НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

имени А. И. Алиханова

На правах рукописи

Немков Никита Андреевич

МОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ

Специальность 01.04.02 —
Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в ФГБУ «Институт Теоретической и Экспериментальной Физики» имени А.И.Алиханова НИЦ «Курчатовский институт», г.Москва.

Научный руководитель:	**Морозов Алексей Юрьевич** доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН главный научный сотрудник, НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, г.Москва
Официальные оппоненты:	**Кривонос Сергей Олегович,** доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Лаборатория теоретической физики имени Н.Н.Боголюбова Объединённого института ядерных исследований, г.Дубна
	Цейтлин Аркадий Александрович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, ФГБУН Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН, г.Москва
Ведущая организация:	Институт теоретической физики имени Л.Д.Ландау РАН, г.Черноголовка

Защита состоится 20 июня 2017 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 201.002.01 при НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ по адресу: 117218, г. Москва, ул. Б.Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЦ «Курчатовский институт» – ИТЭФ, а также на сайте института www.itep.ru .

Автореферат разослан 19 мая 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук В.В.Васильев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Конформные блоки возникают при голоморфной факторизации корреляционных функций и являются центральными объектами двумерных конформных теорий поля. Область применения самих конформных теорий крайне широка и включает множество аспектов – от описания статистических систем вблизи критических точек до динамики теории струн. Обновлённый интерес к конформным теориям вызван открытием ряда дуальностей между ними и другими моделями. Самым ярким примером является предложенная Х.Малдаседой дуальность между теорией струн в пространстве анти-де Ситтера и конформной теорией поля на его границе. Кроме того, недавно Л.Алдай, Д.Гайотто и Ю.Тачикава обнаружили новое соответствие, связывающее четырёхмерные суперсимметричные калибровочные теории с двумерными конформными моделями. Следует заметить, что в большинстве случаев именно конформные теории являются более полно понятой стороной соответствия, таким образом предоставляя инструменты для изучения дуальных моделей. Несмотря на богатую историю исследований, в самой конформной теории остаются нерешённые задачи. До сих пор в основном изучались конкретные типы конформных теорий: с фиксированными центральными зарядами, наборами операторов и т.п. Чаще всего эти частные случаи характеризуются наличием лишь конечного числа независимых операторов (минимальные модели), в то время как в общей ситуации спектр операторов бесконечен. Более полное изучение конформных теорий общего положения представляет важную задачу.

Конформные блоки являются принципиальными объектами для изучения. С одной стороны, они полностью фиксируются симметрией и являются модельно-независимыми, т.е. не зависят от деталей конформной теории. С другой стороны, они являются важными ингредиентами программы бутстрапа, и, следовательно, содержат информацию о структуре модельно-зависимых трёхточечных корреляторов. Стандартное определение даёт представление конформного блока в виде ряда по степеням проективного инварианта x (или модулярного параметра q для случая конформной теории на торе). Это представление даёт возможность изучить локальные по x свойства конформных блоков, но практически не даёт информации о глобальных свойствах, среди которых наиболее принципиальными представляются свойства монодромии при обходе сингулярностей в x-плоскости. Задача описания преобразований монодромии и связанных с ними модулярных преобразований невырожденных вирасоровских конформных блоков ранее поднималась в литературе и в ряде случаев была решена. Б.Понсот и И.Тешнер представили модулярное ядро невырожденных конформных блоков в виде интеграла от отношения двойных гамма-функций. Это представление справедливо для иррациональных значений центрального заряда бóльших единицы. Н.Иорговым, О.Лисовым и Ю.Тихим было получено аналогичное выражение для случая единичного центрального заряда. С другой стороны, в недавней работе Д.Галахова, А.Миронова и А.Морозова было показано, что асимптотическая форма модулярного преобразования гораздо проще, чем можно ожидать из известных формул – сводится к преобразованию Фурье. Воспроизведение этого результата из точных интегральных выражений представляется весьма важным для взаимной проверки результатов, а также для более глубокого понимания вопроса.

Кроме того, необходимо заметить, что точные представления для модулярного ядра были получены не из прямого анализа конформных блоков, а косвенным образом. Они основываются на предположительной связи конформной теории с теорией представлений квантовых групп и уравнений Пенлеве. Прямая проверка того, что таким образом определённые модулярные ядра действительно осуществляют модулярные преобразования невырожденных конформных блоков, представляется важной задачей.

Цель работы

Целью данной работы является количественный анализ модулярных преобразований невырожденных вирасоровских конформных блоков. Особое внимание направлено на несколько частных задач.

- Разработка методов, позволяющих описывать модулярные ядра даже в отсутствие замкнутых выражений для самих конформных блоков.

- Прояснение связи между точными интегральными представлениями и асимптотической формой модулярных преобразований.
- Проверка того, что известные в литературе модулярные ядра действительно осуществляют модулярные преобразования невырожденных конформных блоков.
- Поиск нетривиальных точно решаемых примеров конформных блоков и полное явное описание модулярных преобразований в этих случаях.

Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Прямым вычислением показано, что асимптотическая форма модулярного преобразования в пределе больших промежуточных размерностей для невырожденных сферических конформных блоков самого общего вида есть преобразование Фурье, а пертурбативные поправки к нему отсутствуют.
- Из тождества пентагона получена система разностных уравнений, описывающих непертурбативное поведение модулярного ядра невырожденных сферических конформных блоков общего вида.
- Для центрального заряда в общем положении предложен рекурсивный метод вычисления непертурбативных поправок к модулярному ядру сферического конформного блока общего вида.
- Для семейства центральных зарядов вида

  $$c = 1 + 6(b + b^{-1})^2, \quad b^2 \in \mathbb{Z}$$

  предложено замкнутое выражение в элементарных функциях для модулярного ядра сферического конформного блока. Показано, что при $c = 1$ оно согласуется с формулой, известной в литературе, и представляет её в упрощённом виде.
- Выведен аналог тождества пентагона для торического модулярного ядра общего вида и следующие из него разностные уравнения.
- Для случая центрального заряда в общем положении найдено полное непертурбативное выражение для торического модулярного ядра. Установлена его связь с интегральными формулами, известными в литературе, а также показана согласованность с аналитической структурой невырожденных конформных блоков.
- Найдено бесконечное семейство решений формулы Замолодчикова, возникающее при специальных значениях внешних размерностей и

центральных зарядов. Показано, что эти конформные блоки обладают рядом замечательных свойств: содержат конечное число полюсов по промежуточной размерности, могут быть найдены как замкнутые функции координат, позволяют точное вычисление соответствующих модулярных ядер.

Научная новизна работы

В ходе работы был выработан общий подход к анализу модулярных преобразований конформных блоков. Поскольку замкнутые выражения для конформных блоков общего вида с ясно выраженными модулярными свойствами не известны, такой подход вынужден опираться на косвенные методы. Показано, что нелинейные условия самосогласованности модулярных преобразований (такие как тождество пентагона) могут быть использованы для получения линейных разностных уравнений на модулярные ядра невырожденных конформных блоков. Одним из достоинств этих уравнений является то, что они справедливы при произвольных значениях центрального заряда. Показано, что при учете всех симметрий задачи эти уравнения определяют модулярные ядра однозначно для случая иррационального центрального заряда. Решения этих уравнений проанализированы в различных пределах и частных случаях. На примере торического конформного блока показано, что интегральное представление Б.Понсот и И.Тешнера, справедливое при иррациональном центральном заряде большем единицы, может быть получено как решение этих уравнений. При этом оно естественным образом возникает не в интегральной форме, а в виде степенного разложения, которое более удобно для конкретных вычислений. Для случая единичного центрального заряда решение полученных уравнений согласуется с формулой, предложенной Н.Иорговым, О.Лисовым и Ю.Тихим, но представляет последнюю в более простой и естественной для конформной теории параметризации. Вывод и анализ новых замкнутых решений формулы Замолодчикова также позволили явно построить соответствующие модулярные ядра, проверить их согласованность с общими уравнениями и подтвердить гипотезу об их аналитической структуре.

Практическая и научная ценность работы

Результаты работы важны для понимания непертурбативной структуры вирасоровских конформных блоков и могут найти применение в конформной теории поля, дуальных калибровочных теориях, теории представлений квантовых групп. Кроме того, большинство результатов должны иметь обобщения на конформные теории с расширенными симметриями (с алгебрами токов, суперсимметриями и т.д.), а также на конформные теории в старших размерностях.

Личный вклад автора диссертации

Автором лично были получены все результаты, выносимые на защиту диссертации.

Апробация диссертации и публикации

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ИТЭФ и следующих международных конференциях:«Synthesis of integrabilities in the context of duality between the string theory and gauge theories» (г.Москва, 2013), «Group Theory and Knots» (г.Наталь, Бразилия, 2014), «Quantum Geometry, Duality and Matrix Models» (г.Москва, 2015).

Основные результаты диссертации представлены четырьмя публикациями в журналах, входящих в список рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Заключения и шести разделов Приложения. Полный объём диссертации составляет 130 страниц, включая 10 рисунков. Список литературы содержит 55 наименований.

Содержание диссертации

Во **Введении** кратко описаны основные свойства конформных теорий поля. Приведена интерпретация пространства локальных операторов конформной теории в терминах алгебры Вирасоро с центральным зарядом c:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + c\frac{n^2(n-1)}{12}\delta_{n+m,0} \ . \tag{1}$$

Даны определения примарных операторов V_Δ и соответствующих им представлений старшего веса. Рассмотрены ограничения, накладываемые конформной симметрией на форму корреляционных функций теории. Сферический конформный блок с промежуточной размерностью Δ и внешними размерностями $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ определён через связь с корреляционными функциями и представлен в виде x-разложения:

$$B_\Delta \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{Y,Y'} x^{|Y|} \beta^{\Delta,Y}_{\Delta_2\Delta_1} Q^{\Delta}_{Y,Y'} \beta^{\Delta,Y'}_{\Delta_3\Delta_4} \ , \tag{2}$$

где параметр разложения x – проективный инвариант четырёх точек на сфере, а $\beta^{\Delta,Y}_{\Delta_1\Delta_2}$ и $Q^{\Delta}_{YY'}$ – некоторые теоретико-групповые структуры алгебры Вирасоро. Конформный блок на торе с модулярным параметром $q = e^{2\pi i\tau}$ и внешней размерностью Δ_e определён в виде следа:

$$B_\Delta(\Delta_e|q) = \mathrm{Tr}_\Delta \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} V_{\Delta_e} \right) \ . \tag{3}$$

Введена параметризация Лиувилля:

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1}, \quad \Delta = Q^2/4 - \alpha^2, \quad \Delta_i = Q^2/4 - \alpha_i^2 \ . \tag{4}$$

Даны определения модулярных ядер для сферического и торического конформных блоков, которые можно единообразно записать как

$$\widetilde{B}_\Delta = \sum_{\Delta'} M_{\Delta\Delta'} B_{\Delta'} \ . \tag{5}$$

Здесь $M_{\Delta\Delta'}$ – модулярное ядро, зависящее лишь от размерностей (в формулах с явным указанием четырёх внешних размерностей подразумевается сферическое модулярное ядро, одной внешней размерности – торическое, остальные формулы применимы в обоих случаях). Дуальный блок $\widetilde{B}_\Delta$ получается заменой $x \to 1-x, \Delta_1 \leftrightarrow \Delta_3$ в сферическом случае и заменой $\tau \to -1/\tau$ в торическом случае. Приведена рекуррентная формула Замолодчикова, описывающая аналитическую структуру эллиптических (т.е. нормированных на асимптотику при $\Delta \to \infty$) конформных блоков как функций промежуточной размерности:

$$H_\Delta(q) = 1 + \sum_{r,s \geq 1} \frac{R_{r,s}}{\Delta - \Delta_{r,s}} q^{rs} H_{\Delta_{r,s}+rs}(q) \ , \tag{6}$$

где $\Delta_{r,s} = (Q^2 - (rb + sb^{-1})^2)/4$ – нули Каца, отвечающие вырожденным представлениями алгебры Вирасоро. Описаны основные свойства вырожденных представлений, правила слияния, приведены вырожденные модулярные матрицы. Также во Введении обозначены основные задачи исследования и их актуальность.

Глава 1 посвящена вычислению модулярного ядра в виде пертурбативного разложения по степеням промежуточной размерности Δ в пределе $\Delta \to \infty$.

В **Разделе 1.1** установлена связь рассматриваемой задачи с физикой суперсимметричных калибровочных теорий, благодаря чему найдена асимптотическая форма модулярного преобразования, оказывающаяся преобразованием Фурье.

В **Разделе 1.2** с использованием найденных в литературе разложений конформных блоков в режиме большой промежуточной размерности выполнено пертурбативное разложение модулярного ядра в этом же режиме и показано, что преобразование Фурье не получает никаких поправок:

$$M_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} \qquad \text{(пертурбативно)} \; . \tag{7}$$

В **Главе 2** разработан непертурбативный подход к вычислению модулярного ядра на сфере, не использующий явный вид конформных блоков.

В **Разделах 2.1** и **2.2** из тождества пентагона

$$\int d\beta_2''\, M_{\beta_2\beta_2''}\begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \alpha_4\end{bmatrix} M_{\beta_1\beta_2'}\begin{bmatrix}\alpha_5 & \beta_2''\\ \alpha_1 & \alpha_4\end{bmatrix} M_{\beta_2''\beta_1'}\begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_5\\ \alpha_3 & \beta_2'\end{bmatrix} = \\ = M_{\beta_1\beta_1'}\begin{bmatrix}\alpha_5 & \alpha_2\\ \alpha_1 & \beta_2\end{bmatrix} M_{\beta_2\beta_2'}\begin{bmatrix}\beta_1' & \alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_4\end{bmatrix} \tag{8}$$

выведен набор разностных уравнений первого порядка на невырожденное модулярное ядро:

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1,s_2}(\alpha_i,\alpha) M_{\alpha\alpha'}\begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_4\end{bmatrix} = \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1,s_2}(\alpha_i,\alpha') M_{\alpha\alpha'}\begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_4\end{bmatrix} \; . \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1,s_2}(\alpha_i,\alpha) &= \overline{M}_{-s_1,s_2}\begin{bmatrix}\alpha_{2,1} & \alpha_2\\ \alpha_{s_1} & \alpha\end{bmatrix}(\alpha_i,\alpha) e^{\frac{b}{2}(s_1\partial_{\alpha_1}+s_2\partial_{\alpha_2})} \; , \\ \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1,s_2}(\alpha_i,\alpha') &= \sum_s e^{-s\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \overline{M}_{-s_1,s}\begin{bmatrix}\alpha_{2,1} & \alpha'\\ \alpha_{s_1} & \alpha_4\end{bmatrix} \overline{M}_{-s,s_2}\begin{bmatrix}\alpha_{2,1} & \alpha_2\\ \alpha_s' & \alpha_3\end{bmatrix} \; ,\end{aligned} \tag{10}$$

а $\overline{M}$ – модулярные матрицы вырожденных конформных блоков (имеющие размер 2×2 и пронумерованные индексами $s_1, s_2 = \pm 1$), известные в замкнутом виде. Показано, что в этих уравнениях можно исключить сдвиги по внешним лиувиллевским моментам и получить уравнение второго порядка со сдвигами лишь по внутреннему моменту α':

$$\left(C_+(u,u')e^{b\partial'_\alpha} + C_0(u,u') + C_-(u,u')e^{-b\partial'_\alpha}\right) M_{\alpha\alpha'} = 0 \ , \tag{11}$$

где $u = e^{2\pi i b\alpha}$ и $u' = e^{2\pi i b\alpha'}$ играют роль непертурбативных параметров, а $C_{\pm,0}(u,u')$ – громоздкие, но явные функции этих величин, которые могут быть выражены через модулярные ядра вырожденных конформных блоков. Доказано, что в пертурбативном пределе эти уравнения действительно описывают ни что иное, как преобразование Фурье.

В **Разделе 2.3** предложен способ решения этих уравнений итерациями по степеням непертурбативных параметров. Показано, что коэффициенты $m_n(\alpha,\alpha')$ разложения модулярного ядра по непертурбативному параметру u':

$$M_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} m_n(\alpha,\alpha')(u')^n \tag{12}$$

не зависят от α': $m_n(\alpha,\alpha') = m_n(\alpha)$ и могут быть рекурсивно найдены из условия:

$$\sum_n m_n(\alpha) C_n(u,u')(u')^n = 0, \quad m_0(\alpha) = 1 \ , \tag{13}$$

где

$$C_n(u,u') = e^{2\pi i n b^2} u C_+(u,u') + C_0(u,u') + e^{-2\pi i n b^2} u^{-1} C_-(u,u') \ . \tag{14}$$

В **Разделе 2.4** получено точное решение разностных уравнений в случае единичного центрального заряда

$$M_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} (P)^{-i\alpha} \, (P')^{-i\alpha'} \prod_{j=1}^{4} (P_j)^{-i\alpha_j} \ R \qquad (\text{c=1}) \ , \tag{15}$$

где $P, P', P_1, \ldots, P_4$ – периодические функции лиувиллевских моментов, которые могут быть простым образом выражены через коэффициенты разностных уравнений. Продемонстрирована согласованность этих результатов с известными в литературе.

В **Разделе 2.5** решение (15) обобщено на другие рациональные значения центрального заряда и подведён итог Главы 2.

В **Главе 3** подход Главы 2 обобщен на торический случай, который оказывается во многом аналогичным, но зачастую позволяет получать более полные результаты.

В **Разделе 3.1** выведены аналог тождества пентагона для торического модулярного ядра и набор разностных уравнений, которые из него следуют:

$$\left(\frac{\sin \pi b(2\alpha+\mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} + \frac{\sin \pi b(2\alpha-\mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha}\right) M_{\alpha\alpha'}(\mu) = \\ = 2\cos 2\pi b\alpha' \, M_{\alpha\alpha'}(\mu) \ , \tag{16}$$

$$\left(e^{-\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \frac{\sin \pi b(2\alpha'+\mu)}{\sin 2\pi b\alpha'} + e^{\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \frac{\sin \pi b(2\alpha'-\mu)}{\sin 2\pi b\alpha'}\right) M_{\alpha\alpha'}(\mu) = \\ = 2\cos 2\pi b\alpha \, M_{\alpha\alpha'}(\mu) \ , \tag{17}$$

$$\frac{1}{\sin 2\pi b\alpha}\left(e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} - e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha}\right) M_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2e^{b\partial_\mu} M_{\alpha\alpha'}(\mu) \ . \tag{18}$$

В **Разделе 3.2** получено точное решение этих уравнений во всех порядках непертурбативного разложения:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2^{-1/2} e^{4\pi i\alpha\alpha'} e^{2\pi i\mu\alpha} e^{i\pi\mu(Q-\mu)/2} \frac{S_b(2\alpha'+\mu)}{S_b(2\alpha')} \times \\ \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \pi b(2\alpha'+\mu+(k-1)b)\sin \pi b(\mu+(k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha'+kb)\sin \pi k b^2}\right) \times \\ \times (b \to b^{-1}) \ . \tag{19}$$

Описаны специальные симметрии и другие особые свойства полученного решения. В частности, доказано, что его можно представить в виде более симметричного двойного разложения:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2^{3/2} e^{4\pi i\alpha\alpha'} e^{2\pi i(\mu\alpha+(Q-\mu)\alpha')} e^{i\pi\mu(Q-\mu)} \sin 2\pi b\alpha' \sin 2\pi b^{-1}\alpha' \times \\ \times \left(\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{4\pi i b(n\alpha+m\alpha'+nmb/2)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} \prod_{l=1}^{m} \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b\mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1}\right) \times (b \to b^{-1}) \ .$$

В **Разделе 3.3** показано, что найденное решение эквивалентно интегральному представлению Б.Понсот и И.Тешнера:

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = \frac{2^{3/2}}{i}\frac{\sin 2\pi b\alpha' \sin 2\pi b^{-1}\alpha'}{S_b(\mu)}\times \\ \times \int_{\mathcal{C}} d\xi \frac{S_b(\alpha' + \frac{\mu}{2} + \xi) S_b(\alpha' + \frac{\mu}{2} - \xi)}{S_b(\alpha' + Q - \frac{\mu}{2} + \xi) S_b(\alpha' + Q - \frac{\mu}{2} - \xi)} e^{-4\pi i \alpha\xi} \ . \quad (20)$$

В **Разделе 3.4** из условия согласованности модулярных преобразований и рекуррентного соотношения Замолодчикова для конформных блоков выведена формула, описывающая аналитическую структуру модулярного ядра как функции от промежуточной размерности:

$$\operatorname*{Res}_{\Delta=\Delta_{r,s}} M_{\Delta\Delta'} = R_{r,s}\, M_{\Delta_{r,-s}\Delta'} \ , \quad (21)$$

где $R_{r,s}$ – коэффициенты, входящие в формулу Замолодчикова. Проверено, что найденное точное решение удовлетворяет этому условию.

В **Разделе 3.5** подведены итоги Главы и обсуждена практическая значимость полученных результатов.

В **Главе 4** изучено особое семейство решений рекуррентной формулы Замолодчикова – конформные блоки, имеющие лишь конечное число полюсов по промежуточной размерности.

В **Разделе 4.1** проведён подробный анализ конечно-полюсных торических конформных блоков. Построено несколько явных примеров, и найдена их полная координатная зависимость. Доказано, что конформные блоки с $\Delta_e = 0$ и $\Delta_e = 1$ не имеют полюсов и сводятся к характерам алгебры Вирасоро, найден однополюсной конформный блок

$$H_\Delta(q) = 1 + \frac{1 - E_2(q)}{8\Delta} \qquad (\Delta_e = 3, c = -2) \ , \quad (22)$$

и двухполюсной конформный блок

$$H_\Delta(q) = 1 + \frac{1 - E_2(q)}{4\Delta - 1} + \frac{E_2(q)^2 - E_4(q)}{48\Delta(4\Delta - 1)} \qquad (\Delta_e = 4, c = 1) \ , \quad (23)$$

где $E_2(q), E_4(q)$ – ряды Эйзенштейна.

В **Разделе 4.2** разработанные методы перенесены на сферический случай, который оказывается значительно труднее. Доказано, что безполюсные конформные блоки возникают при следующих значениях внешних размерностей (и различных их перестановках):

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{4 + 3b^{-2}}{16} \ , \tag{24}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{3(4 + b^{-2})}{16} \ . \tag{25}$$

Построен пример однополюсного сферического конформного блока:

$$H_\Delta(q) = 1 - \frac{E_2(q) + \theta_2^4(q) - \theta_4^4(q)}{12\Delta} \ , \tag{26}$$

который возникает при $\Delta_1 = \Delta_3 = 1/16, \Delta_2 = \Delta_4 = 9/16$ и $c = 1$.

В **Разделе 4.3** изучены модулярные преобразования конечно-полюсных конформных блоков. Показано, что для конечно-полюсного торического конформного блока с полюсами в точках $\Delta = d_1, \ldots, d_k$ модулярное ядро есть

$$M_{\alpha\alpha'} = \frac{(\Delta(\alpha') - d_1) \ldots (\Delta(\alpha') - d_k)}{(\Delta(\alpha) - d_1) \ldots (\Delta(\alpha) - d_k)} m_{\alpha\alpha'}, \qquad \Delta(\alpha) = \frac{c-1}{24} - \alpha^2 \ , \tag{27}$$

где

$$m_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos 4\pi\alpha\alpha', & \text{если} \quad \Delta_e - 2k = 0 \\ 2\sqrt{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\sin 4\pi\alpha\alpha', & \text{если} \quad \Delta_e - 2k = 1 \end{cases} \ . \tag{28}$$

Для сферических конечно-полюсных конформных блоков получена аналогичная формула.

В **Разделе 4.4** проведена систематизация изученных примеров, высказано несколько общих гипотез о структуре и свойствах конечно-полюсных торических блоков. В частности, предположено и подтверждено компьютерными вычислениями, что они возникают лишь в теориях с центральными зарядами вида:

$$c = 1 - 6\frac{(n-m)^2}{nm}, \qquad c \le 1 \ , \tag{29}$$

и если величина внешней размерности при этом принадлежит множеству

$$\Delta_e \in \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbb{Z}_+ \\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} \Big\{ (pn-1)(pm-1), p^2nm + pn - pm \Big\} \ . \tag{30}$$

В **Заключении** кратко приведены основные результаты исследования.

В **Приложении А** описаны основные специальные функции, используемые в вычислениях.

В **Приложении Б** приведено явное разложение конформного блока в пределе большой промежуточной размерности, используемое в Главе 1.

В **Приложении В** приведены полные выражения для коэффициентов разностных уравнений Главы 2.

В **Приложении Г** описано выражение для сферического модулярного ядра для случая единичного центрального заряда, полученное в литературе. Показано, что это выражение согласуется с результатом Главы 2, а также что его непериодическая часть допускает существенное упрощение.

В **Приложении Д** приводятся различные вспомогательные вычисления, в основном связанные с решением разностных уравнений, опущенные в Главе 3 для краткости.

В **Приложении Е** ключевая гипотеза, высказанная в Главе 4, доказывается в частном случае.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Nemkov N.* S-duality as Fourier transform for arbitrary ϵ_1, ϵ_2 // J. Phys. A. — 2014. — Vol. 47, no. 10. — P. 105401.

[2] *Nemkov N.* On modular transformations of toric conformal blocks // JHEP. — 2015. — Vol. 10. — P. 039.

[3] *Немков Н.* О модулярных преобразованиях в теории Лиувилля // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т. 189, № 2. — С. 1574—1591.

[4] *Nemkov N.* On new exact conformal blocks and Nekrasov functions // JHEP. — 2016. — Vol. 12. — P. 017.