. В диссертации А.С.Анохиной предложен новый способ вычисления этих коэффициентов для многочлена  $\text{Homfly}$  с помощью перебора некоторых путей на соответствующем графе Юнга. Этот результат представляет основное содержание третьего раздела (первый раздел — Введение — посвящен обзору известных фактов, а второй содержит подготовительный материал). Этот способ открывает новые возможности по вычислению многочлена  $\text{Homfly}$  для узлов большой сложности. Эффективность достигается за счет использования комбинаторных свойств соответствующих представлений.

В следующем разделе эти результаты расширяются на крапчатые многочлены  $\text{Homfly}$  с помощью так называемой процедуры каблирования. Эффективность процедуры демонстрируется на ряде примеров.

В пятом разделе на основании разбора простых случаев формулируется интересная гипотеза, которая в случае ее подтверждения позволила бы сделать более эффективным вычисление более общего инварианта, многочлена Хованова-Рожанского.

Приложения в конце текста содержат результаты вычислений, обсуждаемых в основном тексте.

Диссертация А.С.Анохиной представляет собой законченное научное исследование, которое вносит существенный вклад в развитие  $R$ -матричных методов вычисления топологических инвариантов. Работа выполнена на высоком уровне, эффективность предложенных методов проверена путем их реализации в виде компьютерных программ. Работа будет интересна специалистам по топологии и квантовой теории поля, работающим в ведущих научных и образовательных учреждениях: МГУ им. Ломоносова, СПбГУ, ЧелГУ, НГУ, Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте теоретической физики им. Л.Д.Ландау, Институте математики им. С.Л.Соболева и других.

Тексты диссертации и автореферата имеют некоторые недостатки технического характера, в основном связанные с небрежностью при компьютерной верстке. На титульной странице диссертации неверно указан шифр специальности, хотя сама специальность указана верно. В разделе 1.8 автореферата неверно описана структура диссертации, хотя далее более подробное описание текста диссертации правильно отражает ее структуру. Появление рис. 18 в тексте предшествует рис. 17. Обозначения для диаграмм Юнга неотличимы от ссылок на литературу, например [51]. Некоторые нумерованные ссылки ведут не туда, куда следует. Например, на странице 16, 4-я строка сверху под соотношениями из таб. 2, 1, видимо, подразумеваются соотношения из таб. 3. На той же странице, сразу после формулы (1.16) стоит ссылка на оператор (1.18), но имеется в виду (1.16). На странице 36 2-я строка сверху отсылает к рис. 2.2, но такого рисунка в тексте нет, есть формула (2.2). Есть ряд опечаток, некоторые из которых носят повторяющийся характер, например, отсутствие пробела после

«Черна–Саймонса».

В ряде случаев ссылки на литературу ведут не на первоисточники, а на более поздние обзоры или учебную литературу.

Указанные недостатки не относятся к содержательной части работы и не умаляют ее значимость. Диссертация А.С.Анохиной удовлетворяет всем современным требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук и закрепленным в «Положении о присуждении ученых степеней». Ее автор, А.С.Анохина, заслуживает присуждения ей указанной степени.

Отзыв на диссертацию А.С.Анохиной рассмотрен и утвержден на заседании кафедры высшей геометрии и топологии 20 ноября 2015 года, протокол №6.

Профессор кафедры высшей  
геометрии и топологии  
д.ф.-м.н., доцент



И.А.Дынников

Зам. зав. кафедрой высшей  
геометрии и топологии  
к.ф.-м.н.



Д.В.Миллионщиков

Зам. декана механико-математического  
ф-та МГУ по научной работе  
д.ф.-м.н., профессор



И.Н.Сергеев