



**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ"
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ**

На правах рукописи

Попов Федор Калинович

**Нестационарные явления во внешних сильных
полях**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Москва, 2016

Оглавление

1	Неравновесные системы и диаграммная техника (вместо Введения)	4
1.1	Введение	4
1.2	Диаграммная техника Келдыша-Швингера	8
1.2.1	Вычисление средних операторов в квантовой механике	8
1.2.2	Пропагаторы в нестационарном случае	10
1.2.3	Физический смысл пропагаторов	14
1.3	Представление в виде интеграла по траекториям	16
1.4	Вычисление петлевых поправок в теории скалярного поля	20
1.4.1	Однопетлевая поправка к пропагаторам	20
1.4.2	Двухпетлевая поправка	23
1.5	Вывод кинетического уравнения	30
1.5.1	Вывод через уравнения Дайсона-Швингера	30
1.5.2	Операторный метод	34
1.6	О важности выбора правильного основного состояния	36
1.7	Цели и задачи диссертационного исследования	39
1.8	Результаты, выносимые на защиту диссертации	40
1.9	Содержание диссертации	41
1.10	Публикации по теме диссертации	44
2	Нестационарные процессы в пространстве де-Ситтера	45
2.1	Пространство де-Ситтера	45
2.1.1	Диаграмма Пенроуза для пространства де-Ситтера	48
2.2	Свободное скалярное поле в пространстве де-Ситтера	49
2.3	Корреляционные функции в пространстве де-Ситтера	53

2.4	Инвариантность петлевых поправок относительно группы изометрий пространства де-Ситтера	56
2.5	Петлевые поправки в расширяющейся Пуанкаре карте	59
2.5.1	Петлевые поправки к пропагатору Келдыша	60
2.5.2	Поправки к вершине	63
2.5.3	Однопетлевая поправка в сжимающейся Пуанкаре карте	64
2.6	Суммирование лидирующих инфракрасных вкладов во всех порядках теории возмущений	64
2.6.1	Решение кинетического уравнения	66
3	Рождение частиц электрическим полем	69
3.1	Введение	69
3.2	Вычисление $\langle \text{out} \text{in} \rangle$	70
3.3	Общее обсуждение скалярной квантовой электродинамики на фоне внешнего электромагнитного поля	72
3.4	Постоянное электрическое поле в темпоральной калибровке	73
3.4.1	Вычисление тока в древесном приближении	75
3.4.2	Однопетлевые поправки	77
3.4.3	Однопетлевая поправка к фотонному Келдышевскому пропагатору	78
3.4.4	Свойства $n_{\mu\nu}$	81
3.4.5	Однопетлевая поправка к скалярному пропагатору	82
3.4.6	Однопетлевая поправка к вершине	85
3.4.7	Суммирование лидирующих инфракрасных поправок	86
3.5	Электрическое поле в пространственной калибровке	87
3.5.1	Однопетлевая поправка	89
3.5.2	Поправки к пропагатору Келдыша фотонов	90
3.5.3	Однопетлевые поправки к скалярному пропагатору Келдыша	92
3.6	Петлевые поправки к вычислению тока	93
4	Петлевые поправки к излучению Хокинга	96
4.1	Постановка задачи	96
4.2	Внешнее гравитационное поле	98
4.3	Свободные гармоники	101

4.3.1	Ин-гармоники до начала коллапса	103
4.3.2	Ин-гармоники в течение последней стадии коллапса	106
4.4	Излучение Хокинга	109
4.5	Петлевые поправки и секулярный рост	112
5	Заключение	117

Глава 1

Неравновесные системы и диаграммная техника (вместо Введения)

1.1 Введение

Обычно в квантовой теории поля рассматриваются замкнутые системы. Это означает, что нет внешнего поля, которое может менять параметры системы. Однако некоторые физические задачи не могут быть рассмотрены в данной парадигме из-за того, что какую-то из подсистем невозможно или сложно учесть. Например, если мы рассмотрим обычную квантовую теорию скалярного поля с гравитацией, наши попытки рассмотреть эту систему замкнуто обречены на провал, так как теория квантовой гравитации еще не построена и поэтому мы вынуждены рассматривать гравитацию как фоновое поле. Так же если рассмотреть квантовую электродинамику, в которой электромагнитное поле находится в когерентном состоянии, в виде постоянного электрического поля, мы тоже ничего не сможем посчитать, так как в данном случае, как мы это позже увидим, основное состояние для полей бозонов или фермионов в результате эволюции выходит за пределы пространства Фока. Оказывается, что в таких ситуациях обычные методы, которые используются в физике высоких энергий, не работают, так как их основные принципы основаны на условии стационарности и ограниченности снизу спектра гамильтониана. Также обычная интуиция перестает работать, ибо во внешних полях перестают выполняться законы сохранения энергии и импульса, так как данные величины могут

уноситься внешним полем. Поэтому нужно разрабатывать новые методы для работы с такими задачами.

Для таких случаев в физике конденсированных состояний уже был разработан подход [14],[16] аналогичный Фейнмановской диаграммной технике. Он принадлежит Джулиану Швингеру, который разработал его в 1961 году [1]. В последствии данный подход усовершенствовал Л.В. Келдыш в 1964 году [2]. Большим преимуществом этой техники является то, что она достаточно общая. По ней можно вычислять корреляторы разного плана. Не только возникающие при усреднении по основному состоянию, но и вообще по любому состоянию Гильбертова пространства \mathcal{H} . При этом из-за достаточно большой обширности её применения, данная техника является очень сложной. Количество диаграмм увеличивается в экспоненциальное число раз по сравнению с обычной Фейнмановской диаграммной техникой, а отсутствие фурье-разложения по времени и пространству влечет за собой громоздкость формул.

В основном мы будем изучать поведение квантовой теории скалярного поля на фоне пространства де-Ситтера, постоянного электрического поля и гравитационного коллапса. Но вначале стоит обсудить, что мы ожидаем получить когда нет никакого внешнего поля. Для этого мы рассмотрим систему нерелятивистских фермионов без взаимодействия, так как в данном случае можно все понять при помощи принципа Паули и квазиклассических рассуждений. Сейчас мы обсудим вывод кинетического уравнения. Ниже мы увидим какое отношение оно имеет к особенностям квантовой теории поля на фоне внешнего поля.

В квазиклассическом приближении динамику системы можно описать при помощи функции распределения $n(\vec{p}, \vec{r}, t)$, считая что $n(\vec{p}, \vec{r}, t)$ как функция координат меняется значительно только на масштабах много больших чем де-Бройлевская длина волны $\lambda_b = 1/|\vec{p}|$. Если никакого взаимодействия нет, то заселенность уровней энергий может меняться только за счет того, что фермионы будут двигаться и менять тем самым свое положение. Следовательно $n(\vec{p}, \vec{r}, t)$ должна удовлетворять соотношению: $n(\vec{p}, \vec{r}, t) = n(\vec{p}, \vec{r} - \vec{v}[\vec{p}](t - t_0), t_0)$. Продифференцировав данное уравнение по времени t мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{p}, \vec{r}, t) + \vec{v}[\vec{p}] \frac{\partial}{\partial \vec{r}} n(\vec{p}, \vec{r}, t) = 0. \quad (1.1)$$

В математической физике данное уравнение называется уравнением переноса. Те-

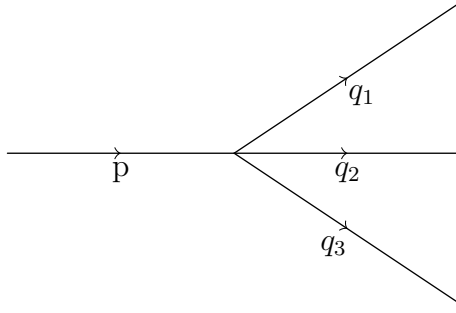


Рис. 1.1: Распад частицы с импульсом p

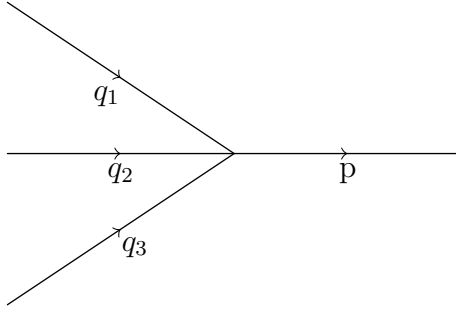


Рис. 1.2: Рождение частицы с импульсом p

теперь добавим взаимодействие к теории. Для примера возьмем четырехвершинное взаимодействие (хотя оно является неперенормированным взаимодействием, но пригодно для эффективного описания при низких энергиях). Тогда за счет взаимодействия может произойти изменение $n(\vec{p}, \vec{r}, t)$. Из-за этого в правой части уравнения (1.1) могут возникнуть члены отвечающие за изменения функции распределения за счет индуцированных процессов распада и рождения частиц с импульсом p (см. рис (1.1) и (1.2)). Хотя такие процессы и запрещены для массивных релятивистских фермионов, но для произвольного закона дисперсии данные процессы могут происходить. Обозначим сечения этих процессов как $\sigma_{q_1+q_2+q_3 \rightarrow p}$ и $\sigma_{p \rightarrow q_1+q_2+q_3}$, которые ввиду унитарности равны. Тогда темп рождения частиц J_{creat} с импульсом \vec{p} за счет данного процесса пропорционален сечению и количеству частиц с импульсом q_1, q_2, q_3 в данной точке пространства и времени $J_{\text{creat}} \propto \sigma_{q_1+q_2+q_3 \rightarrow p} n_{q_1} n_{q_2} n_{q_3}$. Также нужно учесть принцип Паули, запрещающий двум частицам находится в одном квантовом состоянии. Это даст дополнительный фактор $(1 - n_p)$. Аналогично должен быть учтен и процесс распада, который будет пропорционален количеству частиц на уровне n_p и опять ввиду принципа Паули $\prod_{i=1}^3 (1 - n_{q_i})$. В итоге мы должны модифицировать кинетическое уравнение, учтя все остальные возможные

процессы рассеяния, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(\vec{p}, \vec{r}, t) + \vec{v} \frac{d}{d\vec{r}}n(\vec{p}, \vec{r}, t) &= \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \times \\ &\times \left\{ \delta^{(4)}(p + q_1 - q_2 - q_3) \sigma_{p+q_1 \rightarrow q_2+q_3} [(1 - n_p)(1 - n_{q_1})n_{q_2}n_{q_3} - n_p n_{q_1} (1 - n_{q_2})(1 - n_{q_3})] + \right. \\ &\left. + \delta^{(4)}(p - q_1 - q_2 - q_3) \sigma_{p \rightarrow q_1+q_2+q_3} [(1 - n_p)n_{q_1}n_{q_2}n_{q_3} - n_p (1 - n_{q_1})(1 - n_{q_2})(1 - n_{q_3})] \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Где мы учли также наличие законов сохранения энергии и импульса. Ещё может появиться член, который соответствует рождению частиц внешним полем, мы столкнемся с такой ситуацией ниже. В данном случае из-за наличия закона сохранения энергии этот член запрещен и мы его не выписываем.

Аналогичным образом можно вывести кинетическое уравнение и для бозонов. В данном случае нужно учесть эффект противоположный принципу Паули. Это соответствует тому, что частицы перейдут в состояние с большим количеством частиц с большей вероятностью. Т.е. нужно заменить выражение $(1 - n_p)$ на $(1 + n_p)$. Тогда мы получим кинетическое уравнение для бозонов.

Стационарным решением уравнения (1.2), как легко заметить, является распределение Ферми-Дирака. Действительно, подставим, например, решение $n(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{1}{1 + \exp(\omega(p)/T)}$ в член кинетического уравнения, отвечающий за рассеяние частиц:

$$\begin{aligned} \delta(\omega(p) + \omega(q_1) - \omega(q_2) - \omega(q_3)) [(1 - n_p)(1 - n_{q_1})n_{q_2}n_{q_3} - n_p n_{q_1} (1 - n_{q_2})(1 - n_{q_3})] = \\ \frac{\delta(\omega(p) + \omega(q_1) - \omega(q_2) - \omega(q_3)) \left[\exp\left(\frac{\omega(p) + \omega(q_1)}{T}\right) - \exp\left(\frac{\omega(q_2) + \omega(q_3)}{T}\right) \right]}{\left(1 + \exp\left(\frac{\omega(p)}{T}\right)\right) \left(1 + \exp\left(\frac{\omega(q_1)}{T}\right)\right) \left(1 + \exp\left(\frac{\omega(q_2)}{T}\right)\right) \left(1 + \exp\left(\frac{\omega(q_3)}{T}\right)\right)} = 0, \end{aligned}$$

ввиду закона сохранения энергии числитель зануляется. Аналогично зануляются остальные члены правой части уравнения (1.2), а левая часть зануляется ввиду стационарности и пространственной однородности решения. Для случае статистики Бозе-Эйнштейна аналогично можно проверить, что решение имеет вид $n(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{1}{\exp(\omega(p)/T) - 1}$.

Тогда на основе развитой интуиции мы ожидаем получить аналогичные уравнения и в присутствии внешнего поля. Но так как в данной ситуации нет закона сохранения энергии, то в кинетическое уравнение следует добавить, например, член ответственный за рождение частиц внешним полем. И это не все усложнения, как мы увидим ниже.

Оказывается, что описанное выше кинетическое уравнение может быть получено из системы уравнений Дайсона-Швингера. В данном контексте кинетическое уравнение появляется как способ суммирования лидирующих инфракрасных поправок идущих со всех высших петель и напоминает метод ренормализационной группы. Как мы увидим в дальнейшем, данное уравнение является обобщением кинетического уравнения Больцмана, так как кроме заселенности уровней в уравнение, которое получается в общем случае, входит так называемое аномальное квантовое среднее, которое определяет насколько состояние отличается от чистого фокковского состояния системы в данный момент времени.

1.2 Диаграммная техника Келдыша-Швингера

1.2.1 Вычисление средних операторов в квантовой механике

В квантовой теории поля обычно вычисляются средние операторов по основному состоянию свободного гамильтониана. Мы попытаемся обобщить эту задачу — мы тоже будем вычислять среднее некоторого оператора \mathcal{O} по произвольному состоянию $|\Psi\rangle$ в момент времени t , исходя из того, что нам известно это среднее в начальный момент времени t_0 . Нас интересует, как среднее этого оператора зависит от времени. Как указано в прошлом разделе, мы будем везде предполагать, что гамильтониан явно зависит от времени. Поэтому, чтобы проделать эти вычисления, мы должны начать с основных принципов квантовой теории.

Первый принцип гласит, что существует унитарный оператор $U(t, t_0)$ который осуществляет эволюцию состояний, т.е. по состоянию в момент времени t_0 определяет состояние системы в момент времени t . Если мы знаем этот оператор явно, то задача решена и среднее оператора в момент времени t определяется следующим образом:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{t_0}(t) = \langle \Psi | U^\dagger(t, t_0) \mathcal{O} U(t, t_0) | \Psi \rangle. \quad (1.3)$$

Второй принцип гласит, что унитарный оператор эволюции определяется гамильтонианом $H(t)$. Для нахождения оператора эволюции приходится решать уравнение Шредингера $i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle$, которое обычно пишется на состояния, но может быть переписано для оператора эволюции. Действительно, для любого

начального состояния $|\Psi_0\rangle$ должно выполняться уравнение Шредингера:

$$|\Psi\rangle(t) = U(t, t_0) |\Psi_0\rangle \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} U_H(t, t_0) |\Psi_0\rangle = H(t) U_H(t, t_0) |\Psi_0\rangle.$$

Так как состояние $|\Psi_0\rangle$ было выбрано произвольным, мы получаем следующее операторное уравнение:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_H(t, t_0) = H(t) U_H(t, t_0), \quad \text{с начальным условием} \quad U_H(t_0, t_0) = 1.$$

Решением данного уравнения является:

$$U_H(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right\}. \quad (1.4)$$

Оператор унитарной эволюции $U_H(t, t_0)$ в формуле (1.3) можно отнести либо к состояниям $\langle \Psi | U^\dagger(t, t_0) \mathcal{O} U(t, t_0) | \Psi \rangle$ (картина Шредингера), либо к оператору $\langle \Psi | U^\dagger(t, t_0) \mathcal{O} U(t, t_0) | \Psi \rangle$ (картина Гейзенберга). В каждом из этих подходов есть свои плюсы и минусы, с одной стороны можно писать уравнения на состояния, которые являются линейными вариационными уравнениями, с другой стороны можно писать уравнения на операторы, которые по принципу Эренфеста будут обычными уравнениями движения, получающимся в классической механике, в которых все величины заменены на соответствующие операторы. К сожалению, такие уравнения решаются только в исключительных случаях. Эти два подхода можно совместить при помощи так называемого представления Дирака или взаимодействия, которое обычно используется в квантовой теории поля. Скажем, что наш гамильтониан можно разбить на две части $H = H_0 + V$, где H_0 - “свободный” гамильтониан (в котором мы знаем спектр, собственные вектора, пропагаторы и т.д. и т.п.), а V - оператор взаимодействия. В представлении взаимодействия операторы эволюционируют под действием “свободного” гамильтониана, а состояния из-за взаимодействия. Тогда можно найти, что среднее оператора (1.3) можно вычислять следующим образом (вывод можно посмотреть в любом учебнике по квантовой теории поля, например, [3]):

$$U_I(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t V_{H_0}(\tau) d\tau \right\}, \quad \text{где} \quad V_{H_0}(\tau) = U_{H_0}^\dagger(\tau, t_0) V(\tau) U_{H_0}(\tau, t_0)$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{t_0}(t) = \langle \Psi | U_I^\dagger(\infty, t_0) T [\mathcal{O}_{H_0}(t) U_I(\infty, t_0)] | \Psi \rangle, \quad (1.5)$$

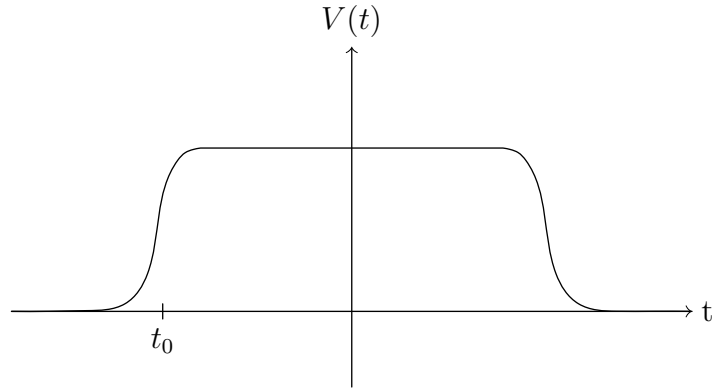


Рис. 1.3: Потенциал адиабатично включается после момента времени t_0 и адиабатично выключается в будущем.

здесь $\mathcal{O}_{H_0}(\tau) = U_{H_0}^\dagger(\tau, t_0)\mathcal{O}U_{H_0}(\tau, t_0)$. Мы будем считать в дальнейшем что все операторы эволюционируют при помощи свободного гамильтониана, а оператор эволюции $U_I(t, t_0)$ определяется через $V_{H_0}(\tau)$ по формуле (1.5).

Давайте теперь сформулируем нашу задачу немного по другому. Пусть потенциал $V(t)$ адиабатически включился после t_0 и адиабатически выключился в будущем (см. рис (1.3)), а состояние было определено в бесконечном прошлом. До того, как включилось взаимодействие, состояние в картине Дирака не меняется, а операторы поля эволюционирует по свободному гамильтониану. После включения потенциала состояние начало меняться и происходит вся динамика. Естественно спросить как будет зависеть среднее (1.5) от t_0 . Можно ли взять предел, когда взаимодействие было включено в бесконечном прошлом $t_0 \rightarrow -\infty$? Данный вопрос мы будем рассматривать как в рамках теории возмущения так и непертурбативным образом.

1.2.2 Пропагаторы в нестационарном случае

Давайте на время опустим вопрос обсуждавшийся в предыдущем разделе и уведем момент включения взаимодействия в бесконечное прошлое $t_0 = -\infty$. Рассмотрим обычную квантовую теорию поля (стационарную и с ограниченным снизу гамильтонианом), в качестве примера возьмем квантовую теорию скалярного поля в пространстве Минковского с взаимодействием $\lambda\phi^4$:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right], \quad (1.6)$$

где λ - константа взаимодействия. У такой системы есть основное состояние $|\text{vac}\rangle$, по которому мы и будем вычислять корреляторы. Из гипотезы Гелл-Манна-Лоу

следует следующее утверждение для оператора эволюции $S = U(\infty, -\infty)$:

$$S |\text{vac}\rangle = e^{iL} |\text{vac}\rangle, \quad e^{iL} = \langle \text{vac} | S | \text{vac} \rangle, \quad (1.7)$$

где L – действительное число.

Тогда средние оператора $\mathcal{O}(t)$ можно вычислять следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle (t) &= \langle \text{vac} | S^\dagger T [\mathcal{O}(t) S] | \text{vac} \rangle = e^{-iL} \langle \text{vac} | T [\mathcal{O}(t) S] | \text{vac} \rangle = \\ &= \frac{\langle \text{vac} | T [\mathcal{O}(t) S] | \text{vac} \rangle}{\langle \text{vac} | S | \text{vac} \rangle}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Этот трюк впоследствии упрощает вычисления, ибо сводит все к вычислению только T -упорядоченных средних. Далее при выводе Фейнмановской диаграммной техники раскладывают оператор эволюции и вычисляют полученные средние по теореме Вика (которые могут быть представлены в графическом виде).

Однако данный прием во многих случаях не работает, ибо утверждение гипотезы Гелл-Манна-Лоу верно только для основного состояния и требует стационарности и ограниченности снизу гамильтониана. Поэтому нам придется использовать формулу (1.5) без упрощений и раскладывать одновременно и S^\dagger и S , что неизбежно приведет к появлению дополнительных пропагаторов.

Чтобы показать как этот прием работает, возьмем в качестве оператора T -упорядоченный двухточечный коррелятор полей $\mathcal{O} = T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2)$. Подставляя данный оператор в формулу (1.8) и раскладывая оператор эволюции до первого порядка по λ , мы получаем:

$$\begin{aligned} G^{--}(x, t_1, y, t_2) &= \langle \Psi | T\phi_H(x, t_1)\phi_H(y, t_2) | \Psi \rangle = \\ &= \langle \Psi | \bar{T} e^{i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} T \left[\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \right] | \Psi \rangle = \\ &= \underbrace{\langle \Psi | T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle}_{G_0^{--}} - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \langle \Psi | T \left[\phi(x, t_1)\phi(y, t_2)\phi^4(z) \right] | \Psi \rangle + \\ &\quad + i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle \Psi | \bar{T}\phi^4(z) T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где \bar{T} – анти- T упорядочение. Первый член представляет собой пропагатор из свободной теории поля, который предполагается известным. Второй член также появляется в Фейнмановской диаграммной технике и может быть расписан через T -упорядоченную свертку операторов свободной теории поля $G_0^{--}(x, t_1, y, t_2)$. Третий член представляет новое слагаемое, которое возникает в нестационарной диаграммной технике (можно увидеть, что его суть состоит в сокращении вкладов идущих от

второго члена при $z_0 > t_1, t_2$). Его тоже можно вычислить по теореме Вика, но придется ввести 3 дополнительных пропагатора, возникающих в результате сверток операторов полей ϕ идущих из различных частей формулы:

$$\begin{pmatrix} G_0^{--} & G_0^{+-} \\ G_0^{+-} & G_0^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Psi | T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle & \langle \Psi | \phi(y, t_2)\phi(x, t_1) | \Psi \rangle \\ \langle \Psi | \phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle & \langle \Psi | \bar{T}\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Знаковые индексы в обозначениях указывают откуда появился оператор поля ϕ : ”+” для анти-T-упорядоченной части и ”-” для T-упорядоченной. Легко заметить, что эти 4 пропагатора на самом деле линейно зависимы $G_0^{--} + G_0^{++} = G_0^{+-} + G_0^{-+}$. В следующих параграфах мы сделаем так называемый Келдышевский поворот к трем линейно независимым пропагаторам и обсудим их физический смысл. Используя теорему Вика, которая утверждает что в случае системы с бесконечным объемом коррелятор расщепляется на произведение парных (см. доказательство в книге [15]), мы можем расписать чему равняется последний член формулы (1.9)

$$\begin{aligned} & \langle \Psi | \bar{T}\phi^4(z)T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle = \\ & 4 \cdot 3 \langle \Psi | \overbrace{\bar{T}\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)}^{\text{---}} T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle + \\ & \quad + \langle \Psi | \overbrace{\bar{T}\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)}^{\text{---}} \overbrace{T\phi(x, t_1)\phi(y, t_2)}^{\text{---}} | \Psi \rangle = \\ & G_0^{-+}(x, t_1, \vec{z}, z_0)G_0^{++}(\vec{z}, z_0, \vec{z}, z_0)G_0^{+-}(\vec{z}, z_0, y, t_2) + \\ & \quad + G_0^{--}(x, t_1, y, t_2)G_0^{+,2}(\vec{z}, z_0, \vec{z}, z_0). \end{aligned}$$

Второй член в этом выражении сокращает петлевую диаграмму, полученную при вычислении T-упорядоченного коррелятора в выражении (1.9).

Отсюда можно выписать явно однопетлевую поправку к T-упорядоченному пропагатору:

$$\begin{aligned} G^{--}(x, t_1, y, t_2) &= G_0^{--}(x, t_1) + \\ & + i\frac{\lambda}{2} \int d^4z G_0^{-+}(x, t_1, \vec{z}, z_0)G_0^{++}(\vec{z}, z_0, \vec{z}, z_0)G_0^{-+}(\vec{z}, z_0, y, t_2) - \\ & - i\frac{\lambda}{2} \int d^4z G_0^{--}(x, t_1, \vec{z}, z_0)G_0^{--}(\vec{z}, z_0, \vec{z}, z_0)G_0^{--}(\vec{z}, z_0, y, t_2) + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Каждый член этого ряда теперь может быть представлен в графическом виде. Действительно, каждому интегралу $\pm i\lambda \int d^4z$ сопоставим вершину валентности четыре со знаком \pm , а каждому пропагатору сопоставим линию, соединяющие соответствующие вершины. К примеру, линии соединяющей вершины со знаками +, -

сопоставляется пропагатор G^{+-} :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \diagup \\ + \bullet \\ \diagdown \end{array} & \longleftrightarrow i\lambda \int d^4z, & \begin{array}{c} \diagdown \\ - \bullet \\ \diagup \end{array} & \longleftrightarrow -i\lambda \int d^4z, \\
 \\
 \begin{array}{c} +, x, t_1 \quad -, y, t_2 \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} & \longleftrightarrow & G_0^{+-}(x, t_1, y, t_2). & (1.12)
 \end{array}$$

Используя данные удобные графические обозначения легко записать формулу (1.11) в графическом виде:

$$\begin{array}{c}
 G^{--}(x, t_1, y, t_2) = \begin{array}{c} -, x, t_1 \quad -, y, t_2 \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \\
 + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ -, x, t_1 \quad +i\lambda, z \quad -, y, t_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ -, x, t_1 \quad -i\lambda, z \quad -, y, t_2 \end{array}
 \end{array}$$

Легко обобщить эту технику на случай высших порядков теории возмущений и получить следующие правила для вычисления поправок к различным функциям Грина $\langle \Psi | \bar{T}\phi(x_1, t_1) \dots T\phi(y, \tau_1) \dots | \Psi \rangle$ в теории с взаимодействием $\lambda\phi^4$:

1. Рисуются все возможные графы, в которых каждая внутренняя вершина имеет валентность четыре, а внешние один.
2. Каждой вершине приписывается знак \pm , внешним ставится знак в соответствии тому из какой части пропагатора вершина пришла: $+$ для анти-Т-упорядоченной части, $-$ для Т-упорядоченной. Внутренним приписывается произвольный знак. Такую диаграмму будем называть диаграммой со знаками.
3. В соответствии с правилами (1.12) каждой диаграмме со знаками сопоставляется формула.
4. Формулу нужно разделить на фактор симметрии диаграммы со знаками.
5. Просуммировать все формулы соответствующие диаграммам со знаками в данном порядке теории возмущений.

Заметим, что вакуумные диаграммы в каждом порядке теории возмущений сокращают друг друга. Действительно, вычисление вакуумных диаграмм соответствует вычислению среднего в котором нет вставок операторов полей, это средние

легко вычисляется $\langle \Psi | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$, т.е. никаких поправок по λ не возникает. Это и означает, что все вакуумные диаграммы сокращают друг друга в каждом порядке теории возмущений.

1.2.3 Физический смысл пропагаторов

Как указывалось в предыдущем разделе - четыре пропагатора, характеризующие каждое поле в нестационарной ситуации, на самом деле являются линейно зависимыми. Поэтому можно совершить поворот к трем линейно независимым пропагаторам

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{++} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G} = R^{-1} G R = \begin{pmatrix} 0 & G^{--} - G^{+-} \\ G^{--} - G^{-+} & G^{--} + G^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G^R \\ G^A & 2G^K \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Используя (1.10), получаем следующие выражения для пропагаторов через операторы полей $\phi(x, t)$:

$$G^K(x, t_1, y, t_2) = \frac{1}{2} \langle \Psi | \{ \phi(x, t_1), \phi(y, t_2) \} | \Psi \rangle,$$

$$G^{\frac{R}{A}} = \pm \theta(\mp \Delta t_{12}) \langle \Psi | [\phi(x, t_1), \phi(y, t_2)] | \Psi \rangle. \quad (1.14)$$

Для того чтобы понять физический смысл данных пропагаторов следует обсудить постановку задач, которые будут впоследствии обсуждаться. В основном нас будет интересовать предел больших времен при фиксированной их разнице, так что во многих формулах можно пренебречь разницей времен по сравнению с самими временами $t_1 \approx t_2 \approx \dots \approx t_i \approx t \gg |t_i - t_j|$. Тогда подставляя разложение поля ϕ по гармоникам (они в общем случае не являются плоскими волнами, но мы будем продолжать нумеровать их при помощи индекса p , который может являться не импульсом, а другим квантовым числом), получаем следующее представление для пропагатора Келдыша:

$$\phi(x, t) = \int d^3 p [a_p h_p(x, t) + a_p^\dagger \bar{h}_p(x, t)], \quad [a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta_{pp'},$$

$$G^K(x, t_1, y, t_2) \Big|_{t_1 \approx t_2 \approx t} = \int d^3 p \bar{h}_p(x, t) h_{p'}(y, t) +$$

$$\int d^3 p d^3 p' [\langle \Psi | a_p^\dagger a_{p'} | \Psi \rangle (t) \bar{h}_p(x, t) h_{p'}(y, t) + \langle \Psi | a_p a_{p'} | \Psi \rangle (t) h_p(x, t) h_{p'}(y, t)] + \text{h.c.} \quad (1.15)$$

Все возникающие средние внесем в три функции $n_{pp'}(t) = \langle \Psi | a_p^\dagger a_{p'} | \Psi \rangle$, $\varkappa_{pp'}(t) = \langle \Psi | a_p a_{p'} | \Psi \rangle$ и $\varkappa_{pp'}^*(t) = \langle \Psi | a_p^\dagger a_{p'}^\dagger | \Psi \rangle$. Первая функция может быть проинтерпретирована как матрица плотности состояния, последние две являются мерой того насколько данное состояние отличается от чисто фоковского. Если $\varkappa_{pp'}(t)$, $\varkappa_{pp'}^*(t)$ и $n_{pp'}(t)$ отличны от нуля, то можно сделать преобразование Боголюбова к новым операторам рождения и уничтожения, в результате которого аномальные квантовые средние занулятся. Пример такого рода вычислений встречается при обсуждении сверхпроводимости и сверхтекучести [3]. Важным замечанием является то, что инфракрасные поправки по теории возмущений к пропагатору Келдыша тоже могут быть внесены в эти три функции и проинтерпретированы как петлевые поправки к этим функциям. Действительно, петлевое вычисление соответствует тому, что мы вставили операторы эволюций в корреляторы (1.14), тогда, раскладывая пропагатор Келдыша по гармоникам как в формуле (1.15), мы получаем в инфракрасном пределе $n_{pp'} \approx \langle \Psi | U^\dagger a_p^\dagger U(t_1, t_2) a_{p'} U | \Psi \rangle$. Это соответствует вычислению матрицы плотности для состояния, которое проэволюционировало по времени. Пример явного вычисления поправок к матрице плотности будет сделан в следующих разделах для второго порядка теории возмущений.

Аналогично можно расписать пропагатор $G_0^R(x, t_1, y, t_2)$ в древесном приближении:

$$G_0^R(x, t_1, y, t_2) = \pm 2i\theta(\mp \Delta t_{12}) \int d^3p \operatorname{Im} [h_p(x, t_1) \bar{h}_p(y, t_2)]. \quad (1.16)$$

Следует заметить, что G_0^R не зависят от выбора гармоник и состояния. Действительно, в древесном приближении коммутатор полей ϕ является c -числом и при усреднении по любому состоянию будет давать один и тот же ответ. Также легко заметить, что форма (1.16) является $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной при Боголюбовских канонических преобразованиях и следовательно не будет зависеть от выбора вакуума и гармоник. Физический смысл этих пропагаторов тоже ясен — они дают спектр частиц в квазиклассическом пределе, т.е. когда внешние поля меняются достаточно медленно по сравнению с квантовыми флуктуациями самого поля $m\tau \gg 1$, где m — характерный массовый параметр поля, а τ — характерное время изменения фона. Тогда переходя к переменным $T = \frac{t_1+t_2}{2}$, $\Delta t = t_1 - t_2$ и делая преобразование Фурье по последней переменной мы получим следующую функцию:

$$G_0^R(x, y, T, \omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\Delta t} G_0^R\left(x, T + \frac{\Delta t}{2}, y, T - \frac{\Delta t}{2}\right). \quad (1.17)$$

Полюса (1.17) будут давать спектр гамильтониана в момент T для частиц и античастиц соответственно вместе с их ширинами Γ (подробнее об этом можно прочитать в любом учебнике по квантовой теории поля или статистической физике [3]).

Обсудим какой вид могут иметь поправки к данному пропагатору. Из-за того, что диаграммная техника Келдыша является причинной, поправки к данным пропагаторам могут идти только из области времен между t_1 и t_2 . Действительно распишем однопетлевую поправку к опережающему пропагатору:

$$\begin{aligned} \Delta G^A(x, t_1, y, t_2) &= \\ &= \lambda^2 \iint dt_3 dx_3 \int dt_4 dx_4 G^A(x, t_1, x_3, t_3) \Sigma^A(x_3, t_3, x_4, t_4) G^A(x_4, t_4, y, t_2), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где Σ^A — одночастичная неприводимая диаграмма, дающая вклад в G^A . Можно показать, что $\Sigma^A(x_3, t_3, x_4, t_4)$ и $G^A(x_4, t_4, y, t_2)$ содержат функции Хэвисайда вида $\theta(t_3 - t_4)$, $\theta(t_4 - t_2)$, поэтому область интегрирования t_3 и t_4 зажата между временами t_1 и t_2 , из-за этого $\Delta_1 G^{\bar{A}}(x, t_1, y, t_2) = \mathcal{O}(\lambda^2 \Delta t)$, $\Delta t = t_1 - t_2$ и следовательно будут подавлены по сравнению с поправками к Келдышевскому пропагатору. Поэтому $G^{\bar{A}}$ мы впоследствии будем считать древесными, хотя мы будем считать, что учтены ультрафиолетовые поправки в перенормировках констант связи, полей и масс. Можно сказать, что мы будем работать с ультрафиолетово перенормированной диаграммной техникой.

Отметим, что пропагатор $G^K(x, t_1, y, t_2)$ также может получать поправки вида $\lambda^2(t_1 - t_2)$, как и в $G^{\bar{A}}(x, t_1, y, t_2)$. Это достаточно известный результат и иногда под секулярным ростом понимается именно такое поведение пропагаторов. Однако данные поправки всего лишь модифицирует спектр квазичастиц, например, $\omega_{0p} \rightarrow \omega_p + i\frac{\Gamma}{2}$. Мы такими поправки интересоваться не будем и под секулярным ростом будем понимать, что некоторые физические величины получают поправки вида $\lambda^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$, в пределе $t_1 + t_2 \rightarrow \infty$ при $t_1 - t_2 = \text{const}$.

1.3 Представление в виде интеграла по траекториям

В предыдущем параграфе мы схематично вывели Келдышевскую диаграммную технику. Мы основывались на гамильтоновом подходе к квантовой теории поля. Как известно, в случае Фейнмановском диаграммной техники часто бывает удобнее

делать вычисления основываясь на формализме функционального интеграла. Данный формализм также может быть развит и в случае техники Келдыша-Швингера [16]. Для примера мы снова возьмем скалярное поле. Данная процедура, как будет видно, легко обобщается и на случай фермионного, электромагнитного и других полей с взаимодействием. Для этого обобщим формулу (1.5) для вычисления средних, предположив что операторы могут находиться и в T -упорядоченной и в анти- T -упорядоченной части, а также будем вычислять недиагональные элементы вида $\langle \Sigma | \bar{T} [\mathcal{A} e^{i \int V_{H_0}(t) dt}] T [\mathcal{B} e^{-i \int V_{H_0}(t) dt}] | \Psi \rangle$, где \mathcal{A} и \mathcal{B} произвольные операторы, а $|\Psi\rangle, |\Sigma\rangle$ некоторые состояния. Вставим между T -упорядоченной и анти- T -упорядоченной частями полный набор состояний $|\phi\rangle$ скалярного поля

$$1 = \int \mathcal{D}\phi |\phi\rangle \langle \phi|.$$

Тогда среднее расщепляется на произведение членов вида $\langle \phi | T [\mathcal{B} e^{-i \int V_{H_0}(t) dt}] | \Psi \rangle$ и сопряженных к ним, которые в свою очередь могут быть переписаны через соответствующие интегралы по траекториям:

$$\begin{aligned} \langle \Sigma | \bar{T} [\mathcal{A}] T [\mathcal{B}] | \Psi \rangle &= \int \mathcal{D}\phi \langle \Sigma | \bar{T} [\mathcal{A} e^{i \int V_{H_0}(t) dt}] | \phi \rangle \langle \phi | T [\mathcal{B} e^{-i \int V_{H_0}(t) dt}] | \Psi \rangle = \\ &= \int \mathcal{D}\phi \int_{\Sigma}^{\phi} \mathcal{D}\phi_+ e^{-i \int_{-\infty}^{\phi} dt L[\phi_+]} \mathcal{A}_+[\phi_+] \times \int_{\Psi}^{\phi} \mathcal{D}\phi_- e^{i \int_{-\infty}^{\phi} dt L[\phi_-]} \mathcal{B}_-[\phi_-]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Где пределы интегрирования $\int_{\Psi}^{\phi} \mathcal{D}\phi$ означают какие граничные условия мы выбрали для поля ϕ , к примеру по нижнему пределу интегрирование идет с волновым функционалом $\Psi[\phi(\vec{x}, t)]$ и имеет следующий вид $\int \mathcal{D}\phi(\vec{x}, t = -\infty) \Psi[\phi(\vec{x}, t = -\infty)]$. Пусть T - наибольшее из времен, которое встречается в операторах \mathcal{A} и \mathcal{B} , тогда назовем Келдышевским контуром \mathcal{C} , контур интегрирования комплексной переменной t , которая идет от $-\infty - i\epsilon$ до $T + a - i\epsilon$, где $a > 0$ - произвольное положительное число, обходит $t = T + a$ и дальше идет от $T + a + i\epsilon$ до $-\infty + i\epsilon$, пример контура изображен на рис. (1.4). Тогда легко показать, что (1.3) можно преобразовать к следующей форме:

$$\langle \Sigma | \bar{T} [\mathcal{A}] T [\mathcal{B}] | \Psi \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int_{\mathcal{C}} dt L[\phi] \right\} \mathcal{A}_+[\phi_+] \mathcal{B}_-[\phi_-]. \quad (1.20)$$

Где знак \pm относится к тому, на каком берегу контура мы должны брать поля ϕ — сверху для $+$ или снизу для $-$ луча $(-\infty, T + a]$. Сразу заметим, что в предыдущем разделе, все вершины и операторные вставки были со знаками. И можно

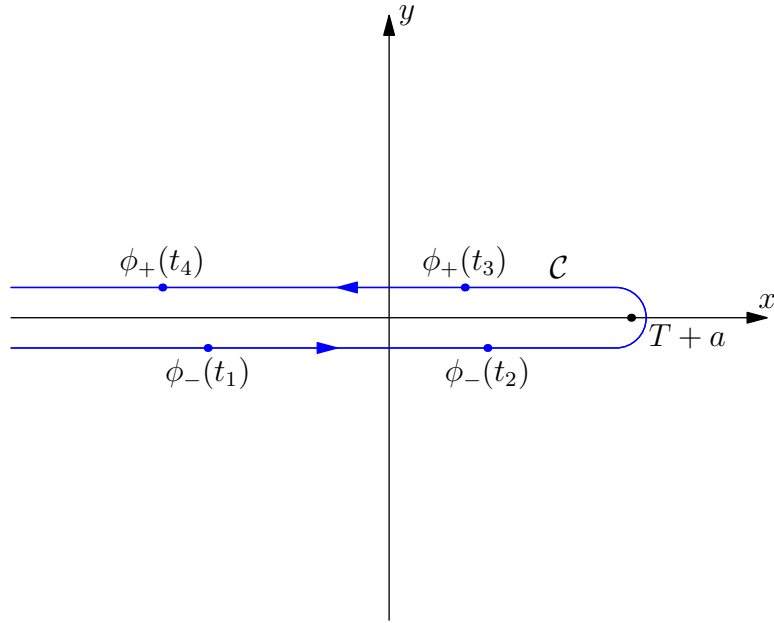


Рис. 1.4: Пример Келдышевский контур \mathcal{C} для вычисления среднего $\langle \Psi | T [\phi(t_1)\phi(t_2)] \bar{T} [\phi(t_3)\phi(t_4)] | \Psi \rangle$.

проверить, что обе знаковых нотаций находятся во взаимнооднозначном соответствии. То есть когда мы вычисляем с помощью (1.20) $\langle \Psi | \phi_+(x, t_1)\phi_+(y, t_2) | \Psi \rangle$, мы на самом деле вычисляем $G^{++}(x, t_1, y, t_2) = \langle \Psi | \bar{T} \phi(x, t_1)\phi(y, t_2) | \Psi \rangle$. Также данную процедуру несложно обобщить на случай, когда происходит усреднение по матрице плотности.

Из (1.20) можно вывести уравнения для пропагаторов $G^{\pm\mp}(x, y)$ в свободной теории поля. Пусть $\square\phi = 0$ представляет собой классическое уравнение движения для поля ϕ . Например, оператором \square является $\square = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a g^{ab}\sqrt{g}\partial_b$ в случае внешнего гравитационного поля или $\square = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$, $\nabla_a = \partial_a - ieA_a$ в случае внешнего электромагнитного поля, тогда действие может быть записано в виде $S[\phi] = -\frac{1}{2}\int d^D x \phi(x)\square\phi(x)$. Оператор \square будем в дальнейшем называть оператором Клейна-Гордона. Заметим, что интеграл от полной производной равен нулю, поэтому следующая величина равна нулю

$$0 = \int_{\Psi}^{\Sigma} \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi_+(x, t_1)} (\phi_+(y, t_2)e^{iS[\phi]}) = \int_{\Psi}^{\Sigma} \mathcal{D}\phi [\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2) - i\square_{\vec{x}, t_1}\phi_+(x, t_1)\phi_+(y, t_2)] e^{iS[\phi]}. \quad (1.21)$$

Так как это было выбрано для произвольных граничных состояний $|\Sigma\rangle$ и $|\Psi\rangle$, то

отсюда следует, что подынтегральное выражение как операторное тождество равно нулю. Тогда, усредняя это тождество по состоянию $|\Psi\rangle$, мы получаем уравнение на пропагатор:

$$\square_{\vec{x}, t_1} G^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2). \quad (1.22)$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим соотношениями:

$$\begin{aligned} \square_{\vec{x}, t_1} G^{+-}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) &= 0, & \square_{\vec{x}, t_1} G^{-+}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) &= 0 \\ \square_{\vec{x}, t_1} G^{--}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) &= -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Как объяснялось в предыдущих параграфах четыре пропагатора $G^{\pm\mp}$ линейно зависимы и можно сделать поворот Келдыша, который переводит данные пропагаторы к линейно-независимым. Последние, как мы обсудили, имеют ясный физический смысл. Поэтому было бы очень удобно иметь диаграммную технику, которая сразу же позволяет вычислять поправки именно к этим пропагаторам. Это можно сделать с помощью интеграла по траекториям (1.20). Этим выводом мы сейчас и займемся. Сделаем следующую замену переменных в (1.20), которая отличается от него (1.13) нормировкой:

$$\begin{pmatrix} \phi_{\text{cl}} \\ \phi_{\text{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[\phi_+ + \phi_-] \\ \phi_+ - \phi_- \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \phi_{\text{cl}} \\ \phi_{\text{q}} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этих терминах можно переписать действие (1.6) в формуле (1.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} S[\phi_{\text{cl}}, \phi_{\text{q}}] &= \int dt \int d^{D-1}\vec{x}\sqrt{g} \left[\frac{1}{2}\partial_a\phi_- \partial^a\phi_- - \frac{1}{2}m^2\phi_-^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_-^4 - (\phi_- \leftrightarrow \phi_+) \right] = \\ &= \int dt \int d^{D-1}\vec{x}\sqrt{g} \left[\partial_a\phi_{\text{cl}}\partial^a\phi_{\text{q}} - m^2\phi_{\text{cl}}\phi_{\text{q}} - \frac{\lambda}{6} \left(\phi_{\text{cl}}^3\phi_{\text{q}} + \frac{1}{4}\phi_{\text{q}}^3\phi_{\text{cl}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Мера интегрирования преобразуется следующим образом:

$$\int \mathcal{D}\phi_- \mathcal{D}\phi_+ \dots = \int \mathcal{D}\phi_{\text{cl}} \mathcal{D}\phi_{\text{q}} \dots \quad (1.25)$$

Тогда введем следующие средние которые будут возникать у нас при вычислении корреляторов:

$$\begin{aligned} D^K(\vec{x}, t_1, \vec{y}, y_2) &= \int \mathcal{D}\phi \exp\{iS[\phi_{\text{cl}}, \phi_{\text{q}}]\} \phi_{\text{cl}}(\vec{x}, t_1) \phi_{\text{cl}}(\vec{y}, t_2), \\ D^A(\vec{x}, t_1, \vec{y}, y_2) &= \int \mathcal{D}\phi \exp\{iS[\phi_{\text{cl}}, \phi_{\text{q}}]\} \phi_{\text{cl}}(\vec{x}, t_1) \phi_{\text{q}}(\vec{y}, t_2), \\ D^R(\vec{x}, t_1, \vec{y}, y_2) &= - \int \mathcal{D}\phi \exp\{iS[\phi_{\text{cl}}, \phi_{\text{q}}]\} \phi_{\text{q}}(\vec{x}, t_1) \phi_{\text{cl}}(\vec{y}, t_2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Они совпадают с введенными ранее пропагаторами $G^{R,A,K}$ из формулы (1.14). Тогда из лагранжиана Келдыша-Швингера (1.24) можно получить напрямую диаграммную технику (см. рис 1.5).

Используя эту диаграммную технику, вычисления очень сильно упрощаются, что мы впоследствии и увидим.

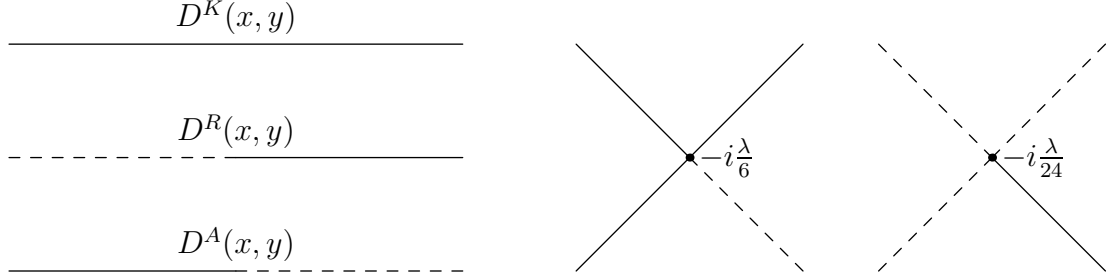


Рис. 1.5: Диаграммная техника в терминах Келдышевского, опережающего и запаздывающего пропагаторов $D^{K,R,A}$

1.4 Вычисление петлевых поправок в теории скалярного поля

1.4.1 Однопетлевая поправка к пропагаторам

После обсуждения основ диаграммной техники Келдыша-Швингера и физического смысла различных пропагаторов можно переходить к непосредственному вычислению диаграмм, появляющихся в низших порядках теории возмущений.

Будем рассматривать теорию (1.6) во внешнем поле (гравитационном или электромагнитном), которое как-то деформировало свободную теорию. Для упрощения будем считать данную деформацию пространственно однородной. Тогда разложение по гармоникам будет иметь следующий вид:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [a_p g_p(t) e^{ipx} + a_p^\dagger g_p^*(t) e^{-ipx}]. \quad (1.27)$$

Где операторы рождения и уничтожения a_p, a_p^\dagger удовлетворяют стандартной алгебре Гейзенберга $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p - q)$, а гармоника $h_p(x, t) = g_p(t) e^{ipx}$ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона:

$$[\square + m^2] h_p(x, t) = 0. \quad (1.28)$$

Оператор импульса, сопряженный полю ϕ , во внешнем однородном гравитационном поле выражается следующим образом через поле ϕ :

$$\pi(x, t) = \sqrt{g}g^{00}(t)\partial_0\phi(x, t). \quad (1.29)$$

Рассмотрим, как нужно нормировать гармоники $g_p(t)$, чтобы выполнялись одновременно канонические коммутационные соотношения квантовой механики и соотношения в алгебре Гейзенберга:

$$i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = [\phi(x, t), \pi(y, t)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{g}g^{00} [g_p\dot{g}_p^* - \dot{g}_p g_p^*] e^{ip(x-y)}. \quad (1.30)$$

Это приводит нас к следующему нормировочному условию на гармоники:

$$\sqrt{g}g^{00} (\dot{g}_p g_p^* - g_p \dot{g}_p^*) = i. \quad (1.31)$$

Мы можем переписать данную формулу для полной гармоники $h_p(x, t) = g_p(t)e^{ipx}$ следующим образом:

$$\int d^3x \sqrt{g}g^{00} [\dot{h}_p h_q^* - h_p \dot{h}_q^*] = i\delta^3(p - q). \quad (1.32)$$

И замечая, что $d^3x \sqrt{g}g^{00} = d\Sigma^0$, где Σ - есть поверхность $t = t_0$, мы можем записать условие нормировки в инвариантной форме:

$$\int d\Sigma^\mu [(\partial_\mu h_p) h_q^* - h_p (\partial_\mu h_q^*)] = i\delta^3(p - q). \quad (1.33)$$

Легко проверить, что данный интеграл не зависит от поверхности Σ . Действительно, предположим, что данная поверхность является границей некоторой области \mathcal{M} , $\Sigma = \partial\mathcal{M}$. Тогда применяя теорему Стокса можно получить

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma^\mu [(\partial_\mu h_p) h_q^* - h_p (\partial_\mu h_q^*)] &= \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^4x \nabla^\mu [(\partial_\mu h_p) h_q^* - h_p (\partial_\mu h_q^*)] = \\ &= \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^4x [m^2 h_p h_q^* - m^2 h_p h_q^*] = 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где на последнем шаге мы использовали уравнения Клейна-Гордона, которому удовлетворяют гармоники $h_p(x, t)$. Из-за пространственной однородности удобно переписать диаграммную технику Келдыша-Швингера в пространственно импульсном представлении. Действительно, пропагаторы зависят только от разницы пространственных координат $G^*(x, t_1, y, t_2) = G^*(x - y, t_1, t_2)$, поэтому можно сделать преобразование Фурье по разнице пространственных переменных пропагатора. Пропагаторы (1.10) для рассматриваемого случая тогда будут записываться в следующей

форме:

$$\begin{aligned}
G_0^{--}(p, t_1, t_2) &= \bar{g}_p(t_1)g_p(t_2)\theta(t_1 - t_2) + g_p(t_1)\bar{g}_p(t_2)\theta(t_2 - t_1), \\
G_0^{++}(p, t_1, t_2) &= \bar{g}_p(t_1)g_p(t_2)\theta(t_2 - t_1) + g_p(t_1)\bar{g}_p(t_2)\theta(t_1 - t_2), \\
G_0^{+-}(p, t_1, t_2) &= \bar{g}_p(t_1)g_p(t_2), \\
G_0^{-+}(p, t_1, t_2) &= g_p(t_1)\bar{g}_p(t_2).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Боле того, в вершине тогда можно проинтегрировать по пространственным координатам и получить закон сохранения импульса

$$\pm i\lambda \int d^3x e^{iPx} = \pm i (2\pi)^3 \lambda \delta^{(3)}(P), \tag{1.36}$$

Где P - сумма всех импульсов, которые втекают в вершину.

Первая поправка в теории $\lambda\phi^4$ выглядит как вставка массового оператора:

$$M_{\pm}^2(\vec{x}, t) = \frac{\text{loop}}{\pm, t} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} g_p(t)g_p^*(t).$$

Следовательно она не должна приводить к изменению заселенности уровней и аномальных квантовых средних. Легко проверить, что вставка этого оператора действительно перенормирует массу. Для этого просуммируем все вклады, которые дает этот оператор, при помощи уравнения Дайсона-Швингера:

$$\begin{aligned}
G_1^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) &= G_0^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) + \\
& i \int d^3\vec{z} dt_3 M^2(t_3) \left[G_0^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{z}, t_3) G_1^{++}(\vec{z}, t_3, \vec{y}, t_2) - G_0^{+-}(\vec{x}, t_1, \vec{z}, t_3) G_1^{-+}(\vec{z}, t_3, \vec{y}, t_2) \right].
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Данное уравнение удобно записать при помощи Келдышевской диаграммной техники:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\underline{\quad\quad\quad} & \underline{\quad\quad\quad} & \\
-, x, t_1 & -, y, t_2 & \\
\end{array} = \begin{array}{ccc}
\underline{\quad\quad\quad} & \underline{\quad\quad\quad} & \\
-, x, t_1 & -, y, t_2 & \\
\end{array} + \\
+i\lambda \begin{array}{ccc}
\underline{\quad\quad\quad} & \text{loop} & \underline{\quad\quad\quad} \\
-, x, t_1 & +, z & -, y, t_2
\end{array} - i\lambda \begin{array}{ccc}
\underline{\quad\quad\quad} & \text{loop} & \underline{\quad\quad\quad} \\
-, x, t_1 & -, z & -, y, t_2
\end{array}
\end{array}$$

Где жирной линией мы обозначали точные пропагаторы $G_1^{\pm\pm}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2)$.

Подействуем оператором $\square_{\vec{x}, t_1}$ на (1.37), где $\square_{\vec{x}, t_1}$ представляет собой оператор Клейна-Гордона, как в предыдущем параграфе. Используя соотношения (1.22)-(1.23) мы получаем следующие тождество:

$$\begin{aligned}
\square_{\vec{x}, t_1} G_1^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) &= i\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2) - \\
& - \int d^3\vec{z} dt_3 \delta(\vec{x} - \vec{z})\delta(t_1 - t_3) M^2(t_3) G_1^{++}(\vec{z}, t_3, \vec{y}, t_2).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

По переменным \vec{z}, t можно проинтегрировать и мы получаем:

$$[\square_{\vec{x}, t_1} + M^2(t_1)] G_1^{++}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2). \quad (1.39)$$

Это можно проинтерпретировать как перенормировку массы в уравнении на G_1^{++} $m_0^2 \rightarrow m_0^2 + M^2(t_1)$. В любом случае такой вклад не ведет к секулярному росту при $t_1 + t_2 \rightarrow \infty$. Для других пропагаторов уравнения модифицируются аналогичным образом:

$$[\square + M^2(t)] G^{\pm\mp}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) = 0, \quad (1.40)$$

$$[\square + M^2(t)] G^{--}(\vec{x}, t_1, \vec{y}, t_2) = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta(t_1 - t_2). \quad (1.41)$$

Ультрафиолетовые расходимости будут появляться и при вычислении высших поправок по теории возмущений. Используя процедуру, описанную выше, можно все расходимости просуммировать и получить, что они могут быть собраны в виде перенормировок констант связи, полей и масс. Мы же в дальнейшем будем изучать подробно проблему инфракрасных расходимостей и вкладов.

1.4.2 Двухпетлевая поправка

Посмотрим на следующий порядок теории возмущений и рассмотрим поправку к пропагатору Келдыша. Двухпетлевая диаграмма имеет следующий вид:

$$\Delta_2 G^K = \sum_{\sigma, \sigma_3, \sigma_4 = \pm} \begin{array}{c} \bullet \\ \sigma, t_1 \end{array} \begin{array}{c} \sigma_3, t_3 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \sigma_4, t_3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \sigma, t_2 \end{array} \quad (1.42)$$

Расписывая явным образом данное выражение через пропагаторы $D^{K,R,A}$, мы получаем следующую формулу для двухпетлевой поправки к пропагатору Келдыша:

$$\Delta_2 D^K(x_1, x_4) = \frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} dt_2 dt_3 dx_2 dx_3$$

$$\left[\begin{aligned} & 3 D_0^K(x_1, x_2) D_0^K(x_2, x_3) D_0^K(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) - \\ & - \frac{1}{4} D_0^K(x_1, x_2) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) - \\ & - \frac{3}{4} D_0^R(x_1, x_2) D_0^K(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) + \\ & + D_0^R(x_1, x_2) D_0^K(x_2, x_3) D_0^K(x_2, x_3) D_0^K(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) + \\ & + 3 D_0^R(x_1, x_2) D_0^K(x_2, x_3) D_0^K(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^K(x_3, x_4) - \\ & - \frac{1}{4} D_0^R(x_1, x_2) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^K(x_3, x_4) - \\ & - \frac{3}{4} D_0^R(x_1, x_2) D_0^K(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) \end{aligned} \right]. \quad (1.43)$$

Где t_0 — момент времени, после которого происходит адиабатическое включение взаимодействия $\lambda\phi^4$. Или после подстановки явных выражений для пропагаторов,

мы получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}
& \Delta_2 D^K(p, t_1, t_2) = \\
& -\frac{\lambda^2}{12} \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{g_4} dt_4 \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta^3(p + p_1 + p_2 + p_3) \\
& \left[\begin{aligned}
& (g_p(t_3) \bar{g}_p(t_1) \theta(t_3 - t_1) + g_p(t_1) \bar{g}_p(t_3) \theta(t_1 - t_3)) \\
& (g_p(t_4) \bar{g}_p(t_2) \theta(t_4 - t_2) + g_p(t_2) \bar{g}_p(t_4) \theta(t_2 - t_4)) \\
& (g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& (g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& (g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& + g_p(t_3) \bar{g}_p(t_1) g_p(t_4) \bar{g}_p(t_2) \\
& (g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& (g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& (g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& - 2(g_p(t_3) \bar{g}_p(t_1) \theta(t_3 - t_1) + g_p(t_1) \bar{g}_p(t_3) \theta(t_1 - t_3)) \\
& g_p(t_4) \bar{g}_p(t_2) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \\
& + (g_p(t_3) \bar{g}_p(t_2) \theta(t_3 - t_2) + g_p(t_2) \bar{g}_p(t_3) \theta(t_2 - t_3)) \\
& (g_p(t_4) \bar{g}_p(t_1) \theta(t_4 - t_1) + g_p(t_1) \bar{g}_p(t_4) \theta(t_1 - t_4)) \\
& (g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& (g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& (g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_4 - t_3) + g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_3 - t_4)) \\
& + g_p(t_3) \bar{g}_p(t_2) g_p(t_4) \bar{g}_p(t_1) \\
& (g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& (g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& (g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_3 - t_4) + g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_4 - t_3)) \\
& - 2(g_p(t_3) \bar{g}_p(t_2) \theta(t_3 - t_2) + g_p(t_2) \bar{g}_p(t_3) \theta(t_2 - t_3)) \\
& g_p(t_4) \bar{g}_p(t_1) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) + \text{h.c.} \end{aligned} \right]. \quad (1.44)
\end{aligned}$$

Как обсуждалось выше, данную формулу можно переписать как поправки к заселенностям уровней $n_{pp'}(t)$ и аномальным квантовым средним $\varkappa_{pp'}(t)$, $\varkappa_{pp'}^*(t)$ при

помощи следующего выражения:

$$\Delta_2 G^K(x, t, y, t) = \int d^3 p d^3 p' [\langle \Psi | a_p^\dagger a_{p'} | \Psi \rangle (t) \bar{g}_p(x, t) g_{p'}(y, t) + \langle \Psi | a_p a_{p'} | \Psi \rangle (t) g_p(x, t) g_{p'}(y, t)] + \text{h.c.}, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \text{где } n_{p,p'}(t_1, t_2) &= \langle \Psi | U(t_0, t_1) a_p^\dagger U(t_1, t_2) a_{p'} U(t_2, t_0) | \Psi \rangle, \\ \varkappa_{p,p'}(t_1, t_2) &= \langle \Psi | U(t_0, t_1) a_p U(t_1, t_2) a_{p'} U(t_2, t_0) | \Psi \rangle, \\ \varkappa_{p,p'}^*(t_1, t_2) &= \langle \Psi | U(t_0, t_1) a_p^\dagger U(t_1, t_2) a_{p'}^\dagger U(t_2, t_0) | \Psi \rangle. \end{aligned}$$

Так как по предположению система и состояние однородны по пространству, то выполняется закон сохранения импульса. Тогда можно заметить, что поправки к $n_{p,p'}(t)$ и $\varkappa_{p,p'}(t)$ диагональны по импульсам

$$n_{p,p'}(t_1, t_2) = \delta(p - p') n_p(t_1, t_2), \quad \varkappa_{p,p'}(t_1, t_2) = \delta(p + p') \varkappa_p(t_1, t_2), \quad (1.46)$$

и действительно, выражение для $n_{p,p'}(t)$, полученное из (1.44) и (1.45), устанавливает, что оно действительно пропорционально дельта-функции $\delta(p - p')$, где:

$$\begin{aligned} n_p(t_1, t_2) &= -\frac{\lambda^2}{12} \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^{\infty} dt_4 \sqrt{g_4} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta^3(p - p_1 - p_2 - p_3) \times \\ &\times \left[g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_4 - t_3) \theta(t_3 - t_1) \theta(t_2 - t_4) + \right. \\ &+ g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_3 - t_4) \theta(t_3 - t_1) \theta(t_2 - t_4) + \\ &+ \bar{g}_p(t_3) g_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_4 - t_3) \theta(t_2 - t_3) \theta(t_4 - t_2) + \\ &+ \bar{g}_p(t_3) g_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_3 - t_4) \theta(t_2 - t_3) \theta(t_4 - t_1) - \\ &\left. - 2\bar{g}_p(t_3) g_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_2 - t_3) \right]. \end{aligned}$$

В последних трех членах мы меняем местами переменные t_3 и t_4 и после упрощений получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} n_p(t_1, t_2) &= -\frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^{\infty} dt_4 \sqrt{g_4} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \times \\ &\times \left[g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \theta(t_4 - t_3) \theta(t_3 - t_1) \theta(t_2 - t_4) + \right. \\ &+ g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t_3 - t_4) \theta(t_3 - t_1) \theta(t_2 - t_4) - \\ &\left. - g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \theta(t - t_4) \right]. \end{aligned}$$

Как обсуждалось выше мы интересуемся пределом больших времен, когда $t_1 + t_2 \rightarrow \infty$ поэтому мы положим, что $t_1 = t_2 = t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, а $|t_1 - t_2| = \text{const}$ так как мы интересуемся только лидирующими вкладами в обсуждаемом пределе. Используя то, что $\theta(t_3 - t_4)\theta(t - t_3)\theta(t_4 - t)$ отлично от нуля только тогда, когда выполняется соотношение $t > t_3 > t_4 > t$, что очевидно не может быть выполнено, мы убираем первый член:

$$n_p(t) = -\frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^t \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^t \sqrt{g_4} dt_4 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \times \\ \times g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4) \times \\ \times \left[\theta(t_3 - t_4) \theta(t_3 - t) \theta(t - t_4) - \theta(t - t_4) \right].$$

Из произведения тета-функций $\theta(t_3 - t)\theta(t - t_4)$ можно понять, что это произведение отлично от нуля только если $t_3 > t > t_4$, что ведет к равенству $t_3 > t_4 \Rightarrow \theta(t_3 - t_4) \equiv 1$, и следовательно в первом члене можно спокойно убрать $\theta(t_3 - t_4)$. В итоге, используя тождество $1 - \theta(x) = \theta(-x)$, мы получаем:

$$n_p(t) = \frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^t \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^t \sqrt{g_4} dt_4 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \times \\ \times g_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4). \quad (1.47)$$

Произведем аналогичные вычисления для аномального квантового среднего. Петлевая поправка имеет следующий вид:

$$\varkappa_p(t_1, t_2) = -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^t \sqrt{g_4} dt_4 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \\ \bar{g}_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \\ \left[\theta(t - t_3) \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3) + \theta(t_3 - t) \theta(t_4 - t) \theta(t_3 - t_4) + \theta(t_4 - t_3) - \theta(t_4 - t) \right].$$

Это выражение можно упростить при помощи следующего тождества для тета-функций:

$$\theta(-x)\theta(-y) = 1 - \theta(x) - \theta(y) + \theta(x)\theta(y).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \varkappa_p(t_1, t_2) = & -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^t \sqrt{g_4} dt_4 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \\ & \bar{g}_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \\ & \left[\theta(t - t_3) \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3) - \theta(t_4 - t) \theta(t - t_3) + \theta(t_4 - t) \theta(t - t_3) \theta(t_4 - t_3) + \right. \\ & \left. + \theta(t_4 - t_3) - \theta(t_4 - t) \theta(t_4 - t_3) \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\theta(t_4 - t) \theta(t - t_3) \theta(t_4 - t_3) - \theta(t_4 - t) \theta(t - t_3) = 0$, так как они оба не равны нулю когда $t_4 > t > t_3$ и, используя ещё раз тождество $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \varkappa_p(t_1, t_2) = & -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t \sqrt{g_3} dt_3 \int_{t_0}^t \sqrt{g_4} dt_4 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \\ & \bar{g}_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_4) \bar{g}_{p_1}(t_3) g_{p_2}(t_4) \bar{g}_{p_2}(t_3) g_{p_3}(t_4) \bar{g}_{p_3}(t_3) \\ & \left[\theta(t - t_3) \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3) + \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3) \right]. \end{aligned}$$

И так как $\theta(t - t_3) \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3) = \theta(t - t_4) \theta(t_4 - t_3)$, мы получаем окончательную формулу для $\varkappa_p(t)$:

$$\begin{aligned} \varkappa_p(t) = & -\frac{2\lambda^2}{3} \int \sqrt{g_3} dt_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_3 \sqrt{g_4} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \times \\ & \times \bar{g}_p(t_3) \bar{g}_p(t_4) g_{p_1}(t_3) \bar{g}_{p_1}(t_4) g_{p_2}(t_3) \bar{g}_{p_2}(t_4) g_{p_3}(t_3) \bar{g}_{p_3}(t_4). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Отметим сразу, что в случае пространства Минковского и отсутствия внешних полей (то есть когда гармоники являются плоскими волнами $g_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon(p)}} e^{-i\epsilon(p)t}$), $n_p(t)$ и $\varkappa_p(t)$ тождественно равны нулю. Действительно, положим $\sqrt{g} \equiv 1$ и сделаем замену переменных $T = \frac{t_3 + t_4}{2}$, $\tau = t_3 - t_4$ в (1.47) и (1.48), тогда:

$$\begin{aligned} n_p(t) = & \frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^t dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{e^{i(\epsilon(p) + \epsilon(p_1) + \epsilon(p_2) + \epsilon(p_3))\tau}}{16\epsilon(p)\epsilon(p_1)\epsilon(p_2)\epsilon(p_3)}, \\ \varkappa_p(t) = & -\frac{2\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t dT \frac{e^{-2i\epsilon(p)T}}{2\epsilon(p)} \int_{-\infty}^0 d\tau \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9} \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{e^{i(\epsilon(p_1) + \epsilon(p_2) + \epsilon(p_3))\tau}}{8\epsilon(p_1)\epsilon(p_2)\epsilon(p_3)}. \end{aligned}$$

Где мы расширили область интегрирование по переменной τ на всю числовую ось, так как интеграл по τ быстро сходится из-за быстрых осцилляций подинтегральной

функции. Как видно в случае $n_p(t)$ после взятия интеграла по τ возникает дельта-функция, которая устанавливает закон сохранения энергии $\epsilon(p) + \epsilon(p_1) + \epsilon(p_2) + \epsilon(p_3) = 0$, что не может быть выполнено, так как энергии уровней положительны $\epsilon = \sqrt{p^2 + m^2} > m > 0$, и следовательно заселенность уровней энергий не получает никаких растущих со временем вкладов. В случае $\varkappa_p(t)$ все ещё возможен рост, но в пределе $t \rightarrow +\infty$ интеграл по T можно взять и получить:

$$\Delta \varkappa_p = \varkappa_p(+\infty) - \varkappa_p(-\infty) \propto \delta(\epsilon(p)).$$

Но опять энергия положительная, и следовательно $\delta(\epsilon(p)) = 0$. Отсюда следует, что нет никакого роста и для аномального квантового среднего \varkappa_p .

Формулы (1.47) и (1.48) сразу же могут быть обобщены на случай, когда система не обладает пространственной инвариантностью. Пусть снова p — произвольный индекс, который нумерует гармоники системы $g_p(x, t)$ и необязательно является импульсом. Тогда все предыдущие выкладки не меняются и мы получаем следующие выражения:

$$n_{pp'}(t) = \frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t d^4 x_3 \int_{t_0}^t d^4 x_4 g_p(x_3, t_3) \bar{g}_{p'}(x_4, t_4) \int \prod_{i=1}^3 dp_i g_{p_i}(x_3, t_3) \bar{g}_{p_i}(x_4, t_4), \quad (1.49)$$

$$\varkappa_{pp'}(t) = -\frac{2\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t dt_4 dx_4 \int_{t_0}^{t_4} dt_3 dx_3 g_p(x_3, t_3) \bar{g}_{p'}(x_4, t_4) \int \prod_{i=1}^3 dp_i g_{p_i}(x_3, t_3) \bar{g}_{p_i}(x_4, t_4). \quad (1.50)$$

Эти формулы показывают, что диаграммная техника Келдыша-Швингера причинна. Действительно, весь вклад к функциям $n_{pp'}(t)$, $\varkappa_{pp'}(t)$ идет от области времен предшествующих моменту времени t .

Как мы увидим далее, если мы рассматриваем не пространство Минковского или не основное состояние, то тогда пропагаторы и гармоники будут другими и могут возникнуть следующего вида поправки:

$$n_p(t) \propto \lambda^2 t, \quad \varkappa_p(t) \propto \lambda^2 t. \quad (1.51)$$

Это приводит к тому, что хотя константа связи может быть очень маленькой $\lambda \ll 1$, но поправка может оказаться очень большой, т.к. она растет со временем как $\lambda^2 t$. И для времен $t \gtrsim \frac{1}{\lambda^2}$ поправка станет того же порядка что и древесный ответ. Похожая ситуация возникает и при обычных ультрафиолетовых перенормировках. К примеру, известно, что поправка к константе связи в скалярной теории поля с взаимодействием $\lambda\phi^4$ ведет себя как $\lambda(p) = \lambda(\mu) + \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2 \log\left(\frac{p}{\mu}\right)$. Поэтому для очень больших

импульсов $\lambda^2 \log\left(\frac{p}{\mu}\right)$ может оказаться большой величиной, и теория возмущений становится неприменимой. Данная проблема решается при помощи методов ренормализационной группы, с помощью которой, например, суммируют лидирующие поправки вида $\lambda^{2n} \log^n\left(\frac{p}{\mu}\right)$ и получают конечный ответ. В нашем случае мы тоже просуммируем лидирующие вклады идущие с высших порядков теории возмущений вида $\lambda^{2n} t^n$, пренебрегая подавленными вкладами вида $\lambda^{2n+m} t^n$.

1.5 Вывод кинетического уравнения

1.5.1 Вывод через уравнения Дайсона-Швингера

Как было объяснено в предыдущем параграфе, мы должны просуммировать лидирующие вклады возникающие во всех порядках теории возмущений. Это может быть сделано при помощи системы уравнений Дайсона-Швингера [14]. Данная система содержит уравнения на пропагаторы и вершины. Из-за этого она является сложной и нет методов, которые позволили бы решать её в общем виде. Но так как мы интересуемся только лидирующими вкладами, то эту систему уравнений можно упростить. К примеру, если предположить, что нет поправок вида $\lambda^2 t$ к четырехточечному пропагатору, то можно не писать уравнения Дайсона-Швингера на вершину. Аналогично, как было показано в предыдущих параграфах, пропагаторы $D_{\bar{A}}^R$ не могут получить секулярно растущих вкладов в пределе $t_1 + t_2 \rightarrow +\infty$. Поэтому можно не писать уравнение Дайсона-Швингера на запаздывающий и опережающий пропагатор. Также мы будем пользоваться ультрафиолетово перенормированной теорией, в которой мы заменили все константы связи и массы на физические, то есть мы считаем, что просуммированы все ультрафиолетовые расходимости. Следовательно, из большой системы уравнений Дайсона-Швингера остается только одно

уравнение на пропагатор Келдыша

$$\begin{aligned}
D^K(x_1, x_4) = & D_0^K(x_1, x_4) + \frac{\lambda^2}{6} \int dt_2 dt_3 dx_2 dx_3 \\
& \left[3 D^K(x_1, x_2) D^K(x_2, x_3) D^K(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) - \right. \\
& - \frac{1}{4} D^K(x_1, x_2) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) - \\
& - \frac{3}{4} D_0^R(x_1, x_2) D^K(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) + \\
& + D_0^R(x_1, x_2) D^K(x_2, x_3) D^K(x_2, x_3) D^K(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) + \\
& + 3 D_0^R(x_1, x_2) D^K(x_2, x_3) D^K(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D^K(x_3, x_4) - \\
& - \frac{1}{4} D_0^R(x_1, x_2) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D^K(x_3, x_4) - \\
& \left. - \frac{3}{4} D_0^R(x_1, x_2) D^K(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^R(x_2, x_3) D_0^A(x_3, x_4) \right]. \quad (1.52)
\end{aligned}$$

Уравнение (1.52) мы будем решать при помощи следующей подстановки для точного пропагатора Келдыша:

$$\begin{aligned}
D^K(x_1, x_2) = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{1}{2} \delta_{pp'} + n_{pp'} \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right) g_p(x_1) \bar{g}_{p'}(x_2) + \right. \\
& \left. + \varkappa_{pp'} \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) g_p(x_1) g_{p'}(x_2) + \text{h.c.} \right]. \quad (1.53)
\end{aligned}$$

Будем считать, что у нас есть недиагональные $n_{pp'}(t)$ и $\varkappa_{pp'}(t)$. Так как мы выводим кинетическое уравнение из уравнения Дайсона-Швингера на пропагаторы, то полученное кинетическое уравнение является ковариантным относительно Боголюбовских преобразований $g_p(t) \rightarrow \tilde{g}_p(t)$, $n_{pp'}(t) \rightarrow \tilde{n}_{pp'}(t)$, $\varkappa_{pp'} \rightarrow \tilde{\varkappa}_{pp'}(t)$. В некоторых случаях можно сделать преобразование Боголюбова к правильным гармоникам и вакууму в бесконечном будущем, так что в итоге можно положить аномальное квантовое среднее равным нулю. Мы тоже предположим, что $\varkappa_{pp'}(t) = 0$. В общем случае аномальное квантовое среднее отлично от нуля $\varkappa_{pp'}(t) \neq 0$. Для того, чтобы обосновать упрощение $\varkappa_{pp'}(t) = 0$ при $t \rightarrow +\infty$ необходимо написать линеаризованное уравнение на $\varkappa_{\lambda, \lambda'}(t)$ и проверить, что аномальное квантовое среднее уменьшается с течением времени при правильном выборе гармоник в бесконечном будущем. То есть нужно проверить, что решение $\varkappa_{pp'}(t) = 0$ является устойчивым по крайней мере относительно малых возмущений.

Мы будем работать в кинетическом приближении, когда $n_{pp'}(t)$ являются медленными функциями времени t по сравнению с гармониками. Тогда, подставляя

анзац (1.53) в (1.52), мы получаем следующее уравнение на $n_{pp'}(t)$ ¹:

$$\begin{aligned}
n_{pp'}(t) = & n_{0pp'}(t) + \frac{\lambda^2}{6} \int_{t_2 \leq t} d^4 x_2 \int_{t_3 \leq t} d^4 x_3 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \tilde{p}_i}{(2\pi)^3} d\tilde{p}_i g_q(x_2) \bar{g}_k(x_3) \times \\
& \times \left\{ 3 \delta_{kp'} \delta_{pq} D_{p_1 \tilde{p}_1}^{\text{ac}}(x_2, x_3) D_{p_2 \tilde{p}_2}^c(x_2, x_3) D_{p_3 \tilde{p}_3}^c(x_2, x_3) + \delta_{kp'} \delta_{pq} \prod_{j=1}^3 D_{p_j \tilde{p}_j}^{\text{ac}}(x_2, x_3) + \right. \\
& + [\theta(t_2 - t_3) \delta_{kp'} (\delta_{pq} + 2n_{pq}) + \delta_{qp} \theta(t_3 - t_2) (\delta_{kp'} + 2n_{kp'})] \times \\
& \left. \times \left[\prod_{j=1}^3 D_{p_j \tilde{p}_j}^c(x_2, x_3) + 3 D_{p_1 \tilde{p}_1}^c(x_2, x_3) D_{p_2 \tilde{p}_2}^{\text{ac}}(x_2, x_3) D_{p_3 \tilde{p}_3}^{\text{ac}}(x_2, x_3) \right] \right\}. \quad (1.54)
\end{aligned}$$

Где мы ввели следующие обозначения для дельта-функции – $\delta(p - q) = \delta_{pq}$, антикоммутатора оператора полей $\phi - D_{\alpha\beta}^{\text{ac}}(x, y) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} g_\alpha(x) g_\alpha^*(y) + n_{\alpha\beta} g_\alpha^*(x) g_\beta(y) + \text{h.c.}$ и коммутатора полей $D_{\alpha\beta}^c(x, y) = \delta_{\alpha\beta} [g_\alpha(x) g_\alpha^*(y) - g_\alpha(y) g_\alpha^*(x)]$. Стоит отметить, что если мы в правой части уравнения положим $n \equiv 0$, то после алгебраических преобразований получится выражение, совпадающее с двухпетлевым ответом (1.49).

Уравнение (1.54) является достаточно общим (в пренебрежении высшими поправками подавленными по константе связи). Для начала мы выведем кинетическое уравнение для случая скалярного поля на фоне пространства Минковского. Мы выбираем гармоники в виде плоских волн $g_{\vec{p}}(t, x) = \frac{e^{-i\omega(p)t + ipx}}{\sqrt{2\omega(p)}}$. Тогда n будет зависеть от двух индексов p, p' . $n_{pp'}$ можно связать с обычной функцией распределения при помощи преобразования Фурье:

$$n_p(x, t) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} n_{p+\frac{q}{2}, p-\frac{q}{2}}(t) \exp\left(iq x - i\left(\omega\left(p + \frac{q}{2}\right) - \omega\left(p - \frac{q}{2}\right)\right) t\right). \quad (1.55)$$

Напомним, что мы работаем в кинетическом пределе, поэтому мы считаем $n_p(x, t)$ достаточно медленной функцией переменной x по сравнению с гармоникой e^{ipx} . Это соответствует тому, что $n_{pp'}(t)$ отлична от нуля только когда $p \approx p'$. Ввиду этого можно спокойно менять индексы q, k, p и p' между собой. Вначале мы сделаем данное преобразование от $n_{pp'}(t)$ к $n_p(x, t)$ только для внутренних пропагаторов. Затем мы сделаем замену переменных $T = \frac{t_2 + t_3}{2}, \tau = t_2 - t_3, X = \frac{x_2 + x_3}{2}, \rho = x_2 - x_3$. Проинтегрировав по ρ и τ , мы получим законы сохранения энергии и импульса.

¹Я хотел бы поблагодарить Хади Годазгара за помощь в выводе данного уравнения.

Тогда взяв производную по времени, мы получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_{pp'}(t) + i(\omega(p) - \omega(p')) \tilde{n}_{pp'}(t) &= \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int dx e^{i(p-q)x} \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \times \\
&\times \left\{ \delta^4(P + p_1 + p_2 + p_3) \left[(\delta_{qp'} + n_{qp'}(t)) \prod_{i=1}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) - n_{pp'}(t) \prod_{i=1}^3 n_{p_i}(x, t) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 3\delta^4(P - p_1 + p_2 + p_3) \times \right. \\
&\times \left[(\delta_{qp'} + n_{qp'}(t)) n_{p_1}(x, t) \prod_{i=2}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) - n_{pp'}(t) (1 + n_{p_1}(x, t)) \prod_{i=2}^3 n_{p_i}(x, t) \right] + \\
&\quad \left. + 3\delta^4(P + p_1 - p_2 - p_3) \times \right. \\
&\times \left[(\delta_{qp'} + n_{qp'}(t)) (1 + n_{p_1}(x, t)) \prod_{i=2}^3 n_{p_i}(x, t) - n_{pp'}(t) n_{p_1}(x, t) \prod_{i=2}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) \right] + \\
&\quad \left. + \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) \left[(\delta_{qp'} + n_{qp'}(t)) \prod_{i=1}^3 n_{p_i}(x, t) - n_{pp'}(t) \prod_{i=1}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) \right] \right\}. \tag{1.56}
\end{aligned}$$

Где мы ввели следующее обозначение

$$\delta^{(4)}(P + p_1 + p_2 + p_3) = \delta^{(3)}(\vec{P} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(\omega(P) + \omega(p_1) + \omega(p_2) + \omega(p_3))$$

. Легко заметить, что из-за наличия законов сохранения энергии в различных процессах не зануляется только один член, соответствующий упругому рассеянию одного кванта скалярного поля на другом. Тогда:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_{pp'}(t) + i(\omega(p) - \omega(p')) \tilde{n}_{pp'}(t) &= \tag{1.57} \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int dx e^{i(p-q)x} \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \delta^4(P + p_1 - p_2 - p_3) \times \\
&\times \left[(\delta_{qp'} + n_{qp'}(t)) (1 + n_{p_1}(x, t)) \prod_{i=2}^3 n_{p_i}(x, t) - n_{pp'}(t) n_{p_1}(x, t) \prod_{i=2}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) \right].
\end{aligned}$$

Где мы ввели обозначение $\omega_i = \omega(p_i) \approx \omega(p'_i) \approx \omega\left(P_i = \frac{p_i + p'_i}{2}\right)$. Дифференциальный оператор в левой части может быть приведен к стандартному, который стоит в обычном кинетическом уравнении Больцмана, путем разложения энергии около центрального значения $(\omega(p) - \omega(p')) \approx \Delta p \times \frac{\partial \omega(p)}{\partial p} = \vec{v} \Delta p$. Тогда после преобразования Фурье по разнице импульса в функции $n_{pp'}(t)$ мы получим дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_P(x, t) + \vec{v} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{n}_P(x, t)$, где $P = \frac{p+p'}{2}$.

Подставляя $q \approx p' + l$ в (1.57) и интегрируя по q можно получить следующее

интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_P(r, t) + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \tilde{n}_P(r, t) = & \quad (1.58) \\ \frac{\lambda^2}{2} \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \delta^4(P + p_1 - p_2 - p_3) \times & \\ \left[(1 + n_P(x, t)) (1 + n_{p_1}(x, t)) \prod_{i=2}^3 n_{p_i}(x, t) - n_P(x, t) n_{p_1}(x, t) \prod_{i=2}^3 (1 + n_{p_i}(x, t)) \right]. & \end{aligned}$$

1.5.2 Операторный метод

Кинетическое уравнение также можно вывести при помощи так называемого операторного метода [87],[16]. Его суть состоит в том, чтобы напрямую вычислять эволюцию оператора $\hat{n}_{pp'}(t) = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'}$. Мы продемонстрируем как работает этот метод снова на примере скалярного поля на фоне плоского пространства Минковского, но для упрощения дальнейших выкладок заменим потенциал взаимодействия $\lambda\phi^4$ на кубический $\lambda\phi^3$. Гамильтониан в данном случае имеет следующий вид (мы уже явно подставили разложение поля ϕ по гармоникам):

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega(\vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{2\sqrt{2\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)}} \times & \quad (1.59) \\ \times \left[3\delta(-\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \left(\hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_3} e^{-i(-\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} + \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger e^{-i(\omega(k_1)-\omega(k_2)-\omega(k_3))t} \right) + \right. \\ \left. + \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \left(\hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_3} e^{-i(\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} + \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger e^{i(\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} \right) \right]. & \end{aligned}$$

Где операторы рождения-уничтожения удовлетворяют стандартной алгебре Гейзенберга $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(p - q)$. Предположим также, что дисперсионное соотношение не является релятивистским. Коммутируя $\hat{n}_p = a_p^\dagger a_p$ с (1.59) мы получаем следующие уравнение на $n_p(t) = \langle \hat{n}_p(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_p(t) = i\lambda \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{2\sqrt{\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(p)}} \times & \quad (1.60) \\ \left[-\delta(-\vec{p} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left\{ \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2} \rangle e^{-i(-\omega(p)+\omega(k_1)+\omega(k_2))t} - \langle \hat{a}_p \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \rangle e^{-i(-\omega(p)+\omega(k_1)+\omega(k_2))t} \right\} + \right. \\ + 2\delta(-\vec{k}_1 + \vec{p} + \vec{k}_2) \left\{ \langle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_{k_2} \rangle e^{-i(-\omega(p)+\omega(k_1)+\omega(k_2))t} - \langle \hat{a}_{k_1} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \rangle e^{-i(-\omega(k_1)+\omega(p)+\omega(k_2))t} \right\} + \\ \left. + \delta(\vec{p} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left(\langle \hat{a}_p \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2} \rangle e^{-i(\omega(p)-\omega(k_1)+\omega(k_2))t} + \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \rangle e^{i(\omega(p)+\omega(k_1)+\omega(k_2))t} \right) \right]. & \end{aligned}$$

Данное уравнение получилось незамкнутым относительно $n_p(t)$. В нем появились новые неизвестные средние $\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2} \rangle$. Для вычисления этих средних мы проком-

мутируем их с гамильтонианом (1.59) и, чтобы замкнуть систему, полученные новые средние вида $\langle a_{q_1} \dots a_p^\dagger \rangle$ будем вычислять при помощи теоремы Вика, считая $\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle(t) = (2\pi)^3 \delta(p - p') n_p(t)$. Тогда мы получим следующие уравнение на трехточечные корреляторы:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_3} \rangle = \frac{-i\lambda}{\sqrt{2\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)}} \delta(-\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) e^{-i(-\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} \times \\ [(1 + n_{k_1}) n_{k_2} n_{k_3} - n_{k_1} (1 + n_{k_2}) (1 + n_{k_3})]. \quad (1.61)$$

Аналогичное уравнение возникает и для сопряженной величины:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger \rangle = \frac{i\lambda}{\sqrt{2\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)}} \delta(-\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) e^{i(-\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} \times \\ [(1 + n_{k_1}) n_{k_2} n_{k_3} - n_{k_1} (1 + n_{k_2}) (1 + n_{k_3})]. \quad (1.62)$$

Считая что $n_p(t)$ является медленной функцией по сравнению с гармоникой $e^{-i\omega(p)t+ipx}$, мы можем проинтегрировать данные уравнения и найти явно значение среднего $\langle \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger \rangle$. В результате в правой части уравнения (1.60) возникают следующие выражения:

$$\langle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_3} \rangle e^{-i(-\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} - \langle \hat{a}_{k_1} \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger \rangle e^{i(-\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3))t} = \\ = -\frac{i\lambda}{\sqrt{\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)}} \delta(-\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \int_{t_0}^t dt \cos \left[(-\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3))(t - t_0) \right] \times \\ \times [(1 + n_{k_1}) n_{k_2} n_{k_3} - n_{k_1} (1 + n_{k_2}) (1 + n_{k_3})]. \quad (1.63)$$

Взятие интеграла по t приведет к появлению дельта-функции в пределе $t - t_0 \rightarrow \infty$, которая устанавливает закон сохранения энергии. В результате получается следующее уравнение на $n_p(t)$:

$$\frac{d}{dt} n_{\vec{p}}(t) = 4\lambda^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6 8\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(p)} \times \\ \left\{ \delta^4(-p + k_1 + k_2) [(1 + n_p) n_{k_1} n_{k_2} - n_p (1 + n_{k_1}) (1 + n_{k_2})] + \right. \\ \left. 2\delta^4(p - k_1 + k_2) [(1 + n_p) (1 + n_{k_1}) n_{k_2} - n_p n_{k_1} (1 + n_{k_2})] \right\}, \quad (1.64)$$

где мы ввели обозначение $\delta^4(p - k_1 + k_2) = \delta(\omega(p) - \omega(k_1) + \omega(k_2)) \delta^3(p - k_1 + k_2)$. Так как спектр не обязательно является релятивистским, то возможны любые процессы рассеяния: упругие и неупругие. Запрещен только процесс рождения частиц

из вакуума. Если предположить, что есть недиагональный элемент $n_{pp'}$, и проделать процедуру описанную в этом разделе, то можно в левой части уравнения (1.64) получить дифференциальный оператор как в (1.58).

1.6 О важности выбора правильного основного состояния

В этой главе мы рассмотрим скалярное поле в двумерном пространстве Минковского и обсудим какие инфракрасные эффекты могут возникнуть, если неправильно был выбран вакуум для теории. На основании физической интуиции, мы можем заключить, что это состояние будет эволюционировать и перейдет в некоторое термальное возбуждение над вакуумом, что мы и непосредственно проверим при помощи развитой ранее техники. Уравнение движения для операторов скалярного поля в свободной теории поля записывается в следующей форме:

$$[\square + m^2] \phi = 0. \quad (1.65)$$

Разложившись по плоским волнам $\phi(x, t) = \int \frac{dp}{2\pi} g_p(t) e^{ipx}$, мы получим следующее уравнение на $g_p(t)$:

$$[\partial_t^2 + p^2 + m^2] g_p(t) = 0.$$

Обычно выбирают решение в виде одной плоской волны $e^{-i\omega(p)t}$, $\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Как известно, при дальнейшем квантовании в данном случае нет никаких расходимостей, кроме ультрафиолетовых. Давайте, однако, мы выберем следующее решение для гармоник:

$$g_p(t) = \frac{\alpha e^{-i\omega(p)t} + \beta e^{i\omega(p)t}}{\sqrt{2\omega(p)}}. \quad (1.66)$$

Коэффициенты α и β , в принципе, могут быть выбраны зависящими от импульса p , но для простоты мы не будем рассматривать такой выбор. Мы раскладываем операторное поле ϕ по этим гармоникам:

$$\phi = \int \frac{dp}{2\pi} [a_p g_p(t) e^{ipx} + a_p^\dagger g_p^*(t) e^{-ipx}]. \quad (1.67)$$

Чтобы поле ϕ удовлетворяло обычным коммутационным соотношениям $[\phi, \pi] = i\delta(x - y)$, где $\pi = \partial_0\phi$, а операторы рождения-уничтожения a_p, a_p^\dagger обычной алгебре Гейзенберга $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi) \delta(p - q)$, коэффициенты α, β должны удовлетворять

соотношению $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Действительно, прокоммутируем поле ϕ с сопряженным ему импульсом π . Используя алгебру Гейзенберга и разложение поля ϕ по гармоникам, получаем:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \pi(y)] &= \iint \frac{dpdq}{(2\pi)^2} \left\{ [a_p, a_q] g_p(t) \partial_t g_q(t) e^{ipx+iqy} + [a_p, a_q^\dagger] g_p(t) \partial_t g_q^*(t) e^{ipx-iqy} + \right. \\ &\quad \left. + [a_p^\dagger, a_q^\dagger] e^{-ipx-iqy} g_p^*(t) \partial_t g_q^*(t) + [a_p^\dagger, a_q] g_p^*(t) \partial_t g_q(t) e^{-ipx+iqy} \right\} = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \{ g_p(t) \partial_t g_p^*(t) - g_p^*(t) \partial_t g_p(t) \} e^{ip(x-y)} = i\delta(x-y), \end{aligned} \quad (1.68)$$

где мы использовали, что $g_p(t) = g_{-p}(t)$. Чтобы выполнялось (1.68) необходимо и достаточно потребовать $g_p(t) \partial_t g_p^*(t) - g_p^*(t) \partial_t g_p(t) = 1$. Подставляя гармоники мы получаем соотношение $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что эти гармоники не диагонализуют свободный гамильтониан. Действительно:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dx [(\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 + m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} \int dx [(\partial_t \phi)^2 - \phi \partial_t^2 \phi] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \{ a_p^\dagger a_p (\partial_t g_p^*(t) \partial_t g_p(t) - g_p^*(t) \partial_t^2 g_p(t)) + \\ &\quad + a_{-p} a_p (\partial_t g_p(t) \partial_t g_p(t) - g_p(t) \partial_t^2 g_p(t)) + \text{h.c.} \} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \{ \omega(p) (|\alpha|^2 + |\beta|^2) a_p^\dagger a_p + 2\alpha \beta \omega(p) a_p a_{-p} + \text{h.c.} \}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

где мы использовали уравнения движения для гармоники $g_p(t)$. Полученный гамильтониан может быть преобразован к диагональному виду при помощи преобразовании Боголюбова:

$$b_p = \alpha a_p + \beta^* a_{-p}, \quad (1.70)$$

$$a_p = \alpha^* b_p - \beta^* b_{-p}^\dagger. \quad (1.71)$$

С помощью этого преобразования посчитаем значение $\langle a_p^\dagger a_p \rangle$ и $\langle a_{-p} a_p \rangle$, где усреднение проводится по правильному вакууму теории $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle a_p^\dagger a_p \rangle &= \langle [a b_p^\dagger - \beta b_{-p}] [\alpha^* b_p - \beta^* b_{-p}^\dagger] \rangle = |\beta|^2, \\ \langle a_p a_{-p} \rangle &= \langle [\alpha^* b_p - \beta^* b_{-p}^\dagger] [\alpha^* b_{-p} - \beta^* b_p^\dagger] \rangle = -\alpha^* \beta^*. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Пока что серьезных проблем ещё не возникло, хотя вычисления будут сложнее, мы можем продвинуться дальше без всяких затруднений. К примеру, давайте

рассмотрим, как выглядит функция Вайтмана в данной ситуации ($|\text{vac}\rangle$ выберем в стандартном виде $a_p |\text{vac}\rangle = 0, \forall p$):

$$\begin{aligned}
\langle \text{vac} | \phi(\vec{x}, t_1) \phi(\vec{y}, t_2) | \text{vac} \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} g_p(t_1) g_p^*(t_2) e^{-ip(x-y)} = \quad (1.73) \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{2\omega(p)} \left[|\alpha|^2 e^{-i\omega(p)(t_1-t_2)} + |\beta|^2 e^{i\omega(p)(t_1-t_2)} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha\beta^* e^{-i\omega(p)(t_1+t_2)} + \alpha^*\beta e^{i\omega(p)(t_1+t_2)} \right] e^{-ip(x-y)} = \\
&= |\alpha|^2 D_u(t_1 - t_2, x - y) + |\beta|^2 D_u(t_2 - t_1, x - y) + \\
&\quad + \alpha\beta^* D_u(t_1 + t_2, x - y) + \alpha^*\beta D_u(-t_1 - t_2, x - y),
\end{aligned}$$

$$\text{где } D_u(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{2\omega(p)} e^{-i\omega(p)(t_1-t_2) - ip(x-y)} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \delta(p_\mu p^\mu - m^2) e^{-ip_\mu x^\mu}$$

Легко понять что $D_u(t, x) = D_u(t^2 - x^2)$, так как формула для неё записана в Лоренц-инвариантной форме. Но, как видно из формулы (1.73), функция Вайтмана не является функцией инвариантного расстояния $s^2 = \Delta x_\mu \Delta x^\mu$. Это указывает на то, что вакуум $|\text{vac}\rangle$ не является инвариантным относительно полной группы Пуанкаре.

Добавим к этой теории самодействие $\frac{\lambda\phi^4}{4!}$ и будем вычислять поправки к заселенности уровней энергии и аномального квантового среднего. Хотя состояние и не инвариантно относительно полной группы Пуанкаре, оно инвариантно относительно пространственных сдвигов $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$. Поэтому аномальное квантовое среднее и заселенность уровней энергии, как и в предыдущем параграфе, диагональны. Рассмотрим двухпетлевые поправки к ним (1.47)–(1.48):

$$\begin{aligned}
n_p(t) &= \frac{\lambda^2}{6} \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^t dt_4 \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} g_p(t_3) g_p^*(t_4) \times \\
&\quad \times g_{q_1}(t_3) g_{q_1}^*(t_4) g_{q_2}(t_3) g_{q_2}^*(t_4) g_{p-q_1-q_2}(t_3) g_{p-q_1-q_2}^*(t_4), \\
\kappa_p(t) &= -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{dq_2}{2\pi} g_p^*(t_3) g_p^*(t_4) \times \\
&\quad \times g_{q_1}(t_3) g_{q_1}^*(t_4) g_{q_2}(t_3) g_{q_2}^*(t_4) g_{p-q_1-q_2}(t_3) g_{p-q_1-q_2}^*(t_4).
\end{aligned}$$

Где t_0 - момент, после которого адиабатически включается самодействие. Сделав преобразование аналогичные проделанным в предыдущем параграфе, мы получа-

ем:

$$n_p(t) = \lambda^2(t - t_0) \frac{|\alpha\beta|^4}{16\omega(p)} \int \frac{dq_1 dq_2}{2\pi} \frac{\delta(\omega(p) + \omega(q_1) - \omega(q_2) - \omega(p - q_1 - q_2))}{\omega(q_1)\omega(q_2)\omega(p - q_1 - q_2)},$$

$$\varkappa_p(t) = \lambda^2(t - t_0) \frac{\alpha^*\beta^* (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*) |\alpha\beta|^2}{8\omega(p)} \int \frac{dq_1 dq_2}{2\pi} \frac{\delta(\omega(p) + \omega(q_1) - \omega(q_2) - \omega(p - q_1 - q_2))}{\omega(q_1)\omega(q_2)\omega(p - q_1 - q_2)}.$$

Как показывает это петлевое вычисление, выбор неправильного вакуума ведет к инфракрасной катастрофе. Мы не можем увести момент включения самодействия в бесконечное прошлое $t_0 \rightarrow -\infty$. Эти инфракрасно большие вклады вызваны тем, что мы выбрали начальное состояние в виде неравновесного возбуждения над правильным вакуумом теории. Чтобы понять смысл полученных инфракрасных расходимостей и что произойдет с состоянием, надо пересуммировать лидирующие вклады при помощи кинетического уравнения. Как было объяснено ранее, уравнение Дайсона-Швингера ковариантно относительно Боголюбовских преобразований гармоник $g_p(t)$, $g_p^*(t)$ и $n_p(t)$ с $\varkappa_p(t)$, поэтому сделаем поворот к правильным гармоникам $f_p(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}$. Тогда уравнения легко записываются, но зато возникают начальные ненулевые аномальные квантовые средние и заселенность уровней энергий (1.72).

Посмотрим что происходит с \varkappa_p в линейном порядке теории возмущении при правильном выборе аут-гармоник:

$$\frac{d\varkappa_p}{dt} = -\frac{\lambda^2}{6} \int \frac{dq_1 dq_2}{2\pi} \frac{\delta(\omega(p) - \omega(q_1) - \omega(q_2) - \omega(p - q_1 - q_2))}{8\omega(p)\omega(q_1)\omega(q_2)\omega(p - q_1 - q_2)} \varkappa_p(t). \quad (1.74)$$

Т.е. аномальное квантовое средние спадает. Тогда картина следующая — аномальное квантовое средние со временем зануляется, а $n_p(t)$ меняется согласно кинетическому уравнению. Решением кинетического уравнения является термальное распределение, если свободный гамильтониан не зависит от времени и ограничен снизу. Другими, словами хоть мы и начали с неправильного вакуумного состояния, взаимодействие привело к тому, что состояние перешло в возбуждение над правильным вакуумом. Таким образом разрешается данная инфракрасная катастрофа.

1.7 Цели и задачи диссертационного исследования

Представленная диссертационная работа посвящена исследованию свойства квантовой теории поля на фоне внешних сильных гравитационных и электромагнитных полей. В работе рассматриваются такие вопросы как:

- Изучение теории взаимодействующего скалярного поля в пространстве де-Ситтера
- Анализ петлевых поправок к скалярной квантовой электродинамике на фоне внешнего постоянного электрического поля или на фоне электрического пульса.
- Изучение массивной теории скалярного поля на фоне гравитационного коллапса и вывод эффекта Хокинга для данной теории.
- Суммирование лидирующих секулярно растущих вкладов при помощи уравнения Дайсона-Швингера и вывод некоторого аналога кинетического уравнения при помощи взятия инфракрасного предела в уравнении Дайсона-Швингера.

1.8 Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Показано, что в расширяющейся Пуанкаре карте в теории теории скалярного поля с взаимодействием вида $\frac{\lambda\phi^4}{4!}$ возникают секулярно растущие петлевые поправки.
- Просуммированы лидирующие секулярные вклады в $\lambda\phi^4$ теории в пространстве де-Ситтера при помощи уравнения Дайсона-Швингера. Обсуждена связь этих наблюдений с наличием и нарушением инвариантности относительно группы изометрий пространства де-Ситтера.
- Проанализированы решения полученных уравнений. Показано, что в случае маленьких начальных заселенностей уровней для точных гармоник имеется стационарное решение. В случае больших начальных заселенностей уровней решение оказывается сингулярным.
- Показано, что в скалярной электродинамике на фоне сильных электрических полей также возникают секулярно растущие петлевые поправки.
- При помощи уравнений Дайсона-Швингера были просуммированы лидирующие секулярные вклады на фоне сильных электрических полей для фотонного пропагатора и были получены решения данных уравнений.

- Были учтены поправки к току, который возникает в результате эффекта Швингера. Показано, что хотя в постоянном электрическом поле на древесном уровне ток получается равен нулю, он оказывается отличным от нуля при учете петлевых поправок. Эти поправки к току секулярно растут и нарушают инвариантность относительно трансляций и сдвигов по времени.
- Выведено излучение Хокинга из первых принципов для случая массивного скалярного поля.
- Показано, что к древесному вкладу в излучение Хокинга также имеются секулярно растущие петлевые вклады, которые модифицируют спектр излучения.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Глава 1), три главы основного текста (Главы 2-4), заключения (Глава 5). Общий объем диссертации составляет 127 страниц, включая 11 рисунков. Список литературы содержит 99 ссылок.

1.9 Содержание диссертации

В **главе 2** подробно обсуждается поведение теории скалярного поля на фоне пространства де-Ситтера. Объясняется почему изучение данного вопроса важно для понимания физики квантовой гравитации и космологии.

В **разд. 2.1** вводится понятие пространства де-Ситтера, расширяющейся и сжимающейся Пуанкаре карты. Обсуждаются основные характеристики пространства де-Ситтера: метрика, кривизна, группа изометрий, удобные системы координат. Вводится понятие инвариантного расстояния, которое является аналогом интервала в плоском пространстве-времени для пространства де-Ситтера, и его связь с геодезическим расстоянием. При помощи конформного преобразования удастся построить диаграмму Пенроуза и понять причинную структуру для двумерного пространства де-Ситтера.

В **разд. 2.2** изучается поведение скалярного поля в пространстве де-Ситтера. Выводится уравнение Клейна-Гордона, которое является уравнением движения для свободного скалярного поля. Обсуждаются решения полученных уравнений в гло-

бальном пространстве де-Ситтера, сжимающейся и расширяющейся Пуанкаре картах. Обсуждаются гармоники, которые диагонализуют гамильтониан свободного скалярного поля в расширяющейся Пуанкаре карте в бесконечном прошлом — ингармоники или гармоники Банча-Девиса. Также вводятся понятия Евклидового вакуума, альфа-вакуумов.

В **разд. 2.3** обсуждается поведение корреляционных функций. Показано, что выбор Евклидовых и альфа гармоник соответствуют выбору вакуума, который инвариантен относительно группы изометрий пространства де-Ситтера. К примеру, полученная корреляционная функция зависит только от инвариантного расстояния между точками, но не от самих точек. Также обсуждаются возможности разрешения возникающих сингулярностей у корреляционных функций.

В **разд. 2.4** подробно рассматриваются петлевые поправки к двухточечной корреляционной функции для гармоник Банча-Девиса в расширяющейся Пуанкаре карте. Показано, что петлевые поправки к корреляционной функции инвариантны относительно полной группы изометрий пространства де-Ситтера. Также обсуждается, что данный результат верен только для выбора вакуума Банча-Девиса.

В **разд. 2.5** обсуждаются петлевые поправки при выборе любого начального состояния. Показано, что петлевые поправки к вершине, опережающему и запаздывающему пропагаторам подавлены. Объясняется, почему в сжимающейся Пуанкаре карте петлевые поправки ведут к инфракрасной расходимости, а в расширяющейся Пуанкаре карте к секулярно растущим вкладам.

В **разд. 2.6** удается вывести кинетическое уравнение, как инфракрасный предел уравнения Дайсона-Швингера. Решения данного уравнения зависят от начальных условий, поэтому производится анализ двух случаев: случаи маленьких и больших начальных заселенностей уровней. В первом случае система выходит на стационарное решение. Во втором случае решение оказывается сингулярным, что означает сильное влияние скалярного поля на внешнее пространство-время и нарушение группы изометрий пространства квантовыми флуктуациями.

В **главе 3** обсуждаются петлевые поправки к скалярной квантовой электродинамике на фоне внешнего постоянного электрического поля.

В **разд. 3.1** объясняется важность рассмотрения петлевых поправок к квантовой электродинамике с точки зрения проблем возникающих в квантовой гравитации.

В **разд. 3.2** проводится стандартный вывод классического эффекта Швингера на основе формализма функционального интеграла.

В **разд. 3.3** обсуждается поведение свободной скалярной квантовой электродинамики на фоне внешнего электромагнитного поля, то есть не учитывается взаимодействие квантов скалярного поля с фотонами, но непертурбативным образом учитывается наличие внешнего поля. Объясняется, почему гармоники для скалярного поля меняются, а гармоники и пропагаторы для электромагнитного поля остаются неизменными.

В **разд. 3.4** рассматривается поведение скалярной квантовой электродинамики на фоне внешнего постоянного электрического поля и пульса в темпоральной калибровке $A_1 = A_1(t)$. Показано, что в случае пульса на древесном уровне возникает ток $J_1 \propto e^2 (A_1(t) - A_1(-\infty))$. После анализа однопетлевых поправок, было выяснено, что момент включения взаимодействия, t_0 , невозможно увести в бесконечное прошлое, потому что возникают инфракрасные расходимости в пропагаторе Келдыша фотонов $\Delta_1 G_{\mu\nu}(t) \propto e^2(t - t_0)$. Аналогичное вычисление для пропагатора Келдыша свободного поля показывает, что последний получает конечные поправки и следовательно может считаться древесным. Проводится анализ петлевых поправок к вершине и производится суммирование секулярно растущих петлевых вкладов при помощи уравнения Дайсона-Швингера.

В **разд. 3.5** проводятся вычисления аналогичным проведенным в **разд. 3.4**, но для случая, когда была выбрана пространственная калибровка $A_0 = A_0(x)$. Данное вычисление показывает, что хотя гамильтониан может быть диагонализирован, но его спектр оказывается неограниченным снизу, что ведет к секулярно растущим вкладам. Показано, что ответы полученные в **разд. 3.5** и **разд. 3.4** согласуются друг с другом.

В **разд. 3.6** учитываются петлевые вклады к пропагаторам скалярного поля для вычисления возникающего тока. Показано, что хотя ток на древесном уровне на фоне внешнего постоянного электрического поля равен нулю, при учете петлевых поправок ток оказывается отличным от нуля.

В **главе 4** проводится анализ петлевых поправок к эффекту Хокинга.

В **разд. 4.1** обсуждается постановка задачи, и почему данная задача важна с точки зрения проблем современной теоретической физики. Также проводится качественный анализ гравитационного коллапса.

В **разд. 4.2** подробно описывается гравитационное поле, которое возникает в результате гравитационного коллапса тонкой оболочки. Обсуждается как можно связать координаты под и над оболочкой, что необходимо для анализа эффекта Хокинга.

В **разд. 4.3** проводится анализ уравнения Клейна-Гордона для случая метрики гравитационного коллапса. Находятся ин-гармоники, которые диагонализуют гамильтониан до начала гравитационного коллапса. Также путем решения уравнения Клейна-Гордона удается найти поведение ин-гармоник в бесконечном будущем в непосредственной близости к горизонту.

В **разд. 4.4** выводится эффект Хокинга. При помощи гармоник полученных в **разд. 4.3** считается поток $J = \int_{S_2} d\phi d \cos \theta \langle : T_t^r : \rangle$ и показывается, что он равен термальному с температурой $T = \frac{1}{4\pi r_g}$.

В **разд. 4.5** анализируются петлевые поправки к пропагатору Келдыша во взаимодействующей теории поля, показано, что они секулярно растут со временем. Это означает, что классический ответ может сильно продеформироваться под действием квантовых поправок.

В **заключении** работы сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1.10 Публикации по теме диссертации

1. E. T. Akhmedov, F. K. Popov, V. M. Slepukhin. Infrared dynamics of the massive ϕ^4 theory on de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 88, 024021 (2013).
2. E.T.Akhmedov, N.Astrakhantsev, F.K.Popov. Secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP* 09 (2014) 071.
3. E.T. Akhmedov, F.K. Popov. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP* 1509 (2015) 085
4. Emil T. Akhmedov, Hadi Godazgar, Fedor K. Popov. Hawking radiation and secularly growing loop corrections. *Phys. Rev. D* 93, 024029 (2016)

Глава 2

Нестационарные процессы в пространстве де-Ситтера

2.1 Пространство де-Ситтера

Пространство де-Ситтера является решением уравнения Эйнштейна с положительной космологической константой $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu}$, $\Lambda > 0$. Данное пространство привлекает особое внимание со стороны физиков по нескольким причинам. Во-первых, его группа изометрий такая же большая как группа изометрий плоского пространства Минковского [4]–[22], [87]. Поэтому пространство де-Ситтера является примером нетривиального искривленного пространства-времени, в котором можно, основываясь на большой группе изометрий, сделать вычисления различных квантовополевых величин. Вторая причина заключается в том, что на ранней стадии развития Вселенной, последняя, вероятно, описывалась расширяющейся Пуанкаре картой пространства де-Ситтера. С помощью введения данной стадии физики пытаются объяснить, такие проблемы, как проблему крупномасштабной однородности и изотропности Вселенной, проблему плоской Вселенной и многие другие. Но в связи с этим возникают новые вопросы. К примеру, как Вселенная вышла из этой стадии? Или почему наблюдаемое сейчас значение космологической постоянной очень маленькое? Изучение квантовой теории поля на фоне пространства де-Ситтера может пролить свет на данные проблемы. Также наличие кривизны может привести к новым нетривиальным качественным эффектам, которые не проявлялись в пространстве Минковского.

Легче всего представить себе D -мерное пространство де-Ситтера как D -мерный

гиперболоид вложенный в $(D+1)$ – мерное плоское пространство Минковского [68]:

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^D)^2 = g_{AB}X^AX^B = H^{-2}, \quad A, B = 0, 1, \dots, D. \quad (2.1)$$

Где X^A - координаты $(D+1)$ – мерного пространства Минковского, с метрикой $g_{AB} = \text{Diag}[-1, 1, \dots, 1]$. H - является постоянной Хаббла, т.е. скорость с которой эволюционирует масштабный фактор $a(t)$, и следующим образом выражается через космологическую постоянную:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}.$$

Можно увидеть, что данное пространство действительно обладает большой симметрией. Достаточно сказать, что гиперболоид (2.1) инвариантен относительно преобразований Лоренца объемлющего пространства Минковского $SO(D, 1)$. Заметим, что стабилизатором любой точки пространства де-Ситтера (т.е. группа тех преобразований которые оставляют данную точку на месте) является группа $SO(D-1, 1)$. Тогда можно описывать пространство де-Ситтера как однородное факторпространство $SO(D, 1)/SO(D-1, 1)$.

Также можно ввести инвариантное расстояние, которое не меняется под действием группы симметрий пространства де-Ситтера. Действительно, ввиду того, что наше пространство вложено в пространство-Минковского, инвариантное расстояние между двумя точками можно ввести как скалярное произведение векторов, указывающих на данные точки гиперболоида

$$Z_{12} = H^2 g_{AB} X_1^A X_2^B. \quad (2.2)$$

Где X_1^A, X_2^A - координаты первой и второй точки соответственно. Инвариантное расстояние можно легко связать с геодезическим расстоянием $\rho(A, B) = \min_{\gamma} \int_{\gamma} ds$. К примеру, в случае $Z > 1$, используя симметрии пространства де-Ситтера, можно перевести одну точку в точку с координатами $(0, 0, \dots, H^{-1})$, а вторую — в точку с координатами $(H^{-1}\sqrt{1+Z_{12}^2}, 0, \dots, H^{-1}Z_{12})$ и посчитать между ними расстояние по гиперболоиду как

$$L_{12} = H^{-1} \text{arccosh}(Z_{12}). \quad (2.3)$$

Используя представление о пространстве де-Ситтера как гиперболоиде, его можно накрыть следующими координатами:

$$X^0 = \frac{\sinh(Ht)}{H}, \quad X^i = \frac{n_i \cosh(Ht)}{H}, \quad i = 1, \dots, D, \quad \text{где } n_i^2 = 1. \quad (2.4)$$

Последнее означает, что вектор n_i лежит на D -мерной сфере. Точки на сфере можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \cos \theta_1, & \theta_1 &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
n_2 &= \cos \theta_2 \sin \theta_1, & \theta_2 &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
&\dots \\
n_{D-1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-2} \cos \theta_{D-1}, & \theta_{D-1} &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
n_D &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Метрика тогда записывается как

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\cosh^2(Ht)}{H^2} d\Omega_{D-1}^2, \quad \text{где} \quad d\Omega_{D-1}^2 = \sum_{j=1}^{D-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) d\theta_j^2. \tag{2.6}$$

Данные координаты покрывают полностью пространство де-Ситтера.

Удобно использовать координаты, которые покрывают лишь половины пространства де-Ситтера, так называемые расширяющиеся и сжимающиеся Пуанкаре карты. Мы разрешаем уравнение на гиперboloид (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned}
-(HX^0)^2 + (HX^D)^2 &= 1 - (Hx_+^i)^2 e^{2H\tau_+}, \\
(HX^1)^2 + \dots + (HX^{D-1})^2 &= (Hx_+^i)^2 e^{2H\tau_+}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Введем следующие координаты x_i :

$$\begin{aligned}
HX^0 &= -\sinh(H\tau_+) + \frac{(Hx_+^i)^2}{2} e^{H\tau_+}, \\
X^i &= x_+^i e^{H\tau_+}, \quad i = 1, \dots, D-1, \\
HX^D &= -\cosh(H\tau_+) + \frac{(Hx_+^i)^2}{2} e^{H\tau_+}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Мы получаем следующую метрику

$$ds_+^2 = -d\tau_+^2 + e^{2H\tau_+} d\vec{x}_+^2. \tag{2.9}$$

Легко понять, почему эти координаты не покрывают все пространство. Действительно, заметим, что $-X_0 + X_D = -\frac{1}{H}e^{-H\tau_+} < 0$, $X_D < X_0$. Поэтому эти координаты описывают только половину пространства де-Ситтера $X_D - X_0 < 0$. Так как $a(\tau_+) = e^{H\tau_+}$ - экспоненциально растет, эта часть пространства называется расширяющейся Пуанкаре картой. Аналогично можно ввести координаты (τ_-, \vec{x}_-) ,

которые покрывают другую половину гиперболоида. Для неё метрика выглядит следующим образом:

$$ds_-^2 = -d\tau_-^2 + e^{-2H\tau_-} d\vec{x}_-^2. \quad (2.10)$$

Так как в данном случае $a(\tau_-)$ экспоненциально убывает, эту часть называют сжимающейся Пуанкаре картой. В дальнейшем, мы будем в основном изучать квантовую теорию поля в расширяющейся Пуанкаре карте и считать для удобства $H = 1$. Полезно привести метрику (2.9) к конформному виду. Введя конформное время $\eta = e^{-\tau_+}$, мы получаем следующую формулу для метрики

$$ds_+^2 = \frac{-d\eta^2 + d\vec{x}^2}{\eta^2}. \quad (2.11)$$

Отметим, что бесконечному будущему соответствует $\eta(+\infty) = 0$, а бесконечному прошлому — $\eta(-\infty) = +\infty$, то есть η уменьшается с течением времени.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести понятия физического и сопутствующего объема [87]. Первый определяется как произведение дифференциалов пространственных координат $d^{D-1}V$, а второй как $\sqrt{g_{\text{пр}}}d^{D-1}V$, где $\sqrt{g_{\text{пр}}}$ — детерминант пространственной части метрики. Если рассматривать невзаимодействующую материю, к примеру, пыль, то число частиц в сопутствующем объеме, т.е. просто плотность $\rho = \frac{dN}{dV}$, не меняется, тогда как по отношению к физическому объему она будет зависеть от времени как, $\rho_{\text{ph}} = \frac{\rho}{\sqrt{g_{\text{пр}}}}$, и в расширяющейся Пуанкаре карте экспоненциально убывать со временем.

2.1.1 Диаграмма Пенроуза для пространства де-Ситтера

Как известно, с помощью диаграммы Пенроуза можно понять как устроена причинная структура пространства-времени [68],[87]. Поэтому в этом параграфе мы нарисуем диаграмму Пенроуза для пространства де-Ситтера. Сделаем замену переменных в метрике (2.6) от координаты t к координате θ :

$$\cosh^2(Ht) = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Тогда метрика запишется в следующем виде:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \cos^2 \theta} [-d\theta^2 + d\Omega_{D-2}^2].$$

Эта метрика конформно эквивалентна статической вселенной Эйнштейна $ds_{\text{ESU}}^2 =$

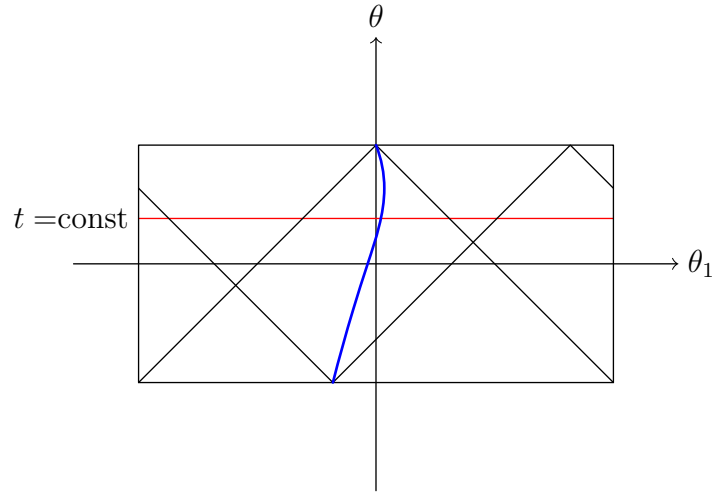


Рис. 2.1: Диаграмма Пенроуза для двумерного пространства де-Ситтера. Синей линией изображено движение наблюдателя. Верхний конус - это область пространства куда он может передать информацию, нижний конус показывает откуда он может получить информацию.

$-d\theta^2 + d\Omega_{D-1}^2$, с компактным временем $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Можно сказать, что мы сделали стереографическую проекцию пространства де-Ситтера на статическую вселенную Эйнштейна. Так как они конформно эквивалентны, то их причинные структуры совпадают. Рассмотрим причинную структуру двумерного пространства де-Ситтера (с более высокими размерностями возникают проблемы, которые можно решить, но для простоты мы решили здесь рассмотреть только двумерное пространство де-Ситтера, так как оно демонстрирует все качественные свойства). Метрика тогда запишется в следующей форме

$$ds^2 = -d\theta^2 + d\theta_1^2, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta_1 \in [-\pi, \pi].$$

Соответствующая диаграмма Пенроуза изображена на рисунке (2.1).

2.2 Свободное скалярное поле в пространстве де-Ситтера

В данном параграфе мы обсудим поведение свободных скалярных полей в расширяющейся Пуанкаре карте пространства де-Ситтера и глобальном де-Ситтере [68],[11],[7],[87],[17]. Действие теории свободного скалярного поля имеет следующий

вид:

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + m^2 \phi^2]. \quad (2.12)$$

Варьированием этого действия мы получаем уравнения движения для скалярного поля. В случае расширяющейся Пуанкаре карты мы получаем следующее уравнение:

$$[-\eta^2 \partial_\eta^2 + (D-2) \eta \partial_\eta + \eta^2 \Delta - m^2] \phi(\eta, \vec{x}) = 0. \quad (2.13)$$

Где $\Delta = \sum_{i=1}^{D-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — обычный лапласиан в плоском $(D-1)$ – пространстве Минковского. Можно заметить, что данные уравнения верны и для сжимающейся Пуанкаре карты. Так как метрика не зависит от пространственных координат, мы делаем преобразование Фурье: $\phi(\eta, \vec{x}) = h(p\eta) \eta^{\frac{D-1}{2}} e^{\pm i \vec{p} \vec{x}}$, где фактор $\eta^{\frac{D-1}{2}}$ был внесен для упрощения дальнейших уравнений, и $p = |\vec{p}|$. В итоге получается уравнение Бесселя на $h(p\eta)$ с индексом $\mu = \sqrt{m^2 - \left(\frac{D-1}{2}\right)^2}$ (как было сказано ранее мы положили $H = 1$):

$$[\eta^2 \partial_\eta^2 + \eta \partial_\eta + (p\eta)^2 + \mu^2] h(p\eta) = 0. \quad (2.14)$$

Общее решение данного уравнения имеет следующие асимптотики:

$$h(p\eta) = \begin{cases} A \frac{e^{ip\eta}}{\sqrt{p\eta}} + B \frac{e^{-ip\eta}}{\sqrt{p\eta}}, & p\eta \rightarrow \infty, \\ C (p\eta)^{i\mu} + D (p\eta)^{-i\mu}, & p\eta \rightarrow 0. \end{cases}$$

Где A, B, C, D — некоторые комплексные числа. Стоит отметить, что если переписать данные асимптотики в координатах (τ_+, \vec{x}_+) , то гармоники в бесконечном будущем ($\eta \rightarrow 0$) ведут себя как плоские волны $(p\eta)^{\pm i\mu} \sim e^{\pm i\mu\tau}$, частота которых зависит только от массы, но не от импульса p .

Как видно здесь есть две различные ситуации: $m < \frac{D-1}{2}$ и $m > \frac{D-1}{2}$. В первом случае, который называется случаем легких полей, в бесконечном будущем гармоника стремится к нулю степенным образом по конформному времени η , $\phi(p\eta) \sim \eta^{\frac{D-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(D-1)^2}{4} - m^2}} \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$. Вторая ситуация называется случаем тяжелых полей, и в бесконечном будущем гармоники осциллируют и падают степенным образом по конформному времени $\phi(p\eta) \sim \eta^{\frac{D-1}{2} \pm i\mu} \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$, а $h(p\eta) \rightarrow (p\eta)^{i\sqrt{\frac{m^2 - (D-1)^2}{4}}}$ просто осциллирует.

Константы A, B, C, D связаны некоторыми соотношениями (которые могут быть получены путем решения уравнения (2.14) или использования коммутационных соотношений). Эти соотношения могут быть нетривиальными. К примеру, решения

вида $h(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi\mu)}} J_{i\mu}(x)$ и $h(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi\mu)}} Y_{i\mu}(x)$ соответствуют случаям когда $C = 1, D = 0$ и $C = 0, D = 1$ соответственно. Но если разложить эти решения в бесконечном прошлом $\eta = \infty$, то A и B будут оба отличны от нуля. Так как они ведут себя как плоские волны в бесконечном будущем, мы будем называть эти решения — аут-гармониками, а соответствующие этим гармоникам состояния как аут-состояния. Аналогично можно определить и ин-гармоники: $h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi\mu}{2}} H_{i\mu}^{(1)}(x)$ или $h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi\mu}{2}} H_{i\mu}^{(2)}(x)$, также их называют гармониками Банча-Девиса. Соответствующий вакуум данных гармоник называют состоянием Банча-Девиса. Для этих гармоник $A = 1, B = 0$ и $A = 0, B = 1$ соответственно. При разложении их по аут-гармоникам в бесконечном будущем $\eta = 0$ возникают C и D , которые оба отличны от нуля.

Для дальнейших рассуждений возьмем опять произвольное решение $h(p\eta)$ и разложим поле ϕ используя соответствующие гармоники:

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} \eta^{\frac{D-1}{2}} [a_{\vec{p}} h(p\eta) e^{-i\vec{p}\vec{x}} + \text{h.c.}], \quad (2.15)$$

где операторы рождения $a_{\vec{p}}^\dagger$ и уничтожения $a_{\vec{p}}$ удовлетворяют обычной алгебре Гейзенберга $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q})$. Можно легко проверить, что тогда сопряженный импульс $\pi(\vec{x}, \eta) = \sqrt{|g|} g^{00} \partial_\eta \phi(\vec{x}, \eta)$ и поле $\phi(\vec{x}, t)$ удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ при корректной нормировке гармоник.

После этого мы строим гамильтониан для данной системы, используя преобразование Лежандра

$$H(\eta) = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} [A_p(\eta) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + B_p(\eta) a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + \text{h.c.}], \quad (2.16)$$

$$\text{где } A_p(\eta) = \frac{1}{2\eta^2} \left\{ \left| \frac{dg_p}{d\eta} \right|^2 + \left[p^2 + \frac{m^2}{\eta^2} \right] |g_p|^2 \right\}$$

$$\text{и } B_p(\eta) = \frac{1}{2\eta^2} \left\{ \left(\frac{dg_p}{d\eta} \right)^2 + \left[p^2 + \frac{m^2}{\eta^2} \right] g_p^2 \right\}.$$

Гамильтониан явно зависит от времени. Также ясно, что он является диагональным только если $B_p(\eta) = 0$ (тогда у нас будет ясное представление о квази-частицах как состоянии с определенной энергией). Можно показать, что условию $B_p(\eta) = 0$ не удовлетворяет ни одно решение уравнений Клейна-Гордона. Тем не менее условие $B_p(\eta) = 0$ выполняется для ин-гармоник в пределе $\eta \rightarrow +\infty$, и можно обсуждать

понятие частицы в бесконечном прошлом. Тогда как в бесконечном будущем такой возможности нет. Это можно объяснить тем, что масштабный фактор в бесконечном будущем становится очень большим $a(\eta) \rightarrow \infty$. Из-за этого любая гармоника в бесконечном будущем становится низкоэнергетической и начинает чувствовать кривизну пространства-времени. Поэтому гармоника сильно деформируется и невозможно ввести понятие частицы в бесконечном будущем. Также оказывается, что $B_p(\eta)$ не выходит на постоянное значение, которое можно было бы занулить сделав соответствующее преобразование Боголюбова.

В дальнейшем нам не хотелось бы обсуждать понятие частицы в пространстве де-Ситтера, и поэтому мы предлагаем изучать только корреляционные функции и их свойства. Но если будет возможность ввести хорошее определение частицы, то мы попытаемся дать интерпретацию полученных результатов в терминах частиц и различных процессов связанных с ними.

Обсудим кратко свойства гармоник в глобальном де – Ситтере. Уравнения движения, получающиеся варьированием действия (2.12), имеют следующий вид:

$$\left[-\partial_t^2 + (D-2) \tanh(t) \partial_t + \frac{\Delta_{D-1}(\Omega)}{\cosh^2(t)} - m^2 \right] \phi(t, \Omega) = 0. \quad (2.17)$$

Где $\Delta_{D-1}(\Omega)$ - $(D-1)$ -мерный сферический лапласиан. Поэтому удобно разложить поле ϕ по сферическим $(D-1)$ - мерным гармоникам $\phi(t, \Omega) = g_j(t) Y_{j, \vec{m}}(\Omega)$, для которых $\Delta_{D-1} Y_{j, \vec{m}}(\Omega) = -j(j+D-2) Y_{j, \vec{m}}(\Omega)$, где \vec{m} – вес данного представление группы $SO(D-1)$, а $j(j+D-2)$ - значение квадратичного Казимира в этом представлении. Подставляя данное разложение по гармоникам в уравнение (2.17) и решая его, мы получаем, например, следующее решение

$$g_j^{\text{in}}(t) = \frac{2^{j+\frac{D}{2}-1}}{\sqrt{\mu}} \cosh^j(t) e^{(j+\frac{D-1}{2} \pm i\mu)t} {}_2F_1 \left(j + \frac{D-1}{2}, j + \frac{D-1}{2} \mp i\mu; 1 \mp i\mu; -e^{2t} \right), \quad (2.18)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Если рассмотреть асимптотики данного решения при $t \rightarrow -\infty$, то можно увидеть, что она ведет себя как плоская волна $e^{-i\mu t + \frac{D-1}{2}t}$, поэтому его мы будем называть ин-гармоникой. Раскладывая в бесконечном будущем, мы получим решение, которое является линейной комбинацией плоских волн $g_j^{\text{in}}(t) \sim e^{\frac{D-1}{2}t} (C_1 e^{-i\mu t} + C_2 e^{i\mu t})$, где C_1, C_2 - некоторые комплексные числа, которые оба отличны от нуля. Таким же образом можно определить и аут-гармоники.

Кроме того, есть выбор гармоник соответствующий аналитическому продолжению со сферы $X_0 \rightarrow i\tilde{X}_0$ (при такой замене гиперboloид превращается в сферу):

$$g_j^{(E)}(t) = \frac{2^{j+\frac{D}{2}-1} i^{-j+\frac{D-1}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cosh^j(t) e^{(j+\frac{D-1}{2}\pm i\mu)t} \times \\ \times {}_1F_2 \left(j + \frac{D-1}{2}, j + \frac{D-1}{2} \pm i\mu; 2j + D - 1; 1 + e^{2t} \right). \quad (2.19)$$

Данные гармоники называются Евклидовыми, а соответствующий вакуум Евклидовым. Пропагатор для данного выбора гармоник получается путем аналитического продолжения по Z с Евклидового аналога пространства де-Ситтера — D -мерной сферы.

С помощью этого решения можно построить другой набор:

$$\phi_{j,\bar{m}}^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{\alpha+\alpha^*}}} \left[\phi_{j,\bar{m}}^{(E)}(X) + e^\alpha \bar{\phi}_{j,\bar{m}}^{(E)}(X) \right]. \quad (2.20)$$

Данные гармоники зависят от комплексного параметра α и называются α -гармониками, а соответствующий вакуум — α -вакуумом. При должном выборе α мы получаем указанные выше ин- и аут- гармоники. Например, выбору $\alpha = -\infty$ соответствует выбор Евклидовых гармоник.

Опять выберем произвольные гармоники, которые решают уравнение Клейна-Гордона (2.17), и посмотрим как в них записывается гамильтониан

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,\bar{m}} \left[A_j(t) a_{j,\bar{m}}^\dagger a_{j,\bar{m}} + B_j(t) a_{j,\bar{m}} a_{j,-\bar{m}} + \text{h.c.} \right], \quad (2.21)$$

где $A_j(t) = \frac{\cosh^3(t)}{2} \left\{ |\dot{g}_j|^2 + \left[\frac{L(L+2)}{\cosh^2(t)} + m^2 \right] |g_j(t)|^2 \right\}$
и $B_j(t) = \frac{\cosh^3(t)}{2} \left\{ \dot{g}_j^2 + \left[\frac{L(L+2)}{\cosh^2(t)} + m^2 \right] g_j(t)^2 \right\} e^{i\phi}$.

Так как в глобальном де-Ситтере гравитационное поле сильно и в бесконечном прошлом, и в бесконечном будущем, мы не можем определить гармоники, которые будут диагонализировывать гамильтониан в этих пределах.

2.3 Корреляционные функции в пространстве де-Ситтера

Как обсуждалось выше, мы в основном будем интересоваться свойствами корреляционных функций. Рассмотрим, к примеру, функцию Вайтмана $\langle \phi(X_1) \phi(X_2) \rangle$.

Из-за наличия большой группы изометрии можно предположить, что $G(X_1, X_2)$ является только функцией геодезического расстояния $Z = Z_{12} = g_{AB}X_1^A X_2^B$, т.е. $G(X_1, X_2) = G(g_{AB}X_1^A X_2^B)$. Тогда функция Вайтмана удовлетворяет следующему гипергеометрическому уравнению:

$$[(Z^2 - 1) \partial_Z^2 + DZ \partial_Z + m^2] G(Z) = 0, \quad (2.22)$$

которое следует из уравнения Клейна - Гордона для скалярного поля в пространстве де-Ситтера $(\square + m^2) G(X, Y) = 0$.

Решениями данного уравнения являются [4],[5],[6],[70]:

$$G_W(Z) = A {}_1F_2 \left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1+Z}{2} \right) + \\ + B {}_1F_2 \left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1-Z}{2} \right). \quad (2.23)$$

Где A и B — некоторые действительные константы. Подставляя α -гармоники (2.20) в определение функции Вайтмана можно получить, что выбор A и B в (2.23) соответствует выбору различных альфа-вакуумов

$$G_W^{(\alpha)}(X, Y) = \langle \text{vac} | \phi(X) \phi(Y) | \text{vac} \rangle = \sum_{j, \vec{m}} \phi_{j, \vec{m}}^{(\alpha)}(X) \phi_{j, \vec{m}}^{(\alpha)*}(Y) = G_W^{(\alpha)}(Z_{XY}) = \\ = \frac{1 + e^{\alpha + \alpha^*}}{1 - e^{\alpha + \alpha^*}} {}_1F_2 \left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1+Z}{2} \right) + \\ + \frac{e^{\alpha} + e^{\alpha^*}}{1 - e^{\alpha + \alpha^*}} {}_1F_2 \left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1-Z}{2} \right). \quad (2.24)$$

К примеру, выбору $\alpha = -\text{inf}$ соответствует выбор Евклидовых гармоник и корреляционной функций будет

$$G_E(Z) = {}_1F_2 \left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1+Z}{2} \right) \quad (2.25)$$

Можно сравнить (2.24) с двухточечной корреляционной функцией в расширяющейся Пуанкаре карте. Опять используя явное определение ϕ через операторы рождения-уничтожения и вакуума как $a_{\vec{p}} | \text{vac} \rangle = 0$, мы получаем:

$$G_W^{PP}(x_1, x_2) = \langle \text{vac} | \phi(x_1, \eta_1) \phi(x_2, \eta_2) | \text{vac} \rangle = \\ = \int \frac{d^{D-1} \vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} (\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} h(p\eta_1) h^*(p\eta_2) = G_W^{PP}(Z(x_1, x_2)). \quad (2.26)$$

Функция $G_W^{PP}(x_1, x_2)$ является функцией только геодезического расстояния $Z(x_1, x_2) = 1 + \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}{2\eta_1 \eta_2}$, которое мы выразили через конформные координаты расширяющейся Пуанкаре карты. Можно показать, что различный выбор гармоник $h(p\eta)$

в расширяющейся Пуанкаре карте соответствует различному выбору гармоник в глобальном де-Ситтере. В частности, легко проверить, что вакуум Банча-Девиса соответствует выбору $A_2 = 0$ в формуле (2.23), то есть выбору евклидова вакуума.

Особыми точками решения (2.23) являются $Z = \pm 1, \infty$. Возникающие расходимости необходимо разрешить для дальнейших вычислений. Сейчас мы обсудим, как это можно сделать.

Обсудим случай Евклидова вакуума. Легко увидеть, что у соответствующего пропагатора (2.25) отсутствует расходимость при $Z = -1$. Расходимость при $Z \rightarrow 1$, которая возникает только у первой функции в уравнении (2.23), которую мы обозначили как $G_E(Z)$, соответствует расходимости, которая всегда возникает в квантовой теории поля. Чтобы увидеть это заметим, что $Z = 1$ соответствует точкам, находящимся на траектории светового луча. Поэтому это обычная расходимость возникающая в пространстве Минковского для точек пространства-времени разделенных светоподобным интервалом. Действительно, если посмотреть на асимптотику $Z \rightarrow 1$ мы получаем

$$G_W(Z) \sim \frac{1}{(1-Z)^{\frac{D}{2}-1}} \sim \frac{1}{L^{\frac{D}{2}-1}}, \quad (2.27)$$

где L - соответствующее геодезическое расстояние. Так же ведет себя и $\langle \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \rangle$ в пространстве Минковского в пределе $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$. Тогда требуя, чтобы при $Z \rightarrow 1$ функция вела себя как соответствующая двухточечная корреляционная функция в пространстве Минковского, мы получаем

$$G_E(Z) = G_E(Z - i\epsilon\Delta t). \quad (2.28)$$

Аналогично можно получить и Фейнмановский пропагатор для Евклидова вакуума как

$$G_E^T(Z) = G_E(Z - i\epsilon) \quad (2.29)$$

Стоит отметить, что в пределе $Z \rightarrow \infty$ (2.23) спадает степенным образом [4],[6]:

$$G_W(Z) = Z^{-\frac{D-1}{2}} (C_+ Z^{i\mu} + C_- Z^{-i\mu}),$$

Где C_+, C_- — некоторые комплексные константы. Для α -вакуумов есть расходимость при $Z = -1$. Но для неё $i\epsilon$ -прескрипцию нельзя зафиксировать на основе аналогичных рассуждений, так как в пространстве Минковского нет аналогичной проблемы.

2.4 Инвариантность петлевых поправок относительно группы изометрий пространства де-Ситтера

Как было показано, гамильтониан для скалярного поля в глобальном де-Ситтере и расширяющейся Пуанкаре карте явно зависят от времени. Поэтому, с необходимостью, нужно использовать диаграммную технику Келдыша-Швингера. Рассмотрим, как ведут себя петлевые поправки в теории скалярного поля с взаимодействием $\lambda\phi^3$ (для другого типа взаимодействия полученные результаты доказываются аналогично). Для начала, рассмотрим петлевые поправки для вакуума Банча-Девиса в расширяющейся Пуанкаре карте. Покажем, что поправки сохраняют инвариантность пространства де-Ситтера. Однопетлевая поправка имеет следующий вид:

$$G^2_{\sigma_1\sigma_2} = \sum_{\sigma_3, \sigma_4 = \pm \sigma_1} \begin{array}{c} \text{---} \sigma_3, W \\ \bullet \\ \text{---} \sigma_1, X \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \sigma_4, U \\ \bullet \\ \text{---} \sigma_2, Y \end{array} \quad (2.30)$$

Расписывая явно данную диаграмму, мы получаем следующие поправки к пропагаторам:

$$\hat{G}^2(Z_{XY}) = \lambda^2 \int [dW] \int [dU] \hat{G}^0(Z_{XW}) \hat{\Sigma}^0(Z_{WU}) \hat{G}^0(Z_{UY}) \quad (2.31)$$

Где

$$\hat{G}^{0,2}(Z) = \begin{pmatrix} G_{++}^{0,2}(Z) & G_{+-}^{0,2}(Z) \\ G_{-+}^{0,2}(Z) & G_{--}^{0,2}(Z) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

и

$$\hat{\Sigma}^0(Z) = \begin{pmatrix} -[G_{++}^0(Z)]^3 & [G_{+-}^0(Z)]^3 \\ [G_{-+}^0(Z)]^3 & -[G_{--}^0(Z)]^3 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

А мера интегрирования получается ограничением формы объема объемлющего пространства Минковского на часть гиперлоида де-Ситтера, соответствующую расширяющейся Пуанкаре карте $X_0 > X_D$:

$$[dX] = d^{D+1} X \delta(X^A X_A - 1) \theta(X^0 - X^D).$$

Легко проверить, что форма объема в терминах координат на гиперboloиде записывается как $[dX] = \sqrt{g}d^Dx = \eta_+^{-D}d\eta_+d^{D-1}\vec{x}_+$. Можно заметить, что формулы (2.31)–(2.33) будут верны и для любого другого выбора гармоник.

Как обсуждалось в предыдущем параграфе, можно легко вычислить пропагаторы для вакуума Банча-Девиса (2.23):

$$\begin{aligned} G_{++}^0(Z) &= G(Z + i\epsilon), & G_{+-}^0(Z) &= G(Z - i\epsilon\Delta\eta), \\ G_{--}^0(Z) &= G(Z - i\epsilon), & G_{-+}^0(Z) &= G(Z + i\epsilon\Delta\eta). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Где $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$, а $G_Z = {}_1F_2\left(\frac{D-1}{2} + i\mu, \frac{D-1}{2} - i\mu; \frac{D}{2}; \frac{1+Z}{2}\right)$, которая была введена в предыдущем разделе. Ясно, что те генераторы группы изометрий де-Ситтера $SO(D, 1)$, которые не действуют на X_0 или X_D , не меняют (2.31). Остается проверить инвариантность относительно генераторов, которые действуют на X_0 или X_D . Проверим, что однопетлевая поправка (2.31) инвариантна под действием генератора $\hat{\Gamma}_{X_D X_1}$, отвечающего за поворот в плоскости $X_D X_1$, $X_D \rightarrow X_D - \psi X_1$, $X_1 \rightarrow X_D + \psi X_1$. Только мера интегрирования, которая не является инвариантной относительно полной группы изометрий де-Ситтера, может привести к потере инвариантности в петлевых вычислениях. Под действием генератора вращений $\hat{\Gamma}_{X_D X_1}$, мера преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{X_D X_1} \int [dX] &= \int d^{D+1}X \delta(X^A X_A - 1) \delta(X^0 - X^D) \psi X^1 = \\ &= \int d(X^0 + X^D) d^{D-1}X \delta\left(\sum_{i=1}^{D-1} X^i X_i - 1\right) \psi X^1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Так как $X^0 + X^D$ не входит в дельта-функцию $\delta(X^a X_a - 1)$, по этой переменной будет интегрирование ведется по всей числовой прямой \mathbb{R} . Так как мы рассматриваем действие линейного генератора, то $\hat{\Gamma}_{X_D X_1}$ будет действовать на $[dW]$ и $[dU]$ по отдельности

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{X_D X_1} \hat{G}^2(Z_{XY}) &= \int \lambda^2 \int \hat{\Gamma}_{X_D X_1}[dW] \int [dU] \hat{G}^0(Z_{XW}) \hat{\Sigma}^0(Z_{WU}) \hat{G}^0(Z_{UY}) + \\ &+ \int \lambda^2 \int [dW] \int \hat{\Gamma}_{X_D X_1}[dU] \hat{G}^0(Z_{XW}) \hat{\Sigma}^0(Z_{WU}) \hat{G}^0(Z_{UY}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Рассмотрим подробнее первый член (2.36) (второй рассматривается аналогично). Как было показано, в преобразованной мере в первом порядке по ψ возникает интегрирование по $d(W^0 + W^D)$. Геодезическое расстояние от X до W выражается следующим образом

$$Z_{XW} = -\frac{1}{2}(X^0 - X^D)(W^0 + W^D) - \frac{1}{2}(X^0 + X^D)(W^0 - W^D) + X^a W^a. \quad (2.37)$$

Так как в (2.35) возникает дельта-функция $\delta(W^0 - W^D)$, то точка W находится на плоскости $W^0 - W^D = 0$ и положение на этой плоскости зависит только от суммы $W^0 + W^D$ и W^a , $a = 1, \dots, D - 1$. Также $\frac{1}{\eta_w} = W^D - W^0 \rightarrow \eta_w = +\infty$, поэтому точка W находится в бесконечном прошлом относительно координат на расширяющейся Пуанкаре карте. Если в бесконечном прошлом не было никаких особенностей (скажем инфракрасных расходимостей), то можно положить $\eta_w = +\infty$ во всех формулах. Аналогичное рассуждение будет верно и для Z_{WU} . При этом все пропагаторы (2.4) имеют определенную $i\epsilon$ -прескрипцию и являются аналитическими функциями комплексной переменной $W^0 + W^D$. Тогда всё подынтегральное выражение первого члена в (2.36) является аналитической функцией переменной $W^0 + W^D$, по которой и ведется интегрирование.

Как было объяснено ранее, у функции $G^{\pm\mp}(Z)$ есть особенность при $Z = 1$. Рассматривая подынтегральное выражение (2.36) как аналитическую функцию от $W^0 + W^D$, это приводит к тому, что у неё тоже появляются особенности при $Z_{XW} = 1$ или $Z_{WU} = 1$. Посмотрим внимательнее на структуру этих особенностей у первого члена в формуле (2.31)

$$\begin{aligned} & \hat{\Gamma}_{X_D X_1} G_{-+}^1(Z_{XY}) = \\ & = \dots \int d(W^0 + W^D) G^{-+}(Z_{XW} [W^0 + W^D] + i\epsilon) G^{++}(Z_{WU} [W^0 + W^D] + i\epsilon) \dots, \end{aligned}$$

где $Z_{WU} [W^0 + W^D]$ есть геодезическое расстояние как функция $W^0 + W^D$ при фиксированных остальных координатах. Здесь мы выделили часть зависящую только от $W^0 + W^D$. Заметим, что особенности во всех пропагаторах смещены в вниз по отношению к контуру интегрирования по $W^0 + W^D$. Так как геодезическое расстояние $Z \rightarrow \infty$ в пределе $W^0 + W^D \rightarrow \infty$, а пропагаторы спадают степенным образом, когда геодезическое расстояние уходит в бесконечность, мы можем замкнуть контур интегрирования сверху или снизу. Замыкая контур интегрирования сверху, мы видим, что внутри него особенностей нет, и интеграл по теореме Коши будет равен нулю. То есть поправка (2.31) не изменяется под действием генератора $\hat{\Gamma}_{X_D X_1}$.

Данное рассуждение будет оставаться верным и при суммировании более высоких поправок по теории возмущений. Действительно, как легко заметить, опять нам придется проверить инвариантность относительно действий генератора вращений в плоскости $X_1 X_D$. Проблемы могут возникнуть, когда происходит преобразование меры интегрирования внутренних точек. Проведя аналогичные рассуждения

мы получим, что каждый вклад опять инвариантен относительно полной группы изометрий пространства де-Ситтера.

Стоит отметить несколько важных замечаний по поводу этого рассуждения. Мы опирались здесь на несколько ключевых моментов:

1. Отсутствие расходимостей при $W^0 - W^D = 0$, что соответствует относительно расширяющейся Пуанкаре карты отсутствию расходимостей в бесконечном прошлом. В следующих разделах будет показано, что в расширяющейся Пуанкаре карты таких расходимостей нет, но есть инфракрасно большие вклады в будущем. Но для сжимающейся Пуанкаре карте, такие расходимости будут. И в сжимающейся Пуанкаре карте полная группа изометрий пространства де-Ситтера нарушается в петлях для любого начального состояния.
2. Все особенности при интегрировании по переменной $W^0 + W^D$ смещены в одну сторону от действительной прямой. Как видно, этому условию удовлетворяет только вакуум Банча-Девиса. Для других вакуумов, скажем α -вакуумов, разрезы в плоскости Z будут сдвигаться в разные стороны, приводя к появлению вкладов нарушающих группу изометрий пространства де-Ситтера.
3. Все пропагаторы являются функцией геодезического расстояния $G(Z)$, данное условие нарушается если мы будем изучать возбужденное состояние. Возникает естественный вопрос о стабильности вакуума Банча-Девиса. Если мы возбудим его, то де-Ситтеровская инвариантность может и не восстановиться. К этому вопросу мы вернемся в параграфе про суммирование лидирующих инфракрасных вкладов, где данный вопрос будет разрешен.

2.5 Петлевые поправки в расширяющейся Пуанкаре карте

В этом параграфе мы явно вычислим петлевые поправки к Келдышевскому пропагатору в расширяющейся Пуанкаре карте, используя технику развитую в первой главе. В первую очередь, заметим, что расширяющаяся Пуанкаре карта инвариантна относительно пространственных сдвигов $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$, что ведет к закону сохранения импульса. Поэтому мы будем рассматривать только простран-

ственно - однородные состояния. Это ведет к некоторым упрощениям. К примеру, это означает, что все пропагаторы зависят только от разницы пространственных координат $D^*(\vec{x}, \eta_x, \vec{y}, \eta_y) = D^*(\vec{x} - \vec{y}, \eta_x, \eta_y)$. Поэтому по этой разнице удобно сделать преобразование Фурье и рассматривать все в импульсном представлении $D^*(\vec{p}, \eta_x, \eta_y) = \int d^D \vec{x} e^{-i\vec{p}\vec{x}} D^*(\vec{x}, \eta_x, \eta_y)$. Далее, это означает, что заселенность уровней и аномальное квантовое средние, которые, как было показано ранее, в ситуации общего положения должны зависеть от двух аргументов \vec{p}, \vec{p}' , на самом деле зависят только от одного аргумента $n_{\vec{p}\vec{p}'} = n_{\vec{p}} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$, $\varkappa_{\vec{p}\vec{p}'} = \varkappa_{\vec{p}} \delta(\vec{p} + \vec{p}')$.

Также мы будем интересоваться только пределом больших времен, который соответствует $\eta_i \rightarrow 0$ (напомним, что бесконечному будущему в расширяющейся Пуанкаре карте соответствует $\eta = 0$). Как было объяснено в первой главе, все ультрафиолетовые расходимости могут быть впоследствии собраны в перенормировку массы и константы взаимодействия, поэтому мы их изучать не будем. Также остается верным рассуждение о малости поправок к запаздывающему и опережающему пропагаторам $D^{\frac{R}{A}}(\vec{p}, \eta_1, \eta_2)$. Поэтому остается изучить только поправки к Келдышевскому пропагатору и вершине.

2.5.1 Петлевые поправки к пропагатору Келдыша

В данном параграфе мы будем рассматривать только тяжелые поля $m > \frac{D-1}{2}$ с взаимодействием $\lambda\phi^4$. В этом случае можно использовать формулы, которые мы получили в первой главе. Единственным отличием данной ситуации от описанной в первой главе является то, что конформное время η отличается от глобального времени $dt = -\frac{d\eta}{\eta}$. Учет этого факта приводит к наличию знака минус в формулах (1.49) и (1.50) [53]:

$$\begin{aligned}
n(p\eta) &= \tag{2.38} \\
&= -\frac{2\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \int d^{D-1} \vec{q}_2 \int d^{D-1} \vec{q}_3 \int \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_3 d\eta_4 (\eta_3 \eta_4)^{D-2} \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \times \\
&\quad \times h^*(p\eta_3) h(p\eta_4) h^*(|\vec{q}_1| \eta_3) h(|\vec{q}_1| \eta_4) h^*(|\vec{q}_2| \eta_3) h(|\vec{q}_2| \eta_4) h^*(|\vec{q}_3| \eta_3) h(|\vec{q}_3| \eta_4), \\
\varkappa(p\eta) &= \\
&= \frac{4\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int d^{D-1} \vec{q}_1 \int d^{D-1} \vec{q}_2 \int d^{D-1} \vec{q}_3 \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_3 \int_{\eta_0}^{\eta_3} d\eta_4 (\eta_3 \eta_4)^{D-2} \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \times \\
&\quad \times h^*(p\eta_3) h^*(p\eta_4) h^*(|\vec{q}_1| \eta_3) h(|\vec{q}_1| \eta_4) h^*(|\vec{q}_2| \eta_3) h(|\vec{q}_2| \eta_4) h^*(|\vec{q}_3| \eta_3) h(|\vec{q}_3| \eta_4).
\end{aligned}$$

Где η_0 - момент включения взаимодействия. Также мы использовали факт, что, хотя полная де-Ситтеровская инвариантность может нарушаться, в расширяющейся Пуанкаре карте остается инвариантность при одновременном растяжении по времени и координатам $\eta \rightarrow e^\phi \eta, \vec{x} \rightarrow e^\phi \vec{x}$. Поэтому функции $n(p\eta), \varkappa(p\eta)$ будучи безразмерными, могут зависеть только от произведения p и η , чтобы уважать данную симметрию (которая образует подгруппу в полной группе изометрий пространства де-Ситтера).

Также в первой главе было показано, что для плоских гармоник эти выражения тождественно равны нулю из-за закона сохранения энергии. В случае пространства де-Ситтера нет инвариантности по отношению к трансляциям по времени, поэтому возможно возникновение ненулевых $n(p\eta)$ и $\varkappa(p\eta)$. Но так как при $\eta \rightarrow +\infty$ гравитационное поле слабое, существуют гармоники Банча-Девиса, которые диагонализуют гамильтониан. Поэтому для данного p до момента $\eta \sim \frac{\mu}{p}$ заселенность уровней энергий и аномальное квантовое среднее не растут для вакуума Банча-Девиса. Но если выбрать другой вакуум, в котором

$$h(p\eta) = C_+ \frac{e^{i p \eta}}{\sqrt{p \eta}} + C_- \frac{e^{-i p \eta}}{\sqrt{p \eta}}, \quad (2.39)$$

то рост неизбежно начнется, как обсуждалось в последнем параграфе первой главы.

При $p\eta \gtrsim \mu$ гармоники меняют свое поведение, и начинается рост n и \varkappa . Для проверки этого утверждения, возьмем гармоники Банча-Девиса в пределе $p\eta \rightarrow 0$

$$h(p\eta) = A_+ (p\eta)^{i\mu} + A_- (p\eta)^{-i\mu}, \text{ где } A_{\pm} = \frac{\sqrt{\pi} e^{\pm \frac{\pi\mu}{2}}}{2^{\pm i\mu + \frac{1}{2}} \Gamma(1 \pm i\mu) \sinh(\pm \pi\mu)} \quad (2.40)$$

Сделаем замену переменных в формулах (2.38) $u = \sqrt{\eta_3 \eta_4}, \vec{l}_i = u \vec{q}_i$ и $v = \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_4}}$. Где l_i имеет смысл физического импульса. Также пренебрежем в законе сохранения импульса внешним импульсом \vec{p} , так как основной вклад в n и \varkappa дают $|\vec{q}_i| \gg |\vec{p}|$.

Тогда (2.38) переписется в следующей форме:

$$n(p\eta) = -\frac{2\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int_{p\eta}^{\mu} \frac{du}{u} \int_0^{\infty} dv v^{-1} [|A_+|^2 v^{-2i\mu} + |A_-|^2 v^{2i\mu}] \int d^{D-1} \vec{l}_1 \int d^{D-1} \vec{l}_2 \times \\ \times h^* \left(|\vec{l}_1| v \right) h \left(|\vec{l}_1| v^{-1} \right) h^* \left(|\vec{l}_2| v \right) h \left(|\vec{l}_2| v^{-1} \right) h^* \left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v \right) h \left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v^{-1} \right)$$

и

$$\varkappa(p\eta) = \frac{2\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int_{p\eta}^{\mu} \frac{du}{u} \int_0^1 dv v^{-1} A_+ A_- [v^{-2i\mu} + v^{2i\mu}] \int d^{D-1} \vec{l}_1 \int d^{D-1} \vec{l}_2 \times \\ \times h^* \left(|\vec{l}_1| v \right) h \left(|\vec{l}_1| v^{-1} \right) h^* \left(|\vec{l}_2| v \right) h \left(|\vec{l}_2| v^{-1} \right) h^* \left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v \right) h \left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v^{-1} \right).$$

Где интегрирование по v мы заменили с конечного интервала на всю числовую ось ввиду быстрых осцилляций подынтегральной функции по переменной v при $v \rightarrow 0, +\infty$. Подынтегральная функция не зависит от u и поэтому интеграл по du берется:

$$\begin{aligned}
n(p\eta) &= -\frac{2\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \log\left(\frac{\mu}{p\eta}\right) \int_0^\infty dv v^{-2D+1} [|A_+|^2 v^{-2i\mu} + |A_-|^2 v^{2i\mu}] \int d^{D-1}\vec{l}_1 \int d^{D-1}\vec{l}_2 \times \\
&\quad \times h^*\left(|\vec{l}_1|v\right) h\left(|\vec{l}_1|v^{-1}\right) h^*\left(|\vec{l}_2|v\right) h\left(|\vec{l}_2|v^{-1}\right) h^*\left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|v\right) h\left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|v^{-1}\right), \\
\kappa(p\eta) &= \frac{2\lambda^2}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \log\left(\frac{\mu}{p\eta}\right) \int_0^1 dv v^{-2D+1} A_+ A_- [v^{-2i\mu} + v^{2i\mu}] \int d^{D-1}\vec{l}_1 \int d^{D-1}\vec{l}_2 \times \\
&\quad \times h^*\left(|\vec{l}_1|v\right) h\left(|\vec{l}_1|v^{-1}\right) h^*\left(|\vec{l}_2|v\right) h\left(|\vec{l}_2|v^{-1}\right) h^*\left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|v\right) h\left(|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|v^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом полученные поправки пропорциональны $\lambda^2 \log\left(\frac{p\eta}{\mu}\right)$. Легко видеть, что это тот же линейный рост, что мы видели в первой главе. Действительно, запишем этот результат не через конформное время η , а через собственное время $t = -\log(\eta)$:

$$n(pe^{-t}) \propto \lambda^2 (t - t_\mu) \quad \text{и} \quad \kappa(pe^{-t}) \propto \lambda^2 (t - t_\mu), \quad (2.41)$$

где $t_\mu = \log\left(\frac{\mu}{p}\right)$ - момент, когда гармоники начали чувствовать кривизну пространства - времени и изменили свое поведение.

Возникает следующий вопрос. В прошлом разделе было показано, что квантовые поправки к вакууму Банчу-Девиса инвариантны относительно полной группы де-Ситтеровских преобразований, т.е. коррелятор после учета петлевых поправок останется функцией геодезического расстояния. В то время как ответы для $n(p\eta)$ и $\kappa(p\eta)$ зависят от среднего геометрического внешних времен $\sqrt{\eta_1\eta_2}$, а не от геодезического расстояния. Для разрешения этого кажущегося противоречия, нужно заметить, что мы считали лидирующие инфракрасные поправки, пренебрегая разницей времен. Если в геодезическое расстояние подставить такое приближение то мы получим $Z = 1 - \frac{|\Delta\vec{x}|^2}{2\eta_1\eta_2}$. Т.е. как раз и возникает среднее геометрическое внешних времен. Если же учесть все поправки и сделать преобразование Фурье, то мы получим ответ инвариантный относительно группы изометрий пространства де-Ситтера. В дальнейшем мы будем изучать не только де-Ситтер инвариантные состояния (каковым является только невозбужденный вакуум Банча-Девиса в расширяющейся Пуанкаре карте). В не инвариантных ситуациях формулы будут получаться аналогичными.

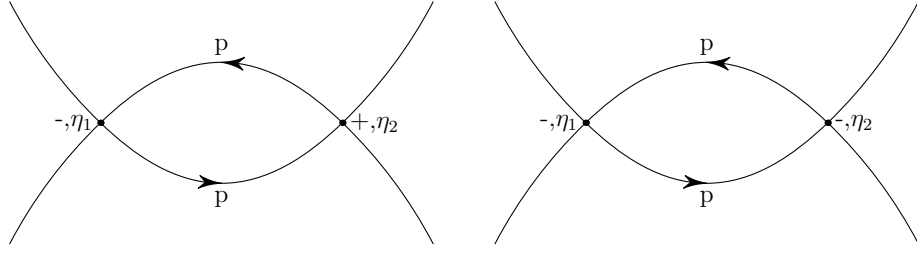


Рис. 2.2: Петлевые поправки к вершине λ_{--} и λ_{-+}

Если мы будем рассматривать аут-гармоники, которые ведут себя как $h(x) \sim x^{i\mu}$, $x \rightarrow 0$, то логарифмический рост в будущем получают только $n(p\eta)$, а $\varkappa(p\eta)$ такого вклада не получают. Это означает, что аут-вакуум является правильно выбранным вакуумом в бесконечном будущем. Но тем не менее нужно просуммировать лидирующие вклады в $n(p\eta)$, чтобы понять в какое конечное состояние перейдет система.

2.5.2 Поправки к вершине

Обсудим петлевые поправки к четырехточечной функции полей $\phi(\eta, \vec{x})$. Легко видеть, что у вершины появляются дополнительные знаки и зависимость от времени (см. рис. 2.2). Поправка к вертексным операторам может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda^{--}(\eta_{1,2}; p_{1,2,3,4}) &= -i\lambda\delta(\eta_1 - \eta_2) + (-i\lambda)^2(\eta_1\eta_2)^{D-1} \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ &\times [\theta(\eta_1 - \eta_2) h^{*2}(p\eta_1) h^2(p\eta_2) + \theta(\eta_2 - \eta_1) h^2(p\eta_1) h^{*2}(p\eta_2)] \\ \text{и } \lambda^{-+}(\eta_{1,2}; p_{1,2,3,4}) &= \lambda^2(\eta_1\eta_2)^{D-1} \int \frac{d^{D-1}\vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} h^{*2}(p\eta_1) h^2(p\eta_2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Мы опять следили только за инфракрасными расходимостями, поэтому пренебрегли внешними импульсами по сравнению с внутренним. Легко увидеть, что в пределе $p \rightarrow 0$ подынтегральные выражения осциллируют и тем самым не возникает расходящихся вкладов при $p \rightarrow 0$. Аналогично при $p \rightarrow \infty$ все гармоники ведут себя как в плоском пространстве и поэтому дают только перенормировку константы взаимодействия λ . Поэтому при суммировании лидирующих вкладов в дальнейшем можно считать вершины ультрафиолетово перенормированными, но по форме древесными.

2.5.3 Однопетлевая поправка в сжимающейся Пуанкаре карте

Аналогично можно рассмотреть петлевые поправки в сжимающейся Пуанкаре карте. Заметим, что сжимающаяся Пуанкаре карта получается путем инверсии по времени расширяющейся Пуанкаре карты. Как видно, все аргументы насчет однопетлевых поправок к вершинам, запаздывающим и опережающим пропагаторам остаются верными. Они не получают никаких инфракрасно больших вкладов и не расходятся. Но в случае сжимающейся Пуанкаре карты возникают проблемы с Келдышевским пропагатором. В данном случае система уже в бесконечном прошлом находится в сильном гравитационном поле. Из-за этого логарифмический рост (2.5.1) начинается уже с самого момента включения взаимодействия η_0 , и равен $n(p\eta) \propto \lambda^2 \log\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)$, при $p\eta < \mu$, и $n(p\eta) \propto \lambda^2 \log\left(\frac{\mu}{p\eta_0}\right)$, при $p\eta > \mu$. Это не позволяет увести момент включения взаимодействия в бесконечное прошлое $\eta_0 \rightarrow 0$. По форме эти расходимости по η_0 полностью аналогичны растущим вкладам в расширяющейся Пуанкаре карте.

После того как система перешла в состояние со слабой гравитацией $p\eta \gtrsim \mu$, может наблюдаться рост $n(p\eta)$ и $\varkappa(p\eta)$ по η , возникающий в том случае, если мы выбрали неправильный аут-вакуум. Правильным аут-вакуумом в сжимающейся Пуанкаре карте является состояние Банча-Девиса. Как описано в первой главе, в данной ситуации произойдет релаксация в термальное состояние над правильным вакуумом.

Наличие инфракрасной расходимости приводит к явному нарушению де – Ситтеровской инвариантности. Действительно, уже подгруппа изометрий метрики сжимающейся Пуанкаре карты нарушена. Мы не можем сделать преобразование $\eta \rightarrow a\eta, x \rightarrow ax$, так как это сдвинет момент включения взаимодействия η_0 .

2.6 Суммирование лидирующих инфракрасных вкладов во всех порядках теории возмущений

Как мы видели, в одной петле для скалярного поля в сжимающейся Пуанкаре карте и расширяющейся Пуанкаре карте возникают вклады вида $\lambda^2 \log \eta$ и $\lambda^2 \log \eta_0$ [13],[87],[48], [11],[7]. Эти вклады могут быть очень большими даже если константа

взаимодействия очень маленькая $\lambda^2 \ll 1$, так как при $\eta \rightarrow 0$ или $\eta_0 \rightarrow 0$ логарифмы становятся очень большими. Это означает, что петлевые поправки будут сравнимы с классическими ответами. Это утверждение верно, даже несмотря на то, что группа де-Ситтеровских изометрий может остаться не нарушенной в петлевых вычислениях. Чтобы понять физический смысл данных расходимостей, мы должны просуммировать лидирующие вклады идущие со всех петель.

Мы просуммируем эти вклады в расширяющейся Пуанкаре карте, а затем в сжимающей Пуанкаре карте. В расширяющейся Пуанкаре карте возникает отдельная интересная задача. Она заключается в суммировании де-Ситтер инвариантных инфракрасных вкладов к корреляционной функции, отвечающих точному вакууму Банча-Девиса. Как объяснялось в параграфе про петлевые поправки к данному состоянию, решение этой задачи не даст ответ на вопрос о том, что произойдет если мы слегка возбудим данный вакуум. Данная ситуация аналогична задаче про устойчивость материальной точки находящейся на вершине потенциала. Хотя оно и является положением равновесия, любое возмущение данного состояния приведет к тому, что оно перейдет в другое, более стабильное состояние. Поэтому для изучения данной проблемы мы сразу предположим, что есть некоторая начальная концентрация частиц n_p над вакуумом Банча-Девиса(при нулевом \varkappa_p).

В первой главе объяснялось, что данное пересуммирование может быть сделано при помощи решения уравнения Дайсона-Швингера в инфракрасном пределе. Ввиду ковариантности уравнений относительно преобразований Боголюбова уравнение можно писать в терминах аут-гармоник для расширяющейся Пуанкаре карты. В этом случае уравнения выглядят проще, так как можно положить аномальные квантовые средние равными нулю $\varkappa(p\eta) = 0$. Можно проверить, что если слабо возбудить $\varkappa(p\eta)$, то система перейдет в состояние, в котором аномальное квантовое среднее равно нулю. Значит, все условия, которые необходимы для вывода, выпол-

нены, и можно выписать следующее уравнение на $n_p(\eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{dn(p\eta)}{d\log(p\eta)} = \text{St } n \approx -\lambda^2 \frac{|A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dv v^{-1} \times \quad (2.43) \\ \left\{ \begin{aligned} &3\text{Re} [v^{i\mu} h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h(|l_1 + l_2| v) h(l_1 v^{-1}) h(l_2 v^{-1}) h^*(|l_1 + l_2| v^{-1})] \times \\ &\quad \times [(1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2}) n_{|l_1+l_2|}] \\ &+ 3\text{Re} [h^*(l_1 v) h(l_2 v) h(|l_1 + l_2| v) h(l_1 v^{-1}) h^*(l_2 v^{-1}) h^*(|l_1 + l_2| v^{-1})] \times \\ &\quad \times [(1 + n_{p\eta}) n_{l_1} (1 + n_{l_2}) (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1}) n_{l_2} n_{|l_1+l_2|}] \\ &+ \text{Re} [v^{i\mu} h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h^*(|l_1 + l_2| v) h(l_1 v^{-1}) h(l_2 v^{-1}) h(|l_1 + l_2| v^{-1})] \times \\ &\quad \times [(1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} - n_{p\eta} (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|l_1+l_2|})] \\ &+ \text{Re} [v^{i\mu} h(l_1 v) h(l_2 v) h(|l_1 + l_2| v) h^*(l_1 v^{-1}) h^*(l_2 v^{-1}) h^*(|l_1 + l_2| v^{-1})] \times \\ &\quad \times [(1 + n_{p\eta}) (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|}] \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Где $l_i = q_i \eta$ - физические импульсы. Мы получили его, проделав те же манипуляции и те же приближения, что и при выводе двухпетлевой поправки выше.

2.6.1 Решение кинетического уравнения

Как видно, данное уравнение не имеет стационарного решения в виде термального распределения Бозе-Эйнштейна ввиду отсутствия закона сохранения энергии. Будем решать его в некоторых приближениях [53],[17]. Предположим, что мы возбудили каким-нибудь образом вакуум Банча-Девиса. После этого мы совершаем поворот к аут-гармоникам. Мы предполагаем, что $\varkappa(p\eta) \rightarrow 0$ для аут-гармоник, как было замечено выше. Возможны две ситуации.

Первая — после поворота заселенность уровней энергий оказалось очень маленькой $n(p\eta) \ll 1$. Тогда приблизим члены входящие в интеграл столкновений следующим образом

$$\begin{aligned} (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2}) n_{|l_1+l_2|} &\approx 0, \\ (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} (1 + n_{l_2}) (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1}) n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} &\approx n_{l_1}, \\ (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} - n_{p\eta} (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|l_1+l_2|}) &\approx -n_{p\eta}, \\ (1 + n_{p\eta}) (1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} &\approx 1. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Также ввиду того, что для высоко энергетических гармоник никакого процесса рождения не происходит (эти гармоники ещё не чувствуют кривизны пространства,

и можно считать что они пока ведут себя также как и в пространстве Минковского, в котором данные процессы запрещены), поэтому для них $n_i \ll 1, l \gg \mu$. Фазовый объем низкоэнергетических гармоник маленький, поэтому процессами их рассеяния тоже пренебрежем. Поэтому можно везде пренебрегать n_i . В результате уравнение (2.43) можно приблизить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dn(p\eta)}{d \log(p\eta)} &\approx \Gamma_1 n(p\eta) - \Gamma_2, \quad \text{где} \\ \Gamma_1 &= \lambda^2 \frac{|A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dv v^{-1} \times \\ &\text{Re} [v^{i\mu} h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h^*(|l_1 + l_2| v) h(l_1 v^{-1}) h(l_2 v^{-1}) h(|l_1 + l_2| v^{-1})] \\ \Gamma_2 &= \lambda^2 \frac{|A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dv v^{-1} \times \\ &\text{Re} [v^{i\mu} h(l_1 v) h(l_2 v) h(|l_1 + l_2| v) h^*(l_1 v^{-1}) h^*(l_2 v^{-1}) h^*(|l_1 + l_2| v^{-1})]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Где Γ_1, Γ_2 - темпы рождения и частиц с уровня p на другие уровни. Это уравнение обладает стабильным решением $n(p\eta) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$, что соответствует ситуации, в которой уход частиц компенсируется рождением частиц. Также надо учесть, что мы здесь обсуждаем плотность частиц в сопутствующем объеме, который не меняется со времен. Однако физический объем при этом растет и физическая плотность падает экспоненциально с собственным временем.

Можно оценить, что $n_{p\eta} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = e^{-3\pi\mu} \approx e^{-3\pi m} \ll 1$, т.е. наше предположение самосогласовано. Если бы мы рассматривали полиномиальную теорию ϕ^n , то стационарное распределение имело бы вид $e^{-(n-1)\pi m}$. Это распределение выглядит как Больцмановское, но с "температурой" зависящей от степени потенциала и независимой от энергии частицы.

Рассмотрим противоположную ситуацию. Предположим, что после Боголюбовского поворота мы получили $n(p\eta) \gg 1$. Логично предположить, что заселенность уровней для маленьких значений физического импульса слабо зависит от его значения $n_{p\eta} \approx n_{l_i} \gg 1$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1}) (1 + n_{l_2}) n_{|l_1+l_2|} &\approx 0, \\ (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} (1 + n_{l_2}) (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} (1 + n_{l_1}) n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} &\approx 2n_{p\eta}^3, \\ (1 + n_{p\eta}) n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} - n_{p\eta} (1 + n_{l_1}) (1 + n_{l_2}) (1 + n_{|l_1+l_2|}) &\approx -2n_{p\eta}^3, \\ (1 + n_{p\eta}) (1 + n_{l_1}) (1 + n_{l_2}) (1 + n_{|l_1+l_2|}) - n_{p\eta} n_{l_1} n_{l_2} n_{|l_1+l_2|} &\approx 4n_{p\eta}^3. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Мы предположим, что $n_{l_1} \ll 1$ при $l_1 \gtrsim \mu$, то есть до того как гармоника начала чувствовать кривизну можно пренебречь её вкладом в кинетическое уравнение. Тогда кинетическое уравнение в этом приближении редуцируется к следующему виду

$$\frac{dn_{p\eta}}{d \log(p\eta)} \approx -\bar{\Gamma} n_{p\eta}^3, \quad (2.47)$$

где $\bar{\Gamma} = \lambda^2 \frac{|A|^2}{6} \int_{l_1 \leq \mu} \frac{d^{D-1} l_1}{(2\pi)^{D-1}} \int_{l_2 \leq \mu} \frac{d^{D-1} l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dv v^{-1} \times$

$$\left\{ \begin{aligned} &6\text{Re} [v^{i\mu} h^*(l_1 v) h(l_2 v) h(|l_1 + l_2| v) h(l_1 v^{-1}) h^*(l_2 v^{-1}) h^*(|l_1 + l_2| v^{-1})] \\ &-2\text{Re} [v^{i\mu} h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h^*(|l_1 + l_2|) h(l_1) h(l_2) h(|l_1 + l_2|)] \times \\ &+4\text{Re} [v^{i\mu} h(l_1 v) h(l_2 v) h(|l_1 + l_2|) h^*(l_1) h^*(l_2) h^*(|l_1 + l_2|)] \end{aligned} \right\}.$$

Так как мы считаем, что $n_{l_1} \neq 0$ при $l_1 \lesssim \mu$, мы ограничили предел интегрирования по l_i . Это уравнение решается в квадратурах, и мы получаем следующее решение:

$$n_{p\eta} \approx \frac{1}{\sqrt{2\bar{\Gamma} \log(\eta/\eta_*)}}. \quad (2.48)$$

Решение верно только в области $\frac{\mu}{p} > \eta > \eta_*$ и имеет правильную асимптотику при $\eta \rightarrow +\infty$ (т.е. наше предположение о том, что $n_{l_i} \ll 1, l_i \gtrsim \mu$ верно).

Это решение имеет особенность при $\eta \rightarrow \eta_*$, что означает такое же поведение и для физических величин, ибо около $\eta \sim \eta_*$ метрика не имеет особенностей: $D^K \sim n(p\eta)\eta^{D-1} \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow \eta_*$.

Глава 3

Рождение частиц электрическим полем

3.1 Введение

Начиная с знаменитой работы Швингера [23] рождение частиц сильным электрическим полем было изучено многими авторами с разных сторон [25]—[45]. В данной главе мы обсудим применение развитой в предыдущих главах техники для изучения данного эффекта. Рассмотрение данного вопроса в таком контексте интересно с точки зрения проблем, возникающих при рассмотрении квантовой гравитации. Первая проблема возникает из-за того, что мы не учитываем гравитоны в процессах рассеяния и поэтому не знаем точно, как поведет система в результате взаимодействия с гравитонами. Вторая проблема связана с тем, что мы считаем метрику зафиксированной и не учитываем отклик системы на гравитационный фон. В случае квантовой электродинамики эти две задачи, в принципе, можно решить. Так мы учтем вклад в интеграл столкновений квантовых флуктуаций электромагнитного поля. Заметим, что для решения такой задачи in-out формализм и Гауссово приближение внешнего поля не применимы. Интересно рассмотреть различные калибровки постоянного внешнего электрического поля $A_0 = -Ex$ и $A_1 = Et$. В первом случае гамильтониан стационарен, и его можно диагонализировать, но спектр неограничен снизу. Тогда как во втором случае он просто нестационарен. Также изучение скалярной квантовой электродинамики на фоне внешнего электрического поля в гауссовом приближении не может разрешить следующую проблему. Если посчитать ток частиц, рожденных благодаря эффекту Швингера, то он оказыва-

ется равен нулю, что кажется явным противоречием, так как рожденные частицы должны давать вклад в ток.

3.2 Вычисление $\langle \text{out} | \text{in} \rangle$

В данном параграфе мы проделаем стандартное вычисление аналогичное тому, что проделал Швингер [24]. Оно состоит в вычислении матричного элемента $\langle \text{out} | \text{in} \rangle$ для скалярного поля во внешнем электромагнитном поле. Можно показать, что эта амплитуда равна следующему выражению [99]:

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{iS[\phi]},$$

где $S[\phi] = \int d^4x [|(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - m^2|\phi|^2]$. (3.1)

Выберем калибровку $A_1 = -Et$, что как раз и соответствует постоянному электрическому полю направленному вдоль оси x . Проинтегрируем действие (3.1) по частям и перепишем его в следующем виде:

$$\int d^4x [|(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - m^2|\phi|^2] = - \int d^4x \bar{\phi} \hat{O} \phi,$$

где $\hat{O} = \partial_t^2 - (\partial_1 - ieEt)^2 - \partial_\perp^2 + m^2$. (3.2)

Так как теория квадратична по скалярному полю, интеграл (3.1) можно взять и получить следующий ответ:

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \frac{1}{\det \hat{O}}. \quad (3.3)$$

Как всегда, детерминант оператора (3.2) является просто произведением его собственных значений. Будем искать собственные вектора в форме $\chi(\vec{x}, t) = e^{i\vec{p}\vec{x}}\sigma(t)$. Тогда мы получим следующее уравнение на собственные вектора:

$$\begin{aligned} & [\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2 + e^2 E^2 t^2 - 2p_1 e E t] \sigma(t) = \\ & = [(\partial_{t'}^2 + e^2 E^2 t'^2) + \vec{p}_\perp^2 + m^2] \sigma(t) = \lambda_n \sigma(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $t' = t - \frac{p_1}{eE}$. Собственные значения этого оператора есть

$$\lambda_n = \vec{p}_\perp^2 + m^2 + ieE(2n + 1). \quad (3.5)$$

Появление $ieE(2n + 1)$ объясняется следующим образом. Если сделать замену $E \rightarrow -iE$, то оператор \hat{O} превратится в оператор Шредингера для осциллятора, для

которого мы знаем собственные значения. Из этих соображений и получается ответ для спектра оператора \hat{O} . Запишем следующим образом формулу для логарифма детерминанта оператора:

$$\log \det \hat{O} = \log \prod_n \lambda_n = \sum_n \log \lambda_n = \sum_n \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-\lambda_n s}. \quad (3.6)$$

Данное выражение расходится при $s \rightarrow 0$, поэтому мы ввели регулятор $\epsilon \rightarrow 0$. Подставляя полученные собственные значения в (3.6), мы получаем следующее выражение для логарифма детерминанта:

$$\begin{aligned} \log \det \hat{O} &= iV \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-(m^2 + p_{\perp}^2 + ieE(2n+1))s} = \\ &= iV \frac{1}{16\pi^2} \int dp_{\parallel} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{e^{-m^2 s}}{\sin(eEs)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Где V — это трехмерный объем пространства. Интеграл по dp_{\parallel} расходится, но с помощью замены $t' = t - \frac{p_{\parallel}}{eE}$ его можно связать с интегралом по времени:

$$\log \det \hat{O} = iV_4 \frac{eE}{16\pi^2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{e^{-m^2 s}}{\sin(eEs)}. \quad (3.8)$$

Где $V_4 = VT$ — четырехмерный объем всего пространства-времени. Тогда ответ для амплитуды вероятности перехода из ин-состояния в аут-состояние есть

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = e^{-\log \det \hat{O}} = e^{i\phi} e^{-\text{Re} \log \det \hat{O}}. \quad (3.9)$$

А вероятность определяется действительной частью логарифма детерминанта \hat{O} (3.8)

$$\text{prob}(\text{vac} \rightarrow \text{vac}) = |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2 = e^{-2\text{Re} \log \det \hat{O}} = e^{-2\gamma V_4}. \quad (3.10)$$

Вычислим γ

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{Re} \left[i \frac{eE}{16\pi^2} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{e^{-m^2 s}}{\sin(eEs)} \right] = \\ &= \frac{e^2 E^2}{16\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \exp\left(-\frac{\pi m^2 k}{eE}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

При вычислении данной величины мы учли, что в ней не появляются расходимости при $\epsilon \rightarrow 0$, и поэтому спокойно положили ϵ равным нулю.

Обсудим статус этого ответа. Данное вычисление не учитывает взаимодействие скалярного поля с квантовыми флуктуациями электромагнитного поля. Более того, любое вычисление среднего от оператора A , по этой процедуре будет сводиться только к вычислению недиагонального элемента $\langle \text{out} | A | \text{in} \rangle$. Как указывалось в первой главе, мы интересуемся только величинами вида $\langle \Psi | A | \Psi \rangle$. Поэтому мы не будем работать в гауссовом приближении. Единственное что можно сказать, основываясь на приведенном выше вычислении, что что-то нетривиальное происходит с квантовой теорией поля на фоне внешнего электромагнитного поля.

3.3 Общее обсуждение скалярной квантовой электродинамики на фоне внешнего электромагнитного поля

Рассмотрим стандартный лагранжиан для массивной скалярной электродинамики в $(3 + 1)$ -размерностях:

$$S = \int d^4x \left[|D_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - j_\mu^{\text{cl}} A^\mu \right]. \quad (3.12)$$

Где $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, ток j_μ^{cl} создает внешнее поле, которое является решением уравнений Максвелла $\partial^\mu F_{\mu\nu}^{\text{cl}} = j_\nu^{\text{cl}}$. Мы делим полный векторный потенциал на две части $A_\mu = A_\mu^{\text{cl}} + a_\mu$: классическую, A_μ^{cl} , которая является решением уравнений Максвелла, и квантовую часть, a_μ .

Мы будем изучать два типа внешнего поля: постоянное поле в темпоральной $A_1(t) = -Et$ или в пространственной $A_0(x) = Ex$ калибровке, для которого $j_\mu^{\text{cl}} = 0$, и пульс $A_1(t) = ET \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$, который в пределе $T \rightarrow \infty$ переходит в первый случай. Постоянное поле, которое не меняется во времени, является нефизической ситуацией. Поэтому мы предпочтем рассматривать пульс. Мы покажем в дальнейшем, что в случае постоянного электрического поля возникает секулярно растущие петлевые вклады, а в случае пульса инфракрасно большие вклады.

Из действия (3.12) можно получить фейнмановские правила для взаимодействия скалярного поля с квантовыми флуктуациями. Действительно, подставляя явно разложение векторного потенциала на классическую и квантовую часть в действие (3.12) и используя уравнения Максвелла для классического поля, мы по-

лучаем следующее выражение для действия:

$$S = \int d^4x \left[|D_\mu^{\text{cl}}\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2 + e^2 a_\mu^2 |\phi|^2 - ia^\mu \left(\vec{\phi} \overleftrightarrow{D}_\mu^{\text{cl}} \phi \right) \right]. \quad (3.13)$$

Где $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, а $D_\mu^{\text{cl}} = \partial_\mu + ieA_\mu^{\text{cl}}$. Уравнения движения для поля ϕ в свободной, Гауссовой теории (то есть поле фотонов мы положили равным нулю $a_\mu = 0$) получаются путем варьирования лагранжиана (3.13):

$$[D_\mu^{\text{cl}} D^{\text{cl},\mu} + m^2] \phi = 0. \quad (3.14)$$

Теперь приступим к квантованию этой системы на фоне постоянного электрического поля.

3.4 Постоянное электрическое поле в темпоральной калибровке

Выберем темпоральную калибровку $\vec{A} = \vec{A}(t)$. Ввиду пространственной однородности задачи поле ϕ можно разложить по плоским волнам следующим образом:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} f_p(t) + b_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} f_{-p}^*(t) \right],$$

где гармоники $f_p(t)$ удовлетворяют уравнению, которое может быть получено из (3.14):

$$\left[\partial_t^2 + \omega_p^2(t) \right] f_p(t) = 0, \quad \text{где } \omega_p(t) = \sqrt{m^2 + \left[\vec{p} + e\vec{A}(t) \right]^2}, \quad \vec{A}(t) = (A_1(t), 0, 0), \quad (3.15)$$

Это уравнение в случае постоянного электрического поля $\vec{A}(t) = -\vec{E}t$ напоминает уравнение Шредингера для волновой функции с перевернутым квадратичным потенциалом. Поэтому для выбранного нами векторного потенциала $A_1(t)$ можно найти гармоники $f_p(t)$ точно, но для наших целей мы не нуждаемся в их явном виде. Мы будем использовать квазиклассическое приближение, которое работает, когда $|p_\perp + eA_1(t)| \gg m$ (в точке $p_\perp + eA_1(t) \sim 0$ ВКБ – приближение неприменимо). В этом приближении гармоники могут быть представлены в следующем виде:

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{A(p_\perp)}{\sqrt{2\omega_p(t)}} e^{-i \int_{t_{hc}}^t \omega_p(t') dt'} + \frac{B(p_\perp)}{\sqrt{2\omega_p(t)}} e^{i \int_{t_{hc}}^t \omega_p(t') dt'} & , t < t_{hc}, \\ \frac{C(p_\perp)}{\sqrt{2\omega_p(t)}} e^{-i \int_{t_{hc}}^t \omega_p(t') dt'} + \frac{D(p_\perp)}{\sqrt{2\omega_p(t)}} e^{i \int_{t_{hc}}^t \omega_p(t') dt'} & , t > t_{hc}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Около t_{hc} , когда $p_1 + eA_1(t_{hc}) = 0$, квазиклассическое приближение не работает.

A, B, C, D есть некоторые комплексные числа, которые зависят от поперечных к электрическому полю компонент импульса $\vec{p}_\perp = (p_2, p_3)$, $p_\perp = \sqrt{p_2^2 + p_3^2}$ и могут быть определены путем решения уравнения (3.15) или использования коммутационных соотношений. Когда $A = 1$, $B = 0$, соответствующие гармоники в бесконечном прошлом являются ВКБ-волнами вида $e^{-i\frac{\omega t^2}{2eE}}$ и поэтому мы будем их называть ин-гармониками $f_p^{in}(t)$. Соответствующие операторы уничтожения a_p^{in} и b_p^{in} , определяют ин-состояние: $a_p^{in} |in\rangle = b_p^{in} |in\rangle = 0$. Для таких гармоник, однако, оба C и D не равны нулю. Аналогично, когда $C = 1$, $D = 0$, мы имеем одну ВКБ-волну в бесконечном будущем. Назовем это решение аут-гармоникой $f_p^{out}(t)$, а соответствующие операторы уничтожения a_p^{out} , b_p^{out} . Они определяют также и аут-состояние. Для таких гармоник оба A и B не равны нулю. Однако, зная эти коэффициенты можно сделать поворот Боголюбова и получить ответ для плотности рожденных частиц [23].

Следует отметить, что в постоянном поле у гармоник (3.15) есть дополнительная симметрия относительно одновременных сдвигов по времени и импульсу:

$$p_1 \rightarrow p_1 + \alpha, \quad t \rightarrow t + \alpha/eE. \quad (3.17)$$

Вследствие этой симметрии верно следующее соотношение: $f_p(t) = f_{p_\perp}(p_1 - eEt) = f_{p_\perp}(p_{ph})$, где $p_{ph} = p_1 - eEt$. Как мы в дальнейшем увидим, наличие симметрии (3.17) сильно упрощает вычисления и позволяет найти, что при учете взаимодействия возникает секулярный рост.

А также отметим ввиду симметрии относительно инверсии времени ин-гармоники и аут гармоники связанные следующим образом

$$f_{p_\perp}^{in*}(p_{ph}) = f_{p_\perp}^{out}(-p_{ph}).$$

Кроме того, можно определить гармоники, которые называются симметричными

$$f^{sym}(p_{ph}) = f^{sym,*}(-p_{ph}). \quad (3.18)$$

На фоне пульса можно определить ин(аут)-гармоники как гармоники, которые ведут себя в бесконечном прошлом(будущем) как плоские волны

$$f_p^{in(out)}(t) = \frac{e^{-i\omega_p t}}{\sqrt{2\omega_p}}, \quad t \rightarrow -\infty(+\infty), \quad (3.19)$$

где $\omega_p = \sqrt{m^2 + p^2}$. Такой выбор можно сделать, так как поле выключается в бесконечном прошлом(будущем). Можно проверить, что ин-гармоники диагонализуют гамильтониан в бесконечном прошлом, а аут-гармоники делают то же самое в бесконечном будущем. Однако в постоянном электрическом поле никакой выбор гармоник не диагонализует гамильтониан в бесконечном будущем или прошлом. Это происходит из-за того, что поле никогда не выключается. Данная ситуация аналогично той, что мы наблюдали в случае глобального де-Ситтера. Тогда мы тоже не могли диагонализировать гамильтониан в бесконечном прошлом или будущем.

Так как гамильтониан зависит от времени, для вычисления корреляционных функций мы должны использовать Келдышевскую диаграммную технику вместо Фейнмановской. Вследствие пространственной однородности внешнего поля удобно проводить вычисления в импульсном представлении. Пропагаторы в импульсном представлении на древесном уровне выглядят следующим образом:

$$D_0^K(p, t_1, t_2) = \frac{1}{2} [f_p(t_1) f_p^*(t_2) + f_p(t_1) f_p^*(t_2)], \quad (3.20)$$

$$D_0^{R,A}(p, t_1, t_2) = \mp \theta(\mp \Delta t) [f_p(t_1) f_p^*(t_2) - f_p^*(t_1) f_p(t_2)],$$

$$G_{0\mu\nu}^K(p, t_1, t_2) = -g_{\mu\nu} \frac{\cos[|p|(t_1 - t_2)]}{2|p|}, \quad (3.21)$$

$$G_{0\mu\nu}^{R,A}(p, t_1, t_2) = \mp i g_{\mu\nu} \theta(\mp \Delta t) \frac{\sin[|p|(t_1 - t_2)]}{|p|}.$$

Пропагаторы, обозначенные как $D_0^{K,A,R}$ и $G_0^{K,A,R}$, описывают комплексное скалярное и электромагнитное поля соответственно. Заметим, что для фотонов мы выбрали Фейнмановскую калибровку

3.4.1 Вычисление тока в древесном приближении

В этом параграфе мы проведем вычисление древесного тока, возникающего из-за деформации гармоник во внешнем электрическом поле [11]. Общая формула для оператора тока имеет следующий вид:

$$\hat{J}_\mu = i (\bar{\phi} D_\mu^{\text{cl}} \phi - \phi D_\mu^{\text{cl}} \bar{\phi}). \quad (3.22)$$

После усреднения по вакууму можно получить следующее выражение для тока

$$\langle \hat{J}_1 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p_1 + e A_1(t)) \left(|f_p(t)|^2 - \frac{E(p_\perp)}{2\omega_p(t)} \right), \quad (3.23)$$

где мы ввели регуляризатор $E(p_{\perp})$ на случай, если возникнут расходимости. Остальные компоненты тока ввиду симметрии относительно поворотов вокруг направления электрического поля равны нулю.

Рассмотрим отдельно случай постоянного электрического поля $\vec{E} = \text{const}$. В данном случае есть симметрия (3.17), которая упрощает вычисления Действительно, перейдем к интегрированию по физическому импульсу в формуле (3.23)

$$\langle \hat{J}_1 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_{ph} \left(|f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 - \frac{E(p_{\perp})}{2\omega(p_{ph})} \right), \quad (3.24)$$

Покажем, что первый член в подынтегральном выражении является полной производной

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_{ph}}{2\pi} p_{ph} |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 = \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{d(p_{ph}^2)}{4\pi} |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 = \\ & = \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{dp_{ph}}{4\pi} \partial_{p_{ph}} \left(p_{ph}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 \right) - \\ & \quad - \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_{ph}}{4\pi} p_{ph}^2 [f_{p_{\perp}}(p_{ph}) \partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}^*(p_{ph}) + f_{p_{\perp}}(p_{ph}) \partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}^*(p_{ph})] = \\ & = \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_{ph}}{4\pi} p_{ph}^2 \left[\left((eE)^2 \partial_{p_{ph}}^2 + m_{\perp}^2 \right) f_{p_{\perp}}(p_{ph}) \partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}^*(p_{ph}) + \right. \\ & \quad \left. + \left((eE)^2 \partial_{p_{ph}}^2 + m_{\perp}^2 \right) f_{p_{\perp}}(p_{ph}) \partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}^*(p_{ph}) + \partial_{p_{ph}} \left(p_{ph}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 \right) \right] = \\ & = \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_{ph}}{4\pi} \partial_{p_{ph}} \left[(eE)^2 |\partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 + \right. \\ & \quad \left. + m_{\perp}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 + p_{ph}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 \right] = \\ & = \lim_{\Lambda, \Lambda' \rightarrow +\infty} \int \frac{d^2 p_{\perp}}{2(2\pi)^3} \left[(eE)^2 |\partial_{p_{ph}} f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 + m_{\perp}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 + p_{ph}^2 |f_{p_{\perp}}(p_{ph})|^2 \right] \Big|_{-\Lambda'}^{\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где мы использовали, что гармоники удовлетворяют уравнению

$$\left((eE)^2 \partial_{p_{ph}}^2 + m_{\perp}^2 + p_{ph}^2 \right) f_{p_{\perp}}(p_{ph}) = 0, \quad m_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2.$$

Выражение (3.25) расходится. Тем не менее можно подобрать регуляризатор $E(p_{\perp})$ таким образом, чтобы сократить данные вклады в ток. К примеру, для любого выбора гармоник (3.16) можно зафиксировать регуляризатор

$$E(p_{\perp}) = \frac{A^2(p_{\perp}) + B^2(p_{\perp}) + C^2(p_{\perp}) + D^2(p_{\perp})}{2}. \quad (3.26)$$

Как видно, регуляризатор $E(p_{\perp})$ не является универсальным, он сильно зависит от выбора вакуумного состояния. Это явление называется проблемой УФ/ИФ перемешивания. Это проблема возникает в нашей ситуации, потому что все гармоники

зависят от физического импульса $p_{ph} = p - eEt$, поэтому случай больших импульсов, и случай больших времен связаны друг с другом.

Проведем вычисление (3.23) для произвольного вакуума в случае электрического пультса. Разделим интегрирование по k_1 на две части: $k_1 < A_1(t)$ и $k_1 > A_1(t)$. Тогда в каждой из областей можно использовать ВКБ-приближение для гармоник и получить:

$$\begin{aligned}\langle \hat{J}_1 \rangle^{(1)} &= \int_{k_1 < eA_1(t)} \frac{dk d^2 k_\perp}{(2\pi)^3} \frac{k_1 + eA_1(t)}{2(k_\perp^2 + (k_1 + eA_1)^2 + m^2)}, \\ \langle \hat{J}_1 \rangle^{(2)} &= \int_{k_1 > eA_1(t)} \frac{dk d^2 k_\perp}{(2\pi)^3} \frac{k_1 + eA_1(t)}{2(k_\perp^2 + (k_1 + eA_1)^2 + m^2)} [|\alpha(k_\perp)|^2 + |\beta(k_\perp)|^2].\end{aligned}$$

Перейдем к интегрированию по физическому импульсу: $p_1 = k_1 - eA_1(t)$, $p_\perp = k_\perp$. Тогда эти величины можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}\langle \hat{J}_1 \rangle^{(1)} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dp d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \frac{p}{2(p_\perp^2 + p^2 + m^2)}, \\ \langle \hat{J}_1 \rangle^{(2)} &= \int_0^\infty \frac{dp d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \frac{p}{2(p_\perp^2 + p^2 + m^2)} [1 + 2|\beta(p, p_\perp)|^2].\end{aligned}$$

Просуммировав эти два вклада мы получаем

$$\langle \hat{J}_1 \rangle = \int_0^\infty \frac{dp d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \frac{|\beta(p, p_\perp)|^2}{p_\perp^2 + p^2 + m^2},$$

где в $\langle J_1 \rangle^{(1)}$ мы сделали замену $p \rightarrow -p$. Заметим, что $\beta(p, p_\perp)$ отлично от нуля только в тех областях, где $A(t)$ сильно меняется. Поэтому ограничим интегрирование по p областью $A(-\infty) \ll p + eA(t)$. Тогда можно интегрировать по области физических импульсов от 0 до $A(t) - A(-\infty)$. В этой области коэффициент отражения $\beta(p, p_\perp)$ не зависит от p , что приводит к следующему ответу для тока:

$$\langle \hat{J}_1 \rangle = \text{const} \times [A(t) - A(-\infty)] |\beta|^2. \quad (3.27)$$

3.4.2 Однопетлевые поправки

В этом и последующих разделах мы покажем, что в сильном электрическом поле корреляционные функции содержат растущие со временем петлевые поправки [53],[83]. Мы начнем с рассмотрения пропагаторов, $D^{K,A,R}(p, t_1, t_2)$ и $G^{K,A,R}(p, t_1, t_2)$,

и закончим изучением поправок к вершине (трехточечная функция Грина). В случае пропагаторов мы будем рассматривать предел больших времен $\frac{t_1+t_2}{2} = t \rightarrow \infty$ при $|t_1 - t_2| = \text{const}$. Опережающий и запаздывающий пропагаторы в упомянутом пределе не получают больших поправок в лидирующем порядке по константе связи, как уже обсуждалось в первых главах.

3.4.3 Однопетлевая поправка к фотонному Келдышевскому пропагатору

Мы начнем со случая фотонов. В инфракрасном пределе лидирующая однопетлевая поправка к пропагатору, как обсуждалось ранее, может быть записана в следующей форме:

$$G_{\mu\nu}^{K,0+2}(q, t_1, t_2) = \left[n_{\mu\nu}(q, t) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \right] \frac{e^{-i|q|(t_1-t_2)}}{2|q|} + \varkappa_{\mu\nu}(q, t) \frac{e^{-i|q|(t_1+t_2)}}{2|q|} + \text{h.c.}, \quad (3.28)$$

Где $n_{\mu\nu}$ и $\varkappa_{\mu\nu}$ аналогично (1.49) и (1.50) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} n_{\mu\nu}(q, t) &= e^2 \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^t dt_4 \frac{e^{-i|q|(t_3-t_4)}}{2|q|} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \left[f_k(t_3) D_\mu f_{k+q}(t_3) - D_\mu f_k(t_3) f_{k+q}(t_3) \right] \left[f_k^*(t_4) D_\nu f_{k+q}^*(t_4) - D_\nu f_k^*(t_4) f_{k+q}^*(t_4) \right], \\ \text{и } \varkappa_{\mu\nu}(q, t) &= -2e^2 \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^{t_1} dt_4 \frac{e^{i|q|(t_3+t_4)}}{2|q|} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \left[f_k(t_3) D_\mu f_{k+q}(t_3) - D_\mu f_k(t_3) f_{k+q}(t_3) \right] \left[f_k^*(t_4) D_\nu f_{k+q}^*(t_4) - D_\nu f_k^*(t_4) f_{k+q}^*(t_4) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Где $D_\mu f_p(t) \equiv (\partial_t, ip_1 + ie A_1(t), ip_2, ip_3) \times f_p(t)$ и t_0 — момент времени, после которого адиабатически включается взаимодействие скалярного поля с квантовым электромагнитным полем a_μ .

Мы начнем со случая постоянного электрического поля, когда есть точная симметрия $f_p(t) = f_{p_\perp}(p_1 - eEt)$. Мы делаем в (3.29) следующую замену переменных: $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$ и $\tau = \frac{t_3-t_4}{2}$. Интеграл по τ сходится из-за быстрых осцилляций подынтегральной функции при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, мы можем интегрировать τ от

$-\infty$ до ∞ . В результате:

$$\begin{aligned}
n_{\mu\nu}(q, t) &= 2e^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-2i|q|\tau}}{2|q|} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\
&\times \left[f_k(\tau) D_\mu f_{k+q}(\tau) - D_\mu f_k(\tau) f_{k+q}(\tau) \right] \left[f_k^*(-\tau) D_\nu f_{k+q}^*(-\tau) - D_\nu f_k^*(-\tau) f_{k+q}^*(-\tau) \right], \\
\kappa_{\mu\nu}(q, t) &= -4e^2 \int_{t_0}^t \frac{e^{2i|q|t'}}{2|q|} dt' \int_0^{\infty} d\tau \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\
&\times \left[f_k(\tau) D_\mu f_{k+q}(\tau) - D_\mu f_k(\tau) f_{k+q}(\tau) \right] \left[f_k^*(-\tau) D_\nu f_{k+q}^*(-\tau) - D_\nu f_k^*(-\tau) f_{k+q}^*(-\tau) \right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Есть также вклады, идущие от вершины, которая имеет следующую форму $e^2 |\phi|^2 a_\mu^2$. Однако в одной петле они имеют вид вставки массового оператора, и поэтому как обсуждалось выше, не меняют заселенность уровней энергии. Вследствие этого мы их не учитываем.

Можно заметить, что подынтегральное выражение для $n_{\mu\nu}$ в (3.30) не зависит от t' (с математической точки зрения это происходит из-за описанной симметрии для гармоник в постоянном электрическом поле $f(k_1, k_\perp, t) = f_{k_\perp}(k_1 - eEt)$). В результате пропагатор получает линейно растущие со временем поправки: $n_{\mu\nu} \sim e^2(t - t_0)$. Расходимость появляется для любого выбора точных гармоник $f_p(t)$. Однако из-за наличия осциллирующих функций по переменной t' во втором интеграле (3.30) мы не получаем такие же расходимости для $\kappa_{\mu\nu}$. Это означает, что $\kappa_{\mu\nu}$ подавлено по сравнению с $n_{\mu\nu}$, и, следовательно, мы выбрали с самого начала правильный вакуум для электромагнитного поля. Но наличие секулярного роста $n_{\mu\nu}$ означает, что в бесконечном будущем рассматриваемая теория поля перейдет в возбужденное состояние, а не в фотонный вакуум.

Следует отметить, что указанная расходимость не имеет ничего общего с нулевой массой фотона. Действительно, если добавить к рассматриваемой теории юкавовское взаимодействие $\lambda\phi|\phi|^2$ для скалярных бозонов ϕ , то аналогичное (3.30) выражение для заселенности уровней n_p^φ нового поля φ будет еще проще: под интегралом по $d\tau$ будет стоять всего лишь произведение четырех гармоник. Тогда n_p^φ получит секулярно растущий петлевой вклад. Но префактор перед $e^2(t - t_0)$ будет подавлен сильнее для массивных полей.

Регулятор t_0 рассматриваемой инфракрасной расходимости не может быть уведен в бесконечное прошлое $t_0 \rightarrow -\infty$. Без электрического поля, в пределе $E \rightarrow 0$,

гармоники становятся обычными плоскими волнами, $f_p(t) \rightarrow e^{i\omega_p t}$. Тогда коэффициент перед выражением, $e^2(t-t_0)$, после интегрирования по $d\tau$ становится пропорционален $\int d^3k \delta(|q| + \omega_k + \omega_{k-q})$. Эта δ -функция устанавливает закон сохранения энергии, который запрещает рождение частиц, так как $|q| + \omega_k + \omega_{k-q} > 2m > 0$. Следовательно, если $E = 0$, секулярный вклад к $n_{\mu\nu}$ равен нулю, и можно брать предел $t_0 \rightarrow -\infty$. Если внешнее поле не равно нулю, острый пик δ -функции становится размытым, и закон сохранения энергии нарушается в зависящем от времени внешнем поле. В результате мы получаем рассмотренную выше расходимость.

Коэффициент перед расходимостью, $e^2(t-t_0)$, является частью интеграла столкновений, характеризующей темп рождение фотонов внешним полем. Выражению (3.30) может быть сопоставлен процесс рождения одного фотона с волновой функцией e^{iqt} и двух противоположно заряженных бозонов с волновыми функциями f_k и f_{k+q} .

Заметим, что, хотя e^2 мало, после большого промежутка времени петлевые поправки $e^2(t-t_0) \rightarrow \infty$ становятся большими и даже сравнимыми с древесным вкладом. То есть петлевые поправки деформируют значения классических величин. Это поднимает вопрос о суммировании всех неподавленных поправок в пределе $t-t_0 \rightarrow \infty$. Данная процедура будет проделана ниже при помощи некоторого методов развитых в первой главе данной диссертационной работы.

Наличие такой расходимости в $n_{\mu\nu}$ означает, что постоянное электрическое поле не может существовать, хотя оно и является решением уравнений Максвелла в отсутствие источников. За счет квантовых эффектов возникают поправки к полю, что должны привести к его распаду.

Таким образом, осмысленнее рассматривать электрический импульс, вектор – потенциал для которого имеет вид $A_1(t) = -ET \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$ вместо постоянного электрического поля. На фоне импульса получаются точно такие же формулы для $n_{\mu\nu}$ и $\kappa_{\mu\nu}$ как и в (3.29), но с другими гармониками $f_p(t)$. Будем рассматривать случай $T \gg \frac{1}{m}$, $t_0 \ll -T$ и $t \gg T$. Мы можем различить три области интегрирования: до ($t_0 < t_{3,4} < -T$), внутри ($-T < t_{3,4} < T$) и после ($T < t_{3,4} < t$) электрического импульса. До и после импульса гармоники являются линейной комбинацией плоских волн, $Ae^{-i\omega_p t} + Be^{i\omega_p t}$, с некоторыми константами, A и B , зависящими от p_\perp . После их подстановки в (3.29), замены переменных и интегрирования по $\tau = (t_3 - t_4)/2$, ситуация становится схожей с отсутствием внешнего поля: под интегралом по d^3k мы

получаем δ -функцию типа $\delta(|q| \pm \omega_{k-q} \pm \omega_k)$. Аргумент этой δ -функции никогда не зануляется. Следовательно, до и после пульса $n_{\mu\nu}$ не получает больших поправок. В то же время для оценки вклада к $n_{\mu\nu}$ в пределе $T \rightarrow \infty$, приходящего с внутренней части пульса, мы можем использовать те же самые вычисления в случае постоянного электрического поля. Следовательно, в случае пульса мы опять получаем большой инфракрасный вклад: $n_{\mu\nu} \sim e^2 T$. В пределе $T \rightarrow \infty$ эти поправки становятся существенными и приводят к изменению заселенности уровней.

3.4.4 Свойства $n_{\mu\nu}$

Так как $n_{\mu\nu} = \langle \alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu \rangle$, проверим, что для неё выполняются свойства обычные для матрицы плотности фотонов. А именно поперечность матрицы плотности $q^\mu n_{\mu\nu}(q) = 0$ и положительности следа $n_\mu^\mu > 0$, то есть мы создаем положительное число физических фотонов.

Покажем, что $n_{\mu\nu}$ поперечна, $n_{\mu\nu}(q, t) q^\nu = 0$. Легко заметить, что $n_{\mu\nu}(q, t < t_0) q^\nu = 0$ в силу начальных условий. После умножения (3.29) на импульс фотона q^μ мы получаем:

$$\begin{aligned}
n_{\mu\nu}(q, t) q^\mu &= e^2 \int_{-\infty}^t dt_3 \int_{-\infty}^t dt_4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|q| e^{-i|q|(t_3-t_4)}}{2|q|} \times \\
&\times \left[f_k(t_3) \partial_{t_3} f_{k-q}(t_3) - \partial_{t_3} f_k(t_3) f_{k-q}(t_3) \right] \left[f_k^*(t_4) D_\nu f_{k-q}^*(t_4) - D_\nu f_k^*(t_4) f_{k-q}^*(t_4) \right] + \\
&+ e^2 \int_{-\infty}^t dt_3 \int_{-\infty}^t dt_4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|q|(t_3-t_4)}}{2|q|} \times \\
&\times i \partial_{t_3} \left[f_k(t_3) \partial_{t_3} f_{k-q}(t_3) - \partial_{t_3} f_k(t_3) f_{k-q}(t_3) \right] \left[f_k^*(t_4) D_\nu f_{k-q}^*(t_4) - D_\nu f_k^*(t_4) f_{k-q}^*(t_4) \right] = \\
&= ie^2 \int_{-\infty}^t dt_4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|q|(t-t_4)}}{2|q|} \times \\
&\times \left[f_k(t) \partial_t f_{k-q}(t) - \partial_t f_k(t) f_{k-q}(t) \right] \left[f_k^*(t_4) D_\nu f_{k-q}^*(t_4) - D_\nu f_k^*(t_4) f_{k-q}^*(t_4) \right]. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Чтобы получить это выражение, мы использовали уравнения движения для гармоник $f_p(t)$. Используя $f_p(t) = f_{p_\perp}(p - eEt)$ и делая замену переменных $t_4 = t + \tau$, $k \rightarrow k - eEt$, мы получаем:

$$n_{\mu\nu}(q, t)q^\mu = ie^2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i|q|\tau}}{2|q|} \times \\ \times \left[f_k(0)\partial_t f_{k-q}(0) - \partial_t f_k(0)f_{k-q}(0) \right] \left[f_k^*(\tau)D_\nu f_{k-q}^*(\tau) - D_\nu f_k^*(\tau)f_{k-q}^*(\tau) \right]. \quad (3.32)$$

Следовательно, $n_{\mu\nu} q^\mu$ не зависит от времени, и $n_{\mu\nu}(q, t)q^\mu = n_{\mu\nu}(q, t < t_0)q^\mu = 0$. Тогда $n_{\mu\nu}(q, t) = \pi_{\mu\nu}(q)n_q(t)$, где $\pi_{\mu\nu}(q)$ определяется уравнением $\pi_{\mu\nu}(q)q^\nu = 0$. Также можно легко показать, что $n_q(t)$ положительна:

$$n_q(t) \propto e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|q|} \left| \int_{t_0}^t dt [f_k(t)D_0 f_{k-q}(t) - D_0 f_k(t)f_{k-q}(t)] e^{-i|q|t} \right|^2 \geq 0. \quad (3.33)$$

В заключение мы бы хотели понять, приводит ли наличие $n_{\mu\nu} \neq 0$ к потоку фотонов или нет. Чтобы увидеть это, вычислим квантовые средние компонент тензора энергии-импульса T_{0i} :

$$\langle : T_{0i} : \rangle \equiv \langle T_{0i}(E) \rangle - \langle T_{0i}(E = 0) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{q}|} \left[q_0 q_i n + q_\mu^2 n_{0i} - q_\mu q_i n_0^\mu - q_0 q^\mu n_{\mu i} \right]. \quad (3.34)$$

Используя $n_{\mu\nu} q^\mu = 0$, $q_\mu^2 = 0$ и $q^0 = |\vec{q}|$, получаем $\langle : T_{0i} : \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(q)}{2} q_i$. Легко показать, что $n(-\vec{q}) = n(\vec{q})$. Следовательно, $\langle : T_{0i} : \rangle = 0$. (Диагональные компоненты $\langle : T_{\mu\nu} : \rangle$ при этом не исчезают).

3.4.5 Однопетлевая поправка к скалярному пропагатору

Однопетлевая поправка к скалярному пропагатору Келдыша в пределе больших времен $t = (t_1 + t_2)/2 \rightarrow \infty$ при $t \gg |t_1 - t_2| = \text{const}$, может быть выражена следующим образом:

$$D^K(p, t_1, t_2) = \left[n_p^+(t) + \frac{1}{2} \right] f_p(t_1) f_p^*(t_2) + \varkappa_p^+(t) f_p(t_1) f_p(t_2) + \\ + (+ \leftrightarrow -, \vec{p} \leftrightarrow -\vec{p}), \quad (3.35)$$

Где $n_p^+(t)$ и $\varkappa_p^+(t)$ могут быть выражены через формулы аналогичные (1.49) и (1.50)

$$\begin{aligned}
n_p^+(t) &= e^2 \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^t dt_4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|q|(t_3-t_4)}}{2|q|} \times \\
&\times \left\{ - [(2\vec{p}_\perp + \vec{q}_\perp)^2 + (2p_1 + q_1 + 2eEt_3)(2p_1 + q_1 + 2eEt_4)] \times \right. \\
&\quad \times f_p(t_3) f_p^*(t_4) f_{p+q}(t_3) f_{p+q}^*(t_4) + \\
&\quad \left. + \left[\dot{f}_p(t_3) f_{p+q}(t_3) - f_p(t_3) \dot{f}_{p+q}(t_3) \right] \left[\dot{f}_p^*(t_4) f_{p+q}^*(t_4) - f_p^*(t_4) \dot{f}_{p+q}^*(t_4) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\text{и } \varkappa_p^+(t) &= e^2 \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^t dt_4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i|q|(t_3-t_4)}}{2|q|} \times \\
&\times \left\{ - [(2\vec{p}_\perp + \vec{q}_\perp)^2 + (2p_1 + q_1 + 2eEt_3)(2p_1 + q_1 + 2eEt_4)] \times \right. \\
&\quad \times f_p(t_3) f_p^*(t_4) f_{p+q}(t_3) f_{p+q}^*(t_4) + \\
&\quad \left. + \left[\dot{f}_p^*(t_3) f_{p+q}(t_3) - f_p^*(t_3) \dot{f}_{p+q}(t_3) \right] \left[\dot{f}_p^*(t_4) f_{p+q}^*(t_4) - f_p^*(t_4) \dot{f}_{p+q}^*(t_4) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

где мы ввели обозначение $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$. Аналогичные выражения получаются и для анти-частиц — n^- и \varkappa^- .

Мы опять начнем со случая постоянного электрического поля. Делая те же самые преобразования как при вычислении $n_{\mu\nu}$, $t' = (t_3 + t_4)/2$ и $\tau = (t_3 - t_4)/2$, можно показать, что $n_p^+(t) = n_{p_\perp}^+(p_{ph})$, где $p_{ph} = p_1 + eEt$. Затем, взяв производную $\partial/\partial p_{ph}$ в (3.36), мы получаем:

$$\begin{aligned}
eE \frac{\partial n_{p_\perp}^+}{\partial p_{ph}} &= I[p_{ph}] \equiv e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2i|q|\tau}}{2|q|} \times \\
&\times \left\{ - [(2\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)^2 + (2p_{ph} - q_1 + 2eE\tau)(2p_{ph} - q_1 - 2eE\tau)] \times \right. \\
&\quad \times f_{p_\perp}(p_{ph} + eE\tau) f_{p_\perp}^*(p_{ph} - eE\tau) f_{p_\perp - q_\perp}(p_{ph} + q_1 + eE\tau) f_{p_\perp - q_\perp}^*(p_{ph} - q_1 - eE\tau) + \\
&\quad \left[\dot{f}_{p_\perp}(p_{ph} + eE\tau) f_{p_\perp - q_\perp}(p_{ph} - q_1 + eE\tau) - f_{p_\perp}(p_{ph} + eE\tau) \dot{f}_{p_\perp - q_\perp}(p_{ph} - q_1 + eE\tau) \right] \times \\
&\quad \left. \times \left[\dot{f}_{p_\perp}^*(p_{ph} - eE\tau) f_{p_\perp - q_\perp}^*(p_{ph} - q_1 - eE\tau) - f_{p_\perp}^*(p_{ph} - eE\tau) \dot{f}_{p_\perp - q_\perp}^*(p_{ph} - q_1 - eE\tau) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

где мы сделали замену $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$. Сейчас мы бы хотели увидеть, как зависит $I[p_{ph}]$ от p_{ph} в пределе $p_{ph} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow +\infty$). К примеру, если $I[p_{ph}]$ не зависит от p_{ph} , то в рассматриваемом пределе мы будем иметь линейно растущие поправки к n^+ .

Большие импульсы фотонов не дают больших вкладов к $I[p_{ph}]$ из-за быстрых осцилляций подинтегральной функции. Следовательно, в пределе $p_{ph} \rightarrow \infty$ мы можем разложиться по степеням q_{\perp} и сохранить только линейные члены. Гармоники в пределе $p_{ph} \rightarrow \infty$ ведут себя следующим образом:

$$f_{p_{\perp}}(p_{ph}) \approx \alpha \cdot \left(\frac{p_{ph}}{m}\right)^{i\frac{m_{\perp}^2}{2eE}} \frac{\exp\left[i\frac{p_{ph}^2}{2eE}\right]}{\sqrt{2}(m_{\perp}^2 + p_{ph}^2)^{\frac{1}{4}}} + \beta \cdot \left(\frac{p_{ph}}{m}\right)^{-i\frac{m_{\perp}^2}{2eE}} \frac{\exp\left[-i\frac{p_{ph}^2}{2eE}\right]}{\sqrt{2}(m_{\perp}^2 + p_{ph}^2)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.39)$$

Где $m_{\perp}^2 = \vec{p}_{\perp}^2 + m^2$, и α, β являются функциями от p_{\perp} .

В рассматриваемом пределе наибольшая поправка к правой части уравнения (3.38) приходит от интерферирующих экспонент в произведении гармоник в (3.39). Поэтому, сохраняя наибольшие и не осциллирующие по p_{ph} вклады в пределе $p_{ph} \rightarrow \infty$, мы получаем:

$$I[p_{ph}] \propto e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_{ph}^2} \frac{e^{-2i|q|\tau}}{2|q|} \times \\ \times \left[|\alpha(p_{\perp} - q_{\perp})|^2 |\beta(p_{\perp})|^2 e^{-2iq_1\tau} + |\alpha(p_{\perp})|^2 |\beta(p_{\perp} - q_{\perp})|^2 e^{2iq_1\tau} \right] \propto \frac{1}{p_{ph}^2}. \quad (3.40)$$

Очевидно, что $\int \frac{dk_{ph}}{k_{ph}^2}$ сходится в пределе $p_{ph} \rightarrow \infty$. Следовательно, нет никаких растущих со временем t (или p_{ph}) вкладов к n^+ на однопетлевом уровне. Аналогично, мы не найдем секулярного роста ни в \varkappa^+ , ни в n^- , \varkappa^- . Следует отметить, что в высших петлевых уровнях ($\sim e^4$) могут появиться секулярно растущие вклады к n^{\pm} и \varkappa^{\pm} . Они приходят от расходимостей, появляющихся в $n_{\mu\nu}$ на однопетлевом уровне.

Интерпретация данной ситуации следующая. Рассмотрим гармонику с импульсом p , тогда её физический импульс есть $p_{ph} = p + eEt$, который растет со временем. В бесконечном прошлом "частица", соответствующая данной гармонике, имела большой физический импульс и поэтому не чувствовала электрического поля, из-за этого $I[p_{ph}] \approx 0$. Когда $p_{ph} \approx 0$, частица начала чувствовать электрическое поле, что приводит к рождению квантов скалярного поля $I[p_{ph}] \neq 0$. Но так как электрическое поле снова уводит физический импульс в бесконечность, этот рост останавливается. Ситуацию можно сравнить с тем, что мы наблюдали в расширяющейся Пуанкаре карте. Там рождение начиналось, когда физический импульс $p_{ph} = p\eta$ становился меньше $\mu = \sqrt{m^2 - \left(\frac{D-1}{2}\right)^2} > p\eta$, но, так как $p\eta > 0$, войдя в инфракрасную область импульсов, последний не может её покинуть. Это при-

водит к наличию линейно растущего вклада в расширяющейся Пуанкаре карте и инфракрасной расходимости в сжимающейся Пуанкаре карте.

Рассмотрим случай электрического пульса. В области $|t_{3,4}| \ll T$, когда поле включено, ситуация точно такая же как и в случае постоянного электрического поля. В тоже время, в области $|t_{3,4}| \gg T$ гармоники являются линейной комбинацией плоских волн, $e^{\pm i\omega_p t}$. После интегрирования по τ мы получаем, что соответствующие вклады в n^+ являются суммой δ -функций вида $\delta(|q| \pm E_p \pm E_{p+q})$, где $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$. Легко заметить, что $\delta(|q| \pm E_p \pm E_{p+q}) = 0$ (с физической точки зрения это означает, что запрещены процессы рассеяния фотона на заряженной частице и распад фотона на пару частицы и античастицы). Следовательно, на фоне электрического пульса мы также не имеем секулярно растущих вкладов к n^\pm на однопетлевом уровне. Однако, присутствуют растущие вклады в высших петлях, которые приходят от однопетлевых расходимостей в $n_{\mu\nu}$.

В случае пространственной калибровки, мы тоже посчитаем поправки к скалярным пропагаторам и увидим, что эти вычисления согласуются (причем вычисления окажутся намного проще проделанных здесь).

3.4.6 Однопетлевая поправка к вершине

В этом подразделе мы обсудим трехточечные корреляционные функции в Швингерской \pm -параметризации пропагаторов. Мы рассмотрим, к примеру, следующую функцию $G_\mu^{---}(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3) = \langle T A_\mu(x_1, t_1) \phi(x_2, t_2), \bar{\phi}(x_3, t_3) \rangle$. Мы интересуемся пределом больших времен, когда $t_1 \approx t_2 \approx t_3 \approx t \rightarrow \infty$ и $t \gg |t_i - t_j| = \text{const}$. Также сделаем преобразование Фурье по пространственным переменным. Чтобы понять однопетлевую ответ, мы начнем с изучения древесного выражения для $G_\mu^{---}(t, p, q)$:

$$G_{\text{tree}\mu}^{---}(t, p, q) = \frac{e}{2|q|} \text{Im} \left[e^{-i|q|t} f_p(t) f_{p+q}(t) \int_{-\infty}^t d\tau e^{i|q|\tau} \left(f_p^*(\tau) \overleftrightarrow{D}_\mu(\tau) f_{p+q}^*(\tau) \right) \right], \quad (3.41)$$

где p, q импульсы одного из скалярных бозонов и фотона соответственно. Здесь мы пренебрегли разностью между $t_{1,2,3}$ и $t = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$.

Характерный вклад в однопетлевую поправку к функции Грина $G_\mu^{---}(t, p, q)$

имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Delta G_{\text{loop}\mu}^{----}(t, p, q) \propto & \\ & \frac{e^3}{2|q|} e^{\pm i|q|t} \bar{f}_p(t) \bar{f}_{p+q}(t) \int_{-\infty}^t dt_1 e^{\mp i|q|t_1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\bar{f}_{p-k}(t_1) \overleftrightarrow{D}_\mu(t_1) \bar{f}_{p-k+q}(t_1) \right) \times \\ & \times \left[\int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^t dt_3 \frac{e^{\pm i|k|(t_2-t_3)}}{2|k|} \left(\bar{f}_p(t_2) \overleftrightarrow{D}_\nu(t_2) \bar{f}_{p-k}(t_2) \right) \left(\bar{f}_{p-k+q}(t_3) \overleftrightarrow{D}^\nu(t_3) \bar{f}_{p+q}(t_3) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\bar{f}_p(t)$ означает либо $f_p(t)$, либо $f_p^*(t)$. Можно видеть, что выражение в квадратных скобках сходится и пропорционально

$$\int (A + B\tau) d\tau e^{i|k|(1-\cos\theta)\tau} = A\delta[|k|(1-\cos\theta)] + B\delta'[|k|(1-\cos\theta)]$$

, где θ есть угол между \vec{k} и внешним полем E , а A и B некоторые конечные выражения. Отсюда мы заключаем, что $G_{\mu}^{----}(t, p, q)$ не получает больших инфракрасных вкладов. Аналогичные рассуждения применимы и к остальным трехточечным корреляционным функциям.

3.4.7 Суммирование лидирующих инфракрасных поправок

Хотя e^2 мало, произведение $e^2(t-t_0)$ (или e^2T) становится большим в пределе $t-t_0 \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$). Следовательно, высшие поправки к пропагатору не подавлены по сравнению с древесным вкладом. Чтобы понять физику на фоне сильного электрического поля, мы должны просуммировать все лидирующие инфракрасные вклады приходящие со всех петель, как описывалось в первой главе. Учитывая, что все вершины, опережающий, запаздывающий, а также Келдышевский скалярные пропагаторы подавлены. Тогда, используя технику развитую в первой главе, мы получаем кинетическое уравнение на матрицу плотности фотонов:

$$\frac{\partial n_{\mu\nu}(q, t)}{\partial t} = -\Gamma_{1\mu}^\rho(q) \left[-g_{\rho\nu} + n_{\rho\nu}(q, t) \right] + \Gamma_{2\mu}^\rho(q) n_{\rho\nu}(q, t), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Gamma_{1\mu\nu}(q) &= e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-2i|q|\tau}}{|q|} \times \\ & \times \left[f_k(\tau) D_\mu f_{k-q}(\tau) - D_\mu f_k(\tau) f_{k-q}(\tau) \right] \left[f_k^*(-\tau) D_\nu f_{k-q}^*(-\tau) - D_\nu f_k^*(-\tau) f_{k-q}^*(-\tau) \right] \\ \text{и } \Gamma_{2\mu\rho}(q) &= e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-2i|q|\tau}}{|q|} \times \\ & \times \left[f_k^*(\tau) D_\mu f_{k-q}^*(\tau) - D_\mu f_k^*(\tau) f_{k-q}^*(\tau) \right] \left[f_k(-\tau) D_\rho f_{k-q}(-\tau) - D_\rho f_k(-\tau) f_{k-q}(-\tau) \right]. \end{aligned}$$

Можно проверить, что $\Gamma_{1,2\mu\nu}(q)$ поперечны: $\Gamma_{1,2\mu\nu}(q)q^\nu = 0$. Таким образом, $\Gamma_{1,2}$ могут быть представлены как $\Gamma_{1,2\mu\nu}(q) = \pi_{\mu\nu}(q)\Gamma_{1,2}(q)$. Также из одно-петлевого ответа для $n_q(t)$ следует, что $\Gamma_1 \geq 0$. Аналогично можно показать, что Γ_2 также является положительной величиной. Окончательно можно прямыми вычислениями показать, что $\Gamma_{1,2}(q) = \Gamma_{1,2}(-q)$.

Следует отметить, что если мы положим $n_{\mu\nu} = 0$ в кинетическом уравнении (3.43), то мы воспроизведем однопетлевой ответ (3.30).

Беря след кинетического уравнения (3.43), мы получаем следующее кинетическое уравнение на $n_q(t) = n_{\mu q}^\mu(t)$:

$$\frac{\partial n_q(t)}{\partial t} = \Gamma_1(q) - [\Gamma_2(q) - \Gamma_1(q)] n_q(t) \quad (3.44)$$

Физический смысл этого уравнения легко понять. Первый член описывает рождение фотонов внешним полем. Второй член описывает распад фотонов в скалярные бозоны. Это уравнение не содержит члены, которые описывают другие процессы (такие как рассеяние фотонов на бозонах), так как они подавлены более высокими степенями по e^2 . Заметим, что при отсутствии внешнего электрического поля $\vec{E} = 0$, процесс распада фотонов в скалярные бозоны запрещен.

Решением уравнения (3.44) являются

$$n_q(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma_1(q)}{\Gamma_2(q) - \Gamma_1(q)} + e^{(\Gamma_1(q) - \Gamma_2(q))(t - t_0)} \left[n_q(t_0) - \frac{\Gamma_1(q)}{\Gamma_2(q) - \Gamma_1(q)} \right], & \Gamma_2 \neq \Gamma_1 \\ n_q(t_0) + \Gamma_1(q) (t - t_0), & \Gamma_1 = \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Как видно из данного решения возможны три возможности в зависимости от соотношения между $\Gamma_1(q)$ и $\Gamma_2(q)$. Если темп рождения фотонов, $\Gamma_1(q)$, больше темпа распада фотонов, $\Gamma_2(q)$, то тогда решения окажется экспоненциально растущим со временем. Если же $\Gamma_1(q) = \Gamma_2(q)$, то остается секулярно растущий вклад, а высшие поправки сократили друг друга. Наконец, если $\Gamma_2(q) > \Gamma_1(q)$ то система перейдет в стационарное распределение.

3.5 Электрическое поле в пространственной калибровке

Как и в предыдущем параграфе мы рассматриваем массивное скалярное поле, взаимодействующее с электромагнитным полем в размерности $D = 3 + 1$:

$$S = \int d^4x \left[|D_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - j_\mu^{cl} A^\mu \right],$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Мы опять делим потенциал на две части $A_\mu = A_\mu^{cl} + a_\mu$ — классическую, A_μ^{cl} , и квантовую, a_μ , части. В данном параграфе мы выберем статическую калибровку $A_0(x) = -Ex$, $\vec{A} = 0$.

Поле a_μ никак не чувствует внешнее электрическое поле A_μ^{cl} , и поэтому мы квантуем его стандартным образом, выбирая Фейнмановскую калибровку. Заряженные бозоны чувствуют наличие внешнего поля, и поэтому для них гармоники меняются.

Введя следующие обозначения $\vec{k} = (k_0, k_2, k_3)$, $\vec{k}_\perp = (k_2, k_3)$ и $d^3\vec{k} = dk_0 d^2\vec{k}_\perp$, мы раскладываем гармоники по плоским волнам вида $e^{-ik_0 t + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}$ (так как поле статично и не зависит от координат перпендикулярных направлению поля):

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left\{ a_{\vec{k}} f_{k_\perp} \left(x - \frac{k_0}{eE} \right) e^{-ik_0 t + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} + b_{\vec{k}}^\dagger f_{k_\perp}^* \left(-x - \frac{k_0}{eE} \right) e^{ik_0 t - i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \right\}.$$

Где функция $f_{k_\perp} \left(x - \frac{k_0}{eE} \right)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & - \left[(\partial_t + ieEx)^2 - \vec{\partial}_\perp^2 - \partial_x^2 + m^2 \right] f_{k_\perp} \left(x - \frac{k_0}{eE} \right) e^{-ik_0 t + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} = \\ & = \left[\partial_x^2 + (k_0 - eEx)^2 - k_\perp^2 - m^2 \right] f_{k_\perp} \left(x - \frac{k_0}{eE} \right) e^{-ik_0 t + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Если сделать преобразование Фурье решения данного уравнения, можно заметить, что она будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\left[\partial_t^2 + (k_1 + eEt)^2 + k_\perp^2 + m^2 \right] f_{k_\perp} \left(t + \frac{k_1}{eE} \right) = 0. \quad (3.47)$$

Это уравнение возникало в предыдущем параграфе и определяло гармоники в темпоральной калибровке, $A_1 = -Et$. Данное преобразование Фурье делается по переменным $k_0 - eEx = -eEX$ и $eET = k_1 + eEt$. Тогда решения уравнений (3.46) и (3.47) связаны следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dT f_{k_\perp}(T) e^{-ieETX} = f_{k_\perp}(X). \quad (3.48)$$

В дальнейшем, мы будем использовать именно такое определение преобразования Фурье.

Из коммутационных соотношений для алгебры Гейзенберга $[a_{\bar{k}}, a_{\bar{k}'}^\dagger] = [b_{\bar{k}}, b_{\bar{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}')$ мы видим, что коммутационные соотношения для поля ϕ и сопряженного ему импульса $\pi = (\partial_t - ieEx)\phi^*$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}_1), \pi(t, \vec{x}_2)] &= i \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} (k_0 - eEx_2) e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_{1\perp} - \vec{x}_{2\perp})} \times \\ &\times \left[f_{k_\perp} \left(x_1 - \frac{k_0}{eE} \right) f_{k_\perp}^* \left(x_2 - \frac{k_0}{eE} \right) - f_{k_\perp}^* \left(-x_1 + \frac{k_0}{eE} \right) f_{k_\perp} \left(-x_2 + \frac{k_0}{eE} \right) \right] = \\ &= i\delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из преобразования Фурье (3.48), сохранения Вронсиана для решения (3.47), и предположения, что гармоники правильно отнормированы. В результате подынтегральное выражение равно единице, а коммутатор дельта-функции.

Прямой подстановкой гармоник можно убедиться, что гамильтониан диагонален для данного выбора гармоник:

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x \left[|\partial_t\phi|^2 + |\partial_i\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - e^2E^2x^2|\phi|^2 \right] = \\ &= \int d^3x \left[|\partial_t\phi|^2 - \phi^*\partial_t^2\phi - 2ieEx\phi^*\partial_t\phi \right] = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} k_0 \left[a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}} + b_{\bar{k}}^\dagger b_{\bar{k}} \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Так как в данном случае система не зависит от времени, то выполняется закон сохранения энергии. Но из формы свободного Гамильтониана (он диагональный и не зависит от времени) можно понять, что спектр бозонов не ограничен снизу, ведь $k_0 \in (-\infty, +\infty)$. Из-за этого, как мы увидим, будут разрешены некоторые процессы рождения частиц, которые нарушали бы закон сохранения энергии при выключенном внешнем поле.

3.5.1 Однопетлевая поправка

Как было объяснено в первой главе, когда система имеет неограниченный снизу спектр, теория поля становится нестационарной, и мы должны использовать диаграммную технику Келдыша-Швингера. Как и в предыдущем параграфе мы будем интересоваться только пропагатором Келдыша фотонов и скалярного поля и петлевыми поправками к нему. Аналогично, мы будем интерпретировать петлевые поправки как изменение заселенности уровней и аномальных квантовых средних со временем. Так, к примеру, мы будем расписывать пропагатор Келдыша для

фотонов:

$$G_{\mu\nu}^K(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{q}d^3\vec{q}'}{(2\pi)^6} \left\{ n_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}') \frac{e^{iq \cdot x_1 - iq' \cdot x_2}}{\sqrt{|\vec{q}| |\vec{q}'|}} + \varkappa_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}') \frac{e^{-iq \cdot x_1 - iq' \cdot x_2}}{\sqrt{|\vec{q}| |\vec{q}'|}} + \text{h.c.} \right\}. \quad (3.50)$$

Где $n_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle \psi | \alpha_{\vec{q}\mu}^\dagger \alpha_{\vec{q}'\nu} | \psi \rangle$, $\varkappa_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle \psi | \alpha_{\vec{q}\mu} \alpha_{\vec{q}'\nu} | \psi \rangle$, $q \cdot x = |q|t - \vec{q} \cdot \vec{x}$. А h.c. содержит комплексно сопряженные величины $\langle \psi | \alpha_{\vec{q}\mu} \alpha_{\vec{q}'\nu}^\dagger | \psi \rangle = n_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}') - g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}')$ и $\varkappa_{\mu\nu}^*(\vec{q}, \vec{q}') = \langle \psi | \alpha_{\vec{q}\mu}^\dagger \alpha_{\vec{q}'\nu}^\dagger | \psi \rangle$.

Аналогично расписываем пропагатор Келдыша для скалярного поля:

$$D^K(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \langle \{ \phi(x_1), \bar{\phi}(x_2) \} \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\bar{k}d^3\bar{k}'}{(2\pi)^6} \times \\ \times \left\{ n^+(\bar{k}, \bar{k}') e^{ik_0 t_1 - i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_{1\perp}} e^{-ik'_0 t_2 + i\vec{k}'_\perp \cdot \vec{x}_{2\perp}} f_{k_\perp}^* \left(x_1 - \frac{k_0}{eE} \right) f_{k'_\perp} \left(x_2 - \frac{k'_0}{eE} \right) + \right. \\ \left. + \varkappa^+(\bar{k}, \bar{k}') e^{-ik_0 t_1 + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_{1\perp}} e^{-ik'_0 t_2 + i\vec{k}'_\perp \cdot \vec{x}_{2\perp}} f_{k_\perp} \left(x_1 - \frac{k_0}{eE} \right) f_{k'_\perp} \left(-x_2 - \frac{k'_0}{eE} \right) + \text{h.c.} \right\}. \quad (3.51)$$

Где $n^+(\bar{k}, \bar{k}') = \langle \psi | a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}'} | \psi \rangle$, $\varkappa^+(\bar{k}, \bar{k}') = \langle \psi | a_{\bar{k}} b_{\bar{k}'} | \psi \rangle$ и h.c. содержит комплексно сопряженные величины $\langle \psi | a_{\bar{k}} a_{\bar{k}'}^\dagger | \psi \rangle = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}') + n^+(\bar{k}, \bar{k}')$, $\langle \psi | b_{\bar{k}}^\dagger b_{\bar{k}'} | \psi \rangle = n^-(\bar{k}, \bar{k}')$, $\langle \psi | b_{\bar{k}} b_{\bar{k}'}^\dagger | \psi \rangle = \delta(\bar{k} - \bar{k}') + n^-(\bar{k}, \bar{k}')$ и $\varkappa^-(\bar{k}, \bar{k}') = \langle \psi | a_{\bar{k}}^\dagger b_{\bar{k}'}^\dagger | \psi \rangle$.

Поправки к опережающему и запаздывающему пропагатору, как обсуждалось в первой главе, содержат информацию о спектре частиц.

3.5.2 Поправки к пропагатору Келдыша фотонов

Рассмотрим однопетлевые поправки к фотонному пропагатору Келдыша в инфракрасном пределе $\frac{t_1+t_2}{2} = t \rightarrow \infty$, и $t_1 - t_2 = \text{const}$. Начальное состояние мы определим как зануляющееся операторами уничтожениями (a , b и α 's).

Так как система инвариантна при сдвигах перпендикулярных направлению электрического поля, то выполняется закон сохранения поперечного импульса. Отсюда следует, что матрица плотности фотонов имеет следующий вид $n_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}', t) = \delta^{(2)}(\vec{q}_\perp - \vec{q}'_\perp) n_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t)$ и $\varkappa_{\mu\nu}(\vec{q}, \vec{q}', t) = \delta^{(2)}(\vec{q}_\perp - \vec{q}'_\perp) \varkappa_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t)$. Тогда петлевые поправки к этим величинам записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
n_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t) &\approx e^2 \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{dk'_0}{2\pi} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_3 dt_4 \frac{e^{-i(k_0+k'_0)(t_3-t_4)} e^{-i|q|t_3+i|q'|t_4}}{2\sqrt{|q||q'|}} \times \\
&\times \int dx_3 e^{iq_1 x_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right] \times \\
&\times \int dx_4 e^{-iq'_1 x_4} \left[f_{k_\perp}^* \left(x_4 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\nu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-x_4 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right] \\
\text{и } \varkappa_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t) &\approx -2e^2 \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{dk'_0}{2\pi} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_3} dt_3 dt_4 \frac{e^{-i(k_0+k'_0)(t_3-t_4)} e^{-i|q|t_3-i|q'|t_4}}{2\sqrt{|q||q'|}} \times \\
&\times \int dz_3 e^{iq_1 z_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right] \times \\
&\times \int dz_4 e^{iq'_1 z_4} \left[f_{k_\perp}^* \left(x_4 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\nu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-x_4 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right], \quad (3.52)
\end{aligned}$$

где мы ввели $D_\mu f_{p_\perp}(\pm z - p_0/eE) = (-ip_0 \pm ieEz, i\vec{p}_\perp, \partial_z) f_{p_\perp}(\pm z - p_0/eE)$ и $f_1 \overleftrightarrow{D}_\mu f_2 = (D_\mu f_1) f_2 - f_1 (D_\mu^* f_2)$, а t_0 - момент времени, после которого адиабатически включено взаимодействие скаляров с квантами электромагнитного поля a_μ .

Рассмотрим формулу для $n_{\mu\nu}$ в (3.52). Чтобы оценить данное выражение, мы сделаем замену переменных: $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$, $\tau = t_3 - t_4$. Интеграл по τ может быть распространен на всю ось (ввиду его быстрой сходимости), и мы получим закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned}
n_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t) &\approx e^2 \int_{t_0}^t dt' \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \int dk'_0 \delta \left(\frac{|q| + |q'|}{2} + k'_0 + k_0 \right) \frac{e^{-i(|q|-|q'|)t'}}{2\sqrt{|q||q'|}} \times \\
&\times \int dz_3 e^{iq_1 z_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right] \times \\
&\times \int dz_4 e^{-iq'_1 z_4} \left[f_{k_\perp}^* \left(x_4 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\nu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-x_4 - \frac{k'_0}{eE} \right) \right]. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Аналогичные преобразования мы делаем и для координаты параллельной электрическому полю. А именно $X = \frac{x_3+x_4}{2}$ и $x = x_3 - x_4$. Также мы сдвигаем переменные $k_0 \rightarrow k_0 - eEX$ и $k'_0 \rightarrow k'_0 + eEX$ (это можно интерпретировать как переход к собственной энергии противоположно заряженных скаляра и антискаляра). После этого интеграл по X легко берется. Он устанавливает закон сохранения компоненты импульса направленного вдоль поля $q_1 = q'_1$. В результате,

$n_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp, t) = \delta(q_1 - q'_1) n_{\mu\nu}(\vec{q}, t)$, где

$$\begin{aligned} n_{\mu\nu}(\vec{q}, t) &\approx e^2 (t - t_0) \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|q|} \times \\ &\times \int dx e^{-i2q_1 x} \left[f_{k_\perp} \left(x - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x + \frac{k_0 + |q|}{eE} \right) \right] \times \\ &\times \left[f_{k_\perp}^* \left(-x - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\nu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(x + \frac{k_0 + |q|}{eE} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Данное выражение было получено из (3.53), где мы использовали соотношение $|q| = |q'|$ из-за наличия следующих дельта-функций $\delta^{(2)}(\vec{q}_\perp - \vec{q}'_\perp) \delta(q_3 - q'_3)$, устанавливающих закон сохранения импульса. Также мы взяли интеграл по переменной t' в (3.53).

Легко заметить, что сделав преобразование Фурье (3.48), можно получить, что (3.54) совпадает с ответом для $n_{\mu\nu}$ полученным в предыдущем параграфе. Однако заметим, что в предыдущем параграфе механизм возникновения секулярного роста состоял в явной нестационарности задачи, а в данном случае из-за неограниченности снизу энергии.

Похожее вычисление мы сделаем и для аномального квантового среднего $\varkappa_{\mu\nu}$. Произведя интегрирование в (3.52) по среднему значению координаты $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, мы получим $\varkappa_{\mu\nu}(q_1, q'_1, \vec{q}_\perp) \propto \delta(q_1 + q'_1)$. Тогда интегрируя по временам t_1, t_2 в пределе $t \rightarrow \infty$ и $t_0 \rightarrow -\infty$ мы получаем, что $\varkappa_{\mu\nu}(q_1, \vec{q}_\perp) \propto \delta(k_0 + k'_0 + |q|) \delta(k_0 + k'_0 - |q|)$. Теперь легко проинтегрировать данное выражение по k'_0

$$\begin{aligned} \varkappa_{\mu\nu}(\vec{q}, t \rightarrow +\infty) &\approx -2e^2 \frac{1}{|q|} \delta(2|q|) \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \int dz e^{i2q_3 z} \times \\ &\times \left[f_{k_\perp} \left(z - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-z + \frac{k_0 + |q|}{eE} \right) \right] \times \\ &\times \left[f_{k_\perp}^* \left(z - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\nu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-z + \frac{k_0 + |q|}{eE} \right) \right] \end{aligned}$$

Данное выражение расходится только в случае $q = 0$ и конечно при $q \neq 0$. Это показывает, что аномальное квантовое среднее не растет со временем.

3.5.3 Однопетлевые поправки к скалярному пропагатору Келдыша

Однопетлевые поправки к скалярному Келдышевскому пропагатору в пределе больших времен $t = (t_1 + t_2)/2 \rightarrow \infty$ и $t_1 - t_2 = \text{const}$, могут быть выражены также

как и в (3.51), где $n^\pm(\bar{k}, \bar{k}', t) = \delta^{(2)}(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) n^\pm(k_0, k'_0, \vec{k}_\perp, t)$ и аналогично для \varkappa^\pm . Таким образом поправки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
n^+ (k_0, k'_0, \vec{k}_\perp, t) &= e^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{dk''_0}{2\pi} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_3 dt_4 \frac{e^{-i(|q|+k''_0)(t_3-t_4)} e^{-ik_0 t_3 + ik'_0 t_4}}{2|q|} \times \\
&\times \int dx_3 e^{iq_1 x_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 - \frac{k''_0}{eE} \right) \right] \times \\
&\times \int dx_4 e^{-iq_1 x_4} \left[f_{k_\perp}^* \left(x_4 - \frac{k'_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-x_4 - \frac{k''_0}{eE} \right) \right] \\
\text{и } \varkappa^+ (k_0, k'_0, \vec{k}_\perp, t) &= -2e^2 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{dk''_0}{2\pi} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_3} dt_3 dt_4 \frac{e^{-i(|q|+k''_0)(t_3-t_4)} e^{-ik_0 t_3 - ik'_0 t_4}}{2q} \times \\
&\times \int dx_3 e^{iq_1 x_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 - \frac{k''_0}{eE} \right) \right] \times \\
&\times \int dx_4 e^{-iq_1 x_4} \left[f_{k_\perp} \left(x_4 - \frac{k'_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|}^* \left(-x_4 - \frac{k''_0}{eE} \right) \right]. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Похожие выражения возникают и для n^- и \varkappa^- .

В предыдущем параграфе путем сложного анализа выражения для однопетлевой поправки к аномальному квантовому среднему и заселенности уровней энергий было получено, что ни n^\pm , ни \varkappa^\pm не получают больших петлевых поправок. Сейчас мы покажем, что и в случае статической калибровки эти величины не получают секулярного роста. Беря предел $t \rightarrow +\infty$, например, в n^+ мы получаем:

$$\begin{aligned}
n^+ (k_0, k'_0, \vec{k}_\perp, t \rightarrow +\infty) &\approx e^2 \delta(k_0 - k'_0) \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2q} \times \\
&\times \left| \int dx_3 e^{iq_1 x_3} \left[f_{k_\perp} \left(x_3 - \frac{k_0}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{q}_\perp + \vec{k}_\perp|} \left(-x_3 + \frac{k_0 + |q|}{eE} \right) \right] \right|^2. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Это выражение содержит только сходящиеся интегралы. Следовательно, n^+ не содержит поправок растущих со временем. Используя те же самые аргументы для n^- и \varkappa^\pm , мы получаем, что они тоже не растут со временем.

3.6 Петлевые поправки к вычислению тока

Выше мы считали ток в древесном приближении, который возникает во внешнем поле. На основании сделанных только что вычислений мы можем посчитать

петлевые поправки к току. Вычислим их в темпоральной калибровке $A_1 = -Et$:

$$\langle : J_1 : \rangle_{\text{петля}} = 4e \int \frac{dp_{ph} d^2\vec{p}_\perp}{(2\pi)^3} \left\{ n_{p_\perp}^+(p_{ph}) |f_{p_\perp}(p_{ph})|^2 + \text{Re} \left[\varkappa_{p_\perp}^+(p_{ph}) f_{p_\perp}^2(p_{ph}) \right] \right\} p_{ph}, \quad (3.57)$$

где мы ввели обозначения $n^+(\vec{p}, t) = n_{p_\perp}^+(p_3 + eEt) = n_{p_\perp}^+(p_{ph})$ и аналогичное для \varkappa^+ . Как указывалось выше, n^\pm и \varkappa^\pm являются функциями физического импульса $p_{ph} = p_1 + eEt$:

$$\begin{aligned} n_{p_\perp}^+(p_{ph}) &\approx \frac{e}{E} \int_{-\infty}^{p_{ph}} dk_{ph} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2i|q|\tau}}{2|q|} \times \\ &\times \left[f_{p_\perp} \left(\tau + \frac{k_{ph}}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp|} \left(\tau + \frac{k_{ph} - q_1}{eE} \right) \right] \left[f_{p_\perp}^* \left(\tau - \frac{k_{ph}}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp|}^* \left(\tau - \frac{k_{ph} - q_1}{eE} \right) \right], \\ \text{и } \varkappa_{p_\perp}^+(p_{ph}) &\approx -\frac{2e}{E} \int_{-\infty}^{p_{ph}} dk_{ph} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2i|q|\tau}}{2|q|} \times \\ &\times \left[f_{p_\perp}^* \left(\tau + \frac{k_{ph}}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp|} \left(\tau + \frac{k_{ph} - q_1}{eE} \right) \right] \left[f_{p_\perp} \left(\tau - \frac{k_{ph}}{eE} \right) \overleftrightarrow{D}_\mu f_{|\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp|}^* \left(\tau - \frac{k_{ph} - q_1}{eE} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Также для вывода формулы (3.57) мы использовали тот факт, что \varkappa^- связана комплексным сопряжением с \varkappa^+ и $n^-(p_{ph}) = n^+(-p_{ph})$.

Легко заметить, что ток (3.57) отличен от нуля. Это происходит из-за того, что функции n^+ и \varkappa^+ не являются четными функциями физического импульса p_{ph} . Как было показано ранее они за все время существования внешнего поля получают лишь конечную поправку.

Для оценки тока (3.57) мы воспользуемся ВКБ-приближением для ин-гармоник:

$$f_{p_\perp}(p_{ph}) \propto \left(\frac{p_{ph}}{m} \right)^{i\frac{\vec{p}_\perp^2 + m^2}{2eE}} \frac{\exp \left[i\frac{p_{ph}^2}{2eE} \right]}{\sqrt{2} (m^2 + \vec{p}_\perp^2 + p_{ph}^2)^{\frac{1}{4}}},$$

В пределе $p_{ph} \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} f_{p_\perp}(p_{ph}) &\approx \alpha_{p_\perp} \cdot \left(\frac{p_{ph}}{m} \right)^{i\frac{\vec{p}_\perp^2 + m^2}{2eE}} \frac{\exp \left[i\frac{p_{ph}^2}{2eE} \right]}{\sqrt{2} (m^2 + \vec{p}_\perp^2 + p_{ph}^2)^{\frac{1}{4}}} + \\ &+ \beta_{p_\perp} \cdot \left(\frac{p_{ph}}{m} \right)^{-i\frac{\vec{p}_\perp^2 + m^2}{2eE}} \frac{\exp \left[-i\frac{p_{ph}^2}{2eE} \right]}{\sqrt{2} (m^2 + \vec{p}_\perp^2 + p_{ph}^2)^{\frac{1}{4}}}, \end{aligned}$$

в пределе $p_{ph} \rightarrow +\infty$. Функции α_{p_\perp} и β_{p_\perp} зависят только от поперечного импульса p_\perp , и удовлетворяют соотношению $|\alpha_{p_\perp}|^2 - |\beta_{p_\perp}|^2 = 1$. Введя обозначения $n_{p_\perp}^+(p_{ph} = +\infty) = n_{p_\perp}^+$, $\varkappa_{p_\perp}^+(p_{ph} = +\infty) = \varkappa_{p_\perp}^+$, и используя приближения, которые были применены в параграфе про вычисление древесного тока, мы получаем

$$\langle : J_1 : \rangle_{\text{петля}} \propto eE^2(t - t_0) \int d^2\vec{p}_\perp \{ n_{p_\perp}^+ |\beta_{p_\perp}|^2 + \text{Re} [\varkappa_{p_\perp}^+ \alpha_{p_\perp} \beta_{p_\perp}] \}, \quad (3.59)$$

Как видно, хотя древесный ток и равен нулю, при учете петлевых поправок ток оказывается отличным от нуля, что разрешает парадокс, описанный во введении к данной главе.

Глава 4

Петлевые поправки к излучению

Хокинга

4.1 Постановка задачи

Черные дыры представляют в настоящее время большой интерес для научного сообщества. Это связано с тем, что черная дыра является одним из тестов для теории квантовой гравитации. Любая состоятельная теория квантовой гравитации должна объяснять квантовую природу черных дыр — в частности, излучение Хокинга.

В 1974 году Стивен Хокинг на основании квазиклассического вычисления показал, что черные дыры имеют конечную температуру и излучают [63]. Наличие температуры позволило рассматривать черную дыру как термодинамический объект. К примеру, можно ввести такое понятие как энтропия черной дыры, которое удовлетворяет стандартными термодинамическим соотношениям. Такое описание черных дыр очень привлекательно, но вызывает вопросы касающиеся микроскопического понимания энтропии и голографического описания гравитации [65]. Также оно приводит к противоречию в виде информационного парадокса [66].

Излучение Хокинга - это квантовый эффект, который может быть получен в гауссовой квантовой теории поля, которая рассматривается на фоне гравитационного коллапса [63],[67]. В данной главе мы поставим задачу в несколько иной форме.

Мы бы хотели рассматривать гравитационное поле, создаваемое в течение процесса эволюции звезды. А именно, до некоторого времени звезда была статична,

затем она израсходовала все свое ядерное топливо, что привело к падению давления внутри звезды. Соответственно нет никаких сил которые будут противостоять гравитации, и звезда начинает коллапсировать. Данный процесс приближено описывается при помощи решения Оппенгеймера-Снайдера (для случая коллапса сферически симметричной идеальной жидкости). Но для дальнейшего упрощения мы вместо этого решения будем рассматривать коллапс тонкой оболочки. На фоне данного гравитационного поля мы будем изучать квантовую теорию скалярного массивного поля.

Гравитационное поле будет подробно описано в следующем параграфе. Сейчас мы только отметим качественное поведение оболочки при коллапсе. Как видно из рисунка (4.1) можно выделить три фазы гравитационного коллапса. Во время первой фазы оболочка, поддерживаемая некоторыми добавочными силами, статична и имеет радиус $R(t) = R_0$. Во время второй фазы движение оболочки не универсально, оно сильно зависит от начальных данных и неровностей оболочки. Более того, можно увидеть, что эти неровности увеличиваются в процессе коллапса, если начальный радиус R_0 достаточно большой. Во время третьей фазы, описывающей финальную стадию коллапса, все неровности исчезают и движение становится универсальным (не зависит от начальных данных), потому что все высшие мультипольные моменты поверхности: дипольный, квадрупольный, и т.д., излучаются [72], [73]. Это связано со свойствами горизонта — поверхности с бесконечным красным смещением $\sqrt{g_{00}} = 0$. Также этот факт используется при доказательстве теоремы об отсутствии волос у черной дыры.

Так как внешнее гравитационное поле нестационарно, возможно рождение частиц. А так как на последних стадиях коллапса движение стационарно и универсально, темп рождения частиц должен быть тоже стационарным и универсальным. Поэтому можно задаться вопросом о спектре рожденных частиц. Под этим подразумевается следующее. Во время первой фазы гамильтониан стационарен и, следовательно, может быть диагонализирован. Мы выберем в качестве начального состояния основное состояние данного гамильтониана — ин-вакуум. Задав начальное состояние, мы можем проследить, как оно эволюционирует в процессе коллапса. Очевидно, что оно не должно совпадать с аут-вакуумом, который диагонализует гамильтониан во время третьей фазы. Вместо этого мы ожидаем увидеть некоторое возбуждение над аут-вакуумом. Это возбуждение как раз и может создать

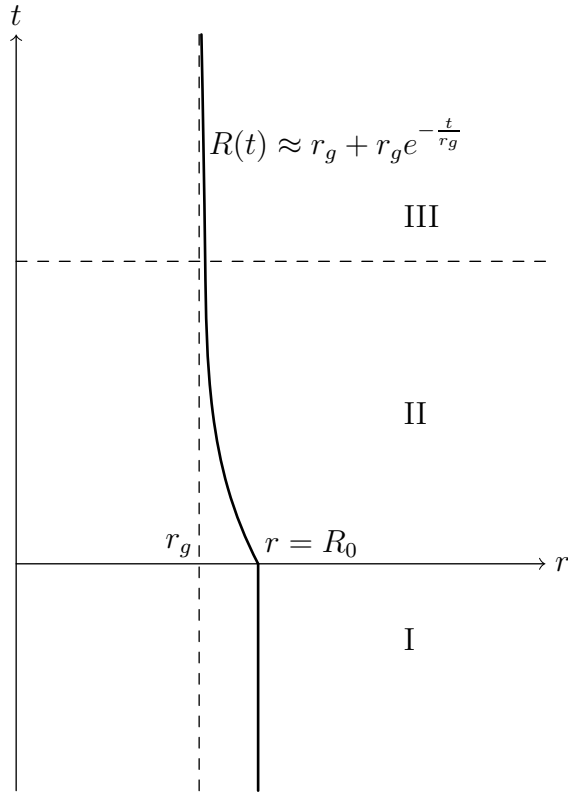


Рис. 4.1: График зависимости радиуса оболочки от времени. I, II и III соответствует трем стадиям коллапса.

некоторый поток энергии, который мы и собираемся посчитать.

Данное рассуждение можно обобщить на случай теории с взаимодействием, используя диаграммную технику Келдыша — Швингера [14], [16]. Также как и в предыдущих главах, мы ожидаем получить секулярный рост и нарушение теории возмущений.

4.2 Внешнее гравитационное поле

Как было сказано в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать гравитационный коллапс сферическо-симметричной массивной тонкой оболочки. До момента времени $t = 0$ по часам наблюдателя, находящимся далеко от оболочки, оболочка придерживалась некоторыми дополнительными силами на фиксированном радиусе $r = R_0$. А после момента $t = 0$ оболочка отпускается и начинает свободно падать (см. рис. 4.1). Используя теорему Биркгофа для сферически симметричного распределения материи, мы получаем, что гравитационное поле внутри описыва-

ется плоской метрикой, а снаружи — метрикой Шварцшильда:

$$ds^2 = \begin{cases} dt_-^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, & r \leq R(t), \\ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2, & r \geq R(t) \end{cases},$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$,

(4.1)

где $R(t)$ - радиальная координата оболочки, которая до начала коллапса была фиксирована $R(t \leq 0) = R_0$; $r_g/2$ - есть АДМ масса оболочки, и t (t_-) есть временная координата снаружи(внутри) оболочки. Мы предположим, что $R_0 > r_g$, но сама оболочка до начала коллапса была очень близка к своему радиусу Шварцшильда $|R_0 - r_g| \ll r_g$. Конечно, можно было бы рассмотреть более реалистичную модель - коллапс настоящей звезды, радиус которой может быть любым и необязательно приблизительно равным радиусу Шварцшильда. Однако модель тонкой компактной оболочки позволяет сделать все вычисления явно и найти поведение гармоник в бесконечном будущем. Поэтому мы будем работать с моделью тонкой оболочки.

Как видно, мы должны склеить две метрики (4.1), указав как связаны между собой внутреннее и внешнее время $t = t(t_-)$, а также найти зависимость радиуса оболочки от времени. Это можно сделать, воспользовавшись уравнениями гравитации $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ и условиями непрерывности метрики [90, 91]. До момента начала коллапса достаточно воспользоваться условием непрерывности метрики на оболочке $r = R_0$ и уравнением движения для неё $\dot{R} = 0$:

$$t_- = \sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}} t, \quad t \leq 0. \quad (4.2)$$

После начала коллапса мы предполагаем, что падение свободно, и тогда индуцированная метрика на оболочке есть $ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) d\Omega^2$. Сравнивая это выражение с внешней метрикой, мы получаем соотношение, связывающую внешние координаты R, t с внутренним временем оболочки τ :

$$\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{\dot{R}^2}{1 - \frac{r_g}{R}} = 1, \quad (4.3)$$

где $\dot{R} = \frac{dR}{d\tau}$. Используя предположение о близости оболочки к радиусу Шварцшильда $|R - r_g| \ll r_g$, замечая что $\dot{R} \neq 0$ и $\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, мы можем пренебречь единицей по сравнению с левой частью уравнения и проинтегрировать его. Тем самым мы найдем закон движения оболочки относительно внешнего наблюдателя:

$$R(t) \approx r_g \left(1 + \frac{R_0 - r_g}{r_g} e^{-\frac{t}{r_g}}\right). \quad (4.4)$$

Для внутреннего наблюдателя в пределе $|R_0 - r_g| \ll r_g$ движение можно считать равномерным со скоростью ν :

$$\nu \equiv \left| \frac{dR(t_-)}{dt_-} \right| = \frac{|\dot{R}|}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}}, \quad \text{и} \quad R(t_-) \approx R_0 - \nu t_-. \quad (4.5)$$

Используя соотношения (4.4) и (4.5), мы находим связь между внутренним и внешним временами t_-, t :

$$t_- \approx \frac{R_0 - r_g}{\nu} \left(1 - e^{-\frac{t}{r_g}} \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

В последующих главах мы воспользуемся связью между внешним и внутренним временами на начальной и финальной стадиях коллапса для того, чтобы найти поведение гармоник скалярного поля в данных ситуациях.

Для изучения поведения гармоник в процессе коллапса, мы будем считать, что скорость оболочки близка к скорости света $\nu \sim 1$. Чтобы понять, когда выполняется данное соотношение, мы склеиваем метрики (4.1) и, используя уравнение Эйнштейна, получаем следующее уравнение на $R(t)$ [90],[92]:

$$\frac{r_g}{2} = M \sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{M^2}{2R}, \quad (4.7)$$

где $M = \text{const}$ определяет тензор энергии импульса оболочки и может быть интерпретирована как собственная масса оболочки. Уравнение (4.7) имеет простую общезначимую интерпретацию. Данное соотношение устанавливает, что полная энергия оболочки, $r_g/2$, является суммой кинетической энергии оболочки, $M \sqrt{1 + \dot{R}^2}$ (где дифференцирование проводится по собственному времени оболочки τ), и её потенциальной энергии, $\frac{M^2}{2R}$. Пренебрегая разницей между $R(\tau)$ и r_g в уравнении (4.7), мы получаем:

$$\dot{R} \approx -\sqrt{\left(\frac{r_g}{2M} + \frac{M}{2r_g} \right)^2 - 1}.$$

Из условия $r_g \gg 2M$ следует, что $|\dot{R}| \gg 1$ и $\nu \approx 1$, т.е. оболочка будет двигаться со скоростью света также и с точки зрения внутреннего наблюдателя.

За пределами оболочки удобно использовать черепашии координаты (tortoise coordinates), в которых вместо радиальной координаты r вводится r^* , определяемая как

$$r_* = r + r_g \log \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right).$$

В черепашьих координатах движение оболочки приближенно описывается следующим образом

$$R_*(t) \approx R_{*0} - t + (r_g - R_0) \left(1 - e^{-\frac{t}{r_g}}\right), \quad (4.8)$$

где $R_{*0} = R_0 + r_g \log(R_0/r_g - 1)$.

4.3 Свободные гармоники

Мы будем изучать теорию действительного скалярного поля с взаимодействием ϕ^4 на фоне коллапсирующей оболочки:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (4.9)$$

В данном параграфе мы рассмотрим случай свободной теории поля $\lambda = 0$.

Так как метрика сферически симметрична, то поле ϕ удобно разложить по сферическим гармоникам:

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \phi_l(t, r),$$

где $Y_{l,n}^*(\theta, \varphi) = Y_{l,n}(\theta, \varphi)$ — действительные сферические функции. Действие для свободного поля можно расписать для каждой компоненты ϕ_l отдельно

$$S = \sum_{l,m} S_{l,m}, \quad \text{где} \quad (4.10)$$

$$S_{l,m} = \int dt \int_0^{R(t)} dr r^2 \left(\frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \left[\left(\frac{\partial t}{\partial t_-} \right)^2 (\partial_t \phi_l)^2 - (\partial_r \phi_l)^2 - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \phi_l^2 \right]$$

$$+ \int dt \int_{R(t)}^\infty dr r^2 \left[\frac{(\partial_t \phi_l)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) (\partial_r \phi_l)^2 - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \phi_l^2 \right].$$

Варьируя данное действие, получаем уравнения движения на гармоники:

$$\begin{cases} \left[\partial_{t_-}^2 - \partial_r^2 + m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] (r\phi_l) = 0, & r \leq R(t) \\ \left[\partial_t^2 - \partial_{r^*}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right) \right] (r\phi_l) = 0, & r \geq R(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

и граничные условия на оболочке,

$$\phi_l \left[R(t) - 0 \right] = \phi_l \left[R(t) + 0 \right], \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t_-} \right) \left| \frac{dR}{dt} \right| \partial_t \phi_l - \left(\frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \left. \partial_r \phi_l \right|_{r=R(t)-0} = \frac{\partial_t \phi_l}{1 - \frac{r_g}{r}} \left| \frac{dR}{dt} \right| - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left. \partial_r \phi_l \right|_{r=R(t)+0}.$$

Второе условие выражает непрерывность нормальной производной на поверхности оболочки. Заметим, что в пределе $t \rightarrow \infty$ нормальная к оболочке производная при $r = R(t) + 0$ становится производной по нулевой координате $u = t - r_*$.

Причина, по которой мы можем приближенно решить уравнения (4.11) и (4.12), заключается в том, что мы можем разделить уравнения движения по переменным t и r , когда оболочка покоится или движется стационарно. Более того, потенциал

$$U(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right], \quad r > R_0, \quad (4.13)$$

во втором уравнении в (4.11) исчезает в пределе $r \rightarrow r_g$ и становится постоянным, равным m^2 , в пределе $r \rightarrow \infty$. Следовательно, непосредственно рядом с оболочкой (нужно помнить, что оболочка находится близко к радиусу Шварцшильда $|R(t) - r_g| \ll r_g$) гармоники могут быть аппроксимированы плоскими волнами. Также в пределе $r \rightarrow \infty$ мы получаем, что $r \approx r_*$ (данное приближение асимптотично, в том смысле, что $|r - r_*| \ll r$, но сама разность $|r - r_*|$ не стремится к нулю), а гармоники являются плоскими волнами. Соотношения между асимптотиками гармоник в данных пределах могут быть найдены явно, решая задачу рассеяния для потенциала (4.13).

Используя уравнения движения, свободный гамильтониан может быть переписан в следующей форме:

$$H_0(t) = \sum_{l,n} \int_0^\infty \frac{dr \sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left[g^{tt} (\partial_t \phi_{l,n})^2 - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \phi_{l,n} \partial_t \left(\sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \phi_{l,n} \right) \right]. \quad (4.14)$$

В случае коллапса оболочки, соответствующего метрике (4.1), гамильтониан можно записать как

$$\begin{aligned} H_0(t) = & \sum_{l,n} \int_0^{R(t)} r^2 dr \left[\left(\frac{\partial t}{\partial t_-} \right) (\partial_t \phi_l)^2 - \phi_l \partial_t \left(\left(\frac{\partial t}{\partial t_-} \right) \partial_t \phi_l \right) \right] + \\ & + \sum_{l,n} \int_{R(t)}^\infty \frac{r^2 dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \left[(\partial_t \phi_l)^2 - \phi_l \partial_t^2 \phi_l \right] + \\ & + \sum_{l,n} R^2(t) \phi_l \left[\left(\frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)-0} - \left(1 - \frac{r_g}{R(t)} \right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)+0} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Последний член в этом выражении является вкладом от значений полей на оболочке. Заметим, гамильтониан $H_0(t)$ определяет эволюцию состояния по отношению к времени внешнего наблюдателя.

4.3.1 Ин-гармоники до начала коллапса

В течение первой стадии коллапса, когда оболочка стационарна, мы можем найти гармоники, которые диагонализуют свободный гамильтониан, и тем самым ввести понятие частиц.

Используя обычное каноническое квантование, мы раскладываем поле по гармоникам $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$:

$$\begin{aligned}\phi(\underline{x}, t) &= \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[a_{\omega,l,n} \bar{h}_{\omega,l}(r, t) + \text{h.c.} \right], \\ \pi(\underline{x}, t) &= g^{tt} \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[a_{\omega,l,n} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}(r, t) + \text{h.c.} \right],\end{aligned}\quad (4.16)$$

где мы определили \underline{x} как пространственную координату, а ω в данном случае нумерует гармоники. Также “h.c.” означает эрмитово сопряжение, и под знаком интеграла подразумевается ещё и суммирование по дискретным частотам, которые могут возникнуть вблизи оболочки. Гармоники $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$ являются базисными решениями для уравнения Клейна-Гордона (4.11). Гармоники, с которыми мы хотим работать, должны диагонализировать гамильтониан в первой фазе коллапса, когда оболочка покоится. Соответствующее основное состояние, мы, как всегда, определяем как то, что аннигилируется всеми операторами уничтожения, $a_{\omega,l,n} |\text{in}\rangle = 0$.

Следуя процедуре канонического квантования, мы определяем следующие коммутационные соотношения на поле $\phi(\underline{x}, t)$ и сопряженного ему канонического импульса

$$[\phi(\underline{x}, t), \pi(\underline{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}). \quad (4.17)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Мы нормируем гармоники $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$ таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$[a_{\omega,l,n}, a_{\omega',l',n'}^\dagger] = 2\pi\delta_{ll'}\delta_{nn'}\delta(\omega - \omega'), \quad (4.18)$$

Подставляя явно разложение (4.16) в коммутационное соотношение (4.17), мы получаем следующее условие на нормировку гармоник:

$$\begin{aligned}\sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) Y_{l',n'}(\theta', \varphi') g^{tt} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[\bar{h}_{\omega,l}(t, r) \partial_t \bar{h}_{\omega,l}^*(t, r') - \text{h.c.} \right] = \\ = i\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{x}').\end{aligned}\quad (4.19)$$

В стационарной ситуации мы можем разделить переменные в уравнении (4.11). Это означает, что мы выберем гармоники в следующей форме:

$$\bar{h}_{\omega,l}(t,r) = h_{\omega,l}(r) e^{-i\omega t} = h_{\omega,l}(r) e^{-i\omega_- t},$$

где из уравнения (4.2) следует, что $\omega_- = \omega/\sqrt{1-r_g/R_0}$. Используя данное разложение, мы можем идентифицировать индекс ω в уравнении (4.16) с энергией гармоники $\bar{h}_{\omega,t}(t,r)$ в бесконечном прошлом.

Рассмотрим решения первого уравнения в (4.11), мы находим, что

$$\bar{h}_{\omega,l}(t,r) = \frac{\mathcal{A}_\omega}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\omega_-^2 - m^2} r\right) e^{-i\omega_- t}, \quad \text{при } r \leq R_0 \text{ и } t \leq 0. \quad (4.20)$$

Где мы потребовали регулярного поведения гармоники в начале координат $r = 0$. Это ограничивает нас в использовании только функций Бесселя первого рода. Из уравнения (4.20) мы можем увидеть, что ω ограничена снизу: $\omega_- \geq m$ или $\omega \geq m_- \equiv m\sqrt{1-r_g/R_0}$. Если масса поля равна нулю, то $\mathcal{A}_\omega = \sqrt{\pi}$. В дальнейшем мы во всех формулах будем считать, что $\mathcal{A}_\omega \approx \sqrt{\pi}$.

Аналогично из второго уравнения в (4.11) мы находим, что до начала коллапса $t = 0$, гармоники за пределами оболочки ведут себя следующим образом:

$$\bar{h}_{\omega,l}(t,r) = \frac{e^{-i\omega t}}{r} \begin{cases} A_\omega e^{-i\omega r_*} + B_\omega e^{i\omega r_*}, & |r - R_0| \ll r_g, \\ C_\omega e^{-ikr_*} + D_\omega e^{ikr_*}, & r \gg R_0, \end{cases} \quad (4.21)$$

где $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$.

Можно заметить, что если $\omega \geq m$, то гармоники осциллируют на пространственной бесконечности $r_* \rightarrow \infty$. Следовательно, в данной ситуации спектр частот будет непрерывным. Но, когда $m_- \leq \omega \leq m$, гармоники будут экспоненциально расти или падать при приближении к пространственной бесконечности $r_* \rightarrow \infty$. Оставляя только те, что экспоненциально падают, мы получим гармоники, которые соответствуют связанным состояниям. Они осциллируют около начала координат $r = 0$ и оболочки $r = R_0$, а при достижении точки поворота в потенциале (4.13) быстро уменьшают своё абсолютное значение. Спектр и количество этих уровней были определены в [97].

Можно найти связь между коэффициентами в уравнении (4.21), используя условие нормировки (4.19). Однако, так как мы интересуемся поведением гармоник непосредственно вблизи оболочки, мы будем изучать только коэффициенты A_ω и

B_ω . Излучение Хокинга, которое будет нас в дальнейшем интересовать, проявляется только непосредственно вблизи коллапсирующей оболочки. Наблюдатель, находящийся на пространственной бесконечности, видит излучение модифицированное за счет коэффициентов прохождения через потенциал (4.13).

Мы вычислим коэффициенты A_ω и B_ω , используя граничные условия (4.12). До начала коллапса, когда $R(t) = R_0$, эти граничные условия устанавливают, что $h_{\omega,l}(r)$ — непрерывно-дифференцируема:

$$h_{\omega,l}(R_0 - 0) = h_{\omega,l}(R_0 + 0), \quad [\partial_r h_{\omega,l}]_{r=R_0-0} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}} [\partial_r h_{\omega,l}]_{r=R_0+0}. \quad (4.22)$$

Эти уравнения приводят к следующим значениям коэффициентов в уравнении (4.21)

$$A_\omega = B_\omega^* = \frac{i^{l+1}}{\sqrt{2\omega}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{1/4} e^{i\omega \left[R_0^* - R_0 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]} + \mathcal{O} \left(\left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{3/4} \right). \quad (4.23)$$

Рассмотрим свободный гамильтониан для этих гармоник. Путем явной подстановки разложения (4.16) в (4.14) мы получаем следующую формулу для гамильтониана:

$$H_0(t) = \sum_{l,n} \iint_m^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \left[\mathcal{E}_{\omega,\omega',l}(t) a_{\omega,l,n}^\dagger a_{\omega',l,n} + \mathcal{J}_{\omega,\omega',l}(t) a_{\omega,l,n} a_{\omega',l,n} + \text{h.c.} \right], \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega,\omega',l}(t) &= \\ &= \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left\{ g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_t \left[\sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) \right] \right\}, \\ \mathcal{J}_{\omega,\omega',l}(t) &= \\ &= \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left\{ g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}(r,t) \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \bar{h}_{\omega,l}(r,t) \partial_t \left[\sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом гамильтониан может быть не диагональными из-за того, что есть члены неравные нулю при $\omega \neq \omega'$, и из-за наличия $\mathcal{J}_{\omega,\omega',l} \neq 0$. В стационарной ситуации гармоника, которые диагонализуют гамильтониан, должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin \theta} g^{tt} h_{\omega,l}(r) h_{\omega',l}(r) &= 0, \\ \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin \theta} g^{tt} h_{\omega,l}(r) h_{\omega',l}^*(r) &= \frac{\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (4.25)$$

что ведет к исчезновению аномального члена $\mathcal{J}_{\omega\omega'}$ и диагонализации $\mathcal{E}_{\omega\omega'}$. Заметим, что нормировка выбрана таким образом, чтобы выполнялись канонические коммутационные соотношения (4.19).

Выше мы обсуждали поведение гармоник $h_{\omega,l}(r)$ в определенных областях изменения радиальной координаты r . Чтобы найти свободный гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения, мы должны проинтегрировать по координате r . Таким образом нам необходимо знать полную функциональную зависимость гармоник от координат. Однако оказывается, что достаточно использовать условие нормируемости гармоник (4.25). Используя это условие, мы получаем, что гамильтониан имеет следующий вид

$$H_0(t \leq 0) = \sum_{l,n} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left[a_{\omega,l,n} a_{\omega,l,n}^\dagger + a_{\omega,l,n}^\dagger a_{\omega,l,n} \right]. \quad (4.26)$$

Как видно, гамильтониан действительно диагонален в терминах ин-гармоник до начала коллапса. Но в процессе коллапса ин-гармоники больше не диагонализуют гамильтониан, что является признаком того, что происходит рождение частиц.

4.3.2 Ин-гармоники в течение последней стадии коллапса

В этом параграфе мы найдем поведение ин-гармоник в бесконечном будущем по часам внешнего наблюдателя $t \rightarrow \infty$. Изменение поведения ин-гармоник в процессе коллапса является одной из причиной рождения частиц.

Мы пренебрежем разницей между ν и 1 в (4.5). Причина для этого приближения следующая — задав значение гармоник под оболочкой (см. рис. 4.2), мы бы хотели продолжить гармоник за пределы оболочки используя условия сшивки (4.12). Чтобы найти поведение гармоник в будущем, мы должны решить задачу Коши для поля, задав начальные значения гармоник и её производной по времени при $t = 0 = t_-$. Если оболочка движется со скоростью $\nu < 1$, то останется область, которая причинно связана с областью за пределами оболочки (серая область на рисунке 4.2). Чтобы определить значение поля в соответствующей точке, нам необходимо знание о поведении поля за пределами оболочки. Совсем иначе обстоит дело с точками, которые не лежат в серой области на рисунке 4.2. Они полностью определяются поведением поля под оболочкой. Действительно, для демонстрации возьмем произвольную точку под оболочкой (точка А на рисунке 4.2) и посмотрим, откуда, в принципе, может придти информация в данную точку. Мы

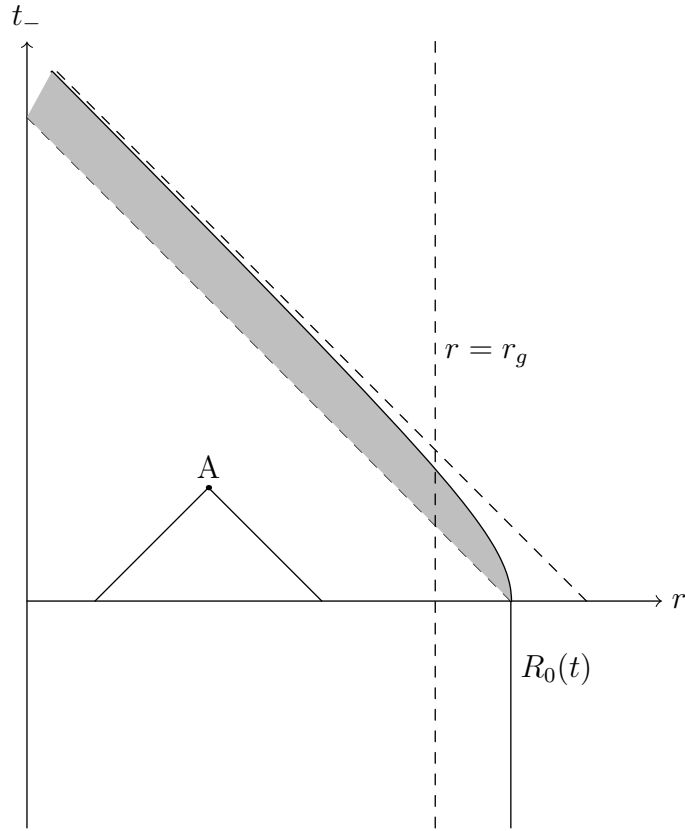


Рис. 4.2: Иллюстрация к задаче Коши для гармоник после начала коллапса.

получим, что эта область лежит полностью под оболочкой. Тогда, в будущем гармоники под оболочкой определяются тем же самым уравнением (4.20), что и до начала коллапса, но продолженными на более поздние времена $t_- \geq 0$. Зная значения гармоник на оболочке и граничные условия, мы можем продолжить гармоники за пределы оболочки.

Гармоники под оболочкой описываются уравнением (4.20), где $\omega_- = \frac{\omega}{\sqrt{1-r_g/R_0}}$. Так как за пределами оболочки мы интересуемся поведением гармоник только непосредственно вблизи неё $|r - r_g| \ll r_g$, мы пренебрежем потенциалом (4.13). Тогда уравнение превращается в волновое, и можно выписать его общее решение. Отсюда мы находим следующее поведение гармоник в пределе $t \rightarrow +\infty$

$$\bar{h}_{\omega,l}(t,r) = \frac{1}{r} \begin{cases} \sqrt{\pi r} J_{l+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\omega_-^2 - m^2} r \right) e^{\pm i\omega_- t_-}, & r \leq R(t), \\ f_{\omega,l}(u) + g_{\omega,l}(v), & r \geq R(t), |r - R(t)| \ll r_g, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $u = t - r_*$ и $v = t + r_*$ — так называемые нуль-координаты. Так как оболочка падает со скоростью света, v -зависящая часть гармоники не модифицируются и

может быть найдена из начальных условий. Эту функцию, $g_{\omega,l}(v)$, можно легко найти из уравнения (4.21)

$$g_{\omega,l} = A_{\omega} e^{-i\omega v}. \quad (4.28)$$

Для того, чтобы найти u -зависящую часть гармоника за пределами оболочки, мы воспользуемся условием непрерывности поля (4.12) на оболочке:

$$\sqrt{\pi R(t)} J_{l+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\omega_-^2 - m^2} R(t) \right) e^{-i\omega_- t_-} = [f_{\omega,l}(u)]_{r=R(t)}. \quad (4.29)$$

Используя уравнение (4.8), в пределе $t \rightarrow \infty$ мы получаем приближенную зависимость нуля координаты u на оболочке от времени:

$$[u]_{r=R} \approx 2t - (R_0^* + r_g - R_0). \quad (4.30)$$

Условие непрерывности на оболочке переписывается в следующей форме:

$$f_{\omega,l} [2t - (R_0^* + r_g - R_0)] \approx \sqrt{\pi R} J_{l+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\omega_-^2 - m^2} R \right) e^{-i\omega_- t_-}. \quad (4.31)$$

А значит, поведение гармоника за пределами оболочки будет описываться следующим образом:

$$\begin{aligned} r \bar{h}_{\omega,l}(r, t) &\approx \\ &\approx \sqrt{\pi R(u)} J_{l+\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\omega_-^2 - m^2} R(u) \right] e^{-i\omega_- \frac{(R_0 - r_g)}{\nu}} \left(1 - e^{-\frac{u + R_0^* + r_g - R_0}{2r_g}} \right) + g_{\omega,l}(v), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $g_{\omega,l}(v)$ описывается уравнением (4.28) и

$$R(u) = r_g \left(1 + \frac{R_0 - r_g}{r_g} e^{-\frac{u + R_0^* + r_g - R_0}{2r_g}} \right). \quad (4.33)$$

В пределе $t \rightarrow \infty$ граничное условие для нормальной производной на оболочке, (4.12), будет иметь следующий вид

$$\left(\frac{\partial t_-}{\partial t} \right) [\nu \partial_{t_-} h_{\omega,l} - \partial_r h_{\omega,l}]_{r=R(t)-0} = 2 [\partial_u h_{\omega,l}]_{r=R(t)+0}. \quad (4.34)$$

Так как в пределе $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow r_g$, мы пренебрегли разницей между R и r_g , чтобы упростить правую часть написанного выше уравнения. Можно показать, что наше решение (4.32) также будет удовлетворять и этому граничному условию, когда $\nu = 1$. В случае, когда оболочка не световая, а имеет конечную скорость, наше решение для v -зависящей части модифицируется, и мы не сможем также легко найти поведение гармоник в бесконечном будущем.

4.4 Излучение Хокинга

В этом параграфе мы воспроизведем стандартную формулу для термального потока, используя гармоники, которые мы вывели в предыдущем параграфе. Мы будем вычислять поток в непосредственной близости от коллапсирующей оболочки, а затем, используя коэффициенты прохождения, получим значение для потока на пространственной бесконечности.

Поток можно считать, используя тензор энергии-импульса, следующим образом

$$\begin{aligned} J(r \approx r_g, t) &\equiv \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi r^2 \langle : T^r{}_t(r, t) : \rangle \approx \\ &\approx -r_g^2 \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi \langle : T_{tr_*}(r, t) : \rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Явно расписав это среднее, мы получаем формулу для потока

$$J(r \approx r_g, t) = \sum_l (2l + 1) (J_u^{(l)} - J_v^{(l)}), \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned} J_u^{(l)} &= r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[\partial_u \bar{h}_{\omega, l}^*(r, t) \partial_u \bar{h}_{\omega, l}(r, t) + \text{c.c.} \right], \\ J_v^{(l)} &= r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[\partial_v \bar{h}_{\omega, l}^*(r, t) \partial_v \bar{h}_{\omega, l}(r, t) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В уравнении (4.35) под нормальным упорядочением $\langle : T_\nu^\mu : \rangle$ мы понимаем результат вычитания из $\langle T_\nu^\mu \rangle$ того же самого выражения, но вычисленного в бесконечном прошлом, когда оболочка покоилась. В этом случае, можно явно использовать формулы для гармоник и потока, чтобы проверить, что он равен нулю.

Чтобы найти поток, вызванный коллапсом тонкой оболочки, мы используем гармоники, найденные в предыдущем параграфе (4.32):

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\omega, l}(r, t) &\approx \frac{1}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_0} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos \left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} \\ &+ \frac{1}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_0} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{i^{l+1}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega v + i\omega [R_0^* - R_0(1-r_g/R_0)^{-1/2}]}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $u_0 = r_g \log(R_0/r_g) - r_g$. Чтобы получить это выражение из формулы (4.32), мы использовали приближения $R(u) \approx r_g$, $\nu \approx 1$. Мы также использовали асимптотику для функций Бесселя в пределе больших значений аргумента.

Для того чтобы посчитать поток, нам надо просто подставить (4.38) в уравнение (4.36) и вычислить интегралы. Однако, для удобства мы переразложим (4.38) по

плоским волнам (4.21). Так как v -зависящая часть уже представляет собой плоскую волну, мы должны переразложить только u -часть:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} = \\ & = \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi\sqrt{2|\omega'|}} \alpha(\omega, \omega') e^{-i\omega' u}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $\alpha_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, |\omega'|)$ и $\beta_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, -|\omega'|)$ пропорциональны Боголюбовским коэффициентам полученные в работах Хокинга.

Используя обратное преобразование Фурье, мы находим явный вид для этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, \omega') \approx & 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] \times \\ & \times \int_{u_*}^{\infty} du e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} e^{i\omega' u}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $u_* = -R_0^*$. Из-за быстрых осцилляций в нижнем пределе интегрирования по u мы можем пренебречь вкладом от этой части и провести интегрирование по всей числовой прямой:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, \omega') \approx & -4r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] \times \\ & \times e^{i\omega' u_0} e^{\pi\omega' r_g} e^{2i\omega' r_g \log(\omega r_g)} \Gamma(-2i\omega' r_g). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Теперь можно перейти к явному вычислению потоков $J_v^{(l)}$ и $J_u^{(l)}$:

$$J_v^{(l)} \approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega, \quad (4.42)$$

$$J_u^{(l)} \approx \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{|\omega''| > m} \frac{d\omega''}{2\pi} \frac{\omega' \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') e^{-i(\omega' - \omega'') u}. \quad (4.43)$$

В формуле (4.43) мы можем вычислить первый интеграл по ω :

$$\begin{aligned} \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx & 8r_g^2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\omega' \omega''|} e^{i(\omega' - \omega'') u_0} e^{\pi(\omega' + \omega'') r_g} \approx \\ \approx & \Gamma(-2i\omega' r_g) \Gamma(2i\omega'' r_g) \int_{\log(m r_g)}^{\infty} \frac{d(\log(\omega r_g))}{2\pi} e^{2i(\omega' - \omega'') r_g \log(\omega r_g)}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где, так как $\omega_- r_g \gg 1$, мы заменили $\cos^2\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right]$ на $1/2$ в интеграле. Отметим, что интегрирование ведется по всем частотам, мы не вводим ультрафиолето-

вого обрезания Λ . Последний интеграл можно вычислить и получить

$$\begin{aligned} & \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx \\ & \approx 2r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} |\omega'| e^{2\pi\omega' r_g} |\Gamma(2i\omega' r_g)|^2 \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярная часть} \\ & = 2\pi \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} n(-\omega') \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярная часть}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где

$$n(\omega) = \frac{\text{sign}(\omega)}{e^{4\pi r_g \omega} - 1}. \quad (4.46)$$

”Регулярная часть“ в правой части уравнения (4.45) имеет форму p.v. $\left(\frac{i}{\omega' - \omega''}\right)$, следовательно для больших u её вклад в $J_u^{(l)}$, (4.43), пренебрежимо мал.

Подставляя уравнение (4.45) в $J_u^{(l)}$ и используя свойство $n(-\omega) = n(\omega) + \text{sign}(\omega)$, мы получаем следующую формулу для потока:

$$J_u^{(l)} \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega) + \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{2} \right). \quad (4.47)$$

При подсчете полного потока расходимости в $J_u^{(l)}$ и $J_v^{(l)}$ сокращаются, и мы получаем конечный ответ

$$\begin{aligned} J(r \approx r_g, t) &= \sum_l (2l+1) [J_u^{(l)} - J_v^{(l)}] \approx \\ & \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l+1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{e^{4\pi r_g \omega} - 1}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Это есть формула для излучения в непосредственной близости от коллапсирующей оболочки. Для того, чтобы получить поток на пространственной бесконечности, мы должны учесть, что поток может частично отразиться от потенциально барьера (4.13). Это можно сделать путем введения коэффициентов прохождения, уже обсуждавшихся в предыдущих параграфах, $|T_{\omega,l}|^2$, таким образом

$$J(r \rightarrow \infty, t) \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l+1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{e^{4\pi r_g \omega} - 1} |T_{\omega,l}|^2. \quad (4.49)$$

При больших значениях l грей-боди фактор $T_{\omega,l}$ может быть приближен как $\frac{(i r_g \omega)^{l+1}}{(2l-1)!!}$ [98].

Если мы положим $m = 0$ в уравнениях (4.39)–(4.45), то мы получим расходимости при $\omega = 0$. Однако, для безмассового случая мы должны использовать

следующее приближение для гармоник вместо уравнений (4.38)

$$\bar{h}_{\omega,l}(r,t) \approx \sqrt{\pi r_g} J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r_g) e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} + \frac{A_\omega}{r_g} e^{-i\omega v}. \quad (4.50)$$

Теперь легко увидеть, что в пределах маленьких ω , гармоника ведет себя как $J_{l+\frac{1}{2}}(x) \sim x^{l+\frac{1}{2}}$, и все интегралы по ω в уравнениях (4.39)–(4.49) сходятся на нижних пределах. Используя это, мы получим те же самые формулы для потока как и в формуле (4.49), но с массой m равной нулю.

Как обсуждалось выше, мы положили ультрафиолетовое обрезание равным бесконечности $\Lambda = \infty$. Если же предположить, что оно конечное, то тогда в (4.45) мы не получили сингулярных функций, и следовательно все выражение было бы регулярным. Отсюда немедленно следует, что в таком случае весь поток J занулился бы за время порядка $\frac{1}{\Lambda \log(\Lambda r_g)}$.

4.5 Петлевые поправки и секулярный рост

В предыдущем параграфе мы использовали двухточечную функцию Вайтмана для вычисления потока. В этой главе мы будем изучать петлевые поправки к этой функции и покажем, что они во втором порядке теории возмущений растут со временем.

Запишем член взаимодействия $\frac{\lambda \phi^4}{4!}$ в этой теории, подставив явно детерминант метрики

$$V(t) = \frac{\lambda}{4!} \int_{R(t)}^{\infty} \phi^4 r^2 dr d\Omega + \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \int_0^{R(t)} \phi^4 r^2 dr d\Omega. \quad (4.51)$$

В пределе $t \rightarrow \infty$, второй член экспоненциально подавлен из-за наличия производной $\frac{\partial t_-}{\partial t} \propto e^{-t/r_g}$. Следовательно, мы можем пренебречь этим членом, а также разностью между положением оболочки и радиусом Шварцшильда.

Тогда мы можем вычислить то, как будут выглядеть поправки к пропагатору Келдыша

$$\begin{aligned} D_{0+2}^K(1,2) &= \sum_{l_1,m_1,l_2,m_2} Y_{l_1,m_1}(\Omega_1) Y_{l_2,m_2}(\Omega_2) \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ [N_{\omega_1,l_1,n_1|\omega_2,l_2,n_2}(t) + \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta(\omega_1 - \omega_2)] \bar{h}_{\omega_1,l_1}^*(t_1, r_1) \bar{h}_{\omega_2,l_2}(t_2, r_2) \right. \\ &\left. + K_{\omega_1,l_1,n_1|\omega_2,l_2,n_2}(t) \bar{h}_{\omega_1,l_1}(t_1, r_1) \bar{h}_{\omega_2,l_2}(t_2, r_2) + \text{h.c.} \right\}. \quad (4.52) \end{aligned}$$

Где функции $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$ и $K_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$ выражаются следующим образом (мы будем рассматривать предел больших времен $t_1, t_2 \rightarrow +\infty$ при $|t_1 - t_2| = \text{const}$):

$$N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) = \frac{\lambda^2}{3} \int \int_{t_0}^t dt_3 dt_4 \int \int_{r_g}^{\infty} (r_3 r_4)^2 dr_3 dr_4 \bar{h}_{\omega,l}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega',l'}^*(r_4, t_4) \times \\ \times Y(l, n, l', n') \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4) \quad (4.53)$$

и

$$K_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) = -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \int \int_{r_g}^{\infty} (r_3 r_4)^2 dr_3 dr_4 \bar{h}_{\omega,l}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega',l'}^*(r_4, t_4) \\ Y(l, n, l', n') \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_4, t_4) + (\omega, l \leftrightarrow \omega', l'), \quad (4.54)$$

где мы ввели обозначение

$$Y(l, n, l', n') = \sum_{l_{1,2,3}; n_{1,2,3}} \langle l, n, l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle \langle l', n', l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle, \\ \langle l, n, l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle = \int d\Omega Y_{l,n}(\theta, \varphi) Y_{l_1, n_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2, n_2}(\theta, \varphi) Y_{l_3, n_3}(\theta, \varphi).$$

Напомним, что мы используем действительные сферические функции $Y_{l,n}(\theta, \varphi) = Y_{l,n}^*(\theta, \varphi)$.

Стоит отметить, что N и K (4.53) не содержат ультрафиолетовых расходимостей. Это можно легко понять, считая степени расходимостей для них в плоском пространстве-времени. Тем не менее сам пропагатор Келдыша получает ультрафиолетовые расходимости из-за интегрирования по частотам ω . Мы будем интересоваться поведением этих величин только в инфракрасном пределе, считая, что все константы взаимодействия уже ультрафиолетово перенормированы. Отметим, что они перенормируются в лидирующем порядке точно также, как и в пространстве Минковского.

Давайте изучим поведение функции $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$ на больших временах. Мы хотим выделить самые большие вклады к функциям N и K в бесконечном будущем. Отметим, что до начала коллапса ввиду стационарности задачи функции N и K остаются постоянными и равными нулю. Следовательно, мы можем считать, что момент включения самодействия t_0 произошел до начала коллапса. Более того, можно заметить, что вдалеке от коллапсирующей оболочки гармоники не меняются (из-за причинности и локальности). Поэтому от области $r \gg r_g$ в

интегралах (4.53),(4.54) не будет вклада в секулярный рост. Поэтому гармоники в уравнении (4.53) мы можем аппроксимировать, используя уравнение (4.38), т.е. $\bar{h}_{\omega,l} \approx \bar{h}_{\omega,l}(u) + \bar{h}_{\omega,l}(v)$, где $\bar{h}_{\omega,l}(v) - v$ - зависящая часть гармоники, а $\bar{h}_{\omega,l}(u)$ есть u -зависящая часть гармоники. Для удобства мы оставим верхний предел интегрирования по радиальным координатам равными ∞ , так как из-за осцилляций при $r_{3,4} \rightarrow +\infty$ интегралы будут быстро сходиться. Кроме того, наибольший вклад в $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$ приходит от области интегрирования по временам t_3 и t_4 когда $t_3 \gg r_g \log(r_g \omega)$ и $t_4 \gg r_g \log(r_g \omega')$. В этих областях мы можем пренебречь зависимостью функций $\bar{h}_{\omega,l}(u_3)$ и $\bar{h}_{\omega',l'}^*(u_4)$ от нулевых координат u_3 и u_4 , соответственно. Также отметим, что v -зависящие части гармоник $\bar{h}_{\omega,l}(r_3, t_3)$ и $\bar{h}_{\omega',l'}^*(r_4, t_4)$ ведут к более слабым поправкам, чем те за которыми мы следим.

Используя данные приближения, мы получаем

$$\begin{aligned}
N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) &\approx \\
&\approx \frac{2\lambda^2}{3r_g^2\sqrt{\omega\omega'}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega r_g\right] \cos\left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega' r_g\right] \times \\
&\times Y(l, n, l', n') \int_{r_g \log(r_g \omega)}^t dt_3 \int_{r_g \log(r_g \omega')}^t dt_4 \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \times \\
&\times \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4). \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Мы снова можем представить гармоники в виде суммы u и v -зависящих частей

$$\begin{aligned}
\int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4) &\approx \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \left[\bar{h}_{\omega_j, l_j}(u_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(u_4) \right. \\
&\left. + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(v_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(v_4) + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(u_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(v_4) + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(v_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(u_4) \right]. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Так как функции $\bar{h}_{\omega,l}(u)$ содержат быстро осциллирующий косинус, мы можем пренебречь последними двумя членами в рассматриваемой формуле. Первый вклад мы раскладываем по плоским волнам как и в предыдущем параграфе. Используя уравнения (4.39) и (4.45),

$$\begin{aligned}
\int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4) &\approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r_g^2} \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} \times \\
&\times \left\{ [n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(u_3-u_4)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(u_3-u_4)}] + e^{-i\omega_j(v_3-v_4)} \right\} + \\
&+ \text{подавленные члены}, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

где функция $n(\omega)$ была определена в предыдущем параграфе (4.46).

Теперь подставим выражение (4.57) в формулу для $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$, (4.55). Сделав замену переменных от t_3 и t_4 к $T = (t_3 + t_4)/2$ и $\tau = t_3 - t_4$, мы получаем

$$\begin{aligned}
& N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) \approx \tag{4.58} \\
& \approx \frac{\lambda^2}{12 r_g^8 \sqrt{\omega \omega'}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^2 \cos \left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \cos \left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g \right] \times \\
& \quad \times Y(l, n, l', n') \int_0^t dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \times \\
& \quad \times \prod_{j=1}^3 \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} \left\{ [n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(\tau-\Delta r)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(\tau-\Delta r)}] + e^{-i\omega_j(\tau+\Delta r)} \right\},
\end{aligned}$$

где $\Delta r = r_3 - r_4$. Заметим, что нижний предел интегрирования по T не важен для лидирующих вкладов, которые растут со временем. Также, используя то, что функции осциллируют при большой разнице времен $\tau \rightarrow \pm\infty$, мы будем интегрировать τ по всей числовой прямой.

Теперь легко увидеть, что интегрирование по dT факторизуется, так как подынтегральное выражение не зависит от T . Отсюда получаем, что лидирующие вклады к функции N линейно растут со временем $N \sim \lambda^2 t$.

Используя аналогичные приемы можно получить, что такие же расходимости возникают и в функции K . К примеру, мы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& K_{\omega,l,n|\omega',l',n'} \approx \\
& \approx -\frac{4\lambda^2}{3\sqrt{\omega\omega'r_g^2}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \cos \left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g \right] Y(l, n, l', n') \times \\
& \quad \times \int_{r_g \log(\omega r_g)}^t dt_3 \int_{r_g \log(\omega' r_g)}^{t_3} dt_4 \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \prod_{i=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_4, t_4)
\end{aligned}$$

Затем, используя (4.57) и произведя замену переменных от t_3, t_4 к T и τ , как было сделано выше, мы получаем

$$\begin{aligned}
& K_{\omega,l,n|\omega',l',n'} \approx \\
& \approx -\frac{\lambda^2}{6\sqrt{\omega\omega'r_g^8}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^2 \cos \left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \cos \left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g \right] \times \\
& \quad \times [2mm] Y(l, n, l', n') \int_0^t dT \int_0^{\infty} d\tau \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \times \\
& \quad \times \prod_{j=1}^3 \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} \left\{ [n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(\tau-\Delta r)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(\tau-\Delta r)}] + e^{-i\omega_j(\tau+\Delta r)} \right\}.
\end{aligned}$$

И опять легко заметить, что интегрирование по dT отфакторизовывается, так как подынтегральное выражение не зависит от T . Следовательно, аномальное квантовое среднее также получает инфракрасный вклад линейно растущий со временем $K \sim \lambda^2 t$.

Для безмассового случая ситуация аналогична, но вместо гармоник (4.38) мы должны использовать гармоники \bar{h} , описанные в уравнении (4.50), для вычисления функции Вайтмана

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \bar{h}_{\omega,l}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega,l}(r_4, t_4). \quad (4.59)$$

Однако, функции Бесселя $J_{l+\frac{1}{2}}(\omega)$ опять пренебрежимо малы, когда частоты ω маленькие, поэтому они не получают никаких добавочных расходимостей, и функции N и K получают секулярные вклады аналогичные тем, что мы получили выше.

Хотя константа связи λ может быть мала, сам вклад пропорционален времени $\lambda^2 t$ и следовательно может стать очень большим, нарушая теорию возмущений. Чтобы понять физику полученных секулярно растущих вкладов необходимо просуммировать лидирующие вклады со всех порядков теории возмущений. Пока что этот вопрос остается открытым. Разрешение данной проблемы может пролить свет на информационный парадокс.

Глава 5

Заключение

В диссертационной работе были изучены свойства квантовой теории поля на фоне внешних сильных гравитационных или электромагнитных полей. В основном нас интересовали пространство де-Ситтера, гравитационный коллапс и постоянное электрическое поле. Как было показано, во всех рассмотренных системах в результате учета петлевых поправок возникают секулярно растущие вклады. Можно сформулировать три причины возникновения данных секулярных поправок: неравновесное начальное состояние, нестационарность гамильтониана и неограниченность снизу спектра гамильтониана. В то время как первая причина хорошо известна в физике конденсированных состояний, последние две причины почти нигде не учитывались и не изучались. При наличии нестационарности происходит нарушение закона сохранения энергии, так как отсутствует однородность по времени. В результате этого некоторые процессы, которые были запрещены, например, рождение частиц, могут происходить. Аналогично, если спектр гамильтониана неограничен снизу, процессы рождения частиц опять разрешены, так как закон сохранения энергии можно выполнить путем рождения частиц с произвольно большой отрицательной энергией.

В результате этих двух причин во взаимодействующей теории поля возникают секулярно растущие вклады. Это очень сильно влияет на физику. Действительно, хотя взаимодействие может быть мало, но так как петлевые поправки растут с течением времени, они могут быть большими. Чтобы понять физику данного явления, в ходе диссертационной работы были просуммированы петлевые поправки при помощи уравнения Дайсона-Швингера.

Одним из вопросов, рассмотренным в ходе диссертационной работы, было изу-

чение стабильности пространства де-Ситтера при учете квантовых флуктуаций. На данный вопрос обычно отвечают положительно, потому что рассматривают вакуумные состояния, которые уважают группу изометрий пространства де-Ситтера, и в гауссовом приближении. Но любое возмущение над данным вакуумом сразу же нарушает группу изометрий, и вопрос о стабильности пространства де-Ситтера остается открытым. В диссертации было показано, что ответ на данный вопрос зависит от начального возмущения. Если последнее мало, то система перейдет в новое равновесное состояние, похожее на термальное распределение над аут-вакуумом, но уважающее группу изометрий пространства де-Ситтера. Если же возмущение не мало, то в некоторый момент заселенность уровней станет сингулярной, что приведет к расходимости в тензоре энергии-импульса. Последнее означает, что группа изометрий пространства де-Ситтера не восстанавливается. Также возникает вопрос учёта отклика гравитации на данное возмущение, ответ на который может пролить свет на проблему космологической постоянной.

Другим вопросом, которым мы интересовались, было изучение петлевых поправок к эффекту Швингера. Обычно данный эффект рассматривается в гауссовом приближении. Вычисление Швингера явно показывает, что может происходить рождение электро-позитронных пар в постоянном электрическом поле, но ток, который возникает в результате данного процесса, оказывается равным нулю, что может показаться парадоксальным. Однако при учете петлевых поправок, было показано, что возникает инфракрасная расходимость и секулярный рост, который может разрешить данный вопрос. К примеру, петлевые вклады в ток теперь оказываются не равными нулю.

И последним вопросом, который рассматривался в ходе диссертационной работы, было изучение петлевых поправок к излучению Хокинга. Обычно в квантовой теории поля считается, что петлевые поправки подавлены. В диссертационной работе, было показано, что при рассмотрении массивной теории на фоне гравитационного коллапса на древесном уровне возникает термальным поток, с температурой $T = \frac{1}{4\pi r_g}$. Однако при учете взаимодействия опять возникают секулярно растущие вклады, которые деформируют древесный ответ. Остается открытым вопрос о суммировании лидирующих инфракрасных вкладов, ответ на который может пролить свет на квантовую физику черных дыр.

Благодарности

Я хотел бы особо поблагодарить моего научного руководителя Ахмедова Эмиля Тофик оглы, который помогал мне сделать первые шаги в исследовании квантовой теории поля, за постановку интересных задач и разъяснения научных вопросов. Я очень признателен ему за помощь, поддержку и внимание к моей работе.

Я выражаю благодарность своим соавторам по совместным работам Горского А.С., Годазгара Х., Слепухина В.М., Калинова Д.А., Павленко К.Е., Астраханцева Н.Ю., а также признательность за полезные обсуждения научных вопросов Лосякову В.В., Маршакову А.В., Лосеву А.С., Морозову А.Ю., Миронову А.Д., Ольщанецкому М.А., Новикову В.А., Васильеву Д., Апенко С.М., Арсееву П.И., Горбунову Д.С., Канчели О., Диесперову В.Н., Годазгару М., Мусаеву Э.Т.. Кроме того, я выражаю признательность моим однокурсникам и участникам научных семинаров в ИТЭФе и ВШЭ Слепцову А., Анохине А., Бурде Ф., Артамнову С., Садофьеву А., Морозову Анд., Сопенко Н., Авдошкину А., Милёхину А., Кононову Я., Антоненко Д., Побойко И., Гладких А., Сон Л., Стерликовой Н. и Хисамеевой А. за многочисленные обсуждения и полезные замечания по теме диссертации. Также мне хотелось бы поблагодарить Суслову Елену за помощь на протяжении моей работы.

Наконец, я хотел бы поблагодарить моих родителей, Емельянову Веру Фалалеевну и Попова Калину Федоровича, мою бабушку, Емельянову Любовь Ильиничну, моего дедушку, Емельянова Фалалея Павловича, за то, что они с самого детства прививали ко мне любовь к математике и физике. Также мне хотелось бы выразить искреннюю признательность моим школьным учителям по физике и математике, Полянскому С.Е., Корзнякову А.А. и Бурштейн А.М..

Литература

- [1] J. Schwinger, *J. Math. Phys.*, **2**, 407 (1961).
- [2] L. V. Keldysh, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **47**, 1515 (1964).
- [3] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. “Методы квантовой теории поля в статистической физике”
- [4] B. Allen, “Vacuum States In De Sitter Space,” *Phys. Rev. D* **32**, 3136 (1985).
- [5] B. Allen and A. Folacci, *Phys. Rev. D* **35**, 3771 (1987).
- [6] E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985).
- [7] A. M. Polyakov, “Infrared instability of the de Sitter space,” arXiv:1209.4135 [hep-th].
- [8] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **360**, 117 (1978).
- [9] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **9**, 109 (1968).
- [10] E. T. Akhmedov, A. V. Sadofyev, *Phys. Lett. B* **712**, 138 (2012) [arXiv:1201.3471 [hep-th]].
- [11] D. Krotov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B849**, 410-432 (2011). [arXiv:1012.2107 [hep-th]].
- [12] E. T. Akhmedov, *JHEP* **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [13] E. T. Akhmedov, F. K. Popov and V. M. Slepukhin, *Phys. Rev. D* **88**, 024021 (2013) [arXiv:1303.1068 [hep-th]].
- [14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 9 (Pergamon Press, Oxford, 1975).

- [16] A.Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, arXiv:cond-mat/0412296; Bibliographic Code: 2004cond.mat.12296K.
- [17] E. T. Akhmedov and P. .Burda, Phys. Rev. D **86**, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [18] E. T. Akhmedov, Phys. Rev. D **87**, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].
- [19] M. van der Meulen, J. Smit, JCAP **0711**, 023 (2007). [arXiv:0707.0842 [hep-th]].
- [20] D. P. Jatkar, L. Leblond and A. Rajaraman, Phys. Rev. D **85**, 024047 (2012) [arXiv:1107.3513 [hep-th]].
- [21] A. Youssef and D. Kreimer, “Resummation of infrared logarithms in de Sitter space via Dyson-Schwinger equations: the ladder-rainbow approximation,” arXiv:1301.3205 [gr-qc].
- [22] F. Gautier and J. Serreau, “Solving the Schwinger-Dyson equation for a scalar field in de Sitter space,” arXiv:1305.5705 [hep-th].
- [23] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [24] B. R. Holstein “Strong field pair production” Am. J. Phys. 67 6, June 1999
- [25] E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Fortsch. Phys. **29**, 381 (1981).
- [26] D. M. Gitman, E. S. Fradkin and S. M. Shvartsman, Fortsch. Phys. **36**, 643 (1988).
- [27] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman and S. M. Shvartsman, Sov. Phys. J. **23**, 257 (1980).
- [28] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, Teor. Mat. Fiz. **26**, 16 (1976).
- [29] A. I. Nikishov, Teor. Mat. Fiz. **20**, 48 (1974).
- [30] A. I. Nikishov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 1210 (1969).
- [31] D. M. Gitman and S. P. Gavrilov, Izv. Vuz. Fiz. **1**, 94 (1977)
- [32] S. P. Gavrilov, D. M. Gitman and S. M. Shvartsman, Yad. Fiz. **29**, 1097 (1979).
- [33] Yu. Y. Volfengaut, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman and S. M. Shvartsman, Yad. Fiz. **33**, 743 (1981).

- [34] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, *Sov. Phys. J.* **25**, 775 (1982).
- [35] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, *Phys. Rev. D* **53**, 7162 (1996) [arXiv:hep-th/9603152].
- [36] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, *Phys. Rev. D* **78**, 045017 (2008) [arXiv:0709.1828 [hep-th]].
- [37] T. N. Tomaras, N. C. Tsamis and R. P. Woodard, *Phys. Rev. D* **62**, 125005 (2000) [hep-ph/0007166].
- [38] F. Cooper and E. Mottola, *Phys. Rev. D* **40**, 456 (1989).
- [39] F. Cooper and E. Mottola, *Phys. Rev. D* **36**, 3114 (1987).
- [40] G. V. Dunne and C. Schubert, *Phys. Rev. D* **72**, 105004 (2005) [hep-th/0507174].
- [41] G. V. Dunne and C. Schubert, *AIP Conf. Proc.* **857**, 240 (2006) [hep-ph/0604089].
- [42] G. V. Dunne, Q. -h. Wang, H. Gies and C. Schubert, *Phys. Rev. D* **73**, 065028 (2006) [hep-th/0602176].
- [43] C. Schubert, *AIP Conf. Proc.* **917**, 178 (2007) [hep-th/0703186].
- [44] R. Ruffini, L. Vitagliano and S. S. Xue, *Phys. Lett. B* **559**, 12 (2003) [astro-ph/0302549].
- [45] Grib A. A., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M. “Quantum effects in strong external fields”, Atomizdat, Moscow 1980, 296.
Grib A. A., Mamayev S. G., Mostepanenko V. M. Vacuum quantum effects in strong fields. St. Petersburg : Friedmann Laboratory, 1994.
- [46] E. T. Akhmedov and P. V. Buividovich, “Interacting Field Theories in de Sitter Space are Non-Unitary,” *Phys. Rev. D* **78**, 104005 (2008) [arXiv:0808.4106 [hep-th]].
- [47] E. T. Akhmedov, P. V. Buividovich and D. A. Singleton, *Phys. Atom. Nucl.* **75**, 525 (2012) [arXiv:0905.2742 [gr-qc]].
- [48] E. T. Akhmedov and P. Burda, *Phys. Lett. B* **687**, 267 (2010) [arXiv:0912.3435 [hep-th]].

- [49] E. T. Akhmedov and E. T. Musaev, “Comments on QED with background electric fields,” *New J. Phys.* **11**, 103048 (2009) [arXiv:0901.0424 [hep-ph]].
- [50] P. R. Anderson and E. Mottola, arXiv:1310.0030 [gr-qc].
- [51] A. K. Das and J. Frenkel, *Phys. Rev. D* **89**, 087701 (2014) [arXiv:1404.2299 [hep-th]].
- [52] A. K. Das, J. Frenkel and C. Schubert, *Phys. Lett. B* **720**, 414 (2013) [arXiv:1212.2057 [hep-th]].
- [53] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, *JHEP* **1409**, 071 (2014) [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [54] Y. Kluger, E. Mottola and J. M. Eisenberg, *Phys. Rev. D* **58**, 125015 (1998) [hep-ph/9803372].
- [55] F. Cooper, J. M. Eisenberg, Y. Kluger, E. Mottola and B. Svetitsky, *Phys. Rev. D* **48**, 190 (1993) [hep-ph/9212206].
- [56] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper and E. Mottola, *Phys. Rev. D* **45**, 4659 (1992).
- [57] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper and E. Mottola, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2427 (1991).
- [58] F. Gelis and N. Tanji, *Phys. Rev. D* **87**, no. 12, 125035 (2013) [arXiv:1303.4633 [hep-ph]].
- [59] K. Fukushima, F. Gelis and T. Lappi, *Nucl. Phys. A* **831**, 184 (2009) [arXiv:0907.4793 [hep-ph]].
- [60] F. Karbstein, *Phys. Rev. D* **88**, no. 8, 085033 (2013) [arXiv:1308.6184 [hep-th]].
- [61] V. P. Barashev, A. E. Shabad and S. M. Shvartsman, *Sov. J. Nucl. Phys.* **43**, 617 (1986) [*Yad. Fiz.* **43**, 964 (1986)].
- [62] P. R. Anderson and E. Mottola, arXiv:1310.1963 [gr-qc].
- [63] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [*Commun. Math. Phys.* **46**, 206 (1976)].

- [64] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large Scale Structure of Space-Time,” Cambridge University Press, 1973.
- [65] G. 't Hooft, Salamfest 1993:0284-296 [gr-qc/9310026].
- [66] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **14**, 2460 (1976).
- [67] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [68] N. Birrell, P. Davies. “Quantum fields in curved space”, Cambridge University Press, 1984.
- [69] A. Wipf, Lect. Notes Phys. **514**, 385 (1998) [hep-th/9801025].
- [70] E. Mottola, Acta Phys. Polon. B **41**, 2031 (2010) [arXiv:1008.5006 [gr-qc]].
- [71] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
- [72] R. H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972).
- [73] R. H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2439 (1972).
- [74] T. Vachaspati, D. Stojkovic and L. M. Krauss, Phys. Rev. D **76**, 024005 (2007) [gr-qc/0609024].
- [75] R. Brustein and A. J. M. Medved, Phys. Rev. D **90**, no. 2, 024040 (2014) [arXiv:1401.1401 [hep-th]].
- [76] R. Brustein and A. J. M. Medved, Phys. Rev. D **91**, no. 8, 084062 (2015) [arXiv:1407.4914 [hep-th]].
- [77] A. Saini and D. Stojkovic, Phys. Rev. Lett. **114**, no. 11, 111301 (2015) [arXiv:1503.01487 [gr-qc]].
- [78] G. L. Alberghi, R. Casadio, G. P. Vacca and G. Venturi, Phys. Rev. D **64**, 104012 (2001) [gr-qc/0102014].
- [79] T. Takahashi and J. Soda, Class. Quant. Grav. **27**, 175008 (2010) [arXiv:1005.0286 [gr-qc]].
- [80] I. Khavkine, Class. Quant. Grav. **28**, 038001 (2011) [arXiv:1008.5059 [gr-qc]].
- [81] H. Kawai and Y. Yokokura, arXiv:1509.08472 [hep-th].

- [82] H. Kawai, Y. Matsuo and Y. Yokokura, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350050 (2013) [arXiv:1302.4733 [hep-th]].
- [83] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, arXiv:1412.1554 [hep-th].
- [84] E. T. Akhmedov, *JHEP* **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [85] E. T. Akhmedov and P. Burda, *Phys. Rev. D* **86**, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [86] E. T. Akhmedov, *Phys. Rev. D* **87**, no. 4, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].
- [87] E. T. Akhmedov, “Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,” *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [88] D. Krotov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B849**, 410-432 (2011). [arXiv:1012.2107 [hep-th]].
- [89] J. Serreau and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **87**, 085012 (2013) [arXiv:1302.3262 [hep-th]].
- [90] W. Israel, *Nuovo Cim. B* **44S10**, 1 (1966) [*Nuovo Cim. B* **48**, 463 (1967)] [*Nuovo Cim. B* **44**, 1 (1966)].
- [91] W. Israel, *Phys. Rev.* **153**, 1388 (1967).
- [92] E. Poisson, “A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics”, Cambridge University Press, 2004.
- [93] E. Leaver, *J. Math. Phys.* **27**, 1238 (1986)
- [94] P. P. Fiziev, *Class. Quant. Grav.* **23**, 2447 (2006) [gr-qc/0509123].
- [95] D. Philipp and V. Perlick, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1542006 (2015) [arXiv:1503.08361 [gr-qc]].
- [96] S. Slavyanov and W. Lay, “Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities”, Oxford University Press, 2000.
- [97] Emil T. Akhmedov, Daniil A. Kalinov, Fedor K. Popov. A way to distinguish very compact stellar objects from black holes. *Phys. Rev. D* **93**, 064006 (2016)

- [98] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, “Gravitation”, Macmillan, San Francisco 1973.
- [99] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations”, Cambridge University Press, 2005.