

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Немков Никита Андреевич

**МОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНФОРМНЫХ  
БЛОКОВ**

Специальность 01.04.02 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН  
Морозов А. Ю.

Москва — 2017

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	5
0.1 Содержание диссертации . . . . .	17
0.2 Результаты, выносимые на защиту диссертации . . . . .	19
 <b>Глава 1. Пертурбативная асимптотика модулярного ядра</b> . . . . .	 21
1.1 Теория Зайберга-Виттена и АГТ соотношение . . . . .	21
1.2 Пертурбативное вычисление модулярного ядра . . . . .	23
 <b>Глава 2. Непертурбативные модулярные преобразования сферических конформных блоков</b> . . . . .	 27
2.1 Тождество пентагона и разностные уравнения первого порядка . . . . .	27
2.1.1 Тождество пентагона . . . . .	27
2.1.2 Вывод разностных уравнений . . . . .	28
2.2 Разностные уравнения второго порядка . . . . .	31
2.2.1 Точка Ашкина-Теллера . . . . .	33
2.2.2 Пертурбативный предел . . . . .	33
2.3 Непертурбативные поправки в случае общего центрального заряда	34
2.4 Непертурбативные поправки в случае единичного центрального заряда . . . . .	37
2.4.1 Рекурсивное вычисление . . . . .	37
2.4.2 Точное решение . . . . .	39
2.5 Обсуждение результатов главы . . . . .	41
 <b>Глава 3. Непертурбативные модулярные преобразования торических конформных блоков</b> . . . . .	 43
3.1 Разностные уравнения на модулярное ядро . . . . .	43
3.1.1 Аналог тождества пентагона . . . . .	43
3.1.2 Вывод разностных уравнений . . . . .	46
3.2 Решение разностных уравнений . . . . .	49
3.2.1 Уравнение со сдвиговыми операторами по $\alpha$ . . . . .	49
3.2.2 Уравнения со сдвиговыми операторами по $\alpha'$ и $\mu$ . . . . .	50

	Стр.	
3.2.3	Симметризация решения и его свойства . . . . .	52
3.3	Интегральное представление модулярного ядра . . . . .	55
3.4	Аналитические свойства модулярного ядра . . . . .	57
3.4.1	Вывод общей формулы . . . . .	57
3.4.2	Подготовка к вычислениям . . . . .	59
3.4.3	Нормировочный множитель . . . . .	60
3.4.4	Разложение вблизи точки $\alpha = \alpha_{r,s}$ . . . . .	62
3.4.5	Разложение вблизи точки $\alpha = \alpha_{r,-s}$ . . . . .	64
3.4.6	Сравнение разложений . . . . .	65
3.5	Обсуждение результатов главы . . . . .	67
<b>Глава 4.</b>	<b>Конформные блоки в замкнутом виде . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1	Торические конформные блоки в замкнутом виде . . . . .	71
4.1.1	Метод построения . . . . .	71
4.1.2	Торические конформные блоки без полюсов . . . . .	72
4.1.3	Торические конформные блоки с одним полюсом . . . . .	73
4.1.4	Общий случай . . . . .	80
4.2	Сферические конформные блоки в замкнутом виде . . . . .	82
4.2.1	Метод построения и отличия от торического случая . . . . .	82
4.2.2	Сферические конформные блоки без полюсов . . . . .	84
4.2.3	Сферический конформный блок с одним полюсом . . . . .	85
4.3	Модулярные преобразования конечно-полюсных конформных блоков . . . . .	86
4.3.1	Торический случай . . . . .	87
4.3.2	Сферический случай . . . . .	93
4.4	Обсуждение результатов главы . . . . .	94
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>100</b>	
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>102</b>	
<b>Приложение А. Специальные функции . . . . .</b>	<b>107</b>	
A.1	Двойные гамма- и синус-функции . . . . .	107
A.2	Эллиптические функции и модулярные формы . . . . .	109

Приложение Б. Пертурбативное разложение препотенциала . . .	110
Приложение В. Функциональные коэффициенты в разностных уравнениях . . . . .	112
В.1 Функции $C_+$ , $C_0$ , $C_-$ . . . . .	112
В.2 Функции $E_+$ , $E_0$ , $E_-$ . . . . .	113
Приложение Г. Модулярное ядро при единичном центральном заряде как связывающий коэффициент уравнения Пенлеве VI . . . . .	114
Г.1 Определение и явный вид связывающего коэффициента . . . . .	114
Г.2 Сравнение с результатами настоящего исследования . . . . .	118
Г.3 Подробнее о связывающем коэффициенте уравнения Пенлеве VI	120
Приложение Д. Свойства торического модулярного ядра . . . . .	123
Д.1 Двойное разложение модулярного ядра . . . . .	123
Д.2 Проверка разностного уравнения со сдвигом по $\mu$ . . . . .	125
Приложение Е. Центральные заряды конечно-полюсных конформных блоков . . . . .	128

## Введение

Принципы симметрии играют ключевую роль в современной теоретической физике. Очень важным примером является *конформная симметрия*. *Конформными преобразованиями* пространства, в котором введены координаты  $x^\mu$  и существует метрика  $g_{\mu\nu}(x)$ , называются такие преобразования координат  $x' = x'(x)$ , для которых справедливо уравнение

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (1)$$

с некоторой функцией  $\Omega(x)$ . Локально конформные преобразования сохраняют углы, но, вообще говоря, не сохраняют масштабы. Говорят, что теория обладает конформной симметрией, если конформные преобразования оставляют действие теории инвариантным.

В качестве примеров теорий, обладающих конформной инвариантностью на классическом уровне, можно привести теорию скалярного поля  $\varphi^n$  в  $d$  пространственно-временных измерениях при  $n = 2d/(d - 2)$ , электродинамику с безмассовыми фермионами, хромодинамику с безмассовыми кварками. Вообще, на классическом уровне конформная инвариантность следует из априори более слабой масштабной инвариантности – инвариантности относительно замены  $x' = \lambda x$ . Масштабная инвариантность подразумевает, что в теории нет наблюдаемых размерных констант, в частности, масс у частиц.

В большинстве нетривиальных случаев, однако, масштабная и конформная инвариантности нарушаются квантовыми поправками. В тех случаях, когда этого не происходит, и теория остаётся конформной на квантовом уровне, наличие конформной симметрии оказывается очень полезным для изучения соответствующей модели. Примерами могут служить  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная калибровочная теория в  $d = 4$  измерениях [1] и теория Лиувилля в  $d = 2$  измерениях [2].

Конформная группа плоского пространства в  $d > 2$  дополняет группу Пуанкаре масштабными преобразованиями, а также специальными конформными преобразованиями, по сути представляющими из себя инфинитезимальную версию преобразования инверсии  $x'^\mu = x^\mu/(x^\nu x_\nu)$ . В  $d = 2$  конформная группа значительно шире и является бесконечномерной. Введя на двумерной плоско-

сти  $(x_1, x_2)$  комплексные координаты

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (2)$$

плоскую метрику  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$  можно записать в виде  $ds^2 = dzd\bar{z}$ . При этом все конформные преобразования описываются аналитическими заменами

$$z' = f(z) . \quad (3)$$

В настоящем диссертационном исследовании мы рассматриваем только теории в плоских двумерных пространствах и используем описанные комплексные координаты.

Генераторами аналитических преобразований (3) являются дифференциальные операторы  $l_n = -z^{n+1}\partial_z$ , образующие алгебру Витта

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m} . \quad (4)$$

На гильбертовом пространстве квантовой теории вместо этой алгебры действует её центральное расширение, *алгебра Вирасоро*

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n^2(n - 1)}{12} \delta_{n+m,0} . \quad (5)$$

При этом пространство состояний может быть представлено как совокупность *модулей Верма* (или *конформных семейств*), образующих неприводимые представления этой алгебры. Эти представления являются представлениями старшего веса со старшим вектором  $|\Delta\rangle$ , удовлетворяющим условиям

$$L_0 |\Delta\rangle = \Delta |\Delta\rangle, \quad L_n |\Delta\rangle = 0, \quad \text{при } n > 0 . \quad (6)$$

При этом вектора вида

$$L_{-Y} |\Delta\rangle \equiv L_{-k_1} L_{-k_2} \dots L_{-k_n} |\Delta\rangle \quad (7)$$

при  $k_1 \geq k_2 \dots \geq k_n$ , вообще говоря, являются линейно-независимыми и образуют базис в соответствующем модуле Верма. Здесь мы ввели краткое обозначение  $Y$  для диаграммы Юнга, образуемой числами  $k_1 \dots k_n$ , которое будет часто использоваться в дальнейшем. Состояния вида (7) называются *потомками* примарного состояния  $|\Delta\rangle$ .

Принципиальным объектом изучения в квантовой теории поля является набор *корреляционных функций* локальных полей. В конформной теории поля

пространство состояний изоморфно пространству локальных полей. Примарным состояниям  $|\Delta\rangle$  соответствуют *примарные поля*  $V_\Delta(z)$ , характеризующиеся следующим законом преобразования<sup>1</sup> при заменах координат (3):

$$V_\Delta(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-\Delta} V_\Delta(z) . \quad (8)$$

Конформная симметрия накладывает существенные ограничения на вид корреляционных функций примарных полей. Одноточечный коррелятор обязан быть равен нулю  $\langle V_\Delta(z) \rangle = 0$  кроме случая  $\Delta = 0$ , когда  $V_\Delta(z)$  является тождественным оператором. Двухточечный коррелятор даётся выражением

$$\langle V_{\Delta_1}(z_1)V_{\Delta_2}(z_2) \rangle = \frac{C_{\Delta_1\Delta_2}}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_1}} \delta_{\Delta_2}^{\Delta_1} . \quad (9)$$

Без ограничения общности можно считать, что примарные операторы нормированы таким образом, что  $C_{\Delta_1\Delta_2} = 1$ . Координатная зависимость трёхточечной функции также фиксируется конформной симметрией и имеет простой вид [3]

$$\langle V_{\Delta_1}(z_1)V_{\Delta_2}(z_2)V_{\Delta_3}(z_3) \rangle = \frac{C_{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{z_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} z_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} z_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}} , \quad (10)$$

где введено обозначение  $z_{ij} = z_i - z_j$ . Коэффициенты  $C_{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}$ , которые также называют *структурными константами*, не могут быть полностью зафиксированы конформной инвариантностью и, наряду с допустимым набором первичных размерностей (спектром), содержат основную информацию о динамике теории.

Важным принципом конформной теории поля является наличие операторного разложения – представления произведения двух локальных полей в разных точках в виде суммы локальных полей в одной точке:

$$V_{\Delta_1}(z_1)V_{\Delta_2}(z_2) = \sum_{\Delta, Y} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta, Y}(z_1, z_2)L_{-Y}V_\Delta(z_2) . \quad (11)$$

Сумма по  $\Delta$  отвечает суммированию по всем модулям Верма, а сумма по диаграммам Юнга  $Y$  отвечает за учет всех состояний внутри каждого из модулей.

<sup>1</sup>Примарные поля, вообще говоря, являются функциями  $z$  и  $\bar{z}$  и характеризуются двумя размерностями  $\Delta, \bar{\Delta}$ . Во многих приложениях, однако, можно считать, что примарные поля факторизуются в произведение голоморфной и анти-голоморфной частей  $V_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) = V_\Delta(z)V_{\bar{\Delta}}(\bar{z})$ , которые можно рассматривать независимо. Поскольку нашей основной целью является изучение конформных блоков (см. далее), которые по определению являются голоморфными объектами, представляется оправданным ограничиться изучением голоморфных частей.

Вместе они дают сумму по всем локальным операторам теории. Разложение (11) справедливо внутри корреляционных функций при условии, что поле в точке  $z_1$  является ближайшим к полю в точке  $z_2$ .

Из трансляционной инвариантности легко видеть, что  $C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}(z_1,z_2) = C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}(z_{12})$ , после чего из масштабной инвариантности следует

$$C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}(z_{12}) = z_{12}^{\Delta+|Y|-\Delta_1-\Delta_2} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}, \quad (12)$$

где принято обозначение  $|Y| = |\{k_1, \dots, k_n\}| = k_1 + \dots + k_n$ . Легко показать, что для пустой диаграммы Юнга координатно-независимые факторы в операторном разложении (10) совпадают с коэффициентами в трёхточечном корреляторе (структурными константами)  $C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,\{\}} = C_{\Delta,\Delta_1,\Delta_2}$ , которые принято выделять явно

$$C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y} = C_{\Delta,\Delta_1,\Delta_2} \beta_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}, \quad (13)$$

так что  $\beta_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,\{\}} = 1$ . В отличие от структурных констант коэффициенты  $\beta_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta,Y}$  полностью фиксируются требованием конформной инвариантности, хотя и не допускают простой записи в общем виде.

В принципе, используя операторное разложение, можно вычислить любой коррелятор теории в терминах структурных констант. Однако, координатная зависимость многоточечных корреляторов значительно сложнее примеров (9) и (10), что видно уже для случая четырёх полей:

$$\langle V_{\Delta_1}(z_1)V_{\Delta_2}(z_2)V_{\Delta_3}(z_3)V_{\Delta_4}(z_4) \rangle. \quad (14)$$

Используя проективную подгруппу конформной группы, можно зафиксировать положение любых трёх операторов, например, выбрать  $z'_1 = 0, z'_3 = 1, z'_4 = \infty$ . При таком преобразовании точка  $z_2$  переходит в проективный инвариант  $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$  и коррелятор принимает вид<sup>2</sup>

$$\langle V_{\Delta_1}(0)V_{\Delta_2}(x)V_{\Delta_3}(1)V_{\Delta_4}(\infty) \rangle. \quad (15)$$

Предположив, что  $|x| < 1$ , можно воспользоваться операторным разложением (11) для полей  $V_{\Delta_1}V_{\Delta_2}$  и  $V_{\Delta_3}V_{\Delta_4}$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \left( V_{\Delta_1}(0)V_{\Delta_2}(x) \right) \left( V_{\Delta_3}(1)V_{\Delta_4}(\infty) \right) \right\rangle = \\ = \sum_{\substack{\Delta,Y \\ \Delta',Y'}} C_{\Delta_2\Delta_1}^{\Delta,Y} C_{\Delta_3\Delta_4}^{\Delta',Y'} x^{\Delta+|Y|-\Delta_1-\Delta_2} \langle L_{-Y}V_{\Delta}(0)L_{-Y'}V_{\Delta'}(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

<sup>2</sup>Поле на бесконечности понимается как предел  $V_{\Delta_4}(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2\Delta_4} V_{\Delta_4}(z)$ .

Величины

$$Q_{Y,Y'}^\Delta = \delta_{\Delta'}^{\Delta} \langle L_{-Y} V_\Delta(0) L_{-Y'} V_{\Delta'}(\infty) \rangle \quad (17)$$

образуют *матрицу Шаповалова* (при  $\Delta' \neq \Delta$ , т.е. для потомков различных примарных операторов они равны нулю). Таким образом, исходный коррелятор (15) представляется в следующем виде:

$$\langle V_{\Delta_1}(0) V_{\Delta_2}(x) V_{\Delta_3}(1) V_{\Delta_4}(\infty) \rangle = \sum_{\Delta} C_{\Delta, \Delta_1, \Delta_2} C_{\Delta, \Delta_3, \Delta_4} B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x), \quad (18)$$

где мы ввели центральное для всего исследования понятие *конформного блока* [4]

$$B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{Y, Y'} x^{|Y|} \beta_{\Delta_2 \Delta_1}^{\Delta, Y} Q_{Y, Y'}^\Delta \beta_{\Delta_3 \Delta_4}^{\Delta, Y'}. \quad (19)$$

Параметр  $\Delta$  называется *внутренней* или *промежуточной размерностью*, а параметры  $\Delta_1, \dots, \Delta_4$  – *внешними размерностями*.

Конформный блок описывает вклад в коррелятор от конформного семейства размерности  $\Delta$ . Он не содержит структурных констант теории и полностью фиксирован конформной симметрией. Тем не менее, конформный блок является сложным объектом и не выражается ни в каком простом замкнутом виде через известные специальные функции. Отметим, что конформный блок также зависит от центрального заряда теории (5), но мы часто не будем явно отражать эту зависимость в обозначениях. В дальнейшем нам также будет удобно использовать параметризацию Лиувилля для конформных размерностей и центрального заряда

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1}, \quad \Delta = Q^2/4 - \alpha^2, \quad \Delta_i = Q^2/4 - \alpha_i^2, \quad (20)$$

а иногда даже комбинацию новых и исходных обозначений. Точный смысл должен быть ясен из контекста. Величины  $\alpha, \alpha_i$  называют *лиувиллевскими моментами* или просто *моментами*. Нам также будет удобно представлять конформный блок графом, изображённым на рисунке 0.1. Приведём для иллюстрации

$$B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = \begin{array}{c} \Delta_2, x \quad \quad \quad \Delta_3, 1 \\ | \quad \quad \quad | \\ \hline \Delta_1, 0 \quad \Delta \quad \Delta_4, \infty \end{array}$$

Рисунок 0.1 — Диаграммное представление конформного блока

два первых члена  $x$ -разложения конформного блока<sup>3</sup>:

$$B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \left( 1 + x \frac{(\Delta - \Delta_1 + \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta} + O(x^2) \right). \quad (21)$$

Предполагается, что, как и полный коррелятор (15), конформный блок является аналитической функцией  $x$  во всей комплексной плоскости за исключением точек  $0, 1, \infty$ , где введены другие поля. Во всех частных случаях, когда конформные блоки удается вычислить явно, эта гипотеза выполняется.

Определение (19) представляет конформный блок в виде ряда по степеням проективного инварианта  $x$  и сходится лишь в области  $|x| < 1$ , т.е. там, где применимо операторное разложение полей  $V_1(0)V_2(x)$  в присутствии поля  $V_3(1)$ . Такое представление оказывается неподходящим для изучения непертурбативных по  $x$  свойств конформных блоков, таких как свойства монодромии при обходе сингулярностей или модулярных преобразований (см. далее). Развитие альтернативных методов, позволяющих ответить на указанные вопросы, и представляет собой основную цель данного исследования.

При их значениях конформных размерностей, называемых также *нулями Каца* или *вырожденными размерностями*,

$$\Delta_{r,s} = Q^2/4 - \alpha_{r,s}^2, \quad \alpha_{r,s} = \frac{rb + sb^{-1}}{2}, \quad (22)$$

где  $r, s \geq 1$ , модули Верма (7) оказываются вырожденными – различные потомки одного примарного поля являются линейно зависимыми. После удаления линейно-зависимых комбинаций соответствующий модуль Верма оказывается конечномерным размерности  $r \times s$ . Используя тождества Уорда можно показать, что корреляционные функции с вырожденными полями удовлетворяют дифференциальным уравнениям. Кроме того, коэффициенты операторного разложения с вырожденными полями удовлетворяют специальным дополнительным

<sup>3</sup>Зависимость от центрального заряда появляется только в порядке  $O(x^2)$ .

ограничениям, так называемым *правилам слияния*. А именно, в операторном разложении поля общего вида  $V_\alpha$  и вырожденного поля  $V_{\alpha_{r,s}}$  могут появиться только поля с моментами  $\alpha + \alpha_{n,m}$  при  $1 - r \leq n \leq r - 1$  и  $1 - s \leq m \leq s - 1$ . Схематично:

$$[V_\alpha] \times [V_{\alpha_{r,s}}] = \sum_{n=1-r}^{r-1} \sum_{m=1-s}^{s-1} [V_{\alpha+\alpha_{n,m}}] . \quad (23)$$

Простейший пример вырожденного модуля Верма соответствует размерности  $\Delta = \Delta_{2,1}$ , имеющей нулевой вектор на втором уровне:

$$|deg_{2,1}\rangle = (L_{-1}^2 + b^2 L_{-2}) |\Delta_{2,1}\rangle . \quad (24)$$

Этот вектор уничтожается всеми генераторами Вирасоро  $L_n$  при  $n \geq 1$ , откуда следует  $|deg_{2,1}\rangle = 0$ . Четырёхточечный коррелятор (15) с вырожденным полем в точке  $x$ , т.е. при  $\Delta_2 = \Delta_{2,1}$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( b^{-2} x(1-x) \partial_x^2 + (2x-1) \partial_x + \Delta_{2,1} + \frac{\Delta_1}{x} - \frac{\Delta_3}{x-1} - \Delta_4 \right) C_{2,1}(x) = 0 , \quad (25)$$

где мы для краткости обозначили весь коррелятор (15) как  $C_{2,1}(x)$ . Данное уравнение имеет второй порядок и допускает два линейно-независимых решения. Каждое из решений соответствует вкладу определённого конформного блока в коррелятор (18). То, что этих вкладов всего два, иллюстрирует правила слияния с вырожденными полями (23), в данном случае  $[V_\alpha] \times [V_{\alpha_{2,1}}] = [V_{\alpha+b/2}] + [V_{\alpha-b/2}]$ . Уравнение (25) простой заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению и допускает следующий базис решений:

$$\begin{aligned} B_{\alpha_1-b/2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} (x) &= x^{b(\alpha_1+Q/2)} (1-x)^{b(\alpha_3+Q/2)} {}_2F_1(A, B; C|x) , \\ B_{\alpha_1+b/2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} (x) &= \\ &= x^{b(Q/2-\alpha_1)} (1-x)^{b(\alpha_3+Q/2)} {}_2F_1(1+A-C, 1+B-C; 2-C|x) , \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A = b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) + 1/2, \quad B = b(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) + 1/2, \quad C = 2b\alpha_1 + 1/2 . \quad (27)$$

В том, что данные функции действительно отвечают конформным блокам с моментами  $\alpha_1 \pm b/2$ , можно убедиться, сравнив их асимптотику при  $x \rightarrow 0$  с асимптотикой конформного блока (19).

Вернёмся к обсуждению невырожденных конформных блоков, имеющих смысл при произвольном значении промежуточной размерности  $\Delta$ . Можно доказать, что как функция промежуточной размерности  $\Delta$  конформный блок является голоморфным во всей комплексной плоскости за исключением нулей Каца (22). Вычеты в этих полюсах пропорциональны конформным блокам с другими значениями промежуточной размерности [5; 6]:

$$\text{Res}_{\Delta=\Delta_{r,s}} B_{\Delta}(x) = R_{r,s} B_{\Delta_{r,s}+rs}(x) . \quad (28)$$

Коэффициенты  $R_{r,s}$  зависят от внешних размерностей и центрального заряда, но не зависят от  $x$  и  $\Delta$ . Их явный вид приведен в главах 3 и 4, где они используются.

Вычислив также регулярную часть конформного блока (асимптотику при  $\Delta \rightarrow \infty$ ), можно записать полное представление в виде суммы по полюсам. Асимптотика даётся следующим выражением:

$$G_{\Delta}(x) = (16q)^{\Delta - \frac{c-1}{24}} x^{\frac{c-1}{24} - \Delta_1 - \Delta_2} (1-x)^{\frac{c-1}{24} - \Delta_2 - \Delta_3} \theta_3(q)^{\frac{c-1}{2} - 4(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)} , \quad (29)$$

где *эллиптический параметр*  $q$  связан с  $x$  как

$$q = e^{i\pi\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T} = i \frac{K(1-x)}{K(x)} . \quad (30)$$

Удобно ввести *эллиптический конформный блок*  $H_{\Delta}(q)$ , нормировав исходный конформный блок на свою асимптотику и перейдя к параметризации через эллиптический параметр  $q$ ,

$$H_{\Delta}(q) = \frac{B_{\Delta}(x)}{G_{\Delta}(x)} . \quad (31)$$

Полюсное разложение эллиптического конформного блока имеет следующий вид [5]:

$$H_{\Delta}(q) = 1 + \sum_{r,s \geq 1} \frac{R_{r,s}}{\Delta - \Delta_{r,s}} (16q)^{rs} H_{\Delta_{r,s}+rs}(q) . \quad (32)$$

Данная формула, будучи переписанной в терминах коэффициентов  $q$ -разложения конформного блока, становится рекуррентным соотношением, позволяющим вычислять старшие коэффициенты разложения при известных младших. Таким образом, она может рассматриваться как независимое определение конформного блока, которое к тому же делает явным его аналитическую структуру как функции внутренней размерности  $\Delta$ .



что между  $s$ - и  $t$ -канальными конформными блоками есть простая связь

$$B_{\Delta}^t \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_1 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{bmatrix} (1-x). \quad (36)$$

Значение корреляционной функции не зависит от способа разложения, поэтому должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta} C_{\Delta, \Delta_2, \Delta_1} C_{\Delta, \Delta_3, \Delta_4} B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = \\ = \sum_{\Delta} C_{\Delta, \Delta_2, \Delta_3} C_{\Delta, \Delta_1, \Delta_4} B_{\Delta}^t \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x), \end{aligned} \quad (37)$$

известное также как свойство *кроссинг-симметрии*. Поскольку конформные блоки (по крайней мере в принципе) могут быть найдены, эти уравнения накладывают ограничения на структурные константы и спектр (набор примарных размерностей) теории [3; 4]. Такой подход к решению конформных теорий называют *конформным бутстрапом*, а контроль над различными аспектами конформных блоков является необходимым для этой программы.

Кроссинг-симметрия имеет ещё одно очень важное следствие. Поскольку конформные блоки в данном канале являются линейно-независимыми при различных внутренних размерностях (например  $B_{\Delta}^s \propto x^{\Delta}$ ), то из равенства (37) следует существование линейного преобразования, связывающего  $s$ - и  $t$ -канальные конформные блоки:

$$B_{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x) = \sum_{\Delta'} F_{\Delta\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} B_{\Delta'}^t \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} (x). \quad (38)$$

Матрица  $F_{\Delta\Delta'}$  не зависит от  $x$  и называется *матрицей слияния*. Благодаря соотношению (36)  $t$ -канальный конформный блок по-существу является  $s$ -канальным конформным блоком, перенесенным из точки  $x$  в точку  $1-x$ , а потому уравнение (38) описывает свойства монодромии.

Преобразование слияния проще всего проиллюстрировать на примере вырожденных конформных блоков (26). Из-за правил слияния (23) есть только две допустимые промежуточные размерности, поэтому пространство конформных блоков двумерно, а матрица слияния представляет из себя матрицу  $2 \times 2$ , совпадающую с матрицей связывающих коэффициентов для гипергеометрической

функции:

$$F_{\Delta\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta_{2,1} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(2-C)\Gamma(A+B-C)}{\Gamma(1+A-C)\Gamma(1+B-C)} & \frac{\Gamma(2-C)\Gamma(-A-B+C)}{\Gamma(1-A)\Gamma(1-B)} \\ \frac{\Gamma(A+B-C)\Gamma(C)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} & \frac{\Gamma(C)\Gamma(-A-B+C)}{\Gamma(-A+C)\Gamma(-B+C)} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Другой пример преобразования слияния можно получить из анализа конформного блока Ашкина-Теллера (33). В этом случае пространство конформных блоков бесконечномерно, но тем не менее сами они имеют простой вид, так что ядро преобразования слияния удаётся найти явно. Действительно, имеет место формула

$$G_\alpha(1-x) = \int d\alpha' \frac{16^{\alpha^2}}{16^{\alpha'^2}} e^{4\pi i \alpha \alpha'} G_{\alpha'}(x). \quad (40)$$

Таким образом, для конформных блоков Ашкина-Теллера в терминах лиувилевских моментов (20) преобразование слияния сводится к преобразованию Фурье, сопряженному экспоненциальными факторами.

Модель Ашкина-Теллера является редким случаем, в котором благодаря знанию самого конформного блока, возможно явное вычисление модулярного ядра. Для невырожденного конформного блока общего вида не существует замкнутого выражения с ясными модулярными свойствами. В настоящем исследовании будут разработаны методы, позволяющие вычислять модулярные ядра косвенным образом, без точного знания соответствующих конформных блоков.

До сих пор мы фактически рассматривали конформные теории поля, определённые на поверхности сферы. Не менее интересно поведение конформных теорий на римановых поверхностях ненулевого рода. При этом, торический случай в некотором смысле включает в себя все принципиальные отличия поверхностей старшего рода от сферы. Кроме того, выполнение кроссинг-симметрии и аналогичного условия согласованности на торе гарантирует возможность продолжить теорию на любую поверхность старшего рода [10]. Это делает изучение торических корреляторов и конформных блоков важным вопросом. В отличие от сферического случая, торический конформный блок нетривиален уже лишь при одном внешнем поле, и может быть определён как след

$$B_\Delta(\Delta_e|q) = \text{Tr}_\Delta \left( q^{L_0 - \frac{c}{24}} V_{\Delta_e} \right). \quad (41)$$

Здесь  $c$  – центральный заряд теории,  $\Delta_e$  – внешняя размерность,  $\Delta$  – внутренняя размерность,  $q = e^{2\pi i \tau}$  – модулярный параметр тора. Мы будем представлять торический конформный блок петлевым графом, изображённым на

$$B_{\Delta}(\Delta_e|q) = \begin{array}{c} \Delta \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \Delta_e \end{array}$$

Рисунок 0.3 — Диаграммное представление торического конформного блока

рисунке 0.3. В отличие от сферического конформного блока, первый нетривиальный торический конформный блок зависит всего от одной внешней размерности вместо четырёх. Это делает его более простым объектом для изучения. Для иллюстрации приведем два первых члена  $q$ -разложения торического конформного блока:

$$B_{\Delta}(\Delta_e|q) = q^{\Delta-c/24} \left( 1 + q \left( \frac{\Delta_e(\Delta_e - 1)}{2\Delta} + 1 \right) + O(q^2) \right). \quad (42)$$

Несмотря на различия, торические и сферические конформные блоки очень схожи. Более того, оказывается, что торический конформный блок может быть получен как специализация сферического [7; 11], и почти все нетривиальные свойства сферических блоков имеют близкие аналоги в торическом случае. Например, уравнение Замолотчикова (32) справедливо также и для торических блоков, при надлежащем определении коэффициентов  $R_{r,s}$ . Преобразование слияния (38) соответствует замене модулярного параметра тора  $\tau \rightarrow -1/\tau$  и также реализуется линейным преобразованием<sup>4</sup>

$$B_{\Delta}(\Delta_e|q) = \sum_{\Delta'} M_{\Delta\Delta'}(\Delta_e) B_{\Delta'}(\Delta_e|\tilde{q}), \quad (43)$$

где  $\tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau}$ . Матрица  $M_{\Delta\Delta'}$  называется *модулярным ядром*. Мы часто будем называть оба преобразования (43) и (38) *модулярными*, полагаясь на контекст.

Существует лишь небольшое количество конформных блоков, чья координатная зависимость известна точно. Единственный класс, изученный систематически – это конформные блоки с вырожденными внешними полями, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям. Существует также несколько разрозненных примеров вроде конформных блоков Ашкина-Теллера (33). В данном диссертационном исследовании разрабатываются методы, позволяющие определять структуру модулярных преобразований даже в отсутствие замкну-

<sup>4</sup>В действительности, для принятого определения конформного блока (41) в модулярное преобразование необходимо включить дополнительный множитель  $\tau^{\Delta_e}$ . Мы однако будем опускать этот множитель вплоть до раздела 4.3, где его учёт станет необходимым.

тых выражений для конформных блоков. Нам также удастся существенно расширить класс точно решаемых конформных блоков типа Ашкина-Теллера, дать ему систематическое описание, и установить вид модулярных преобразований в этих случаях.

## 0.1 Содержание диссертации

**Введение** посвящено краткому описанию конформных теорий поля, понятию конформного блока и модулярных преобразований. Обозначены основные задачи исследования и их актуальность.

**Глава 1** посвящена вычислению модулярного ядра в виде пертурбативного разложения по степеням промежуточной размерности. В **разделе 1.1** устанавливается связь рассматриваемой задачи с физикой суперсимметричных калибровочных теорий, благодаря чему находится асимптотическая форма модулярного преобразования, оказывающаяся преобразованием Фурье. В **разделе 1.2** с использованием найденных в литературе разложений конформных блоков в режиме большой промежуточной размерности выполняется пертурбативное разложение модулярного ядра в этом же режиме и показывается, что преобразование Фурье не получает никаких поправок.

В **главе 2** разрабатывается непертурбативный подход к вычислению модулярного ядра на сфере, не использующий явный вид конформных блоков. В **разделах 2.1 и 2.2** из тождества пентагона выводится набор разностных уравнений на невырожденное модулярное ядро, в котором вырожденные матрицы слияния играют роль коэффициентов. Показывается, что в пертурбативном пределе эти уравнения действительно описывают ни что иное, как преобразование Фурье, и идентифицируются непертурбативные параметры, контролирующие отклонения от асимптотической формы. В **разделе 2.3** предлагается способ решения этих уравнений итерациями по степеням непертурбативных параметров. В **разделе 2.4** разностные уравнения решаются точно в случае единичного центрального заряда, и демонстрируется согласованность этих результатов с известными в литературе. **Раздел 2.5** подводит итог этой главы.

В **главе 3** подход главы 2 обобщается на торический случай, который оказывается во многом аналогичным, но зачастую позволяет получать более

полные результаты. В **разделе 3.1** выводится аналог тождества пентагона для торического модулярного ядра и набор разностных уравнений, которые из него следуют. В **разделе 3.2** эти уравнения решаются точно во всех порядках непертурбативного разложения. Обсуждаются специальные симметрии и другие особые свойства полученного решения. В **разделе 3.3** доказывается эквивалентность интегральному представлению, известному в литературе. В **разделе 3.4** выводится формула, описывающая аналитическую структуру модулярного ядра, подобную формуле Замолодчикова. Проверяется, что найденное выражение удовлетворяет этому условию. В **разделе 3.5** подводятся итоги главы и обсуждается практическая значимость полученных результатов.

В **главе 4** изучается особое семейство решений формулы Замолодчикова – конформные блоки, имеющие лишь конечное число полюсов как функции промежуточной размерности. В **разделе 4.1** проводится подробный анализ конечно-полюсных торических конформных блоков. Строится несколько явных примеров и находится их полная координатная зависимость. В **разделе 4.2** разработанные методы переносятся на сферический случай, который оказывается значительно труднее. Строятся все безполюсные и один пример однополюсного сферического конформного блока. В **разделе 4.3** изучаются модулярные преобразования конечно-полюсных блоков. В **разделе 4.4** проводится систематизация изученных примеров, высказывается несколько общих гипотез о структуре и свойствах конечно-полюсных торических блоков.

В **заключении** кратко приведены основные результаты исследования.

В **приложении А** описаны основные специальные функции, используемые в вычислениях. В **приложении Б** приведено явное разложение конформного блока в пределе большой промежуточной размерности, используемое в главе 1. В **приложении В** приведены полные выражения для коэффициентов разностных уравнений главы 2. В **приложении Г** описано выражение для сферического модулярного ядра для случая единичного центрального заряда, полученное в литературе. Показано, что это выражение согласуется с результатом главы 2, а также что его непериодическая часть допускает существенное упрощение. В **приложении Д** приводятся различные вспомогательные вычисления, в основном связанные с решением разностных уравнений, опущенные в главе 3 для краткости. В **приложении Е** ключевая гипотеза, высказанная в главе 4, доказывается в частном случае.

## 0.2 Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Прямым вычислением показано, что асимптотическая форма модулярного преобразования в пределе больших промежуточных размерностей для невырожденных сферических конформных блоков самого общего вида есть преобразование Фурье, а пертурбативные поправки к нему отсутствуют.
- Из тождества пентагона получена система разностных уравнений, описывающих непертурбативное поведение модулярного ядра невырожденных сферических конформных блоков общего вида.
- Для центрального заряда в общем положении предложен рекурсивный метод вычисления непертурбативных поправок к модулярному ядру сферического конформного блока общего вида.
- Для семейства центральных зарядов вида

$$c = 1 + 6(b + b^{-1})^2, \quad b^2 \in \mathbb{Z}$$

предложено замкнутое выражение в элементарных функциях для модулярного ядра сферического конформного блока. Показано, что при  $c = 1$  оно согласуется с формулой, найденной в работе [12], при этом представляя последнюю в упрощённом виде.

- Выведен аналог тождества пентагона для торического модулярного ядра общего вида и следующие из него разностные уравнения.
- Для случая центрального заряда в общем положении найдено полное непертурбативное выражение для торического модулярного ядра. Установлена его связь с интегральными формулами из работ [13; 14] и показана согласованность с аналитической структурой невырожденных конформных блоков.
- Найдено бесконечное семейство решений формулы Замолодчикова, возникающее при специальных значениях внешних размерностей и центральных зарядов. Показано, что эти конформные блоки обладают рядом замечательных свойств: содержат конечное число полюсов по промежуточной размерности, могут быть найдены как замкнутые функции координат, позволяют точное вычисление соответствующих модулярных ядер.

Результаты исследования опубликованы в работах [15–18]. Анализ главы 1 в основном следует работе [15], содержание главы 2 основано на работе [16], ключевые результаты главы 3 изложены в работе [17], а главы 4 – в работе [18].

## Глава 1. Пертурбативная асимптотика модулярного ядра

### 1.1 Теория Зайберга-Виттена и АГТ соотношение

Теория Зайберга-Виттена [19; 20] с двумя суперсимметриями  $\mathcal{N} = 2$  и калибровочной группой  $SU(2)$  при наличии четырёх фундаментальных гипермультиплетов материи<sup>1</sup> является примером теории, содержащей  $S$ -дуальность [21–24].  $S$ -дуальность – это преобразование, переводящее режим сильной связи в режим слабой связи той же самой теории, и наоборот. Низкоэнергетическое поведение теории Зайберга-Виттена полностью описывается *препотенциалом*  $\mathcal{P}_{SW}$ , который зависит от координаты  $a$  на пространстве модулей вакуума. Действие  $S$ -дуальности на препотенциал является преобразованием Лежандра. А именно, препотенциал дуальной теории  $\mathcal{P}_{SW}^D$  связан с исходным  $\mathcal{P}_{SW}$  следующим образом:

$$\mathcal{P}_{SW}^D(b) = 2\pi i a_0 b + \mathcal{P}_{SW}(a_0), \quad a_0 : 2\pi i b + \mathcal{P}'_{SW}(a_0) = 0. \quad (1.1)$$

В последнее время активно изучается деформация теории Зайберга-Виттена, получаемая введением так называемого  $\Omega$ -бэкграунда [25–27]. Статистическая сумма деформированной теории, называемая *статистической суммой Некрасова* [26; 28], зависит от двух параметров деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Удобно выражать их через так называемые струнную константу связи  $g$  и параметр бета-деформации  $\beta$

$$g^2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad \beta = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы будем считать параметр  $\beta$  фиксированным, а параметр  $g$  – малым, пригодным для пертурбативного разложения.

Препотенциал недеформированной теории  $\mathcal{P}_{SW}$  получается из статсуммы Некрасова предельным переходом

$$\mathcal{P}_{SW} = \lim_{g \rightarrow 0} g^2 \log Z_{Nek}. \quad (1.3)$$

Действие  $S$ -дуальности может быть продолжено также и на деформированную теорию [29]. Кроме того, как отмечено в работе [29], преобразование Лежандра,

<sup>1</sup>В дальнейшем под теорией Зайберга-Виттена мы будем понимать именно эту конкретную версию.

связывающее  $\mathcal{P}_{SW}$  с дуальным препотенциалом (1.1), можно рассматривать как главный порядок преобразования Фурье, связывающего статсумму Некрасова  $Z_{Nek}$  с дуальной статсуммой. А именно, введём препотенциал деформированной теории  $P$  следующим образом:

$$P = g^2 \log Z_{Nek}, \quad \lim_{g \rightarrow 0} P = \mathcal{P}_{SW} . \quad (1.4)$$

Тогда, уравнение (1.1) возникает как приближение седловой точки к преобразованию

$$\exp\left(\frac{P^D(b)}{g^2}\right) = \int \frac{da}{g} \exp\left(\frac{2\pi i ab + P(a)}{g^2}\right), \quad g \rightarrow 0 . \quad (1.5)$$

Недавно открытые соотношения АГТ (Алдай-Гайотто-Тачикава) [30–32] связывают статсумму Некрасова с конформным блоком в двумерной конформной теории. А именно, при надлежащем отождествлении параметров и нормировочных множителей статсумма Некрасова тождественно равна конформному блоку Вирасоро  $Z_{Nek} = B$ . Мы не будем давать независимое определение функциям Некрасова, но приведём связь между параметрами калибровочной и конформной теорий. Статсумма Некрасова зависит от значения вакуумного среднего  $a$ , масс четырёх гипермультиплетов материи  $m_i$ , константы связи теории  $\tau_0$  и двух параметров деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Точное соответствие параметрам конформной таково

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \frac{a(\varepsilon - a)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, & \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= -g^2, & \varepsilon_1/\varepsilon_2 &= -\beta , & a &= \alpha + \varepsilon/2, & x &= e^{2\pi i \tau_0} , \\ m_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, & m_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \varepsilon, \\ m_3 &= \alpha_3 + \alpha_4, & m_4 &= \alpha_3 - \alpha_4 + \varepsilon . \end{aligned} \quad (1.6)$$

На языке конформной теории  $S$ -дуальность соответствует модулярному преобразованию конформных блоков (38). Напомним, что на конформный блок оно действует как замена  $x \rightarrow 1 - x$  вместе с перестановкой двух внешних размерностей  $\Delta_1 \leftrightarrow \Delta_3$ <sup>2</sup>. Введя явным образом параметр  $x$  как аргумент препотенциала  $P$  (вместо константы связи), можно записать преобразование дуальности как

$$P^D(a, x) = P(a, 1 - x) . \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>В дальнейшем при общем рассмотрении мы для краткости не будем явно указывать эту перестановку.

Из конформной теории следует (38), что это преобразование реализуется как линейной интегральное преобразование с некоторым ядром  $F(a, b)$ , не зависящим от  $x$

$$\exp\left(\frac{P(b, 1-x)}{g^2}\right) = \int \frac{da}{g} F(a, b) \exp\left(\frac{P(a, x)}{g^2}\right). \quad (1.8)$$

Данное соотношение обобщает уравнение (1.5) на произвольные значения константы  $g$ . Из уравнения (1.5) нам известно, что асимптотическая форма модулярного ядра  $F(a, b)$  при  $g \rightarrow 0$  соответствует преобразованию Фурье

$$F(a, b) \underset{g \rightarrow 0}{\sim} \exp\left(\frac{2\pi i ab}{g^2}\right). \quad (1.9)$$

Одной из центральных тем для всего диссертационного исследования является вопрос о том, какие поправки содержит эта формула при конечных  $g$ . В данной главе мы покажем, что пертурбативные поправки отсутствуют.

## 1.2 Пертурбативное вычисление модулярного ядра

Как уже отмечалось, сравнение правой и левой частей формулы (1.8) затруднено тем, что функции  $P(a, x)$  и  $P(b, 1-x)$  определены как разложения по степеням  $x$  и  $1-x$  соответственно, что делает невозможным почленное отождествление. Однако, оказывается возможным разложить функцию  $P(a, x)$  в пределе  $g \rightarrow 0$ , а также малых масс гипермультиплетов  $m_i \rightarrow 0$  так, что каждый член разложения будет замкнутой функцией  $x$  с известными модулярными свойствами. Приведём несколько первых вкладов для случая  $\beta = 1$ :<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} P(a, x) = & -\pi a^2 \frac{K(1-x)}{K(x)} + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) \log a - g^2 \frac{\log a}{2} + \\ & + g^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) \frac{E_2(x)}{6a^2} + O(g^4, m_i^4). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что лидирующий член  $-\pi a^2 \frac{K(1-x)}{K(x)}$  следует из асимптотики (29). Отметим также, что препотенциал является чётной функцией всех параметров, имеющих массовую размерность  $g, m_i, a$ . Кроме того, из размерного анализа нетрудно показать, что с точностью до общей нормировки и логарифмических

<sup>3</sup>Используемые соглашения для эллиптических функций приведены в приложении А.

членов препотенциал зависит только от отношений  $a/g$  и  $a/m_i$ , поэтому одновременное разложение по  $g$  и  $m_i$  равносильно разложению по обратным степеням  $a$ , т.е. можно записать остаточный член в формуле (1.10) в виде  $O(a^{-4})$ . Общее разложение препотенциала представим как

$$P(a, x) = \sum_{n=0} P_n(a, x) g^{2n}, \quad (1.11)$$

где  $P_0(a, x) = -\pi a^2 \frac{K(1-x)}{K(x)}$ .

Предположим теперь, что и само модулярное ядро можно разложить по степеням  $g$ :

$$F(a, b) = \exp \left( \frac{1}{g^2} \sum_{n=0} g^{2n} f_n(a, b) \right). \quad (1.12)$$

Как следует из уравнения (1.9), лидирующий вклад в модулярное ядро даётся выражением

$$f_0(a, b) = 2\pi i a b. \quad (1.13)$$

Подставляя разложения (1.11) и (1.12) в уравнение (1.8) получим

$$\begin{aligned} & \exp \left( \frac{1}{g^2} \sum_{n=0} g^{2n} P_n(b, 1-x) \right) = \\ & = \int \frac{da}{g} \exp \left( \frac{2\pi i a b + P_0(a, x)}{g^2} \right) \exp \left( \frac{1}{g^2} \sum_{n=1} g^{2n} (P_n(a, x) + f_n(a, b)) \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Логарифм левой части этого уравнения нетрудно разложить по степеням  $g$  непосредственно. Интеграл в правой части уравнения можно вычислить в виде  $g$ -разложения, используя приближение седловой точки. Седловая точка  $a_0$  задаётся уравнением

$$2\pi i b + \partial_a P_0(a_0, x) = 0 \quad (1.15)$$

и совпадает с величиной  $a_0$ , определённой в уравнении (1.1).

Почленно приравнивая  $g$ -разложения логарифмов левой и правой частей уравнения (1.14), получим следующий набор условий:

$$P_0(b, 1 - x) = 2\pi i a_0 b + P_0(a_0, x) , \quad (1.16)$$

$$P_1(b, 1 - x) = f_1(a_0, b) + P_1(a_0, x) - \frac{1}{2} \log \frac{P_0''(a_0, x)}{2\pi} , \quad (1.17)$$

$$P_2(b, 1 - x) = f_2(a_0, x) + P_2(a_0, b) - \frac{(P_1(a_0, x) + f_1(a_0, b))'^2}{2P_0''(a_0, x)} - \\ - \frac{(P_1(a_0, x) + f_1(a_0, b))''}{2P_0''(a_0, x)} + \frac{(P_1(a_0, x) + f_1(a_0, b))' P_0^{(3)}(a_0, x)}{2P_0''(a_0, x)^2} - \\ - \frac{5P_0^{(3)}(a_0, x)^2}{24P_0''(a_0, x)^3} + \frac{P_0^{(4)}(a_0, x)}{8P_0''(a_0, x)^2} , \quad (1.18)$$

$$P_3(b, 1 - x) = P_3(a_0, x) + f_3(a_0, b) + \dots , \quad (1.19)$$

где штрих означает производную по  $a$ .

Уравнение (1.16) гласит, что  $P_0$  действительно преобразуется согласно преобразованию Лежандра. При известной первой поправке к препотенциалу  $P_1$  первая поправка к модулярному ядру может быть найдена из уравнения (1.17)

$$f_1(a_0, b) = P_1(b, 1 - x) - P_1(a_0, x) + \frac{1}{2} \log \frac{P_0''(a_0, x)}{2\pi} . \quad (1.20)$$

Нахождение  $f_1$  позволяет перейти ко второму порядку и т.д. Таким образом, имея  $n$  первых членов разложения препотенциала (1.11), можно определить первые  $n$ -членов разложения модулярного ядра (1.12). Отметим, что поскольку коэффициенты разложения модулярного ядра в уравнениях (1.16–1.19) зависят от  $x$  только через седловую точку  $a_0$ , эти уравнения нельзя решить относительно  $f_n$  при произвольных функциях  $P_n(a, x)$ . Действительно, не для всякой функции двух переменных  $(a, x)$  существует интегральное преобразование вида (1.8), осуществляющее замену  $x \rightarrow 1 - x$ . Напротив, это очень специальное ограничение, накладываемое на конформные блоки/функции Некрасова.

Для иллюстрации вычислим первую поправку к модулярному ядру из уравнения (1.20). Для простоты положим все массы равными нулю  $m_i = 0$ . Тогда из уравнения (1.10) найдём

$$P_0 = -\pi a^2 \frac{K(1-x)}{K(x)}, \quad P_1 = -\frac{\log a}{2} . \quad (1.21)$$

Седловая точка (1.15) есть  $a_0 = ib \frac{K(x)}{K(1-x)}$ , так что получаем

$$f_1(a_0, b) = -\frac{1}{2} \log b + \frac{1}{2} \log \frac{ibK(x)}{K(1-x)} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{-K(1-x)}{K(x)} \right) . \quad (1.22)$$

Легко видеть, что функциональная зависимость от  $b$  и  $x$  в этом выражении сокращается. Точное численное значение зависит от выбора ветвей в логарифмах и требует более аккуратного анализа, но влияет лишь на общую нормировку модулярного ядра и не представляет для нас интереса. Таким образом, мы полагаем  $f_1(a, b) = 0$ .

В работе [33], с использованием рекуррентных соотношений, следующих из условия модулярной аномалии, было вычислено разложение препотенциала деформированной теории Зайберга-Виттена вплоть до третьего ненулевого порядка, т.е. с точностью до членов  $O(a^{-6})$ . Примечательно, что это разложение справедливо при произвольных значениях масс и параметра  $\beta$ -деформации. Точные формулы приведены в приложении Б. Используя эти выражения и уравнения (1.16–1.19) можно найти модулярное ядро с соответствующей точностью. Оказывается, что все пертурбативные поправки равны нулю:

$$F(a, b) = \exp\left(\frac{2\pi i ab + O(a^{-6}, b^{-6})}{g^2}\right). \quad (1.23)$$

Естественным образом возникает гипотеза о том, что пертурбативные отклонения от преобразования Фурье отсутствуют во всех порядках. Однако, сложность настоящего подхода значительно возрастает с каждым уровнем и не даёт идей для доказательства утверждения в общем случае. В следующих главах мы подтвердим высказанную гипотезу с помощью независимых методов, которые также позволят обнаружить пертурбативные поправки.

## Глава 2. Непертурбативные модулярные преобразования сферических конформных блоков

### 2.1 Тожество пентагона и разностные уравнения первого порядка

#### 2.1.1 Тожество пентагона

Модулярные преобразования не могут быть выбраны произвольным образом, а должны удовлетворять ряду условий самосогласованности. Например, из уравнения (36) следует, что дважды применённое модулярное преобразование переводит  $s$ -канальный конформный блок сам в себя, а значит квадрат модулярного преобразования есть тождественное преобразование

$$\int d\alpha' F_{\alpha\alpha'} F_{\alpha'\alpha''} = \delta(\alpha - \alpha''). \quad (2.1)$$

Более интересным условием является так называемое *тождество пентагона*, записываемое как

$$\begin{aligned} \int d\beta''_2 F_{\beta_2\beta''_2} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} F_{\beta_1\beta'_2} \begin{bmatrix} \alpha_5 & \beta''_2 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} F_{\beta''_2\beta'_1} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \beta'_2 \end{bmatrix} = \\ = F_{\beta_1\beta'_1} \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \end{bmatrix} F_{\beta_2\beta'_2} \begin{bmatrix} \beta'_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это нелинейное тождество возникает как условие согласованности модулярных преобразований пятиточечного конформного блока с внешними размерностями  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ . Если размерность  $\alpha_5$  отвечает вырожденному представлению алгебры Вирасоро, то большинство матриц (содержащие  $\alpha_5$ ) в тождестве пентагона становятся вырожденными и могут быть найдены явно, см. (39). Таким образом, уравнение (2.2) может быть сведено к линейному уравнению на невырожденное модулярное ядро, в котором вырожденные ядра выступают в роли коэффициентов. Наличие правил слияния (23) приводит к тому, что эти уравнения на самом деле являются не интегральными, а разностными. Для записи этих уравнений удобно изменить нормировку конформных блоков следующим образом. Введём функцию  $V$ , которая будет перенормировать каждую трёхточечную вершину в

конформном блоке (функция  $\Gamma_b$  определена в приложении A.1)

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3) &= \\ &= \frac{\Gamma_b^{-1}(Q/2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\Gamma_b(2\alpha_1 + Q)\Gamma_b(2\alpha_2 + Q)\Gamma_b(Q - 2\alpha_3)}{\Gamma_b(Q/2 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Gamma_b(Q/2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)\Gamma_b(Q/2 - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эту нормировку можно интерпретировать как голоморфную часть [34] структурных констант теории Лиувилля [35; 36]. Перенормированный конформный блок связан с исходным следующим образом

$$\mathcal{B}_\alpha \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = V(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)V(\alpha, \alpha_3; \alpha_4) B_\alpha \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

так что перенормированное модулярное ядро равно

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{V(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)V(\alpha, \alpha_3; \alpha_4)}{V(\alpha_1, \alpha_2; \alpha')V(\alpha', \alpha_3; \alpha_4)} F_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Удобство этой нормировки заключается в том, что модулярные матрицы вырожденных представлений заметно упрощаются. А именно, матричные элементы ядра (39) можно записать в следующем компактном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_1+s_1b/2, \alpha_3+s_2b/2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} &\equiv \mathcal{F}_{s_1, s_2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \\ &= s_1 \frac{\sin \pi b(\alpha_4 + s_1\alpha_3 - s_2\alpha_1 - (1 + s_1 - s_2)b/2)}{\sin \pi b(2\alpha_3 - b)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где индексы  $s_1, s_2$  принимают значения  $+1$  или  $-1$ .

### 2.1.2 Вывод разностных уравнений

Приведём геометрический вывод разностных уравнений, получаемых из тождества пентагона. Рассмотрим два пути на рисунке 2.1, ведущих из верхнего левого состояния,  $s$ -канального конформного блока с вырожденной вставкой на линии  $\alpha_1$ , к нижнему правому состоянию,  $t$ -канальному конформному блоку с вырожденным полем на линии  $\alpha_2$ . Прерывистые линии обозначают вставки

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ | \quad | \\ \hline \alpha_{s_1} \quad \alpha_1 \quad \alpha \quad \alpha_4 \end{array} = \int d\alpha' \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ \diagdown \quad / \\ \alpha' \\ \hline \alpha_{s_1} \quad \alpha_1 \quad \alpha_4 \end{array} \\
& \sum_{s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \quad \parallel \quad \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') e^{s \frac{b}{2} \partial_{\alpha'}} \\
& \begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ | \quad | \\ \hline \alpha_{s_1} \quad \alpha \quad \alpha_4 \end{array} = \int d\alpha' \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_{s_2} & \alpha_3 \\ \alpha_{s_1} & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ \diagdown \quad / \\ \alpha' \\ \hline \alpha_{s_1} \quad \alpha_4 \end{array}
\end{aligned}$$

Рисунок 2.1 — Геометрический вывод тождества пентагона

вырожденного поля с импульсом  $\alpha_{2,1}$  (22). Согласно правилам слияния (23) момент линии, к которой прикреплено вырожденное поле, сдвигается на величину  $\pm b/2$ , что и отражают обозначения

$$\alpha_{s_1} \equiv \alpha_1 + s_1 b/2, \quad \alpha_{s_2} \equiv \alpha_2 + s_2 b/2, \quad (2.7)$$

в которых параметры  $s_1$  и  $s_2$  принимают значение  $+1$  или  $-1$ .

Горизонтальные равенства в верхней и нижней строке рисунка 2.1 непосредственно следуют из определения модулярного преобразования. Вертикальное равенство в первом столбце также соответствует модулярному преобразованию, применённому к подграфу с внешними линиями размерностей  $\{\alpha_{s_1}, -b/2, \alpha_2, \alpha\}$ . Соответственно, коэффициенты  $\mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha)$  есть

$$\mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) = \mathcal{F}_{-s_1, s_2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_2 \\ \alpha_{s_1} & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Наконец, вертикальное равенство во втором столбце получается применением модулярного преобразования дважды. Первое действие перемещает вырожденное поле на внутреннюю линию и осуществляется матрицей

$$\mathcal{F}_{-s_1, s} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha' \\ \alpha_{s_1} & \alpha_4 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Второе действие перемещает вырожденное поле дальше, на линию  $\alpha_2$ , и использует матрицу

$$\mathcal{F}_{-s, s_2}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_{2,1} & \alpha'_s \end{bmatrix} = \mathcal{F}_{-s, s_2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_2 \\ \alpha'_s & \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Таким образом, коэффициенты  $\mathcal{O}_B^{s_1, s_2}$  есть

$$\mathcal{O}_B^{s_1, s_2} = \mathcal{F}_{-s_1, s} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha' \\ \alpha_{s_1} & \alpha_4 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{-s, s_2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_2 \\ \alpha'_s & \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

В процессе переноса вырожденного поля через внутреннюю размерность соответствующий импульс  $\alpha'$  сдвигается на  $\pm b/2$ ,  $\alpha'_s = \alpha' \pm sb/2$ ,  $s = \pm 1$ , что и объясняет появление операторов сдвига  $e^{s\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}}$ . Таким образом, эквивалентность двух путей даёт уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \int d\alpha' \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_{s_2} & \alpha_3 \\ \alpha_{s_1} & \alpha_4 \end{bmatrix} B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x) = \\ = \int d\alpha' \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') e^{s\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь  $B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x)$  обозначает четырёхточечный конформный блок с вырожденный вставкой на линии  $\alpha_2$ , являющийся финальным состоянием обоих путей на диаграмме 2.1.

Можно сделать замену переменных в интеграле правой части формулы (2.12), чтобы перенести действие операторов сдвига с конформного блока на модулярное ядро:

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \int d\alpha' \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_{s_2} & \alpha_3 \\ \alpha_{s_1} & \alpha_4 \end{bmatrix} B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x) = \\ = \int d\alpha' \left( e^{-s\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \left( \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \sum_{s, s_2} \mathcal{O}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \right) \right) B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Введём операторы

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) &= \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) e^{\frac{b}{2}(s_1\partial_{\alpha_1} + s_2\partial_{\alpha_2})}, \\ \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') &= \sum_s e^{-s\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \mathcal{O}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha'). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тогда, уравнение (2.13) запишется в виде

$$\begin{aligned} \int d\alpha' \sum_{s_2} \left( \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \right) B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x) = \\ = \int d\alpha' \sum_{s_2} \left( \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \right) B_{\alpha'}^{5 \text{ point}}(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Как левая, так и правая часть этого равенства является линейной комбинацией конформных блоков. Ввиду линейной независимости конформных блоков, неравных тождественно, можно опустить интегрирование по  $\alpha_2$  и суммирование по  $s_2$  в формуле (2.15), получая искомое разностное уравнение на модулярное ядро общего положения

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ещё раз отметим, что эти линейные уравнения представляют из себя специализацию тождества пентагона (2.2). В статьях [13; 14] схожие уравнения были отправной точкой для исследования модулярного ядра. Формальное решение было получено путём установления связи с теорией представлений квантовых групп и идентификации модулярного ядра как коэффициентов Рака-Вигнера некоторого бесконечномерного представления группы  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ . Другой подход, предложенный в статье [12] и справедливый для случая единичного центрально заряда, основывался на соответствии между модулярным ядром и связывающим коэффициентом уравнения Пенлеве VI. В настоящем исследовании мы разрабатываем более непосредственный подход к решению уравнений (2.16), который не требует введения дополнительных гипотез и позволяет получать замкнутые формулы в простом виде.

## 2.2 Разностные уравнения второго порядка

Уравнения (2.16) содержат операторы сдвига как по внешним, так и по внутреннему моментам. Это затрудняет их прямое решение. Однако, можно устранить разностные операторы по внешним моментам ценой получения разностных операторов второго порядка по внутренним моментам.

Применим оператор  $\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha)$  к обеим частям уравнения (2.16). В левой части получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} &= \\ &= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) e^{\frac{b}{2}(-s_1\partial_{\alpha_1} - s_2\partial_{\alpha_2})} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) e^{\frac{b}{2}(s_1\partial_{\alpha_1} + s_2\partial_{\alpha_2})} \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = \\ &= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) \left( e^{\frac{b}{2}(-s_1\partial_{\alpha_1} - s_2\partial_{\alpha_2})} \mathcal{O}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \right) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В правой части получим

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} &= \\
&= \mathcal{O}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) e^{\frac{b}{2}(-s_1\partial_{\alpha_1} - s_2\partial_{\alpha_2})} \sum_s e^{-s\frac{b}{2}\partial'_\alpha} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = \\
&= \sum_s e^{-s\frac{b}{2}\partial'_\alpha} \left( e^{\frac{b}{2}(-s_1\partial_{\alpha_1} - s_2\partial_{\alpha_2})} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \right) \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2} \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = \\
&= \sum_s e^{-s\frac{b}{2}\partial'_\alpha} \left( e^{\frac{b}{2}(-s_1\partial_{\alpha_1} - s_2\partial_{\alpha_2})} \mathcal{O}_B^{s; s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \right) \widehat{\mathcal{O}}_B^{-s_1, -s_2} \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} . \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Теперь в левой части нет операторов сдвига, действующих на  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha'}$ . В правой части последовательно действуют два оператора, каждый из которых сдвигает внутреннюю размерность  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha'}$  на величину  $\pm b/2$ . Следовательно, правая часть может быть представлена в виде суммы трёх членов, каждый из которых содержит модулярное ядро  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha'}$  с импульсом  $\alpha'$ , сдвинутым на  $-b$ ,  $0$  или  $+b$ . Поэтому, уравнение

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, -s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \quad (2.19)$$

может быть преобразовано в линейное разностное уравнение второго порядка относительно сдвиговых операторов по  $\alpha'$ . В действительности, таких уравнений четыре, по числу пар  $(s_1, s_2)$ . Однако, все эти уравнения оказываются эквивалентны единственному уравнению, которое мы запишем в следующем виде:

$$(C_+(\alpha_i, \alpha, \alpha') e^{b\partial_{\alpha'}} + C_0(\alpha_i, \alpha, \alpha') + C_-(\alpha_i, \alpha, \alpha') e^{-b\partial_{\alpha'}}) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = 0 . \quad (2.20)$$

Функции  $C_i(\alpha_i, \alpha, \alpha')$  в общем случае оказываются весьма громоздкими и приведены в приложении [B.1](#).

Схожее уравнение было предложено в работе [\[37\]](#), где оно было получено из формализма матричных моделей [\[38–41\]](#) и чек-операторов [\[42–44\]](#). Было показано, что аналог уравнения [\(2.20\)](#) для торического модулярного ядра согласуется с результатом, полученным в статье [\[45\]](#). Можно показать, что операторы в разностных уравнениях, записанных выше, имеют естественную интерпретацию на языке матричных моделей. Таким образом, согласованность выводов статей [\[46\]](#) и [\[37\]](#) не удивительна: как уравнение второго порядка, использованное в [\[37\]](#), так и набор уравнений первого порядка, использованный в [\[46\]](#), следует из тождества пентагона.

### 2.2.1 Точка Ашкина-Теллера

Исследуем несколько частных случаев уравнения (2.20). Когда центральный заряд теории равен единице  $b = i$ , а все внешние импульсы равны  $\alpha_i = i/4$  (что соответствует размерностям  $\Delta_i = 1/16$ ), конформный блок известен в замкнутой форме (33). Модулярное преобразование этого конформного блока даётся преобразованием Фурье<sup>1</sup> (40):

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} i/4 & i/4 \\ i/4 & i/4 \end{bmatrix} \Big|_{c=1} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} . \quad (2.21)$$

Мы можем проверить уравнение (2.20) в этом частном случае. Когда  $b = i$  и  $\alpha_i = i/4$ , функции  $C_{\pm,0}(\alpha_i, \alpha, \alpha')$  (B.2) сводятся к

$$C_+(\alpha_i, \alpha, \alpha') = 1, \quad C_0(\alpha_i, \alpha, \alpha') = -2 \cos 2\pi\alpha, \quad C_-(\alpha_i, \alpha, \alpha') = 1 , \quad (2.22)$$

так что уравнение (2.20) принимает следующий вид:

$$(e^{\partial\alpha'} - 2 \cos 2\pi\alpha + e^{-\partial\alpha'}) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = 0 . \quad (2.23)$$

Нетрудно видеть, что ядро преобразования Фурье (2.21) действительно решает это уравнение.

### 2.2.2 Пертурбативный предел

Перейдём теперь к исследованию пертурбативного предела. Он возникает как разложение по обратным степеням промежуточных размерностей  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Очень важным для всего последующего является наблюдение, что функции  $C_{\pm,0}(\alpha_i, \alpha, \alpha')$  зависят от внутренних размерностей  $\alpha, \alpha'$  только через параметры  $u, u'$ <sup>2</sup>

$$C_{\pm,0}(\alpha, \alpha') = C_{\pm,0}(u, u'), \quad u = e^{2\pi i b \alpha}, \quad u' = e^{2\pi i b \alpha'} . \quad (2.24)$$

<sup>1</sup>Экспоненциальные факторы отсутствуют в выбранной нами нормировке (2.5).

<sup>2</sup>Для краткости мы используем одинаковые обозначения для функций от  $u, u'$  и функций от  $\alpha, \alpha'$ . Кроме того, в дальнейшем мы не будем явно указывать внешние моменты  $\alpha_i$  среди аргументов.

В пространстве параметров конформной теории существует область, в которой в пределе  $\alpha, \alpha' \rightarrow \infty$  параметры  $u, u' \rightarrow 0$  и являются экспоненциально малыми. В пределе нулевого  $u'$  функции  $C_{\pm,0}(u, u')$  сводятся к

$$\begin{aligned} C_+(u, 0) &= 1 , \\ C_0(u, 0) &= -e^{-i\pi b^2} (u + u^{-1} e^{-2\pi i b^2}) \equiv -2 \cos 2\pi b \alpha , \\ C_-(u, 0) &= 1 , \end{aligned} \tag{2.25}$$

и уравнение (2.20) принимает вид

$$(e^{b\partial_{\alpha'}} - 2 \cos 2\pi b \alpha + e^{-b\partial_{\alpha'}}) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = 0 \tag{2.26}$$

и также решается ядром Фурье  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i \alpha \alpha'}$ . Отметим, что в отличие от уравнения (2.23), справедливого при специальных значениях центрального заряда и внешних размерностей, уравнение (2.26) верно для произвольных параметров, но лишь в пертурбативном пределе (тогда только параметр центрального заряда  $b$  входит явно).

В последующем мы покажем, что отклонения точных решений уравнения (2.26) от преобразования Фурье параметризуются степенями  $u$  и  $u'$ , т.е. действительно представляют из себя непертурбативные поправки. Следовательно, преобразование Фурье действительно является точным на пертурбативном уровне.

### 2.3 Непертурбативные поправки в случае общего центрального заряда

В предыдущем разделе мы убедились, что пертурбативная форма модулярного преобразования может быть восстановлена в пределе  $\alpha, \alpha' \rightarrow \infty$ , а малыми параметрами, входящими в разностное уравнение на модулярное ядро, являются величины  $u = e^{2\pi i b \alpha}$ ,  $u' = e^{2\pi i b \alpha'}$ . В настоящем разделе нашей целью является исследование разложения модулярного ядра по степеням  $u$  и  $u'$ . Для итеративного решения уравнения (2.20) оказывается достаточным работать с разложением лишь по одной из переменных, например  $u'$ . Каждый член  $u'$ -разложения может быть найден как точная функция  $u$ . Таким образом, сделаем следующий анзац

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i \alpha \alpha'} \sum_j \varphi^j(\alpha, \alpha') u'^j = e^{2\pi i \alpha \alpha'} (\varphi^0(\alpha, \alpha') + u' \varphi^1(\alpha, \alpha') + \dots) . \tag{2.27}$$

Выделение множителя  $e^{2\pi i\alpha\alpha'}$  оказывается удобным. Здесь  $\varphi^j(\alpha, \alpha')$  – функции, которые предстоит найти. Чтобы разложение (2.27) имело смысл, функции  $\varphi^j(\alpha, \alpha')$  должны удовлетворять двум требованиям.

1. Они не растут слишком быстро при  $\alpha' \rightarrow \infty$ , так что  $u'^j \varphi_j(\alpha, \alpha')$  действительно являются малыми поправками в этом режиме.
2. Они не содержат нетривиальной зависимости от  $u' = e^{2\pi i\alpha'}$ , так что разные члены в разложении (2.27) действительно имеют различный порядок по  $u'$ .

Оба эти требования можно выполнить, если выбрать функции  $\varphi_j(\alpha, \alpha')$  полиномиальными по  $\alpha'$ . В дальнейшем мы покажем, что интересующее нас решение по-существу является единственным. Поскольку анзац (2.27) вместе с предположением о полиномиальности функций  $\varphi_j(\alpha, \alpha')$  позволит найти нам решение, то нет нужды в его расширении.

Введём обозначение для разностного оператора из уравнения (2.20)

$$\widehat{C}(u, u') = C_+(u, u')e^{b\partial_{\alpha'}} + C_0(u, u') + C_-(u, u')e^{-b\partial_{\alpha'}} \quad (2.28)$$

и для его  $u'$ -разложения

$$\widehat{C}(u, u') = \sum_j u'^j \widehat{C}^j(u) = \widehat{C}^0(u) + u' \widehat{C}^1(u) + \dots \quad (2.29)$$

Тогда, в нулевом порядке уравнение (2.20) даст условие, эквивалентное уравнению пертурбативного предела (2.26)

$$\widehat{C}^0(u, u') \varphi^0(\alpha, \alpha') = (ue^{b\partial_{\alpha'}} - (u^{-1} + u) + u^{-1}e^{-b\partial_{\alpha'}}) \varphi^0(\alpha, \alpha') = 0. \quad (2.30)$$

Согласно нашему анзацу, функция  $\varphi_0(\alpha, \alpha')$  является полиномом по  $\alpha'$ . Нетрудно проверить, что разностный оператор  $\widehat{C}^0$  понижает степень полинома, на который он действует. Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{C}^0(u, u') \alpha'^n &= (ue^{b\partial_{\alpha'}} - (u^{-1} + u) + u^{-1}e^{-b\partial_{\alpha'}}) \alpha'^n = \\ &= u(\alpha' + b)^n - (u^{-1} + u) \alpha'^n + u^{-1}(\alpha' - b)^n = O(\alpha'^{n-1}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Это свойство делает  $\widehat{C}^0$  схожим с обыкновенным дифференцированием и приводит к тому, что любое полиномиальное решение уравнения (2.30) постоянно по отношению к  $\alpha'$ . Иными словами,  $\varphi^0(\alpha, \alpha')$  зависит лишь от  $\alpha$

$$\varphi^0(\alpha, \alpha') = \varphi^0(\alpha). \quad (2.32)$$

В свою очередь, зависимость от  $\alpha$  определяется из аналога уравнения (2.20), содержащего операторы сдвига по  $\alpha$ . Поправка первого порядка подчиняется уравнению

$$\widehat{C}^0(u)u'\varphi^1(\alpha, \alpha') = -u'\widehat{C}^1(u)\varphi^0(\alpha) . \quad (2.33)$$

В то время как явный вид оператора  $\widehat{C}^0$  относительно прост, это не так уже для  $\widehat{C}^1$ . Тем не менее, явный вид  $\widehat{C}^1$  не принципиален для нас в настоящий момент, так что мы не станем его приводить. Вместо этого, немного модифицируем уравнение (2.33), умножив его на  $u'^{-1}$

$$u'^{-1}\widehat{C}^0(u)u'\varphi^1(\alpha, \alpha') = -\widehat{C}^1(u)\varphi^0(\alpha) . \quad (2.34)$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} u'^{-1}\widehat{C}^0u' &= u'^{-1} (ue^{b\partial_{\alpha'}} - (u^{-1} + u) + u^{-1}e^{-b\partial_{\alpha'}}) u' = \\ &= ue^{2i\pi b^2}e^{b\partial_{\alpha'}} - (u^{-1} + u) + u^{-1}e^{-2i\pi b^2}e^{-b\partial_{\alpha'}} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Отметим, что этот сопряжённый оператор  $\widehat{C}^0 \rightarrow u'^{-1}\widehat{C}^0u'$  не уничтожает постоянную по  $\alpha'$  функцию и не понижает степень полинома.

Правая часть (2.34) не зависит от  $\alpha'$ , а значит не зависит и левая часть. Любая полиномиальная функция  $\varphi^1(\alpha, \alpha')$  сохранит свою степень под действием оператора  $u'^{-1}\widehat{C}^0u'$ . Единственной оставшейся возможностью является постоянная по  $\alpha'$  функция  $\varphi^1(\alpha, \alpha')$

$$\varphi^1(\alpha, \alpha') = \varphi^1(\alpha) , \quad (2.36)$$

которая однозначно определяется из уравнения (2.34) как

$$\varphi^1(\alpha) = -\frac{\widehat{C}^1\varphi^0(\alpha)}{ue^{2i\pi b^2} - (u^{-1} + u) + u^{-1}e^{-2i\pi b^2}} . \quad (2.37)$$

Эти аргументы легко обобщаются на старшие поправки. Любая функция  $\varphi^n(\alpha, \alpha')$  в действительности зависит лишь от  $\alpha$  и может быть вычислена, если известны предыдущие  $\varphi^{k < n}(\alpha)$ . Более того, поскольку функции  $\varphi^n(\alpha)$  не зависят от  $\alpha'$ , действие на них разностных операторов  $\widehat{C}^k$  сводится к алгебраическим операциям.

Сформулируем это иным образом. Полиномиальный анзац вместе с  $u'$ -разложением оказывается настолько ограничительным, что разностные уравнения (2.20) на модулярное ядро сводятся к алгебраическим уравнениям на

коэффициенты  $u'$ -разложения

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} \sum_n \varphi^n(\alpha) u'^n, \quad \sum_n \varphi^n(\alpha) C_n(u, u') u'^n = 0, \quad (2.38)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} C_n(u, u') &= \left( u'^{-n} e^{-2\pi i\alpha\alpha'} \right) \widehat{C}(u, u') \left( u'^n e^{2\pi i\alpha\alpha'} \right) \circ 1 = \\ &= e^{2\pi i b^2 n} u C_+(u, u') + C_0(u, u') + e^{-2\pi i b^2 n} u^{-1} C_-(u, u'). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Отталкиваясь от пертурбативного предела, эти уравнения можно решать рекурсивно. Таким образом, предложен явный и простой способ вычисления непертурбативных поправок к модулярному ядру в общем случае. К сожалению, сравнить это разложение с результатами статей [13; 14] представляется затруднительным, поскольку не ясно, как выполнить соответствующее разложение формул из этих статей. Однако, в случае  $s = 1$ , который будет обсуждаться в следующем разделе, явное сравнение с независимым результатом работы [12] оказывается возможным.

## 2.4 Непертурбативные поправки в случае единичного центрального заряда

### 2.4.1 Рекурсивное вычисление

Случай единичного центрального заряда, соответствующий  $b = i$  в наших обозначениях (2.0), требует отдельного рассмотрения. Как легко видеть, первая поправка (2.37) к модулярному ядру сингулярна в пределе  $b \rightarrow i$ .

Причиной является то, что в точке  $b = i$  параметр  $u' = e^{2\pi i b \alpha'}$  становится периодической функцией  $\alpha'$  с периодом  $i$ <sup>3</sup>. В то же время разностные операторы в уравнении (2.20) также осуществляют сдвиги на  $i$ , т.е. не меняют параметр  $u'$ . Следовательно, при  $b = i$  сопряженный оператор  $u'^{-n} \widehat{C}^0 u'^n$  равен исходному  $\widehat{C}^0$  и вырождается в дифференциально-подобный оператор, т.е. понижает степень полинома. Это требует пересмотра уравнения (2.34), которое теперь можно

<sup>3</sup>В дальнейшем мы иногда будем называть функции с периодом  $i$  просто периодическими, без явного указания периода.

записать просто как

$$\widehat{C}^0(u)\varphi^1(\alpha, \alpha') = -\widehat{C}^1(u)\varphi^0(\alpha) . \quad (2.40)$$

Независимая от  $\alpha'$  функция  $\varphi^1(\alpha, \alpha')$  более не является решением, поскольку она уничтожается оператором  $\widehat{C}^0$ . Вместо этого нужно взять линейный по  $\alpha'$  полином

$$\varphi^1(\alpha, \alpha') = \varphi^{10}(\alpha) + \alpha'\varphi^{11}(\alpha) . \quad (2.41)$$

Функция  $\varphi^{11}(\alpha)$  может быть определена из (2.40)

$$\varphi^{11}(\alpha) = \frac{\widehat{C}^1(u)\varphi^0(\alpha)}{b(u - u^{-1})} , \quad (2.42)$$

в то время как функция  $\varphi^{10}(\alpha)$  не фиксируется уравнениями (2.20), (2.40).

Для поправки второго порядка имеем

$$\widehat{C}^0(u)\varphi^2(\alpha, \alpha') = -\widehat{C}^1(u)\varphi^1(\alpha, \alpha') - \widehat{C}^2(u)\varphi^0(\alpha, \alpha') , \quad (2.43)$$

и теперь в правой части стоит линейная по  $\alpha'$  функция, так что  $\varphi^2(\alpha, \alpha')$  должна быть выбрана квадратичной

$$\varphi^2(\alpha, \alpha') = \varphi^{20}(\alpha) + \alpha'\varphi^{21}(\alpha) + \alpha'^2\varphi^{22}(\alpha) . \quad (2.44)$$

Функции  $\varphi^{21}(\alpha)$  и  $\varphi^{22}(\alpha)$  могут быть определены из уравнения (2.43), в отличие от функции  $\varphi^{20}(\alpha)$ .

Таким образом, нетрудно получить следующую форму модулярного ядра для случая  $b = i$ :

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i\alpha\alpha'} \sum_n \varphi^n(\alpha, \alpha') u^n, \quad \varphi^n(\alpha, \alpha') = \sum_{k=0}^n \alpha'^k \varphi^{nk}(\alpha) , \quad (2.45)$$

где каждая из функций  $\varphi^{n \geq 1, k \geq 1}(\alpha)$  может быть вычислена рекурсивно, если  $\varphi^{n' < n, k' < k}(\alpha)$  известны. Функции  $\varphi^{n0}(\alpha)$  остаются произвольными для любого  $n$ . Легко понять, почему это происходит. При  $b = i$  эти функции входят в поправки, которые периодичны по  $\alpha'$ , а значит незаметны для разностных операторов в уравнении (2.20).

Следует сделать ещё одно важное замечание. Несмотря на то, что модулярное ядро при  $c = 1$  содержит полиномы произвольной степени по  $\alpha'$ , его логарифм является квазилинейной функцией от  $\alpha'$

$$\log \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = A(\alpha, \underline{\alpha}') + \alpha' B(\alpha, \underline{\alpha}') . \quad (2.46)$$

Здесь  $A(\alpha, \alpha')$  и  $B(\alpha, \alpha')$  есть некоторые периодические функции  $\alpha'$  с периодом  $i$ . Чтобы сделать эту периодичность явной, соответствующие аргументы подчеркнуты. Мы будем использовать это обозначение в дальнейшем. Утверждение (2.46) не является следствием наших предыдущих выкладок. Тем не менее, его можно проверить в явной форме в нескольких порядках  $u'$ -разложения. Сейчас мы дадим простое объяснение этому наблюдению.

### 2.4.2 Точное решение

В случае  $b = i$  разностные операторы в уравнении (2.20) меняют момент  $\alpha'$  на  $i$ . Все коэффициенты в уравнении, однако, зависят от  $\alpha'$  лишь посредством параметра  $u' = e^{2\pi i b \alpha'}$ , который при  $b = i$  становится периодическим с периодом  $i$ . Таким образом, нам по-существу нужно решить разностное уравнение с постоянными коэффициентами. Кроме того, эти аргументы применимы и к исходным уравнениям первого порядка (2.16), коэффициенты которых выражаются через величины (2.6). Последние являются периодическими функциями всех моментов, а не только внутренних. Потому и вся разностная система уравнений (2.16) при  $b = i$  может рассматриваться как система уравнений с постоянными коэффициентами. Потому естественно сделать следующий анзац

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = e^{2\pi i \alpha \alpha'} (P)^{-i\alpha} (P')^{-i\alpha'} \prod_{j=1}^4 (P_j)^{-i\alpha_j} R, \quad (2.47)$$

где каждая из функций  $P, P', P_1, \dots, P_4$  и  $R$  является периодической по всем моментам  $\alpha, \alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_4$ .

При подстановке (2.47) в уравнение (2.20) последнее сводится к квадратичному уравнению на функцию  $P'$

$$uC_+(u, u')P' + C_0(u, u') + u^{-1}C_-(u, u')\frac{1}{P'} = 0, \quad (2.48)$$

имеющему два решения

$$P' = \frac{-C_0(u, u') \pm \sqrt{C_0(u, u')^2 - 4C_+(u, u')C_-(u, u')}}{2uC_+(u, u')}. \quad (2.49)$$

С помощью явных выражений (B.2) можно показать, что только одна из ветвей квадратного корня действительно является периодической функцией  $\alpha$ . Функ-

ция  $P$  должна определяться из аналога уравнения (2.20) со сдвигowymi операторами по  $\alpha$  вместо  $\alpha'$ .

Функции  $P_i$  не могут быть определены из уравнения второго порядка (2.20), поскольку оно не содержит операторы сдвига по внутренним импульсам. Однако, они могут быть найдены из уравнений первого порядка (2.16), содержащих также и сдвиги по внешним импульсам. Единственной трудностью в извлечении этих зависимостей является то, в уравнения входят одновременные сдвиги по разным импульсам. Мы можем повторить ту же процедуру, которая позволила вывести уравнение второго порядка (2.20). Рассмотрим следующее выражение

$$\widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_A^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = \widehat{\mathcal{O}}_A^{-s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha) \widehat{\mathcal{O}}_B^{s_1, s_2}(\alpha_i, \alpha') \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} . \quad (2.50)$$

Напомним, что индексы  $s_1, s_2$  соответствуют сдвигам по внешним импульсам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Следовательно, в левой части уравнения (2.50) сдвиги по  $\alpha_1$  в модулярном ядре сокращаются, оставляя только сдвиги по  $\alpha_2$ . В правой части можно переписать действие оператора  $\widehat{\mathcal{O}}_A$  через действие оператора  $\widehat{\mathcal{O}}_B$ , так что останутся только сдвиги по импульсу  $\alpha'$ . По аналогии с уравнением (2.20) можно записать результат в виде

$$e^{i\partial_{\alpha_2}} \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} = (E_+(u, u') e^{i\partial_{\alpha'}} + E_0(u, u') + E_-(u, u') e^{-i\partial_{\alpha'}}) \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} . \quad (2.51)$$

Функции  $E_{\pm, 0}$  приведены в приложении B.2. Поделим уравнение (2.51) на  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha'}$  и сделаем подстановку (2.47). Получим

$$P_2 = E_+(u, u') P' + E_0(u, u') + E_-(u, u') \frac{1}{P'} . \quad (2.52)$$

Это уравнение выражает функцию  $P_2$  через найденную ранее функцию  $P'$ . Вычисление оставшихся функций  $P_1, P_3, P_4$  – прямолинейная процедура, проходящая через те же самые шаги что и для  $P_2$ . Функция  $R$  однако не может быть определена из такого рассмотрения и представляет собой необходимую неопределённость в решении разностных уравнений в виде периодической функции.

Таким образом, с помощью подстановки (2.47) нам удалось решить уравнения (2.16) для случая единичного центрального заряда во всех непертурбативных порядках. В приложении Г мы сравниваем этот результат с формулой, известной в литературе [47], и показываем, что они согласуются.

## 2.5 Обсуждение результатов главы

В настоящей главе нам удалось вывести разностные уравнения, описывающие полную непertурбативную структуру модулярного ядра сферических конформных блоков. Эти уравнения доказывают гипотезу главы 1 о том, что на пертурбативном уровне модулярное преобразование является преобразованием Фурье во всех порядках. Для случая общего центрального заряда мы сформулировали простую процедуру, позволяющую систематически находить непertурбативные поправки к пертурбативному ядру. Для случая  $c = 1$  нам удалось найти непertурбативные поправки сразу во всех порядках в замкнутом виде. Несмотря на громоздкость явных формул, они содержат лишь элементарные функции и должны рассматриваться как существенное упрощение представлений, доступных в литературе [12–14].

Ключевым свойством, позволившим вычисление модулярного ядра во всех порядках в случае  $c = 1$ , стала периодичность коэффициентов уравнения. В общем случае полученные разностные уравнения (2.16) содержат сдвиги по моментам  $\alpha, \alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_4$  на величину  $b$ , а коэффициенты в этих уравнениях зависят от моментов через величины  $u = e^{2\pi bi\alpha}$  и т.п. Когда  $b^2$  является целым числом, коэффициенты в уравнении становятся периодическими функциями относительно операторов сдвига. Потому решения, полученные для случая  $c = 1$  ( $b^2 = -1$ ), непосредственно переносятся на  $b^2 = n \in \mathbb{Z}$ , если в формулах типа (2.49), (2.52) использовать функции  $C_{\pm,0}, E_{\pm,0}$ , взятые не в точке  $b^2 = -1$ , а в точке  $b^2 = n$ .

Несмотря на достигнутый прогресс, многие вопросы остались без окончательного ответа. Главным образом, нам не удалось упростить полученные формулы или разработать такую параметризацию, в которой выражения для модулярного ядра можно было бы представлять и анализировать в явном виде. Наши формулы напрямую используют такие функции как  $C_{\pm,0}$  (см. приложение В.1), которые являются весьма громоздкими. Даже основные уравнения (2.16) затруднительно выписать в явном виде. Отчасти эти трудности отражают сложность изучаемой задачи. В следующей главе мы изучим модулярные преобразования торических конформных блоков. Мы увидим, что все характерные особенности нашего текущего подхода могут быть перенесены на этот случай. Однако, торические модулярные ядра оказываются гораздо более про-

стыми объектами, что позволит добиться большей ясности и завершенности результатов.

## Глава 3. Непертурбативные модулярные преобразования торических конформных блоков

### 3.1 Разностные уравнения на модулярное ядро

#### 3.1.1 Аналог тождества пентагона

Изучение конформных теорий на торе представляет из себя важную задачу. Исследование торических конформных блоков становится ещё более значительным, поскольку они могут рассматриваться как упрощённые редукции сферических [7; 11], тем не менее сохраняющие почти все их принципиальные свойства. В частности, преобразование модулярного параметра  $\tau \rightarrow -1/\tau$  реализуется на торических конформных блоках линейным преобразованием (43). Так же как и для преобразования слияния, квадрат модулярного преобразования равен единичному оператору

$$\int d\alpha' M_{\alpha\alpha'} M_{\alpha'\alpha''} = \delta(\alpha - \alpha'') . \quad (3.1)$$

Кроме того, существуют и ограничения на вид торических модулярных преобразований, происходящие из условия самосогласованности модулярной алгебры, аналогичные тождеству пентагона. Мы используем эти условия, чтобы получить разностные уравнения на торическое модулярное ядро.

Напомним, что для вывода тождества пентагона необходимо рассматривать модулярные преобразования пятиточечных конформных блоков. Схожим образом, для того чтобы вывести уравнение на торическое модулярное ядро, необходимо рассмотреть не одноточечный, а двухточечный конформный блок (см. рисунок 3.1). Здесь  $m_1, m_2, \mu$  – лиувиллевские моменты внешних и внутренней размерности двухточечного блока. Операторы, соответствующие линиям  $m_1$  и  $m_2$ , находятся близко друг к другу на поверхности тора (из-за трансляционной инвариантности не принципиально, где именно). Конформный блок также зависит от относительного положения внешних полей, но мы не будем обозначать эту зависимость явно.

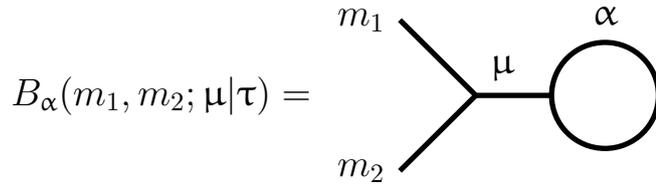


Рисунок 3.1 — Диаграммное представление двухточечного торического конформного блока

При обнесении одного из операторов, скажем  $m_2$ , по нестягиваемому замкнутому пути на поверхности тора конформный блок приобретает монодромию. Эту монодромию можно выразить через матрицы слияния, представляя замкнутый путь в виде последовательности преобразований слияния, действующих на подграфы, отвечающие четырёхточечным конформным блокам. Процедура, которую мы проведём, близка к используемой при доказательстве формулы Верлинде [48] и широко применялась в работах [49; 50] для вычисления петель Вильсона и 'т Хоофта в АГТ дуальных калибровочных теориях.

Пусть замкнутая петля в нашем графическом представлении конформного блока соответствует  $B$ -циклу тора. Тогда последовательность движений, показанная на рисунке 3.2, осуществляет перенос оператора  $m_2$  по  $A$ -циклу. Таким образом, получаем выражение для конформного блока, аналитически

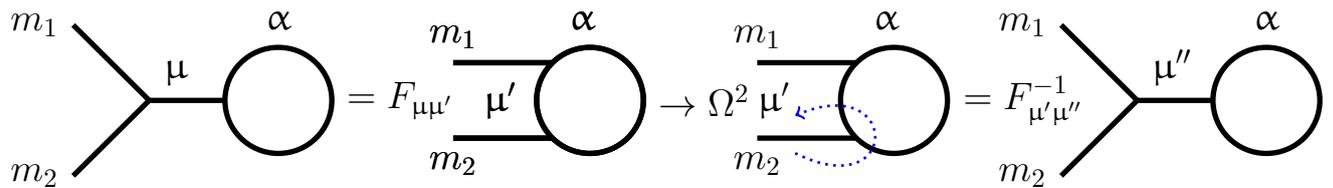


Рисунок 3.2 — Перенос внешнего оператора вдоль  $A$ -цикла

продолженного вдоль  $A$ -цикла:

$$\begin{aligned}
 A \circ B_\alpha(m_1, m_2; \mu | \tau) &= \\
 &= \sum_{\mu', \mu''} F_{\mu\mu'} \begin{bmatrix} m_1 & \alpha \\ m_2 & \alpha \end{bmatrix} \Omega^2(\mu'; m_2, \alpha) F_{\mu'\mu''}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 & \alpha \\ m_2 & \alpha \end{bmatrix} B_\alpha(m_1, m_2; \mu'' | \tau) . \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Поясним рисунок 3.2: первое движение разделяет два внешних оператора, второе движение переносит оператор  $m_2$  вдоль  $A$ -цикла (обозначенного прерывистой линией), третье движение снова сближает внешние операторы. Величины  $F_{\alpha\alpha'}$ , осуществляющие преобразования слияния и разделения, представляют из себя ни что иное, как матрицы слияния четырёхточечных конформных блоков, в то время как  $\Omega$  – фазовый множитель, выражающий монодромию перестановки двух внешних операторов, близких к друг другу. Он может быть получен из анализа асимптотики операторного разложения и равняется

$$\Omega(\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3) = e^{i\pi(\Delta(\alpha_1) - \Delta(\alpha_2) - \Delta(\alpha_3))} . \quad (3.3)$$

Аналогично, перенос вдоль  $B$ -цикла внешнего оператора  $m_2$  можно представить последовательностью движений, указанных на рисунке 3.3. Первое и

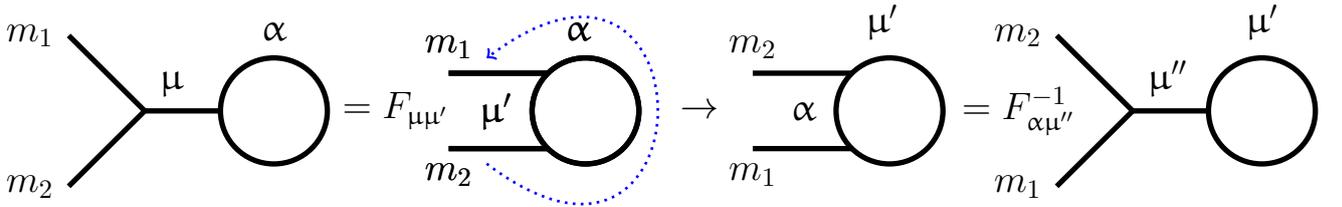


Рисунок 3.3 — Перенос внешнего оператора вдоль  $B$ -цикла

последнее движения тут те же, что и в  $A$ -цикле. Однако, в противоположность  $A$ -циклу, перенос внешнего оператора в направлении  $B$ -цикла не привносит фазового множителя, а просто переставляет внешние  $m_1 \leftrightarrow m_2$  и внутренние размерности  $\alpha \leftrightarrow \mu'$ . Количественно, имеем

$$B \circ B_a(m_1, m_2; \mu|\tau) = \sum_{\mu', \mu''} F_{\mu\mu'} \begin{bmatrix} m_1 & a \\ m_2 & a \end{bmatrix} F_{a\mu''}^{-1} \begin{bmatrix} m_2 & \mu' \\ m_1 & \mu' \end{bmatrix} B_{\mu'}(m_2, m_1; \mu''|\tau) . \quad (3.4)$$

Поскольку модулярное преобразование  $S : \tau \rightarrow -1/\tau$  меняет местами циклы  $A$  и  $B$ , должно выполняться следующее условие согласованности:

$$S \circ A = B \circ S . \quad (3.5)$$

Будучи записанным в явной форме, это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha'}(\mu) \sum_{\mu''} F_{\mu\mu''} \begin{bmatrix} m_1 & \alpha' \\ m_2 & \alpha' \end{bmatrix} \Omega^2(\mu''; m_2, \alpha') F_{\mu''\mu'}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 & \alpha' \\ m_2 & \alpha' \end{bmatrix} = \\ = \sum_{\alpha''} F_{\mu\alpha''} \begin{bmatrix} m_1 & \alpha \\ m_2 & \alpha \end{bmatrix} F_{\alpha\mu'}^{-1} \begin{bmatrix} m_2 & \alpha'' \\ m_1 & \alpha'' \end{bmatrix} M_{\alpha''\alpha'}(\mu'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Это уравнение представляет из себя аналог тождества пентагона, связывающий преобразования слияния с модулярными преобразованиями торических конформных блоков.

### 3.1.2 Вывод разностных уравнений

Аналогично тождеству пентагона из этого условия можно получить разностное уравнение второго порядка на торическое модулярное ядро. А именно, пусть оператор  $m_2$  вырожден на первом уровне, т.е.  $m_2 = \alpha_{2,1}$ . Благодаря правилам слияния (23) возникают следующие правила отбора на моменты, участвующие в уравнении (3.6):

$$\mu = m_1 + s_1 b/2, \quad \mu'' = m_1 + s_2 b/2, \quad \mu' = \alpha' + s_3 b/2, \quad \alpha'' = \alpha + s_4 b/2, \quad (3.7)$$

где все величины  $s_1, \dots, s_4$  могут принимать значение  $+1$  или  $-1$ . Введя обозначение

$$F_{\alpha=\alpha_1+s_1b/2, \alpha'=\alpha_3+s_2b/2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \equiv F_{s_1, s_2} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

уравнение (3.6) при  $m_2 = \alpha_{2,1}$  можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha'}(\mu) \times \\ \times \sum_{s_2=\pm} F_{s_1, s_2} \begin{bmatrix} \mu - s_1 b/2 & \alpha' \\ \alpha_{2,1} & \alpha' \end{bmatrix} \Omega^2(\alpha' + s_2 b/2; \alpha_{2,1}, \alpha') F_{s_2, s_3}^{-1} \begin{bmatrix} \mu - s_1 b/2 & \alpha' \\ \alpha_{2,1} & \alpha' \end{bmatrix} = \\ = \sum_{s_4=\pm} F_{s_1, s_4} \begin{bmatrix} \mu - s_1 b/2 & \alpha \\ \alpha_{2,1} & \alpha \end{bmatrix} F_{-s_4, s_3}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha + s_4 b/2 \\ \mu - s_1 b/2 & \alpha + s_4 b/2 \end{bmatrix} \times \\ \times M_{\alpha+s_4b/2, \alpha'}(\mu + (s_3 - s_1)b/2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что это условие действительно представляет из себя разностное уравнение на  $M_{\alpha\alpha'}(\mu)$ . Отметим, что при  $s_1 = s_3$  в уравнении присутствуют только операторы сдвига по внутреннему моменту  $\alpha$ , в то время как при  $s_1 \neq s_3$  входят и операторы сдвига внешнего момента  $\mu$ .

Для того, чтобы записать эти уравнения в простом явном виде, произведём перенормировку, подобную (2.4). Торический конформный блок содержит одну вершину, поэтому определим

$$\mathcal{B}_\alpha(\mu|\tau) = V(\mu, \alpha; \alpha) B_\alpha(\mu|\tau) . \quad (3.10)$$

Модулярное ядро перенормируется соответствующим образом

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = \frac{V(\mu, \alpha; \alpha)}{V(\mu, \alpha'; \alpha')} M_{\alpha\alpha'}(\mu) . \quad (3.11)$$

Для перенормированного таким образом модулярного ядра справедливо уравнение (3.9), если в нём использовать перенормированные ядра слияния (2.6). В действительности, условие (3.9) представляет из себя четыре уравнения, по числу пар  $(s_1, s_3)$ . Условие (3.9) при подстановке  $s_1 = s_3 = 1$  переходит в уравнение (3.12). При выборе  $s_1 = -s_3 = 1$  получаем уравнение (3.14). Выбор  $s_1 = s_3 = -1$  или  $s_1 = -s_3 = -1$  не даёт новых независимых уравнений. Наконец, из условия (3.1) и уравнения (3.12) нетрудно получить уравнение (3.13).

$$\left( \frac{\sin \pi b(2\alpha + \mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} + \frac{\sin \pi b(2\alpha - \mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2 \cos 2\pi b\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) \quad (3.12)$$

$$\left( e^{-\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu)}{\sin 2\pi b\alpha'} + e^{\frac{b}{2}\partial_{\alpha'}} \frac{\sin \pi b(2\alpha' - \mu)}{\sin 2\pi b\alpha'} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2 \cos 2\pi b\alpha \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\sin 2\pi b\alpha} \left( e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} - e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2e^{b\partial_\mu} \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) \quad (3.14)$$

Обсудим эти уравнения. Первое из них есть уравнение второго порядка относительно сдвигов по внутреннему моменту  $\alpha$ . Второе уравнение представляет из себя его аналог, но со сдвиговыми операторами по  $\alpha'$ . Оно может быть выведено из первого уравнения и условия, что квадрат модулярного преобразования равен единице. Третье уравнение включает сдвиговый оператор по внешнему моменту  $\mu$ . Таким образом, мы имеем три уравнения на модулярное

ядро, которое зависит от трёх параметров. На первый взгляд есть существенная неопределённость в общем решении системы (3.12–3.14). Однако, как мы сейчас продемонстрируем, эта неопределённость является побочным продуктом используемой параметризации (20).

Сначала рассмотрим уравнение (3.12). Оно является однородным уравнением второго порядка со сдвигами величины  $b/2$  по внутреннему моменту  $\alpha$ . Следовательно, его общее решение  $G_{\alpha\alpha'}(\mu)$  может быть представлено в виде

$$G_{\alpha\alpha'}(\mu) = f_1(\underline{\alpha}, \alpha', \mu) \times S_1(\alpha, \alpha', \mu) + f_2(\underline{\alpha}, \alpha', \mu) \times S_2(\alpha, \alpha', \mu) , \quad (3.15)$$

где  $f_1(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$  и  $f_2(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$  – произвольные функции периодичные по  $\alpha$  с периодом  $b/2$ , а  $S_1(\alpha, \alpha', \mu)$  и  $S_2(\alpha, \alpha', \mu)$  – два частных независимых решения. Независимость означает, что отношение этих функций  $S_1/S_2$  не является периодичным. В дальнейшем мы для краткости часто будем говорить про периодичность, не указывая величину периода. В таких случаях подразумевается период  $b/2$ . Кроме того, мы будем явно отражать периодичность функции по какому-либо из аргументов при помощи нижнего подчеркивания, как в формуле (3.15).

Заметим, что моменты  $\alpha$  и  $-\alpha$  соответствуют одной и той же конформной размерности  $\Delta = \frac{Q^2}{4} - \alpha^2$ . Поскольку модулярное ядро в действительности является функцией самой размерности  $\Delta$ , то в терминах  $\alpha$  оно должно быть чётной функцией. Как мы увидим, требование чётности оставляет лишь одну независимую функцию из двух возможных в решении (3.15). Таким образом, общее решения уравнения (3.12) чётное по  $\alpha$  может быть записано как

$$\mathcal{M}_{\alpha,\alpha'}(\mu) = f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu) \times E_{\alpha\alpha'}(\mu) , \quad (3.16)$$

где  $E_{\alpha\alpha'}(\mu)$  – некоторое частное решение, четное по  $\alpha$ , которое определяется с точностью до произвольного периодического функционального множителя  $f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$ . Аналогичным образом уравнение (3.13) фиксирует зависимость функции  $f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$  от  $\alpha'$  точно до другого фактора  $g$ , который должен быть периодичен ещё и по  $\alpha'$ :

$$f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu) \rightarrow g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu) . \quad (3.17)$$

Наконец, из уравнения (3.14) можно определить зависимость  $g$  от  $\mu$  с точностью до некоторой функции  $h$ , периодичной по всем своим аргументам:

$$g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu) \rightarrow h(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \underline{\mu}) . \quad (3.18)$$

Итак, мы показали, что кажущаяся свобода в выборе решений, связанная с порядком уравнений (3.12) и (3.13), устраняется требованием чётности решения относительно внутреннего момента. Оставшийся произвол, описываемый функцией  $h$ , также может быть зафиксирован. Действительно, центральный заряд теории (20) инвариантен относительно инверсии  $b \rightarrow b^{-1}$ . Поскольку модулярное ядро может зависеть от  $b$  только через зависимость от  $c$ , то оно также должно быть инвариантным относительно инверсии  $b$ . Это фиксирует функцию  $h$  с точностью до некоторой функции  $C$ , которая является периодичной как с периодом  $b/2$ , так и с периодом  $b^{-1}/2$  по всем своим аргументам. Для иррационального значения  $b$  в общем положении отсюда следует, что  $C$  просто является константой, не зависящей от  $\alpha$ ,  $\alpha'$  и  $\mu$ . Эта константа может быть зафиксирована требованием того, что квадрат модулярного преобразования равен единице. Таким образом, для центрального заряда общего вида модулярное ядро определяется как единственное решение уравнений (3.12–3.14) с необходимыми свойствами симметрии.

## 3.2 Решение разностных уравнений

### 3.2.1 Уравнение со сдвигowymi операторами по $\alpha$

Мы будем строить решение уравнений (3.12–3.14) для параметра  $b$ , квадрат которого является иррациональным<sup>1</sup>. Уравнение (3.12) может быть приведено к следующему виду

$$\begin{aligned} & \left( e^{-i\pi b\mu} e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} + e^{i\pi b\mu} e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} - 2 \cos 2\pi b\alpha' \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) \\ & = e^{4\pi i b\alpha} \left( e^{i\pi b\mu} e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} + e^{-i\pi b\mu} e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} - 2 \cos 2\pi b\alpha' \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Как объясняется в предыдущем разделе, решение изучаемой системы с желаемыми свойствами симметрии является единственным. Мы получим такое

<sup>1</sup>Хотя выведенные нами уравнения справедливы для любого значения  $b$ , в случае  $b^2 \in \mathbb{Q}$  они фиксируют решения лишь с точностью до некоторого периодического множителя.

решение отталкиваясь от анзаца

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) = e^{4\pi i\alpha\alpha'} e^{2\pi i\alpha\mu} \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi inb\alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) \times f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu), \quad (3.20)$$

где  $\mathcal{M}^0(\alpha', \mu) = 1$ , а  $f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$  – некоторая функция, периодическая по  $\alpha$  с периодом  $b/2^2$ .

Подстановка анзаца в (3.19) приводит к простому рекуррентному соотношению между коэффициентами  $\mathcal{M}^n(\alpha', \mu)$

$$\begin{aligned} & \left( e^{2\pi ib\alpha'} e^{2\pi inb^2} + e^{-2\pi ib\alpha'} e^{-2\pi inb^2} - 2 \cos 2\pi b\alpha' \right) \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) = \\ & = \left( e^{2\pi ib\alpha'} e^{2\pi ib\mu} e^{2\pi i(n-1)b^2} + e^{-2\pi ib\alpha'} e^{-2\pi ib\mu} e^{-2\pi i(n-1)b^2} - 2 \cos 2\pi b\alpha' \right) \mathcal{M}^{n-1}(\alpha', \mu). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Используя элементарные тригонометрические преобразования, решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$\mathcal{M}^n(\alpha', \mu) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + (k-1)b) \sin \pi b(\mu + (k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha' + kb) \sin \pi kb^2}. \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Уравнения со сдвигowymi операторами по $\alpha'$ и $\mu$

На следующем шаге необходимо частично фиксировать функцию  $f(\underline{\alpha}, \alpha', \mu)$ , потребовав, чтобы анзац (3.20) также удовлетворял уравнению (3.13). Простейший способ сделать это состоит в следующем. Обратим внимание на то, что есть определённая симметрия между уравнениями (3.12) и (3.13). А именно, прямым вычислением нетрудно убедиться, что если некоторая функция  $m_{\alpha\alpha'}(\mu)$  решает уравнение (3.12), то функция

$$m_{\alpha'\alpha}(b - \mu) \times \sin 2\pi b\alpha' \times r(\alpha, \underline{\alpha'}, \mu) \quad (3.23)$$

с произвольной функцией  $r$ , периодичной по  $\alpha'$ , решает уравнение (3.13). Следовательно, если некоторая функция  $m_{\alpha\alpha'}(\mu)$  решает уравнение (3.12) и при этом удовлетворяет условию

$$\frac{m_{\alpha'\alpha}(b - \mu) \times \sin 2\pi b\alpha'}{m_{\alpha\alpha'}(\mu)} = r(\alpha, \underline{\alpha'}, \mu), \quad (3.24)$$

---

<sup>2</sup>Напомним, что нижнее подчеркивание означает периодичность по соответствующему аргументу.

то эта функция решает оба уравнения (3.12), (3.13). Мы можем выбрать функцию  $f(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)$  таким образом, чтобы наш анзац (3.20) приобрёл симметрию (3.24). Воспользуемся следующим свойством

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha} \mathcal{M}^n(\underline{\alpha}', \mu) = (1 - e^{4\pi i b \alpha'}) \frac{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}'|b)}{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}' + \mu|b)} \mathcal{N}_{\alpha\alpha'}(\mu), \quad (3.25)$$

где функция  $\widetilde{S}$  определена формулой (A.12), а функция  $\mathcal{N}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  задана как

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\alpha\alpha'}(\mu) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha} e^{4\pi i m b \alpha'} e^{2\pi i b^2 n m} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b \mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соотношение (3.25) доказывается в приложении Д.1. Функция  $\mathcal{N}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  с очевидностью является симметричной относительно рассматриваемого преобразования  $\mathcal{N}_{\alpha\alpha'}(\mu) = \mathcal{N}_{\alpha'\alpha}(b - \mu)$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{M}_{\alpha'\alpha}(b - \mu) \times \sin 2\pi b \alpha'}{\widetilde{M}_{\alpha\alpha'}(\mu)} &= \\ &= \left( \frac{1}{f(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)} \sin 2\pi b \alpha' \frac{e^{2\pi i \alpha'(b-\mu)}}{1 - e^{4\pi i b \alpha'}} \frac{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}' + \mu|b)}{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}'|b)} \right) \times \\ &\quad \times \left( f(\underline{\alpha}', \underline{\alpha}, b - \mu) \frac{1 - e^{4\pi i b \alpha}}{e^{2\pi i \alpha \mu}} \frac{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}|b)}{\widetilde{S}(2\underline{\alpha} + \mu|b)} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Последний множитель в скобках уже периодичен по  $\alpha'$ . Мы можем сделать периодичным и первый множитель, выбрав

$$f(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu) = e^{-2\pi i \alpha' \mu} \frac{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}' + \mu|b)}{\widetilde{S}(2\underline{\alpha}'|b)} \times g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu), \quad (3.28)$$

с некоторой функцией  $g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)$ , которая периодична как по  $\alpha$ , так и по  $\alpha'$ . Остаётся определить зависимость функции  $g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)$  от  $\mu$ , потребовав, чтобы анзац (3.20) с функцией  $f(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)$ , заданной формулой (3.28), удовлетворял уравнению (3.14). Оказывается, что необходимо лишь включение простого фазового множителя в функцию  $g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu)$ , для того, чтобы наш анзац решал уравнение (3.14). Получаем

$$g(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu) = e^{\frac{i\pi}{2}\mu(Q-\mu)} h(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \mu). \quad (3.29)$$

Здесь  $h$  – произвольная функция, периодичная по всем своим аргументам. Доказательство того, что с таким выбором функции  $g$  наш анзац удовлетворяет уравнению (3.14) полностью техническое и приведено в приложении Д.2.

### 3.2.3 Симметризация решения и его свойства

Теперь, когда в нашем распоряжении есть функция, решающая всю систему уравнений (3.12–3.14), остаётся сделать два последних шага. Во-первых, необходимо наложить условие самодуальности, т.е. инвариантности  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  относительно преобразования  $b \rightarrow b^{-1}$ . Это легко осуществить, выбрав

$$h(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}', \underline{\mu}) = \frac{\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b^{-1})}{\widetilde{S}(2\alpha'|b^{-1})} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b^{-1} \alpha} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b^{-1}(2\alpha' + \mu + (k-1)b^{-1}) \sin \pi b^{-1}(\mu + (k-1)b^{-1})}{\sin \pi b^{-1}(2\alpha' + kb^{-1}) \sin \pi kb^{-2}} \times C, \quad (3.30)$$

где  $C$  – некоторая функция, которая периодична по всем своим аргументам как с периодом  $b/2$ , так и с периодом  $b^{-1}/2$ , а следовательно является константой для параметра  $b$  в общем положении. Во-вторых, из нашего частного решения (3.20) нужно построить функцию, которая была бы чётной по  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Заметим, что наше решение является рядом по степеням параметров  $e^{4\pi i b \alpha}$ ,  $e^{4\pi i b^{-1} \alpha}$ . Если такое разложение применимо для некоторого  $\alpha$  (когда параметры  $e^{4\pi i b \alpha}$ ,  $e^{4\pi i b^{-1} \alpha}$  можно считать малыми), то оно неприменимо при противоположном значении  $\tilde{\alpha} = -\alpha$  (параметры разложения  $e^{4\pi i b \tilde{\alpha}}$ ,  $e^{4\pi i b^{-1} \tilde{\alpha}}$  становятся большими). Следовательно, мы можем определить нашу функцию для таких значений  $\alpha$  как чётное продолжение с области сходимости. Отметим, что поскольку все уравнения (3.12–3.14) симметричны относительно отражения  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , то продолженная функция будет являться решением всюду, где она определена. Для симметризации по  $\alpha'$  мы можем просто добавить к имеющемуся частному решению такое же, с заменой  $\alpha'$  на  $-\alpha'$ . Таким образом, решение изучаемой системы уравнений с необходимыми свойствами симметрии может быть записано как

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) + \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, -\alpha'}(\mu). \quad (3.31)$$

Остаётся лишь зафиксировать общий нормировочный множитель, потребовав, чтобы квадрат модулярного преобразования был единичным оператором. Это условие проще всего проверить при  $\mu = 0$ , когда  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(0) = C e^{4\pi i \alpha \alpha'}$   $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(0) = 2C \cos 4\pi \alpha \alpha'$ . Простое вычисление даёт

$$C = 2^{-1/2}. \quad (3.32)$$

Это приводит к окончательному выражению для несимметризованного модулярного ядра  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu)$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) &= 2^{-1/2} e^{4\pi i \alpha \alpha'} e^{2\pi i \mu \alpha} e^{i\pi \mu(Q-\mu)/2} \frac{S_b(2\alpha' + \mu)}{S_b(2\alpha')} \times \\ &\times \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + (k-1)b) \sin \pi b(\mu + (k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha' + kb) \sin \pi k b^2} \right) \times (b \rightarrow b^{-1}) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь только сумма на второй строке (в скобках) умножается на свой аналог с инвертированным значением  $b$ . Полное модулярное ядро получается симметризацией этого выражения по  $\alpha'$  в соответствии с уравнением (3.31).

Альтернативно, можно использовать представление (3.25) и следующее простое соотношение

$$\begin{aligned} \frac{S_b(2\alpha' + \mu)}{S_b(2\alpha')} \frac{\widetilde{S}(2\alpha'|b)\widetilde{S}(2\alpha'|b^{-1})}{\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b)\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b^{-1})} &= \\ &= \frac{S_0(2\alpha' + \mu|Q)}{S_0(2\alpha'|Q)} = e^{i\pi \mu(Q-\mu)/2} e^{-2\pi i \alpha' \mu} , \end{aligned} \quad (3.34)$$

чтобы переписать выражение  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  в виде более симметричного двойного разложения

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) &= 2^{3/2} e^{4\pi i \alpha \alpha'} e^{2\pi i(\mu\alpha + (Q-\mu)\alpha')} e^{i\pi \mu(Q-\mu)} \sin 2\pi b \alpha' \sin 2\pi b^{-1} \alpha' \times \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha} e^{4\pi i m b \alpha'} e^{2\pi i n m b^2} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b \mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1} \times (b \rightarrow b^{-1}) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Сделаем несколько комментариев к формулам (3.33) и (3.35).

1. Эти формулы написаны для модулярного ядра в специальной нормировке, которая отличается от стандартной. Точная связь указана в уравнении (3.11).
2. По построению модулярное ядро симметрично по отношению к отражениям

$$\alpha \rightarrow -\alpha, \quad \alpha' \rightarrow -\alpha' . \quad (3.36)$$

Аналогичная симметрия по  $\mu$  нарушается в выбранной нами нормировке (3.11).

Насколько нам известно, нет каких-либо априорных свойств симметрии модулярного ядра относительно перестановки внутренних размерностей  $\alpha \leftrightarrow \alpha'$  (транспонирования). Однако, как легко видеть из выражения (3.35), в используемой нами нормировке справедливо

$$\frac{\mathcal{M}_{\alpha'\alpha}(\mu)}{\sin 2\pi b\alpha \sin 2\pi b^{-1}\alpha} = \frac{\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(Q - \mu)}{\sin 2\pi b\alpha' \sin 2\pi b^{-1}\alpha'} . \quad (3.37)$$

3. Поскольку уравнения (3.12–3.14) справедливы для любых значений параметров, то формулы (3.33) и (3.35), являющиеся их решениями, верны в любой области параметров, где они сходятся. Например, в теории Лиувилля  $c \geq 1$ , а значит  $Q \in \mathbb{R}$ , в то время как  $\Delta \geq (c - 1)/24 \in \mathbb{R}$ , т.е.  $\alpha \in i\mathbb{R}$ . Тогда ряды (3.33) и (3.35) сходятся при  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in i\mathbb{R}_+$ . По всей видимости область сходимости найденных рядов в точности совпадает с областью применимости интегрального представления, найденного в работах [13; 14]. Например, для минимальных моделей  $c < 1$ , а параметр  $b$  является мнимым, и экспоненты  $e^{4\pi i n b \alpha}$  перестают быть малыми параметрами, делая ряды расходящимися.
4. Отметим, что двойное разложение (3.35) нельзя непосредственно использовать в уравнении (3.31), поскольку, если  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}$  сходится, то  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, -\alpha'}$  будет расходиться при том же значении  $\alpha'$ . Вместо этого должно подразумеваться аналитическое продолжение.
5. Необходимость добавления члена с  $\alpha' \rightarrow -\alpha'$  в формуле (3.31) в некоторой степени формальна. Поскольку конформный блок  $B_{\alpha'}$  является чётной функцией момента  $\alpha'$ , то только чётная часть модулярного ядра вносит вклад в интеграл (43), т.е. симметризация происходит автоматически при интегрировании по всем  $\alpha'$ .

### 3.3 Интегральное представление модулярного ядра

В работах [13; 14] модулярное ядро было представлено в виде следующего интеграла<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu) = & \frac{2^{3/2} \sin 2\pi b\alpha' \sin 2\pi b^{-1}\alpha'}{i S_b(\mu)} \times \\ & \times \int_C d\xi \frac{S_b(\alpha' + \frac{\mu}{2} + \xi) S_b(\alpha' + \frac{\mu}{2} - \xi)}{S_b(\alpha' + Q - \frac{\mu}{2} + \xi) S_b(\alpha' + Q - \frac{\mu}{2} - \xi)} e^{-4\pi i\alpha\xi}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Эта формула записана в той же нормировке, что и разложения (3.33) и (3.35).

Для центрального заряда большей единицы, подынтегральное выражение (3.38) содержит четыре семейства полюсов, лежащих на полупрямых. Контур интегрирования  $\mathcal{C}$  выбирается так, чтобы обходить эти полюса определённым образом. Для некоторых значений параметров эти полюса могут перекрываться и сливаться, тогда формула (3.38) нуждается в доопределении. Иногда, это невозможно. Например, для  $c \leq 1$  (в частности, для всех минимальных моделей) эта формула не верна.

Мы воспроизведём разложение (3.33) непосредственно из интегрального представления (3.38). Оказывается, что разложение в ряд соответствует сумме по вычетам интеграла. Функция  $S_b(z)$  является мероморфной, с простыми полюсами и нулями, расположенными в точках

$$\begin{aligned} \text{нули : } z &= nb + mb^{-1}, \quad n, m \geq 1, \\ \text{полюса : } z &= -nb - mb^{-1}, \quad n, m \geq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (3.38) имеет простые полюса в точках

$$\begin{aligned} \xi_I^{(n,m)} &= \alpha' + \mu/2 + nb + mb^{-1}, \quad n, m \geq 1, \\ \xi_{II}^{(n,m)} &= \alpha' + Q - \mu/2 - nb - mb^{-1}, \quad n, m \geq 0, \\ \xi_{III}^{(n,m)} &= -\alpha' - \mu/2 - nb - mb^{-1}, \quad n, m \geq 0, \\ \xi_{IV}^{(n,m)} &= -\alpha' - Q + \mu/2 + nb + mb^{-1}, \quad n, m \geq 1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

На рисунке 3.4 представлена схема полюсов и возможный контур интегрирования в  $\xi$ -плоскости. Предположим, что  $\alpha \in i\mathbb{R}_+$  и  $b > 0$ . Тогда экспонента  $e^{-4\pi i\alpha\xi}$

<sup>3</sup>Обращаем внимание читателя на отличие наших обозначений от обозначений в указанных работах. Точная связь такова:  $\alpha = ip_a$ ,  $\alpha' = ip_b$ ,  $\mu = Q/2 + ip_e$ ,  $c_b = iQ/2$ ,  $s_b(z) = S_b(Q/2 + iz)$ .

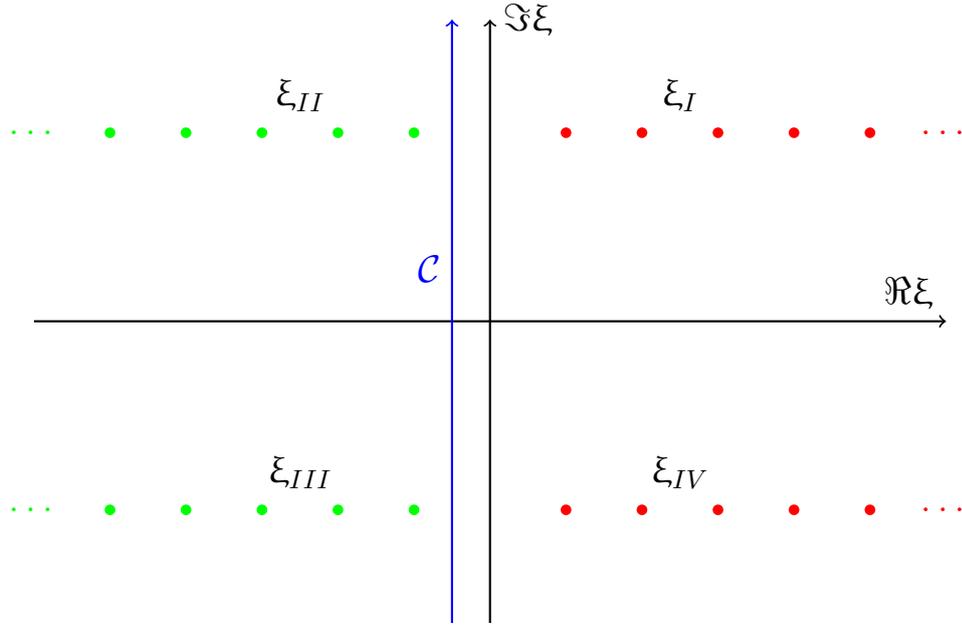


Рисунок 3.4 — Контур интегрирования в интегральном представлении модулярного ядра

в интеграле (3.38) убывает при  $\Re \xi < 0$ , и интеграл может быть представлен как сумма по полюсам в точках  $z \in \xi_{II}$  и  $z \in \xi_{III}$ . Отметим, что рисунок 3.4 довольно схематичен. В действительности, в каждом из четырёх семейств полюса не расположены эквидистантно. Более того, для комплексных значений  $b$  вместо одной полупрямой полюса в каждой группе лежат между парой пересекающихся полупрямых. При некоторых значениях параметров четыре группы полюсов могут не быть разделены так явно, и контур нельзя выбрать параллельным мнимой оси (мы немного сместили контур от мнимой оси для ясности рисунка). Однако, в любой из описанных ситуаций остаётся верно следующее утверждение: для вычисления интеграла (3.38) необходимо учесть лишь вычеты семейств  $\xi_{II}$  и  $\xi_{III}$ .

Обозначим подынтегральное выражение в (3.38) как  $\mathcal{I}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 & 2\pi i \operatorname{Res}_{\xi_{III}^{(n,m)}} \mathcal{I} = \\
 & = 2\pi i \frac{S_b(2\alpha' + \mu + nb + mb^{-1}) S_b(\mu + nb + mb^{-1})}{S_b(2\alpha' + Q + nb + mb^{-1}) \operatorname{Res}^{-1} S_b(-nb - mb^{-1})} e^{4\pi i \alpha \alpha'} e^{2\pi i \alpha \mu} e^{4\pi i \alpha (nb + mb^{-1})}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Из определения (3.40) можно видеть, что полюса, соответствующие  $\xi_{II}$ , описывают такое же множество, как и  $\xi_{III}$ , но с заменой  $\alpha'$  на  $-\alpha'$  (напомним, что  $Q = b + b^{-1}$ ). Кроме того, подынтегральное выражение является чётной функцией  $\alpha'$ , как можно видеть из свойства (A.6). Следовательно, вычеты в

точках  $\xi_{II}$  в точности совпадают с вычетами в точках  $\xi_{III}$  с заменой  $\alpha'$  на  $-\alpha'$ . Таким образом, нам достаточно рассмотреть только сумму по вычетам  $\xi_{III}$  и симметризовать результат по  $\alpha'$ .

Используя свойство (A.5) и явную форму вычетов (A.9), можно записать полученное выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Res}_{\xi_{III}^{(n,m)}} \mathcal{I} &= ie^{4\pi i \alpha \alpha'} e^{2\pi i \alpha \mu} e^{4\pi i \alpha (nb+mb^{-1})} S_b(\mu) \frac{S_b(2\alpha' + \mu)}{S_b(2\alpha' + Q)} \times \\
&\times \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + (k-1)b) \sin \pi b(\mu + (k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha' + kb) \sin \pi b^2 k} \times \\
&\times \prod_{l=1}^m \frac{\sin \pi b^{-1}(2\alpha' + \mu + (l-1)b^{-1}) \sin \pi b^{-1}(\mu + (l-1)b^{-1})}{\sin \pi b^{-1}(2\alpha' + lb^{-1}) \sin \pi b^{-2} l}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Наконец, заметив, что

$$\frac{2^{3/2} \sin 2\pi b \alpha' \sin 2\pi b^{-1} \alpha'}{i} \frac{i}{S_b(2\alpha' + Q)} = \frac{2^{-1/2}}{S_b(2\alpha')}, \quad (3.43)$$

можно увидеть, что суммирование по вкладам всех точек из групп  $\xi_{III}$  и  $\xi_{II}$  в точности воспроизводит формулу (3.33). Таким образом, мы заключаем, что выражения (3.33), (3.35) действительно служат представлением в виде ряда интегрального выражения (3.38).

Отметим, что в случае  $\alpha \in -i\mathbb{R}_+$  можно замкнуть контур интегрирования в формуле (3.38) в правой части плоскости, учитывая полюса в точках  $\xi_I$  и  $\xi_{IV}$ . Как нетрудно видеть из (3.40) и симметрии подынтегрального выражения, результат будет таким же, как и прежде, но с заменой  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . Иными словами,  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  является чётной функцией  $\alpha$ , в согласии с ожидаемыми свойствами симметрии.

## 3.4 Аналитические свойства модулярного ядра

### 3.4.1 Вывод общей формулы

Нам удалось получить замкнутое выражение для модулярного ядра во всех непertурбативных порядках. Напомним, что модулярное ядро по-существу

является матрицей перехода от одного базиса конформных блоков к другому. Тем не менее, замкнутые выражения для самих конформных блоков, позволяющие явно анализировать их модулярные свойства, на данный момент не доступны. Вывод непертурбативных уравнений (3.33) и (3.35) довольно косвенный. Помимо условий самосогласованности модулярной алгебры были использованы только свойства *вырожденных* конформных блоков (для вывода матрицы (2.6)). При этом результат имеет довольно неожиданную структуру. Прямой анализ конформных блоков, который мы осуществили в разделе 1, не обнаружил никаких отклонений модулярного преобразования от преобразования Фурье. В свете сказанного важной задачей является какой-либо способ проверки того, что выражения (3.33), (3.35) действительно осуществляют модулярные преобразования *невырожденных* конформных блоков. В этом подразделе мы получим простое описание аналитической структуры модулярного ядра, следующее из свойств невырожденных конформных блоков, и проверим, что оно верно.

Напомним, что формула Замолотчикова даёт связь между вычетом конформного блока в точке  $\Delta = \Delta_{r,s}$  и его значением в точке  $\Delta = \Delta_{r,-s} \equiv \Delta_{r,s} + rs$

$$\text{Res}_{\Delta=\Delta_{r,s}} B_{\Delta}(x) = R_{r,s} B_{\Delta_{r,-s}}(x) , \quad (3.44)$$

где  $q$ -независимые коэффициенты  $R_{r,s}$  определены ниже уравнением (3.49). Возьмём вычет в точке  $\Delta = \Delta_{r,s}$  в определении модулярного преобразования (43) и используем свойство (3.44). Получим

$$R_{r,s} B_{\Delta_{r,-s}}(q) = \sum_{\Delta'} \text{Res}_{\Delta=\Delta_{r,s}} M_{\Delta\Delta'} B_{\Delta'}(\tilde{q}) . \quad (3.45)$$

В свою очередь, и сам конформный блок  $B_{\Delta_{r,-s}}(q)$  можно разложить по дуальному базису

$$B_{\Delta_{r,-s}}(q) = \sum_{\Delta'} M_{\Delta_{r,-s}\Delta'} B_{\Delta'}(\tilde{q}) . \quad (3.46)$$

Сравнивая формулы (3.45) и (3.46) и используя линейную независимость конформных блоков с разными промежуточными размерностями  $\Delta'$ , получаем

$$\text{Res}_{\Delta=\Delta_{r,s}} M_{\Delta\Delta'} = R_{r,s} M_{\Delta_{r,-s}\Delta'} . \quad (3.47)$$

Это уравнение представляет собой нетривиальное условие на модулярное ядро, следующее из требования согласованности модулярных преобразований и

аналитической структуры невырожденных конформных блоков. В оставшейся части раздела мы явно проверяем уравнение (3.47).

### 3.4.2 Подготовка к вычислениям

Как и прежде, в вычислениях нам будет удобно использовать параметризацию Лиувилля (20). Из-за нетривиального якобиана перехода от  $\Delta$  к  $\alpha$  в терминах моментов условие (3.47) выглядит несколько иначе, а именно,

$$\operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} M_{\alpha\alpha'} = -\frac{R_{r,s}}{2\alpha_{r,s}} M_{\alpha_{r,-s}\alpha'} , \quad (3.48)$$

где нули Каца  $\alpha_{r,s}$  определены формулой (22). Подчеркнём, что в противоположность точкам  $\Delta = \Delta_{r,s}$  точки  $\Delta_{r,-s}$  не являются сингулярными при  $r, s \geq 1$ . Заметим, что  $\Delta_{r,s} = \Delta_{-r,-s}$ . Без ограничения общности мы далее полагаем, что  $r, s \geq 1$ .

Множители  $R_{r,s}$ , входящие в формулу (3.44), есть

$$R_{r,s} = A_{r,s} P_{r,s} , \quad (3.49)$$

где

$$A_{r,s} = \frac{1}{2} \prod_{\substack{n=1-r \\ (n,m) \neq (0,0),(r,s)}}^r \prod_{m=1-s}^s \frac{1}{nb + mb^{-1}}, \quad P_{r,s} = \prod_{n=1-r}^r \prod_{m=1-s}^s (nb + mb^{-1} - \mu) . \quad (3.50)$$

Для проверки формулы (3.48) необходимо восстановить исходную нормировку модулярного ядра

$$M_{\alpha\alpha'} = \frac{V_\alpha}{V_{\alpha'}} n_{\alpha'} \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} , \quad (3.51)$$

где функция  $V_\alpha$  есть

$$V_\alpha = \frac{\Gamma_b(Q + 2\alpha)\Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha)\Gamma_b(\mu - 2\alpha)} . \quad (3.52)$$

Нетрудно проверить, что отношение  $V_\alpha/V_{\alpha'}$  такое же, как требует формула (3.11). Из функции  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu)$  (3.33) удобно вынести не зависящий от  $\alpha$  фактор  $n_{\alpha'}$

$$n_{\alpha'} = e^{2\pi i \mu \alpha'} \sin 2\pi b \alpha' \sin 2\pi b^{-1} \alpha' / S_b(\mu) , \quad (3.53)$$

который не влияет на справедливость свойства (3.48). При этом, несколько злоупотребляя обозначениями, оставшуюся часть мы по-прежнему будем обозначать символом  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$ . Она состоит из двух слагаемых

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'} = K_{\alpha\alpha'} + K_{-\alpha,\alpha'}, \quad (3.54)$$

а для функции  $K_{\alpha\alpha'}$  будет удобно выбрать следующее представление

$$\begin{aligned} K_{\alpha\alpha'} &= e^{4\pi i\alpha\alpha'} \sum_{n,m \geq 0} e^{8\pi i\alpha_{n,m}\alpha'} K_{nm}(\alpha), \\ K_{nm}(\alpha) &= \frac{S_b(2\alpha + 2\alpha_{n,m} + \mu)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha + 2\alpha_{n+1,m+1})S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где  $S'_b(z)$  – производная функции  $S_b(z)$ . При помощи свойства (A.5) нетрудно убедиться, что функция (3.55) с точностью до множителя (3.53) совпадает с функцией (3.33).

Свойство (3.48) будет проверено явным, но достаточно громоздким вычислением. Поэтому сразу наметим ключевые шаги. Определение (3.51) задаёт модулярное ядро как произведение нормировочных множителей  $V_\alpha/V_{\alpha'}$  (3.52) и нетривиального ряда  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$  (3.54). Оказывается, что нормировочный множитель  $V_\alpha$  имеет полюса именно в нулях Каца, и, кроме того, удовлетворяет

$$\operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} V_\alpha = -\frac{R_{r,s}}{2\alpha_{r,s}} V_{\alpha_{r,-s}}. \quad (3.56)$$

При этом сам ряд  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$  оказывается регулярным в точках  $\alpha = \alpha_{r,\pm s}$  и удовлетворяет

$$\mathcal{M}_{\alpha_{r,s},\alpha'} = \mathcal{M}_{\alpha_{r,-s},\alpha'}. \quad (3.57)$$

Вместе свойства (3.56) и (3.57) приводят к уравнению (3.48). Остаётся проверить каждое из них.

### 3.4.3 Нормировочный множитель

Найдём вычет функции  $V_\alpha$  при  $\alpha = \alpha_{r,s}$  и её значение при  $\alpha = \alpha_{r,-s}$ . При  $r, s \geq 1$  (что мы предполагаем без ограничения общности), в точке  $\alpha = \alpha_{r,s}$  у функции  $V_\alpha$  есть лишь один сингулярный множитель, в то время как в точке

$\alpha = \alpha_{r,-s}$  все факторы регуляренны<sup>4</sup>. Отметим также, что  $\alpha_{r,s} + \alpha_{n,m} = \alpha_{r+n,s+m}$  и  $Q = 2\alpha_{1,1}$ . Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} V_\alpha &= \frac{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,s+1}) \operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} \Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{r,s}) \Gamma_b(\mu + 2\alpha_{-r,-s})}, \\ V_{\alpha_{r,-s}} &= \frac{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,1-s}) \Gamma_b(2\alpha_{1-r,s+1})}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{r,-s}) \Gamma_b(\mu + 2\alpha_{-r,s})}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Отношение этих выражений равно

$$\frac{\operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} V_\alpha}{V_{\alpha_{r,-s}}} = \frac{\operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} \Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,1-s})} \underbrace{\frac{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,s+1})}{\Gamma_b(2\alpha_{1-r,s+1})}}_{R_1} \underbrace{\frac{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{r,-s})}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{-r,-s})}}_{R_2} \underbrace{\frac{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{-r,s})}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{r,s})}}_{R_3} \underbrace{\frac{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{-r,s})}{\Gamma_b(\mu + 2\alpha_{r,s})}}_{R_4}. \quad (3.59)$$

Используя свойство (A.3), первый множитель можно привести к виду

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\operatorname{Res}_{\alpha=\alpha_{r,s}} \Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,1-s})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon}{2} \frac{\Gamma_b(\alpha_{1-r,1-s} + \varepsilon)}{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,1-s} + \varepsilon)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon}{2} \prod_{n=1-r}^r \frac{\Gamma(nb^2 + 1 - s + b\varepsilon)}{\sqrt{2\pi b}^{nb^2+1/2-s+\varepsilon}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon}{2} \frac{\Gamma(1-s+b\varepsilon)}{\sqrt{2\pi b}^{1/2-s}} \prod_{\substack{n=1-r \\ n \neq 0}}^r \frac{\Gamma(nb^2 + 1 - s + \varepsilon)}{\sqrt{2\pi b}^{nb^2+1/2-s+\varepsilon}} = \\ &= \frac{(-1)^s}{2\sqrt{2\pi b}^{3/2-s}(s-1)!} \prod_{\substack{n=1-r \\ n \neq 0}}^r \frac{\Gamma(nb^2 + 1 - s)}{\sqrt{2\pi b}^{nb^2+1/2-s}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Вычисление второго множителя несколько проще, поскольку не требует взятия предела:

$$R_2 = \frac{\Gamma_b(2\alpha_{r+1,s+1})}{\Gamma_b(2\alpha_{1-r,s+1})} = \prod_{n=1-r}^r \frac{\sqrt{2\pi b}^{nb^2+1/2+s}}{\Gamma(nb^2 + 1 + s)}. \quad (3.61)$$

<sup>4</sup>Аналитические свойства функции  $\Gamma_b(z)$  описаны в приложении A.1.

Перемножая  $R_1$  и  $R_2$  найдём

$$\begin{aligned}
R_1 \cdot R_2 &= \frac{(-1)^s b^{2s-1}}{2(s-1)!s!} \prod_{\substack{n=1-r \\ n \neq 0}}^r b^{2s} \frac{\Gamma(nb^2 + 1 - s)}{\Gamma(nb^2 + 1 + s)} = \\
&= \frac{(-1)^s b^{2s-1}}{2(s-1)!s!} \prod_{\substack{n=1-r \\ n \neq 0}}^r \prod_{m=1-s}^s \frac{1}{nb + mb^{-1}} = \\
&= \frac{(-1)^s b^{2s-1}}{2(s-1)!s!} \prod_{\substack{m=1-s \\ m \neq 0}}^s mb^{-1} \prod_{n=1-r}^r \prod_{\substack{m=1-s \\ (n,m) \neq (0,0)}}^s \frac{1}{nb + mb^{-1}} = \\
&= -\frac{1}{2} \prod_{\substack{n=1-r \\ (n,m) \neq (0,0)}}^r \prod_{m=1-s}^s \frac{1}{nb + mb^{-1}}, \quad (3.62)
\end{aligned}$$

что в точности равняется величине  $-\frac{A_{r,s}}{2\alpha_{r,s}}$ , с множителем  $A_{r,s}$ , определённым формулой (3.50). Совершенно аналогично можно показать, что произведение двух оставшихся множителей  $R_3 \cdot R_4$  равняется  $P_{r,s}$ , определённому в уравнении (3.50). Таким образом, формула (3.56) доказана.

#### 3.4.4 Разложение вблизи точки $\alpha = \alpha_{r,s}$

Для доказательства (3.48) осталось продемонстрировать, что функция  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$  регулярна в точках  $\alpha = \alpha_{r,\pm s}$  и удовлетворяет (3.57). Необходима аккуратность, поскольку  $K_{\alpha\alpha'}$  (3.55) сингулярна в этих точках, и только сумма  $K_{\alpha\alpha'}$  и  $K_{-\alpha\alpha'}$ , определяющая  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$ , оказывается регулярной.

Разложим  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$  вблизи точки  $\alpha = \alpha_{r,s}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\alpha_{r,s+\frac{\varepsilon}{2}},\alpha'} &= e^{-4\pi i\alpha_{r,s}} \left( e^{8\pi i\alpha_{r,s}\alpha'} e^{2\pi i\varepsilon\alpha'} K_{\alpha_{r,s+\frac{\varepsilon}{2}},\alpha'} + e^{-2\pi i\varepsilon\alpha'} K_{-\alpha_{r,s-\frac{\varepsilon}{2}},\alpha'} \right) = \\
&= e^{-4\pi i\alpha_{r,s}} \sum_{n,m} e^{8\pi i\alpha_{n,m}\alpha'} \mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(\varepsilon), \quad (3.63)
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(\varepsilon) = e^{2\pi i\varepsilon\alpha'} K_{n-r,m-s} \left( \alpha_{r,s} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta_{n \geq r, m \geq s} + e^{-2\pi i\varepsilon\alpha'} K_{n,m} \left( \alpha_{-r,-s} - \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (3.64)$$

Рассмотрим

$$K_{n-r,m-s} \left( \alpha_{r,s} + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{S_b(2\alpha_{n,m} + \mu + \varepsilon)S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n+1,m+1} + \varepsilon)S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})}. \quad (3.65)$$

Принимая во внимание, что функция  $S_b(2\alpha_{n+1,m+1} + \varepsilon)$  имеет простой ноль при  $\varepsilon = 0$  (см. приложение A.1), можно записать следующее разложение по  $\varepsilon$

$$e^{2\pi i \varepsilon \alpha'} K_{n-r,m-s} \left( \alpha_{r,s} + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})} \times \\ \times \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2\pi i \alpha' + \frac{S'_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})} + O(\varepsilon) \right). \quad (3.66)$$

Перейдём к

$$K_{n,m} \left( \alpha_{-r,-s} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu - \varepsilon)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1} - \varepsilon)S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})}. \quad (3.67)$$

Этот член имеет различные пределы в зависимости от баланса индексов. Если  $n \geq r, m \geq s$ , получаем разложение схожее с (3.66)

$$e^{-2\pi i \varepsilon \alpha'} K_{n,m} \left( \alpha_{-r,-s} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})} \times \\ \times \left( -\frac{1}{\varepsilon} + 2\pi i \alpha' + \frac{S'(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})} + O(\varepsilon) \right). \quad (3.68)$$

И как мы видим, сумма (3.66) и (3.68) действительно регулярна при  $\varepsilon = 0$  и равняется

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(0) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})} \times \left( 4\pi i \alpha' + \right. \\ \left. + \frac{S'_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)} + \frac{S'_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})} \right), \\ n \geq r, m \geq s. \quad (3.69)$$

Когда  $n < r$  и  $m < s$ , функция  $S_b^{-1}(2\alpha_{n-r+1,m-s+1} - \varepsilon) = O(\varepsilon)$ , так что второй член в (3.64) исчезает при  $\varepsilon = 0$ , в то время как первый член отсутствует из-за дельта-множителя  $\delta_{n \geq r, m \geq s}$ . Следовательно,

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(0) = 0, \quad n < r, m < s. \quad (3.70)$$

Наконец, когда  $n < r$  и  $m \geq s$  или  $n \geq r$  и  $m < s$ , функция  $S_b^{-1}(2\alpha_{n-r+1,m-s+1} - \varepsilon)$  регулярна при  $\varepsilon = 0$  и значит

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(0) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})}, \quad \begin{cases} n < r, m \geq s \\ n \geq r, m < s \end{cases}. \quad (3.71)$$

### 3.4.5 Разложение вблизи точки $\alpha = \alpha_{r,-s}$

Разложим  $\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}$  вблизи точки  $\alpha = \alpha_{r,-s}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha_{r,-s} + \frac{\varepsilon}{2}, \alpha'} &= e^{-4\pi i \alpha_{r,s}} \left( e^{2\pi i \varepsilon \alpha'} e^{8\pi i \alpha_{r,0} \alpha'} K_{\alpha_{r,s} + \frac{\varepsilon}{2}, \alpha'} + e^{-2\pi i \varepsilon \alpha'} e^{8\pi i \alpha_{0,s} \alpha'} K_{\alpha_{-r,s} - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha'} \right) = \\ &= e^{-4\pi i \alpha_{r,s}} \sum_{n,m} e^{8\pi i \alpha_{n,m} \alpha'} \mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(\varepsilon), \quad (3.72) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(\varepsilon) &= \\ &= e^{2\pi i \varepsilon \alpha'} K_{n-r,m} \left( \alpha_{r,-s} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta_{n \geq r} + e^{-2\pi i \varepsilon \alpha'} K_{n,m-s} \left( \alpha_{-r,s} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta_{m \geq s}. \quad (3.73) \end{aligned}$$

Подчеркнём, что функцию  $\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(\varepsilon)$  нельзя получить из функции  $\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(\varepsilon)$  (3.64) изменением знака  $s$ .

Произведя тот же анализ, что и в предыдущем случае, получим, что  $\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(\varepsilon)$  регулярна вблизи  $\varepsilon = 0$  с различными разложениями, в зависимости от величин  $n - r$  и  $m - s$ . Для случая  $n \geq r, m \geq s$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0) &= \frac{S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu) S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m+1}) S'_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})} \times \left( 4\pi i \alpha' + \right. \\ &+ \frac{S'_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)} + \frac{S'_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})} - \frac{1}{2} \frac{S''_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})} \left. \right), \\ & \quad n \geq r, m \geq s. \quad (3.74) \end{aligned}$$

При  $n < r$  и  $m < s$  величина  $\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0)$  равна нулю из-за дельта-символов Кронекера

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0) = 0, \quad n < r, m < s. \quad (3.75)$$

Наконец при  $n < r$  и  $m \geq s$  или  $n \geq r$  и  $m < s$  сингулярных вкладов нет, и мы получаем

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu) S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r+1,m+1}) S'_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})}, \quad n < r, m \geq s, \quad (3.76)$$

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0) = \frac{S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu) S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n+1,m-s+1}) S'_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})}, \quad n \geq r, m < s. \quad (3.77)$$

### 3.4.6 Сравнение разложений

Сравним уравнения (3.69) и (3.74), которые справедливы при  $n \geq r, m \geq s$ . Рассмотрим отношение  $\mu$ -зависимых членов, входящих в общие множители. Используя свойство (A.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)} &= \\ &= \frac{\prod_{k=n-r}^{n-1} 2 \sin \pi(kb^2 + \mu b + m - s)}{\prod_{k=n-r}^{n-1} 2 \sin \pi(kb^2 + \mu b + m)} = (-1)^{rs}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Продифференцировав (A.5), подставив  $z = 2\alpha_{n+1,m+1}$ , и приняв во внимание, что  $S_b(2\alpha_{n+1,m+1}) = 0$ , получаем

$$S'_b(2\alpha_{n+2,m+1}) = 2 \sin 2\pi b \alpha_{n,m} S'_b(2\alpha_{n+1,m+1}). \quad (3.79)$$

Используя это уравнение, можно вычислить отношение оставшихся  $\mu$ -независимых вкладов в общие множители выражений (3.69) и (3.74):

$$\begin{aligned} \frac{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})S'_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})} &= \\ &= \frac{\prod_{k=n-r+1}^n 2 \sin \pi(kb^2 + m + 1)}{\prod_{k=n-r+1}^n 2 \sin \pi(kb^2 + m - s + 1)} = (-1)^{rs}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Таким образом, как общие факторы, так и зависящие от  $\alpha'$  члены в уравнениях (3.69) и (3.74) в точности совпадают. Теперь рассмотрим величины

$$T_{n,m}^{r,s} = \frac{S'_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)} + \frac{S'_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n,m} + \mu)}, \quad (3.81)$$

$$T_{n,m}^{r,-s} = \frac{S'_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m} + \mu)} + \frac{S'_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n,m-s} + \mu)}, \quad (3.82)$$

которые входят в выражения (3.69) и (3.74) соответственно. Используя индукцию по  $r$  и  $s$ , мы покажем, что они равны. Для  $r, s = 0$  это очевидно. Предпо-

ложим, что  $T_{n,m}^{r,s} = T_{n,m}^{r,-s}$  для некоторой пары  $r, s$  и рассмотрим

$$\begin{aligned} T_{n,m}^{r+1,s} &= \frac{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r-1,m-s} + \mu)} + \dots = \\ &= \frac{2 \sin \pi b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)}{S_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)} \times \\ &\times \frac{S'_b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu) - 2\pi b \cos \pi b(2\alpha_{n-r-1,m-s} + \mu) S_b(2\alpha_{n-r-1,m-s} + \mu)}{2 \sin \pi b(2\alpha_{n-r,m-s} + \mu)} + \dots = \\ &= T_{n,m}^{r,s} - \pi b \operatorname{ctg} \pi((n-r-1)b^2 + \mu b), \quad (3.83) \end{aligned}$$

где в промежуточных шагах  $r$ -независимые вклады в  $T_{n,m}^{r,s}$  условно обозначены многоточием. Кроме того, помимо соотношения (A.5), мы воспользовались уравнением

$$S'_b(z+b) = 2 \sin \pi b z S'_b(z) + 2\pi b \cos \pi b z S_b(z), \quad (3.84)$$

которое получается дифференцированием (A.5). Аналогичным вычислением можно показать, что

$$T_{n,m}^{r+1,-s} = T_{n,m}^{r,-s} - \pi b \operatorname{ctg} \pi((n-r-1)b^2 + \mu b) \quad (3.85)$$

и значит  $T_{n,m}^{r+1,s} = T_{n,m}^{r+1,-s}$ . Индукция по  $s$  может быть проверена в полной аналогии и мы не приводим соответствующих выкладок.

Последним шагом в проверке равенства выражений (3.69) и (3.74) является сравнение функций

$$U_{n,m}^{r,s} = \frac{S''_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m-s+1})} + \frac{S''_b(2\alpha_{n+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m+1})}, \quad (3.86)$$

$$U_{n,m}^{r,-s} = \frac{S''_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})}{S'_b(2\alpha_{n-r+1,m+1})} + \frac{S''_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})}{S'_b(2\alpha_{n+1,m-s+1})}. \quad (3.87)$$

Здесь мы ограничимся замечанием, что следующее свойство

$$\begin{aligned} S''_b(2\alpha_{n+2,m+1}) &= \\ &= 2 \sin 2\pi b \alpha_{n+1,m+1} S''_b(2\alpha_{n+1,m+1}) + 4\pi b \cos 2\pi b \alpha_{n+1,m+1} S'_b(2\alpha_{n+1,m+1}) \quad (3.88) \end{aligned}$$

сводит сравнение  $U_{n,m}^{r,s}$  и  $U_{n,m}^{r,-s}$  к практически той же самой процедуре, что и сравнение  $T_{n,m}^{r,\pm s}$ , и поэтому будет опущено. Формула (3.88) получается двойным дифференцированием уравнения (A.5) и последующей подстановкой  $z = 2\alpha_{n+1,m+1}$  вместе с использованием того факта, что  $S_b(2\alpha_{n+1,m+1}) = 0$ .

Таким образом, мы показали, что

$$\mathcal{M}_{n,m}^{r,s}(0) = \mathcal{M}_{n,m}^{r,-s}(0), \quad n \geq r, m \geq s. \quad (3.89)$$

Совпадение этих функций при  $n < r, m < s$  тривиально, поскольку они обе равны нулю (3.70), (3.75). Остаётся показать равенство (3.71) и (3.76),(3.77). Это можно сделать совершенно аналогично уже проделанным вычислениям, и мы не приводим соответствующие выкладки. Таким образом, формула (3.57) доказана.

### 3.5 Обсуждение результатов главы

Мы перенесли разработанный ранее подход к непертурбативному исследованию модулярных преобразований на торический случай. Благодаря упрощениям технического характера, нам удалось получить более полный набор результатов, чем в сферическом случае. Разностные уравнения, описывающие торическое модулярное ядро, оказывается возможным записать в очень простой форме (3.12–3.14). В сферическом случае аналогичные уравнения включают гораздо более громоздкие коэффициенты (В.1). Тем не менее, естественно ожидать, что ключевые черты решений будут одинаковы в обоих случаях. Нам удалось доказать, что для случая центрального заряда общего вида найденные уравнения полностью определяют модулярное ядро. Кроме того, эти уравнения допускают запись решения в замкнутом виде как разложение по степеням параметра  $e^{4\pi b i \alpha}$  (3.33) или в виде более симметричного двойного разложения по  $e^{4\pi b i \alpha}$  и  $e^{4\pi b i \alpha'}$  одновременно (3.35).

Мы также доказали, что эти формулы могут рассматриваться как разложение в ряд интегрального представления модулярного ядра (3.38), найденного в работах [13; 14]. Отметим, что, несмотря на компактность и элегантность формулы (3.38), ею очень трудно пользоваться для практических вычислений. Например, в работе [29] обсуждается, как можно получить её пертурбативный предел, а в работе [12] делается попытка упростить эту формулу для частного случая  $\mu = 0$ . Оба вычисления оказываются весьма нетривиальными. С другой стороны, в обоих случаях модулярное ядро сводится к ядру Фурье, что легко увидеть, например, из (3.33). Действительно, эта формула изначально строи-

лась как непertурбативное разложение вблизи преобразования Фурье, поэтому переход к пертурбативному пределу очень прост – достаточно отбросить все степени  $e^{4\pi i b \alpha}$  и будет получено ядро Фурье, с точностью до общего множителя, связанного с выбранной нормировкой. При подстановке  $\mu = 0$  все коэффициенты в непertурбативном разложении (3.33) обращаются в ноль, давая тот же результат.

Более того, нам удалось установить прямую связь между свойствами невырожденных конформных блоков и аналитической структурой модулярного ядра, которая описывается формулой (3.47). Формула (3.33) позволила осуществить явную проверку в торическом случае, что делает крайне вероятным её справедливость и для сферического случая. Более того, уравнение (3.48) частично объясняют неожиданную структуру разложения (3.33). Из пертурбативного анализа нам известно, что в асимптотике модулярного ядра есть ядро Фурье  $e^{4\pi i \alpha \alpha'}$ , но наличие непertурбативных вкладов этим не мотивировано. Однако, уравнение (3.48), которое справедливо безо всяких приближений, не решается ядром Фурье и требует введения величин

$$\frac{e^{4\pi i \alpha \alpha'} \Big|_{\alpha'=\alpha_{r,s}}}{e^{4\pi i \alpha \alpha'} \Big|_{\alpha'=\alpha_{-r,s}}} \sim (e^{4\pi i b \alpha})^r, \quad (3.90)$$

как раз и появляющихся в непertурбативном разложении.

Сделаем ещё одно замечание. Формула Замолотчикова настолько ограничительна, что может быть использована для вычисления  $q$ -разложения конформных блоков без отсылки к определению. Несмотря на то, что у нас в распоряжении уже есть явная формула для модулярного ядра, интересно понять, существует ли для него подобная рекурсия, основанная исключительно на свойстве (3.48). К сожалению, это ожидание не оправдывается. Действительно, нашей целью является описать нетривиальную часть модулярного ядра  $M_{\alpha\alpha'}$  (3.54). Однако, эта часть регулярна и удовлетворяет лишь условию (3.57), которого недостаточно, чтобы построить рекуррентное соотношение, справедливое для всех  $\alpha$ . Другими словами, в полном модулярном ядре  $M_{\alpha\alpha'}$  (3.51) все полюса появляются из-за нормировочного фактора  $V_\alpha$ , не зависящего от  $\alpha'$ , а значит они общие для всех коэффициентов непertурбативного разложения, которое мы хотим описать. В противоположность этому, в разложении конформного блока (42) новые полюса появляются в каждом новом порядке по  $q$ . Именно поэто-

му в случае конформных блоков соотношение (3.44) связывает разные порядки  $q$ -разложения и позволяет осуществлять рекурсивные вычисления.

## Глава 4. Конформные блоки в замкнутом виде

Конформные блоки, известные в замкнутом виде, очень редки. Однако, в недавней работе [51] было найдено несколько новых примеров торических конформных блоков, которые могут быть представлены в виде конечной комбинации рядов Эйзенштейна. Эти примеры были найдены анализом АГТ-дуальных функций Некрасова в первых инстантонных порядках, демонстрировавших значительные упрощения при определённом подборе параметров. Все эти примеры имеют отличительную черту: они соответствуют конформным блокам, имеющим лишь конечное число полюсов по промежуточной размерности. В этой главе мы проанализируем примеры, найденные в работе [51], с точки зрения формулы Замолодчикова, описывающей полюсное разложение конформных блоков. Для торического конформного блока она записывается в следующем виде:

$$B_{\Delta}(\Delta_e, c|q) = \chi_{\Delta}(c|q) + \sum_{r,s \geq 1} \frac{R_{r,s}(\Delta_e, c)}{\Delta - \Delta_{r,s}} q^{\Delta - \Delta_{r,s}} B_{\Delta_{r,-s}}(\Delta_e, c|q), \quad (4.1)$$

где  $\Delta_{r,s}$  – нули Каца (22), а  $\chi_{\Delta}(c|q)$  – характер алгебры Вирасоро<sup>1</sup>

$$\chi_{\Delta}(c|q) = \frac{q^{\Delta - \frac{c-1}{24}}}{\eta(q)}. \quad (4.2)$$

Удобно ввести эллиптический конформный блок, нормировав исходный на асимптотику

$$H_{\Delta}(\Delta_e, c|q) = \frac{B_{\Delta}(\Delta_e, c|q)}{\chi_{\Delta}(c|q)}. \quad (4.3)$$

Тогда формула (4.1) переходит в следующее условие

$$H_{\Delta}(\Delta_e, c|q) = 1 + \sum_{rs \geq 1} \frac{R_{r,s}(\Delta_e, c)}{\Delta - \Delta_{r,s}} q^{rs} H_{\Delta_{r,-s}}(\Delta_e, c|q). \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $R_{r,s}$  уже были определены ранее (3.49), но нам будет удобно записать их в несколько ином виде

$$R_{r,s}(\Delta_e, c) = \frac{\alpha_{r,s}}{Q} \prod_{n=0}^{r-1} \prod_{m=0}^{s-1} \frac{(\Delta_e - \Delta_{2n+1, 2m+1})(\Delta_e - \Delta_{2n+1, -2m-1})}{\Delta'_{2n+1, 2m+1} \Delta_{2n+1, -2m-1}}. \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> $\eta(q)$  – эта-функция Дедекинда, определённая в приложении А.2.

Здесь  $\Delta'_{2n+1,2m+1} = 1$ , если  $n = m = 0$  (заметим, что  $\Delta_{1,1} = 0$ ) и  $\Delta'_{2n+1,2m+1} = \Delta_{2n+1,2m+1}$  в противном случае. Эквивалентность (3.49) и (4.5) проверяется непосредственно.

Мы покажем, что семейство конечно-полюсных конформных блоков бесконечно и опишем соответствующее ему множество параметров. Мы также применим построенный подход к сферическим конформным блокам и найдём точно решаемые примеры в этом случае. Кроме того, мы изучим модулярные преобразования конечно-полюсных блоков и сможем найти соответствующие модулярные ядра в простом замкнутом виде.

## 4.1 Торические конформные блоки в замкнутом виде

### 4.1.1 Метод построения

Изученные в [51] примеры подсказывают, что существуют конформные блоки, содержащие лишь конечное число полюсов по промежуточной размерности  $\Delta$ . Весьма естественно изучить эти примеры с точки зрения формулы Замолотчикова (4.4), сумма в которой при таких условиях должна обрываться на конечном слагаемом. Коэффициенты  $R_{r,s}(\Delta_e, c)$  (4.5) имеют вложенную структуру нулей: если выбрать  $\Delta_e$  таким образом, чтобы коэффициент  $R_{n,m}(\Delta_e, c)$  при некоторых  $n$  и  $m$  обращался в нуль, то и все коэффициенты  $R_{r,s}(\Delta_e, c)$  с  $r \geq n, s \geq m$  будут равны нулю. Это проиллюстрировано на рисунке 4.1(а). Однако, обращение в ноль только одного коэффициента  $R_{r,s}$  всё ещё оставляет две бесконечных полосы полюсов, расположенных при  $r \geq 1, 1 \leq s < m$  и  $1 \leq r < n, s \geq 1$ . Для того, чтобы получить конечное число полюсов необходимо, чтобы для некоторых  $N$  и  $M$  обращалась в ноль пара коэффициентов  $R_{N,1}(\Delta_e, c)$  и  $R_{1,M}(\Delta_e, c)$ . Это проиллюстрировано на рисунке 4.1(б). Как мы вскоре покажем, это требует фиксации как внешней размерности, так и центрального заряда. Важно заметить, что при необходимых значениях центрального заряда конформные блоки в правой части формулы (4.4) могут быть сингулярными. Поэтому при рассмотрении соответствующих особых точек тре-

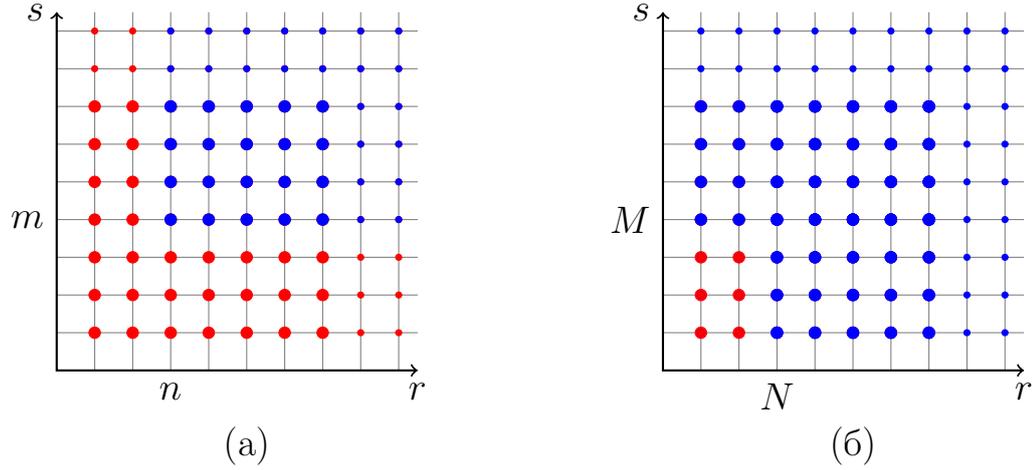


Рисунок 4.1 — Распределение полюсов в  $(r,s)$ -плоскости: (а) в случае, когда  $R_{n,m} = 0$ ; (б) в случае, когда  $R_{1,N} = R_{M,1} = 0$ . Полюса с ненулевыми коэффициентами  $R_{r,s}$  отмечены красным, остальные — синим.

буется аккуратность. Мы сперва проиллюстрируем эти идеи на примерах без полюса и с одним полюсом, а затем обсудим общую ситуацию.

### 4.1.2 Торические конформные блоки без полюсов

Простейшие примеры конечно-полюсных блоков возникают при  $N = M = 1$ . Тогда, выбрав параметры так, что  $R_{1,1} = 0$ , мы автоматически получим обращение в ноль всех полюсных вкладов в формуле (4.1). В явном виде это условие принимает вид

$$R_{1,1}(\Delta_e, c) = \frac{\alpha_{1,1} (\Delta_e - \Delta_{1,1})(\Delta_e - \Delta_{1,-1})}{Q \Delta'_{1,1} \Delta_{1,-1}} = \frac{1}{2} \Delta_e (\Delta_e - 1) = 0, \quad (4.6)$$

где было использовано, что  $\alpha_{1,1} = Q/2$ ,  $\Delta_{1,1} = 0$ ,  $\Delta_{1,-1} = 1$ ,  $\Delta'_{1,1} = 1$ . Таким образом, можно выбрать  $\Delta_e = 0$  или  $\Delta_e = 1$ . Поскольку любой коэффициент  $R_{r,s}(\Delta_e, c)$  с  $r, s \geq 1$  при таком выборе  $\Delta_e$  будет равен нулю, получаем

$$B_{\Delta}(0, c|q) = B_{\Delta}(1, c|q) = \chi_{\Delta}(c|q), \quad (4.7)$$

где  $\chi_{\Delta}(c|q)$  определён формулой (4.2). При  $\Delta_e = 0$  это утверждение легко вывести из определения (41), в котором оператор внешнего поля  $V_{\Delta_e}$  редуцируется к тождественному. Однако, уже для  $\Delta_e = 1$  это свойство нетривиально. Подчерк-

нём, что справедливость решений (4.7) независимо от значения центрального заряда является особенностью безполюсного случая.

### 4.1.3 Торические конформные блоки с одним полюсом

В этом разделе будут проведён весьма технический анализ, который, тем не менее, удастся перенести на общую ситуацию. Случай одного полюса демонстрирует все основные свойства более сложных примеров конечно-полюсных конформных блоков, но требует меньше вычислительных усилий.

Для получения однополюсного конформного блока необходимо потребовать, чтобы  $R_{1,2}$  и  $R_{2,1}$  обращались в ноль<sup>2</sup>. В явном виде

$$R_{1,2} = 0 : \frac{\alpha_{1,2} (\Delta_e - \Delta_{1,3})(\Delta_e - \Delta_{1,-3})(\Delta_e - \Delta_{1,1})(\Delta_e - \Delta_{1,-1})}{Q \Delta_{1,3} \Delta_{1,-3} \Delta'_{1,1} \Delta_{1,-1}} = 0 , \quad (4.8)$$

$$R_{2,1} = 0 : \frac{\alpha_{2,1} (\Delta_e - \Delta_{3,1})(\Delta_e - \Delta_{3,-1})(\Delta_e - \Delta_{1,1})(\Delta_e - \Delta_{1,-1})}{Q \Delta_{3,1} \Delta_{3,-1} \Delta'_{1,1} \Delta_{1,-1}} = 0 . \quad (4.9)$$

Выбор  $\Delta_e = \Delta_{1,1} = 0$  или  $\Delta_e = \Delta_{1,-1} = 1$  сводит задачу к предыдущему безполюсному случаю. Новые решения возникают при

$$R_{1,2} = 0 : \frac{\alpha_{1,2} (\Delta_e - \Delta_{1,3})(\Delta_e - \Delta_{1,-3})}{Q \Delta_{1,3} \Delta_{1,-3}} = 0 , \quad (4.10)$$

$$R_{2,1} = 0 : \frac{\alpha_{2,1} (\Delta_e - \Delta_{3,1})(\Delta_e - \Delta_{3,-1})}{Q \Delta_{3,1} \Delta_{3,-1}} = 0 . \quad (4.11)$$

Для согласованности этих уравнений необходимо выполнение одного из следующих условий

$$\Delta_{1,3} = \Delta_{3,1}, \quad \Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1}, \quad \Delta_{1,-3} = \Delta_{3,1}, \quad \Delta_{1,-3} = \Delta_{3,-1} . \quad (4.12)$$

Поскольку величины  $\Delta_{r,s}$  зависят только от  $b$  (22), данные уравнения накладывают ограничения на центральный заряд. Если хотя бы одно из них выполнено, мы можем выбрать внешнюю размерность  $\Delta_e$  равной совпадающей паре размерностей (например  $\Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,1}$ ), что сделает числители обоих выражений

<sup>2</sup>Оказывается, что есть ещё одна ситуация, когда может возникнуть однополюсный блок: если в формуле (4.4) есть несколько вкладов, но их полюса совпадают для данного центрального заряда. Мы вернёмся к этому вопросу в разделе 4.1.4.

$R_{1,2}(\Delta_e, c)$  и  $R_{2,1}(\Delta_e, c)$  нулевыми. Существует шесть неэквивалентных решений уравнений (4.12):

$$\alpha_{1,1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,1} = 1, \quad c = 1, \quad (4.13)$$

$$\alpha_{1,-1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,1} = -3, \quad c = 25, \quad (4.14)$$

$$\alpha_{1,-2} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1} = -2, \quad c = 28, \quad (4.15)$$

$$\alpha_{2,1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1} = 3, \quad c = -2, \quad (4.16)$$

$$\alpha_{1,1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,-3} = \Delta_{3,-1} = 4, \quad c = 1, \quad (4.17)$$

$$\alpha_{1,-1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,-3} = \Delta_{3,-1} = 0, \quad c = 25. \quad (4.18)$$

Из условия  $\Delta_{r,s} = \Delta_{m,n}$  следует, что либо  $\alpha_{r+n,s+m} = 0$ , либо  $\alpha_{r-n,s-m} = 0$ . Мы часто будем говорить об этих уравнениях на  $\alpha$  как о решениях, поскольку они однозначно определяют центральный заряд теории, но при этом являются более компактными и структурированными, чем явные значения  $c$ , которым они соответствуют. Эти уравнения выписаны в первом столбце. Во втором столбце перечислены совпадающие пары размерностей и соответствующие значения, которые должна принимать внешняя размерность. В последнем столбце приводятся явные значения центральных зарядов<sup>3</sup>.

Решения с  $\Delta_e = 0$  и  $\Delta_e = 1$  (в первой и последней строке) сводят рассмотрение к безполюсному случаю и не представляют интереса. Оставшиеся четыре случая оказываются довольно разными, и будут проанализированы по одному. Сразу отметим, что условия (4.13)-(4.18) гарантируют лишь обращение в ноль числителей выражений  $R_{1,2}$  и  $R_{2,1}$ . В общем случае этого недостаточно для получения однополюсного конформного блока.

**Случай:**  $\alpha_{1,-1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,1} = -3, \quad c = 25$

Параметры подобраны таким образом, что числители выражений (4.10) и (4.11) равны нулю. Однако, при  $\alpha_{1,-1} = 0$  мы также имеем  $\Delta_{1,-3} = \Delta_{-3,1} = 0$ . Таким образом, для этого значения центрального заряда знаменатели (4.10) и (4.11) также равны нулю, и необходимо разрешить особенность.

Другими словами, требование обнуления числителей обоих выражений  $R_{1,2}$  и  $R_{2,1}$  фиксирует не только внешнюю размерность, но и центральный заряд. При этом важен порядок, в котором мы фиксируем эти значения. Если сперва

<sup>3</sup>Имеется шесть, а не восемь решений, поскольку условия  $\Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1}$  и  $\Delta_{1,-3} = \Delta_{3,1}$  могут быть сведены друг к другу, заменой  $b \rightarrow b^{-1}$ , которая переставляет  $r \leftrightarrow s$  в  $\Delta_{r,s}$ , и использованием  $\Delta_{r,s} = \Delta_{-r,-s}$ . Поскольку инверсия  $b$  не меняет центральный заряд, оба уравнения приводят к одним и тем же конформным блокам.

положить  $\alpha_{1,-1} = 0$ , сохраняя  $\Delta_e$  произвольным, то оба выражения сингулярны. С другой стороны, сперва положив  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$ , мы обнуляем  $R_{1,2}$ , а также любой из коэффициентов  $R_{r \geq 1, s \geq 2}$ . Однако,  $R_{2,1}(\Delta_{1,3}, c)$  не равен нулю при произвольном центральном заряде. В действительности предел этой величины при  $\alpha_{1,-1} \rightarrow 0$  конечен:

$$\lim_{\alpha_{1,-1} \rightarrow 0} R_{2,1}(\Delta_{1,3}, c) = -18 . \quad (4.19)$$

Таким образом, текущий выбор параметров не соответствует однополюсному конформному блоку. Оказывается, что ситуация ещё сложнее. Прямое вычисление даёт

$$\begin{aligned} H_{\Delta}(-3, 25|q) = 1 + \frac{6q}{\Delta} + \frac{36(5 + 2\Delta)q^2}{\Delta(5 + 4\Delta)} + \frac{(840 + 96\Delta)q^3}{\Delta(5 + 4\Delta)} + \\ + \frac{24(390 + 116\Delta + 7\Delta^2)q^4}{\Delta(3 + \Delta)(5 + 4\Delta)} + O(q^5) . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Дополнительный полюс при  $\Delta = -5/4$  ожидаем из-за ненулевого коэффициента  $R_{2,1}$ , который привносит полюс в точке  $\Delta = \Delta_{2,1}$  ( $= -5/4$  при  $\alpha_{1,-1} = 0$ ). Тем не менее, полюс в точке  $\Delta = -3$  нуждается в объяснении. Оказывается, что условие  $R_{r,s} = 0$  само по себе не достаточно для отсутствия полюса при  $\Delta = \Delta_{r,s}$  в выражении (4.4). Причина состоит в том, что сопровождающий коэффициент  $H_{\Delta_{r,-s}}$  может быть сингулярен, так что их произведение  $R_{r,s}H_{\Delta_{r,-s}}$  остаётся конечным.

В свете этой трудности рассмотрим ситуацию более внимательно. После того, как внешняя размерность выбрана в виде  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$ , а центральный заряд сохранён произвольным, общий вид формулы (4.4) сводится к

$$H_{\Delta}(\Delta_{1,3}, c|q) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{R_{r,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta - \Delta_{r,1}} q^r H_{\Delta_{r,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) . \quad (4.21)$$

Сумма ограничена на  $s = 1$ , поскольку коэффициенты  $R_{r,s}(\Delta_e, c)$  с  $s \neq 1$  равны нулю при  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$ . Подставим в эту формулу  $\Delta = \Delta_{n,-1}$

$$H_{\Delta_{n,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{R_{r,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta_{n,-1} - \Delta_{r,1}} q^r H_{\Delta_{r,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) . \quad (4.22)$$

Для некоторых специальных значений центрального заряда размерность  $\Delta_{n,-1}$  совпадает с  $\Delta_{r,1}$ . В точке  $\alpha_{1,-1} = 0$  это случается, когда  $n = r + 2$ . Простейший пример возникает при  $r = 1$  и  $n = 3$ , когда  $\Delta_{3,-1} = \Delta_{1,1}$ . Следовательно,

конформный блок  $H_{\Delta_{3,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q)$  сингулярен при  $\alpha_{1,-1} = 0$  и произведение  $R_{3,1}H_{\Delta_{3,-1}}$  оказывается конечным и привносит полюс в точке  $\Delta = \Delta_{3,1}$  ( $= -3$  при  $\alpha_{1,-1} = 0$ ), который в точности соответствует неожиданному полюсу в формуле (4.20). Более того, можно показать, что благодаря этому же механизму появляется бесконечное число дополнительных полюсов (см. приложение E). Этой ситуации может быть противопоставлен случай, рассмотренный ниже, в котором появляется лишь конечное число дополнительных полюсов.

**Случай:**  $\alpha_{1,-2} = 0$ ,  $\Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1} = -2$ ,  $c = 28$

Выбор  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$  делает все коэффициенты  $R_{r \geq 1, s \geq 2}$  равными нулю. В противоположность случаю  $\alpha_{1,-1} = 0$ , случай  $\alpha_{1,-2} = 0$  не приводит к появлению нулей в знаменателях выражений (4.10) и (4.11). Можно показать, что любой коэффициент  $R_{r \geq 2, s=1}$  обнуляется при выбранных параметрах, в согласии с наивным ожиданием. Таким образом,  $R_{1,1}$  является единственным ненулевым коэффициентом. Тем не менее, мы по-прежнему не получаем однополюсный конформный блок. Причина снова заключается в том, что некоторые из конформных блоков, входящие в коэффициенты при полюсах (4.1), сингулярны при данном центральном заряде. Действительно, рассмотрим в формуле (4.4) вклад члена с  $r = 2, s = 1$ , в котором появляется конформный блок  $H_{\Delta_{2,-1}}$ . Мы можем доказать его сингулярность, используя те же аргументы, что и в предыдущем случае. Формула (4.4) для  $\Delta = \Delta_{2,-1}$  в двух первых порядках даёт

$$H_{\Delta_{2,-1}}(\Delta_e, c|q) = 1 + \frac{R_{1,1}(\Delta_e, c)}{\Delta_{2,-1} - \Delta_{1,1}} q H_{\Delta_{1,-1}}(\Delta_e, c|q) + \dots \quad (4.23)$$

В пределе  $\alpha_{1,-2} \rightarrow 0$  размерность  $\Delta_{2,-1} = 0$  и, следовательно, совпадает с  $\Delta_{1,1} \equiv 0$ . Поскольку  $R_{1,1}$  не равен нулю, конформный блок  $H_{\Delta_{2,-1}}$  оказывается сингулярным. Когда промежуточная размерность  $\Delta$  в формуле (4.21) находится в общем положении, эта сингулярность сокращается нулём коэффициента  $R_{2,1}$ , что приводит к конечному вкладу от члена с полюсом в точке  $\Delta = \Delta_{2,1} = -2$ . Таким образом, это всё ещё не искомый однополюсный блок. Кроме того, так же, как и в предыдущем случае, новый полюс не является единственным, а лишь первым в бесконечном семействе. В разделе 4.1.4 мы объясняем, что такое поведение всегда встречается для центральных зарядов больших единицы, так что настоящие конечно-полюсные блоки могут появляться лишь при  $c \leq 1$ .

**Случай:**  $\alpha_{2,1} = 0$ ,  $\Delta_e = \Delta_{1,3} = \Delta_{3,-1} = 3$ ,  $c = -2$

Этот случай схож с первым рассмотренным примером (при  $\alpha_{1,-1} = 0$ ) в том, что в знаменателе  $R_{2,1}$  появляется ноль при подстановке  $\alpha_{2,1} = 0$  ( $\Delta_{3,1} = 0$ ).

В противоположность предыдущему случаю, дополнительный множитель  $\alpha_{2,1}$  в  $R_{2,1}$  (4.11) также оказывается равным нулю. Так что итоговое выражение в конечном счёте обнуляется  $R_{2,1} = 0$ . Тем не менее, коэффициент  $R_{3,1}$  при этом отличен от нуля

$$R_{3,1}(\Delta_e, c) = \frac{\alpha_{3,1} (\Delta_e - \Delta_{5,1})(\Delta_e - \Delta_{5,-1})}{\alpha_{2,1} \Delta_{5,1} \Delta_{5,-1}} R_{2,1}(\Delta_e, c), \quad \lim_{c \rightarrow -2} R_{3,1}(\Delta_{1,3}, c) = -15. \quad (4.24)$$

Причина заключается в том, что  $\alpha_{3,1}$  не равно нулю при текущем выборе параметров, так что не возникает дополнительного нуля, который мог бы компенсировать обнуление  $\Delta_{3,1}$ . Тем не менее, все коэффициенты  $R_{r,1}$  при  $r \geq 4$  содержат множитель  $(\Delta_e - \Delta_{7,-1})$ , который также равен нулю, поскольку  $\Delta_{7,-1} = \Delta_e = 3$  при  $\alpha_{2,1} = 0$ . Мы приходим к заключению, что только коэффициенты  $R_{1,1}$  и  $R_{3,1}$  остаются ненулевыми. Ключевым свойством настоящего примера является то, что член с  $R_{3,1}$  не добавляет нового полюса, поскольку  $\Delta_{3,1} = \Delta_{1,1} = 0$  при  $\alpha_{2,1} = 0$ .

Как мы видели в предыдущем примере, обращение в нуль  $R_{r,s}$  недостаточно для отсутствия в конформном блоке полюса в точке  $\Delta = \Delta_{r,s}$ , смежный множитель  $H_{\Delta_{r,-s}}$  также должен быть несингулярен. Напомним, что при подстановке  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$  формула Замолотчикова сводится к (4.21). Следовательно, если  $\Delta_e = \Delta_{1,3}$ , нам следует проверить на сингулярность при  $\alpha_{2,1} = 0$  только конформный блок  $H_{\Delta_{n \geq 1, -1}}(\Delta_{1,3}, c|q)$ . Сингулярность в  $H_{\Delta_{n,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q)$  может появиться, только если (i)  $\Delta_{n,-1} = \Delta_{r,1}$  для некоторого  $r$  и (ii) коэффициент  $R_{r,1}(\Delta_{1,3}, c)$  не равен нулю для этого  $r$ . Поскольку ненулевые коэффициенты  $R_{r,1}$  имеют место только при  $r = 1$  и  $r = 3$ , и, поскольку  $\Delta_{1,1} = \Delta_{3,1} = 0$ , условие (i) требует  $\Delta_{n,-1} = 0$ , что не может быть выполнено при  $\alpha_{2,1} = 0$ . Следовательно, ни один из конформных блоков, входящих в разложение (4.21), не является сингулярным при  $\alpha_{2,1} = 0$ . Таким образом, мы наконец находим подлинный однополюсный конформный блок, который имеет следующее разложение

$$H_{\Delta}(\Delta_{1,3}, c|q) = 1 + \frac{R_{1,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta - \Delta_{1,1}} q H_{\Delta_{1,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) + \frac{R_{3,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta - \Delta_{3,1}} q^3 H_{\Delta_{3,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q). \quad (4.25)$$

В это уравнение можно подставить явные величины  $\Delta_{1,3}$ ,  $\Delta_{1,1}$  и  $c$ , но текущий вид кажется нам более наглядным.

На первый взгляд кажется, что уравнение (4.25) позволяет легко найти полную зависимость конформного блока от  $q$ . Действительно, подставив  $\Delta = \Delta_{1,-1}$  и  $\Delta = \Delta_{3,-1}$  получим пару уравнений, которые могут рассматриваться как линейная система на  $H_{\Delta_{1,-1}}$  и  $H_{\Delta_{3,-1}}$ . Найдя эти переменные можно подставить их в уравнение (4.25), и таким образом явно найти функцию  $H_{\Delta}$  во всех порядках по  $q$ .

Трудность заключается в том, что уравнение (4.25) не выполняется для некоторых значений промежуточной размерности  $\Delta$ , в частности для  $\Delta = \Delta_{1,-1}$ . Причина снова кроется в порядке предельных переходов. Положим  $\Delta = \Delta_{1,-1}$  в (4.21)

$$H_{\Delta_{1,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{R_{r,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta_{1,-1} - \Delta_{r,1}} q^r H_{\Delta_{r,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q). \quad (4.26)$$

Предел этого соотношения при  $\alpha_{2,1} = 0$  отличен от предела при произвольном параметре  $\Delta$ . Несмотря на то, что конформные блоки  $H_{\Delta_{r,-1}}$  не сингулярны при  $\alpha_{2,1} = 0$ , знаменатель выражения  $\Delta_{n,1} - \Delta_{r,-1}$  может обнулиться и тем самым сохранить вклад члена  $R_{r,1}$ . Когда  $\alpha_{2,1} = 0$ , получаем  $\Delta_{n,1} = \Delta_{r,-1}$  при  $r = n + 4$ . В частности,  $\Delta_{5,1} = \Delta_{1,-1}$ . В действительности

$$\lim_{c \rightarrow -2} \frac{R_{5,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta_{1,-1} - \Delta_{5,1}} = 14. \quad (4.27)$$

Таким образом, при  $\Delta = \Delta_{1,-1}$  в соотношении (4.25) появляется дополнительный член

$$H_{\Delta_{1,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) = 1 + \frac{R_{1,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta - \Delta_{1,1}} q H_{\Delta_{1,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) + \frac{R_{3,1}(\Delta_{1,3}, c)}{\Delta - \Delta_{3,1}} q^3 H_{\Delta_{3,-1}}(\Delta_{1,3}, c|q) + 14q^5 H_{\Delta_{5,-1}}(\Delta_{1,3}, c). \quad (4.28)$$

В свою очередь, аналог уравнения (4.25), справедливый при  $\Delta = \Delta_{5,-1}$ , содержит  $H_{\Delta_{9,-1}}$  и так далее. Вследствие этого, уравнение (4.25) не может быть сведено к конечной линейной системе на некоторое подмножество  $H_{\Delta_{n,-1}}$ .

Тем не менее, довольно неожиданно оказывается, что зависимость от  $q$  для конечно-полюсных блоков может быть найдена точно. Известно (см., например, работу [33]), что торические конформные блоки могут быть выражены через ряды Эйзенштейна  $E_2, E_4, E_6$ . В общем случае, однако, входят произвольные степени указанных рядов. Следуя работе [51], мы замечаем, что конечно-полюсные конформные блоки обладают ещё одним замечательным свойством:

они содержат лишь конечное количество рядов Эйзенштейна, которое, по всей видимости, пропорционально количеству полюсов.

Как было показано, формула (4.25) гарантирует лишь наличие единственного полюса в конформном блоке при  $\Delta = 0$ , но не упрощает нахождение полной зависимости от  $q$ . С другой стороны, коэффициенты  $q$ -разложения конформного блока могут быть вычислены в любом конечном порядке при помощи уравнения (4.1) или исходного определения (41). Специализируя это общее разложение на случай  $\Delta_e = 3, c = -2$ , найдём

$$H_{\Delta}(3, -2|q) = 1 + \frac{3q}{\Delta} + \frac{9q^2}{\Delta} + \frac{12q^3}{\Delta} + \frac{21q^4}{\Delta} + \frac{18q^5}{\Delta} + O(q^6) . \quad (4.29)$$

В этом выражении узнаётся второй ряд Эйзенштейна  $E_2$  A.2.

$$H_{\Delta}(3, -2|q) = 1 + \frac{1 - E_2(q)}{8\Delta} . \quad (4.30)$$

Это гипотетическое выражение может быть проверено до высоких порядков разложения по  $q$ . По всей видимости, из-за трудностей описанных выше, нет простого способа вывести или проверить эту формулу во всех порядках непосредственно из уравнения Замолодчикова. В этом отношении наш анализ не расширяет подход работы [51].

**Случай:**  $\alpha_{1,1} = 0, \quad \Delta_e = \Delta_{1,-3} = \Delta_{3,-1} = 4, \quad c = 1$

Этот пример обладает своими отличительными чертами, но не будет рассмотрен с той же подробностью, что и предыдущие. Подобно случаю ( $\alpha_{2,1} = 0$ ) фиксирование внешней размерности  $\Delta_e = \Delta_{1,-3}$  и переход к пределу  $\alpha_{1,1} \rightarrow 0$  оставляет только два ненулевых коэффициента  $R_{r,s}$ :  $R_{1,1}$  и  $R_{2,1}$ . Более того, ни один из блоков  $H_{\Delta_{r,-s}}$ , остающихся в формуле Замолодчикова при  $\Delta_e = \Delta_{1,-3}$ , не является сингулярным. Однако,  $\Delta_{2,1} = 1/4$  при  $c = 1$ , что не совпадает с  $\Delta_{1,1} = 0$ . Таким образом, изучаемый случай не приводит к однополюсному конформному блоку. Тем не менее, в противоположность примерам с  $c = 25$  и  $c = 28$ , появляется лишь один дополнительный полюс, так что мы получаем истинный двухполюсный блок. Опуская выкладки, приведем результат

$$H_{\Delta}(4,1|q) = 1 + \frac{1 - E_2(q)}{4\Delta - 1} + \frac{E_2(q)^2 - E_4(q)}{48\Delta(4\Delta - 1)} . \quad (4.31)$$

Как и прежде, эта формула может быть сверена с общим разложением конформного блока вплоть до любого желаемого порядка по  $q$ .

#### 4.1.4 Общий случай

Исследование случаев, которые, как мы ожидали, должны приводить к однополюсным конформным блокам, оказалось гораздо менее тривиальным, чем можно ожидать при первом взгляде на формулу (4.4). Мы увидели, что некоторые из потенциальных решений (4.13)-(4.18) приводят к безполюсным или двухполюсным блокам, в то время как некоторые другие вообще не соответствуют конечному количеству полюсов. Тем не менее, нам удастся обобщить выбранный подход.

Выберем два числа  $N$  и  $M$  и потребуем, чтобы коэффициенты  $R_{1,N+1}$  и  $R_{M+1,1}$  обращались в нуль. В явном виде это записывается как

$$R_{1,M+1} = 0 : \quad \frac{\alpha_{1,M}}{\alpha_{1,M-1}} \frac{(\Delta_e - \Delta_{1,2M+1})(\Delta_e - \Delta_{1,-2M-1})}{\Delta_{1,2M+1}\Delta_{1,-2M-1}} R_{1,M}(\Delta_e, c) = 0, \quad (4.32)$$

$$R_{N+1,1} = 0 : \quad \frac{\alpha_{N,1}}{\alpha_{N-1,1}} \frac{(\Delta_e - \Delta_{2N+1,1})(\Delta_e - \Delta_{2N+1,-1})}{\Delta_{2N+1,1}\Delta_{2N+1,-1}} R_{N,1}(\Delta_e, c) = 0. \quad (4.33)$$

При  $R_{1,M}(\Delta_e, c) = 0$  или  $R_{N,1}(\Delta_e, c) = 0$  ситуация сводится к предыдущему шагу и не нуждается в рассмотрении. Оставшиеся возможности описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2M+1} &= \Delta_{2N+1,1}, & \Delta_{1,2M+1} &= \Delta_{2N+1,-1}, & \Delta_{1,-2M-1} &= \Delta_{2N+1,1}, & \Delta_{1,-2M-1} &= \Delta_{2N+1,-1}, \\ \alpha_{N,-M} &= 0, & \alpha_{N,-M-1} &= 0, & \alpha_{N+1,-M} &= 0, & \alpha_{N+1,-M-1} &= 0, \\ \alpha_{N+1,M+1} &= 0, & \alpha_{N+1,M} &= 0, & \alpha_{N,M+1} &= 0, & \alpha_{N,M} &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

В первой строке записаны исходные условия на размерности. Каждое из этих условий имеет два решения вида  $\alpha_{n,m} = 0$  для некоторых  $n$  и  $m$ , обобщающие решения (4.13)-(4.18). Они записаны в оставшихся двух строках. На примере случая  $N = M = 1$  мы видели, что не каждое из этих решений приводит к конечно-полюсным блокам. Непосредственные вычисления с использованием компьютера для нескольких первых пар  $(N, M)$  вплоть до  $N \times M = 6$  обнаруживают общую тенденцию: только решения  $\alpha_{n,m} = 0$ , у которых  $n$  и  $m$  одного знака (указанные в последней строке (4.34)), приводят к конечно-полюсным блокам. При  $\alpha_{n,m} = 0$  центральный заряд равен

$$c = 1 - 6 \frac{(n-m)^2}{nm}. \quad (4.35)$$

Если  $n$  и  $m$  одного знака, эта формула в точности описывает центральные заряды минимальных моделей (включая  $s = 1$ ). Таким образом, естественно высказать гипотезу о том, что конечно-полюсные конформные блоки существуют только в теориях с центральными зарядами минимальных моделей. Эта гипотеза доказана в приложении **E** для случая  $M = 1$  и произвольного  $N$ . В дальнейшем мы будем предполагать её справедливость в общем случае.

Для данного значения центрального заряда существует более одной внешней размерности, которая приводит к конечно-полюсному блоку. Действительно, из уравнения (4.34) можно найти четыре внешних размерности, возможных при  $\alpha_{N,M} = 0$ ,

$$\alpha_{N,M} = 0 : \quad \Delta_e \in \{\Delta_{1,2M-1}, \Delta_{1,2M+1}, \Delta_{1,-2M+1}, \Delta_{1,-2M-1}\} . \quad (4.36)$$

В явном виде они равны

$$\Delta_e \in \{(N-1)(M-1), NM + N - M, NM - N + M, (N+1)(M+1)\} . \quad (4.37)$$

Обратим внимание, что условия  $\alpha_{N,M} = 0$  и  $\alpha_{N',M'} = 0$  приводят к одному и тому же центральному заряду, если  $N'/N = M'/M$ . Для заданного центрального заряда из множества (4.35) предположим, что  $n$  и  $m$  взаимно просты. Тогда другие возможности, приводящие к этому центральному заряду, описываются условием  $\alpha_{pN,pM} = 0$  для произвольного  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Однако, внешние размерности (4.37) не инвариантны относительно масштабирования  $(n, m) \rightarrow (pn, pm)$ . Следовательно, при центральном заряде (4.35) возможны следующие внешние размерности<sup>4</sup>

$$\Delta_e \in \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbb{Z}_+ \\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} \left\{ (pn-1)(pm-1), p^2nm + pn - pm \right\} . \quad (4.38)$$

Таким образом, бесконечное число внешних размерностей приводит к появлению конечно-полюсных блоков при заданном центральном заряде. Все примеры, найденные в работе [51], согласуются с этой классификацией. Однако, точное число полюсов в каждом конкретном решении из (4.38) кажется довольно нерегулярной функцией  $n$ ,  $m$  и  $p$ . Вопрос о количестве полюсов получит

---

<sup>4</sup>Отметим, что достаточно масштабировать только две размерности в уравнении (4.37), поскольку две другие получаются из них отражением  $N, M \rightarrow -N, -M$ , которое автоматически учитывается, когда параметр  $p$  принимает отрицательные значения.

неожиданно простой ответ в разделе 4.3.1, где будут рассмотрены модулярные преобразования конечно-полюсных конформных блоков.

Следует сделать ещё одно важное замечание. В работе [51] обнаружен ещё один пример однополюсного конформного блока, отличающийся от (4.30). Он возникает, когда  $\Delta_e = 2, c = 0$ . В нашем подходе он может быть найден как решение уравнений  $\alpha_{N+1, M+1} = 0, \Delta_e = \Delta_{1, 2M+1}$  для  $N = 2, M = 1$ . Таким образом, этот однополюсный блок возникает тогда, когда наивно можно ожидать двухполюсный блок. Причина состоит в том, что полюса при ненулевых коэффициентах  $R_{1,1}$  и  $R_{2,1}$  совпадают при  $c = 0$ :  $\Delta_{1,1} = \Delta_{2,1} = 0$ . Мы отмечали такую возможность ранее. Решения (4.34), хотя и не были специально разработаны для учёта таких случаев, описывают их. Весьма вероятно, что конформные блоки с внешними размерностями (4.38) исчерпывают множество всех конечно-полюсных блоков при заданном значении центрального заряда (4.35).

## 4.2 Сферические конформные блоки в замкнутом виде

### 4.2.1 Метод построения и отличия от торического случая

Мы переходим к обсуждению сферических конечно-полюсных конформных блоков, которые разделяют большинство особенностей со своими торическими аналогами. Эллиптическая форма сферического конформного блока (31) удовлетворяет соотношению Замолотчикова (32). Коэффициенты в вычетах даются выражением  $R_{r,s}(\Delta_i, c) = A_{r,s}(c)P_{r,s}(\Delta_i, c)$ , где не зависящий от  $\Delta_i$  множитель тот же, что и в торическом случае

$$A_{r,s} = \frac{\alpha_{r,s}}{Q} \prod_{n=0}^{r-1} \prod_{m=0}^{s-1} \frac{1}{\Delta'_{2n+1, 2m+1} \Delta_{2n+1, -2m-1}}, \quad (4.39)$$

а остаток равен

$$P_{r,s}(\Delta_i, c) = \prod_{i=1}^4 \prod_{\substack{n=1-r \\ \Delta n=2}}^{r-1} \prod_{\substack{m=1-s \\ \Delta m=2}}^{s-1} (\mu_i - \alpha_{n,m}). \quad (4.40)$$

Величины  $\mu_i$  связаны с моментами  $\alpha_i$  следующим образом

$$\mu_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \mu_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \mu_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \mu_4 = -\alpha_3 + \alpha_4. \quad (4.41)$$

Основой нашего анализа в торическом случае стал тот факт, что торические коэффициенты  $R_{r,s}(\Delta_e, c)$  (4.5) имеют вложенную структуру нулей, т.е. что обнуление некоторого  $R_{n,m}$  подразумевает обнуление всех  $R_{r \geq n, s \geq m}$ . Ситуация в сферическом случае схожа, но имеет отличия. Самым важным является то, что в сферических коэффициентах  $R_{r,s}$  (4.40) произведения по  $n$  и  $m$  берутся с шагом 2, т.е. они принимают значения

$$n = 1 - r, 3 - r, \dots, r - 3, r - 1, \quad m = 1 - s, 3 - s, \dots, s - 3, s - 1. \quad (4.42)$$

Таким образом, нули  $R_{n,m}$  в общем случае наследуются не всеми  $R_{r \geq n, s \geq m}$ , а только теми, у которых  $r = n + 2k, s = m + 2l$  при  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ . Поэтому удобно разделить пары  $(r, s)$  на четыре семейства

$$\bigcup_{r,s \geq 1} R_{r,s} = \bigcup_{n,m \geq 1} \{R_{2n-1, 2m-1}, R_{2n-1, 2m}, R_{2n, 2m-1}, R_{2n, 2m}\}, \quad (4.43)$$

так что внутри каждого семейства нули, появившиеся в младших порядках, сохраняются и во всех старших.

Таким образом, в сферическом случае есть четыре независимые сетки полюсов и четыре внешних размерности в роли свободных параметров. Общая картина получается похожей на торический случай. Обнуление всех полюсных вкладов кроме конечного подмножества возможно только при специальных центральных зарядах. Таким образом, конечно-полюсные сферические блоки обычно встречаются только, когда все внешние размерности и центральный заряд принимают специальные значения. Исключением является безполюсной случай, который мы сейчас обсудим.

### 4.2.2 Сферические конформные блоки без полюсов

Чтобы получить безполюсной сферический блок, необходимо обнулить первые коэффициенты всех четырёх полюсных семейств (4.43):

$$R_{1,1} = 0 : \quad \prod_{i=1}^4 (\mu_i - \alpha_{0,0}) = 0 , \quad (4.44)$$

$$R_{1,2} = 0 : \quad \prod_{i=1}^4 (\mu_i - \alpha_{0,1})(\mu_i + \alpha_{0,1}) = 0 , \quad (4.45)$$

$$R_{2,1} = 0 : \quad \prod_{i=1}^4 (\mu_i - \alpha_{1,0})(\mu_i + \alpha_{1,0}) = 0 , \quad (4.46)$$

$$R_{2,2} = 0 : \quad \prod_{i=1}^4 (\mu_i - \alpha_{1,1})(\mu_i + \alpha_{1,1})(\mu_i - \alpha_{1,-1})(\mu_i + \alpha_{1,-1}) = 0 . \quad (4.47)$$

При записи этих уравнений было использовано соотношение  $\alpha_{-n,-m} = -\alpha_{n,m}$ . Предположим, что центральный заряд находится в общем положении, так что нам не придётся рассматривать потенциально сингулярные множители в (4.39). Это также означает, что у уравнений выше нет совпадающих корней.

Уравнение (4.44) фиксирует один из параметров. С точностью до перестановки внешних размерностей предположим, что оно фиксирует  $\mu_1$ , и выберем  $\mu_1 = \alpha_{0,0}$ . Рассмотрим следующее уравнение (4.45) как ограничение на  $\mu_2$  и положим  $\mu_2 = \alpha_{0,1}$ . Альтернативный выбор ( $\mu_2 = -\alpha_{0,1}$ ) приводит к перестановке внешних размерностей  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$  (4.41). Аналогично можно выбрать  $\mu_3 = \alpha_{1,0}$ , чтобы удовлетворить условию (4.46). Наконец, уравнение (4.47) предоставляет четыре варианта для  $\mu_4$ :  $\mu_4 = \pm\alpha_{1,1}$  или  $\mu_4 = \pm\alpha_{1,-1}$ . Разница между знаками в каждом из случаев снова сводится к перестановке внешних размерностей ( $\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_4$ ) и не будет здесь учитываться. Таким образом, получаем два неэквивалентных решения (не связанных перестановкой внешних размерностей), которые отличаются выбором величины  $\mu_4$ :

$$\mu_1 = \alpha_{0,0}, \quad \mu_2 = \alpha_{0,1}, \quad \mu_3 = \alpha_{1,0}, \quad \mu_4 = \alpha_{1,1} , \quad (4.48)$$

$$\mu_1 = \alpha_{0,0}, \quad \mu_2 = \alpha_{0,1}, \quad \mu_3 = \alpha_{1,0}, \quad \mu_4 = \alpha_{1,-1} . \quad (4.49)$$

В терминах параметра  $b$  внешние размерности для этих решений есть

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{4 + 3b^{-2}}{16}, \quad (4.50)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{3(4 + b^{-2})}{16}. \quad (4.51)$$

В случае  $c = 1$  ( $b = i$ ) первое решение сводится к  $\Delta_i = 1/16$ , т.е. к модели Ашкина-Теллера (33), в то время как второе решение приводит к  $\Delta_i = 15/16$  при  $c = 25$  ( $b = 1$ ), родственной теории. Насколько нам известно, эти два случая являются единственными примерами невырожденных конформных блоков, известных в литературе в замкнутом виде. Как показывает наш анализ, каждая из этих моделей в действительности принадлежит однопараметрическому семейству, проходящему через произвольные центральные заряды. Во всех этих случаях эллиптический конформный блок тривиален:

$$H_{\Delta}(\Delta_i, c|q) = 1. \quad (4.52)$$

Делая небольшое отступление отметим, что эти два семейства очень схожи с двумя возможными значениями внешних размерностей  $\Delta_e$ , появляющихся в торическом безполюсном случае. Эта аналогия ещё более усиливается при рассмотрении модулярных преобразований (см. раздел 4.3.1).

### 4.2.3 Сферический конформный блок с одним полюсом

В данном разделе нашей целью не является нахождение всех однополюсных сферических блоков. Вместо этого мы обсудим только простейший пример. Чтобы его построить, ослабим условие  $R_{1,1} = 0$  безполюсного случая и заменим его на уравнения  $R_{1,3} = R_{3,1} = 0$ . Это повлияет только на выбор параметра  $\mu_1$ , который теперь должен удовлетворять сразу двум условиям

$$R_{1,3} = 0 : \quad (\mu_1 - \alpha_{0,2})(\mu_1 + \alpha_{0,2}) = 0, \quad (4.53)$$

$$R_{3,1} = 0 : \quad (\mu_1 - \alpha_{2,0})(\mu_1 + \alpha_{2,0}) = 0, \quad (4.54)$$

не совместными при произвольном центральном заряде, но совместным например при  $\alpha_{2,0} = -\alpha_{0,2}$  ( $b = i, c = 1$ ). В этом случае можно выбрать  $\mu_1 = \alpha_{2,0}$ . Из

двух возможностей для  $\mu_4 = \alpha_{1,1}$ ,  $\mu_4 = \alpha_{1,-1}$  выберем вторую. Таким образом,

$$\mu_1 = \alpha_{2,0}, \quad \mu_2 = \alpha_{0,1}, \quad \mu_3 = \alpha_{1,0}, \quad \mu_4 = \alpha_{1,1}, \quad c = 1. \quad (4.55)$$

Соответствующие размерности равны

$$\Delta_1 = \frac{1}{16}, \quad \Delta_2 = \frac{9}{16}, \quad \Delta_3 = \frac{1}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{9}{16}. \quad (4.56)$$

Мы будем обозначать этот набор размерностей символом  $\bar{\Delta}_i$ . Первые несколько членов разложения эллиптического блока в этом случае есть

$$\begin{aligned} H_{\Delta}(\bar{\Delta}_i, 1|q) &= \\ &= 1 + 2 \frac{-q + 2q^2 - 4q^3 + 4q^4 - 6q^5 + 8q^6 - 8q^7 + 8q^8 - 13q^9 + 12q^{10}}{\Delta} + O(q^{11}). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Нетрудно найти функцию, имеющую это разложение

$$H_{\Delta}(\bar{\Delta}_i, 1|q) = 1 - \frac{E_2(q) + \theta_2^4(q) - \theta_4^4(q)}{12\Delta}. \quad (4.58)$$

Этот пример показывает, что существуют нетривиальные конечно-полюсные сферические конформные блоки. Из-за большего числа параметров построение новых примеров, а тем более общей классификации, кажется гораздо труднее чем в торическом случае, и мы не касаемся этого вопроса в настоящем исследовании.

### 4.3 Модулярные преобразования конечно-полюсных конформных блоков

Наличие замкнутых выражений для конечно-полюсных конформных блоков предоставляет уникальную возможность явно изучить их модулярные свойства. Отметим, что в работе [51] было показано, что конечно-полюсные блоки подчиняются уравнению модулярной аномалии [52]. В настоящем разделе нашей целью является изучить модулярные преобразования более полным образом, и, в том числе, построить соответствующие модулярные ядра.

### 4.3.1 Торический случай

При принятом нами определении торического конформного блока (41) точный вид модулярного преобразования выглядит следующим образом:

$$B_{\Delta}(\Delta_e, c|\tilde{q}) = \tau^{\Delta_e} \int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' M_{\alpha\alpha'}(\mu, b) B_{\Delta'}(\Delta_e, c|q) . \quad (4.59)$$

Отметим, что здесь нам удобно аргументами конформных блоков считать размерности, а аргументами модулярного ядра – соответствующие им лиувиллевские моменты (20).

В главе 3 модулярное ядро было найдено для иррационального параметра  $b$  в общем положении. Однако, эти результаты не могут быть применены к случаю  $c \leq 1$  и, таким образом, ничего не говорят о модулярных ядрах для конечно-полюсных блоков. Тем не менее, уравнения (3.12–3.14) справедливы для любого значения  $b$ , в том числе при  $c \leq 1$ . Для удобства читателя повторим здесь уравнение (3.12)

$$\left( \frac{\sin \pi b(2\alpha + \mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{\frac{b}{2}\partial_{\alpha}} + \frac{\sin \pi b(2\alpha - \mu)}{\sin 2\pi b\alpha} e^{-\frac{b}{2}\partial_{\alpha}} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu, b) = 2 \cos 2\pi b\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu, b) . \quad (4.60)$$

Выпишем также нормировку, для которой справедливо это уравнение

$$M_{\alpha\alpha'}(\mu, b) = N_{\alpha\alpha'}(\mu, b) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\mu, b) , \quad (4.61)$$

где

$$N_{\alpha\alpha'}(\mu, b) = \frac{V_{\alpha}(\mu, b)}{V_{\alpha'}(\mu, b)}, \quad V_{\alpha}(\mu, b) = \frac{\Gamma_b(Q + 2\alpha)\Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(Q - \mu + 2\alpha)\Gamma_b(Q - \mu - 2\alpha)} . \quad (4.62)$$

Есть также два других уравнения со сдвигowymi операторами по  $\alpha'$  и  $\mu$ , но в данном разделе они не потребуются. Уравнение со сдвигами по  $\alpha'$  следует из (4.60) и условия, что квадрат модулярного ядра есть единичное преобразование

$$\int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} \mathcal{M}_{\alpha'\alpha''} = \delta(\alpha - \alpha'') . \quad (4.63)$$

Это условие будет удобнее наложить непосредственно. Уравнение со сдвигowymi операторами по  $\mu$  не представляет интереса, поскольку параметр  $\mu$  (соответствующий внешней размерности) для конечно-полюсных блоков зафиксирован.

Необходимо сделать два замечания. Уравнение (4.60) – линейное второго порядка, поэтому имеет двумерное пространство решений, из которого должно быть выбрано чётное по  $\alpha$  решение. Кроме того, поскольку это уравнение включает сдвиги величиной  $b/2$ , решения определяются с точностью до функций, периодичных по  $\alpha$  с периодом  $b/2$ . Кроме того, модулярное ядро должно быть инвариантно относительно инверсии  $b$ . Это устраняет неопределённость для параметра  $b$  в общем положении. Однако, для конечно-полюсных блоков  $b^2$  есть рациональное число, поэтому функция, периодичная с периодами  $b/2$  и  $b^{-1}/2$ , не обязательно является константой. Тем не менее, нам удастся подобрать этот незафиксированный множитель.

### Модулярные преобразования безполюсных конформных блоков

Рассмотрим модулярные преобразования безполюсных блоков, которые встречаются при произвольном центральном заряде и  $\Delta_e = 0$  или  $\Delta_e = 1$ . Сначала выберем  $\mu = 0$ , что соответствует случаю  $\Delta_e = 0$ . Тогда, уравнение (4.60) сводится к

$$\left( e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} + e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(0, b) = 2 \cos 2\pi b\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(0, b) \quad (4.64)$$

и допускает решение

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(0, b) = 2\sqrt{2} \cos 4\pi\alpha\alpha' , \quad (4.65)$$

где мы ввели нормировочную константу, необходимую для выполнения (4.63). Отметим, что нормировочный множитель  $N_{\alpha\alpha'}$  (4.62) становится тривиальным при  $\mu = 0$ , а потому (4.65) в этом случае представляет полный ответ. Действительно, торический конформный блок при  $\Delta_e = 0$  сводится к характеру Вирасоро (4.2), модулярное преобразование которого осуществляется преобразованием Фурье

$$\chi_\Delta(c|\tilde{q}) = 2\sqrt{2} \int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' \cos 4\pi\alpha\alpha' \chi_{\Delta'}(c|q) = \sqrt{2} \int_{i\mathbb{R}} d\alpha' e^{4\pi i\alpha\alpha'} \chi_{\Delta'}(c|q) . \quad (4.66)$$

Проверка этого уравнения сводится к взятию гауссова интеграла и использованию модулярных свойств  $\eta$ -функции Дедекинда (см. приложение A.2). Отметим, что для получения выражения (4.65) мы неявно выбрали периодический

множитель, который не зафиксирован уравнением на модулярное ядро. В дальнейшем мы объясним, как этот выбор делается в общем случае.

Перейдём к случаю  $\Delta_e = 1$ , который оказывается отличным, несмотря на совпадение конформных блоков. Из-за технических трудностей для общего центрального заряда мы временно положим  $b = i$  ( $c = 1$ ). Конечный ответ будет справедлив для любого  $c$ . Когда  $b = i$ , подстановка  $\mu = b = i$  даёт  $\Delta_e = 1$ . При этом уравнение (4.60) переходит в

$$\left( e^{\frac{i}{2}\partial_\alpha} + e^{-\frac{i}{2}\partial_\alpha} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(i, i) = -2 \cos 2\pi\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(i, i) \quad (4.67)$$

и допускает решение

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(i, i) = 2\sqrt{2} \sin 4\pi\alpha\alpha' \frac{\sin 2\pi i\alpha}{\sin 2\pi i\alpha'} , \quad (4.68)$$

в то время как нормировочный множитель сводится к

$$N_{\alpha\alpha'}(i, i) = \frac{\alpha' \sin 2\pi i\alpha}{\alpha \sin 2\pi i\alpha'} , \quad (4.69)$$

так что полное модулярное ядро равняется

$$M_{\alpha\alpha'}(i, i) = 2\sqrt{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \sin 4\pi\alpha\alpha' \times \left( \frac{\sin 2\pi i\alpha}{\sin 2\pi i\alpha'} \right)^2 . \quad (4.70)$$

Напомним, что полученное таким образом решение определено лишь с точностью до множителя, периодичного как с периодом  $b/2$ , так и  $b^{-1}/2$ , что при  $b = i$  означает периодичность с периодом  $i/2$ . В формуле выше множитель в скобках периодичен с периодом  $i/2$  и, следовательно, не является необходимой частью решения. Оказывается, что отбрасывание этого множителя приводит к правильному модулярному ядру. Более того, это ядро корректно описывает модулярные преобразования при произвольном центральном заряде, если внешняя размерность равна единице  $\Delta_e = 1$ . Таким образом, можно записать

$$M_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, b) = 2\sqrt{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \sin 4\pi\alpha\alpha' , \quad (4.71)$$

где  $\bar{\mu}$  – любое из решений уравнения  $\mu(Q - \mu) = \Delta_e = 1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' M_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, b) B_{\Delta'}(1, c|q) &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \int_{i\mathbb{R}} d\alpha' \alpha' e^{4\pi i\alpha\alpha'} \chi_{\Delta'}(1|q) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \partial_{4\pi i\alpha} \int_{i\mathbb{R}} d\alpha' e^{4\pi i\alpha\alpha'} \chi_{\Delta'}(1|q) = \frac{1}{\alpha} \partial_{4\pi i\alpha} \chi_{\Delta}(1, \tilde{q}) = \frac{1}{\tau} \chi_{\Delta}(1, \tilde{q}) . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Это согласуется с формулой (4.59), включая множитель  $\tau^{\Delta_e}$ . Отметим, что именно этот множитель различает законы преобразования безполюсных конформных блоков (4.59) с  $\Delta_e = 0$  и  $\Delta_e = 1$  и приводит к различию в модулярных ядрах (4.65) и (4.71). Подчеркнём, что в обоих случаях модулярное ядро не имеет полюсов при конечных  $\alpha$ . Этого следует ожидать и в общем случае: аналитические свойства модулярного ядра должны повторять аналитические свойства конформного блока.

### Модулярные преобразования однополюсных конформных блоков

Обратимся теперь к однополюсному конформному блоку (4.30). Напомним, что он возникает при  $b = i/\sqrt{2}$  ( $c = -2$ ) и  $\Delta_e = 3$  ( $\Delta_e = \Delta_{1,3}$ ). Выберем  $\mu$  в виде  $\mu = \bar{\mu} = Q/2 + \alpha_{1,3} = -3i/\sqrt{2}$ . Тогда уравнение (4.60) приведётся к виду

$$-\frac{\cos 2\pi\bar{b}\alpha}{\sin 2\pi\bar{b}\alpha} \left( e^{\frac{\bar{b}}{2}\partial_\alpha} - e^{-\frac{\bar{b}}{2}\partial_\alpha} \right) \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}) = 2 \cos 2\pi\bar{b}\alpha' \mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}), \quad (4.73)$$

где введено обозначение  $\bar{b} = i/\sqrt{2}$ . Возможным решением является

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}) = 2\sqrt{2} \sin 4\pi\alpha\alpha' \frac{\sin \sqrt{2}\pi i\alpha'}{\sin \sqrt{2}\pi i\alpha}, \quad (4.74)$$

в то время как нормировочный множитель упрощается до

$$N_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}) = \frac{\alpha'(1 + 8\alpha'^2) \sin \sqrt{2}\pi i\alpha'}{\alpha(1 + 8\alpha^2) \sin \sqrt{2}\pi i\alpha}. \quad (4.75)$$

Как и в предыдущем случае, отбрасывание периодического тригонометрического множителя приводит к верному модулярному ядру

$$M_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}) = 2\sqrt{2} \frac{\alpha'(1 + 8\alpha'^2)}{\alpha(1 + 8\alpha^2)} \sin 4\pi\alpha\alpha'. \quad (4.76)$$

Это может быть проверено следующим вычислением

$$\begin{aligned}
& \int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' M_{\alpha\alpha'}(\bar{\mu}, \bar{b}) B_{\Delta'}(\Delta_e|q) \Big|_{\Delta_e=3, c=-2} = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{\alpha(1+8\alpha^2)} \int_{i\mathbb{R}} d\alpha' e^{4\pi i\alpha\alpha'} \alpha'(1+8\alpha'^2) \left(1 + \frac{1-E_2(q)}{-1-8\alpha'^2}\right) \chi_{\Delta'}(q) = \\
& = \frac{\sqrt{2}}{\alpha(1+8\alpha^2)} \partial_{4\pi i\alpha} (8\partial_{4\pi i\alpha}^2 + E_2(q)) \int_{i\mathbb{R}} d\alpha' e^{4\pi i\alpha\alpha'} \chi_{\Delta'}(q) = \\
& = \frac{1}{\alpha(1+8\alpha^2)} \partial_{4\pi i\alpha} (8\partial_{4\pi i\alpha}^2 + E_2(q)) \chi_{\Delta'}(\tilde{q}) = \\
& = \frac{1}{\tau^3} \chi_{\Delta'}(\tilde{q}) \left(1 - \frac{1 - \tau^2 E_2(q) - 6\tau/i\pi}{1+8\alpha^2}\right) = \\
& = \frac{1}{\tau^3} \chi_{\Delta'}(\tilde{q}) \left(1 + \frac{1 - (\tau^2 E_2(q) + 6\tau/i\pi)}{8\Delta}\right), \quad (4.77)
\end{aligned}$$

которое согласуется с законом преобразования (4.59), включая фактор  $\tau^{\Delta_e}$  и аномальное модулярное поведение  $E_2(q)$  A.2. Снова подчеркнём, что модулярное ядро как функция  $\alpha$  имеет те же полюса, что и конформный блок.

### Модулярные преобразование двухполюсного конформного блока

В качестве последнего торического примера рассмотрим двухполюсной блок (4.31). Этот случай соответствует  $b = i$  ( $c = 1$ ) и  $\mu = 2i$  ( $\Delta_e = 4$ ). Сразу приведём ответ

$$M_{\alpha\alpha'}(2i, i) = 2\sqrt{2} \frac{\alpha'^2(1+4\alpha'^2)}{\alpha^2(1+4\alpha^2)} \cos 4\pi\alpha\alpha'. \quad (4.78)$$

Этот результат может быть получен (с точностью до периодического множителя) аналогично обсуждавшимся примерам. Однако, проще и нагляднее использовать найденную ранее закономерность и угадать ответ. Основной частью модулярного ядра должен быть Фурье-подобный вклад  $\cos 4\pi\alpha\alpha'$  (мы вскоре поясним причину выбора косинуса, а не синуса). Исходный конформный блок (4.31) имеет простые полюса при  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 1/4$ , что при  $b = i$  подразумевает полюс второго порядка в точке  $\alpha = 0$  и два простых полюса при  $\alpha = \pm 1/2$ . Минимальную возможность ввести эти полюса предоставляет полиномиальный множитель  $(\alpha^2(1+4\alpha^2))^{-1}$ . Мы также должны включить множи-

тель  $\alpha'^2(1+4\alpha'^2)$  (и численную константу  $2\sqrt{2}$ ) для сохранения свойства (4.63). Это приводит к выражению (4.78).

Другим вариантом ответа, удовлетворяющий описанным требованиям, является функция

$$\widetilde{M}_{\alpha\alpha'}(2i,i) = 2\sqrt{2}\frac{\alpha'^3(1+4\alpha'^2)}{\alpha^3(1+4\alpha^2)}\sin 4\pi\alpha\alpha'. \quad (4.79)$$

Несмотря на появление дополнительного множителя  $\alpha^{-1}$ , это выражение имеет надлежащее поведение вблизи  $\alpha = 0$  из-за нуля синуса. Однако, можно заранее утверждать, что это ядро не является корректным. Анализируя, например, вычисление (4.77), можно увидеть, что степень полинома по  $\alpha'$  определяет максимальную степень  $\tau^{-1}$ , появляющуюся в конечном выражении. Ядро (4.79) дало бы множитель  $\tau^{-5}$ , что является неверным, поскольку  $\tau^{-\Delta_e} = \tau^{-4}$ . При этом ядро (4.78) проходит эту новую проверку. Аналогично предыдущим случаям можно убедиться явным вычислением, что это ядро действительно корректно.

Заметим, что это новое условие связывает количество полюсов в конформном блоке со значением внешней размерности. А именно, в  $k$ -полюсном блоке внешняя размерность может принимать либо значение  $\Delta_e = 2k$ , либо значение  $\Delta_e = 2k + 1$ . И наоборот, конечно-полюсной конформный блок с внешней размерностью  $\Delta_e$  (которая с необходимостью является целым числом, как было показано ранее) имеет

$$k = \left\lfloor \frac{\Delta_e}{2} \right\rfloor \quad (4.80)$$

полюсов. Это соотношение выполняется для всех конечно-полюсных конформных блоков, найденных в работе [51].

Теперь нетрудно сформулировать общий рецепт построения модулярного ядра и в том числе определения периодического множителя, не фиксируемого уравнением (4.60). Во всех проанализированных случаях модулярное ядро равнялось ядру Фурье, перенормированному полиномиальными функциями  $\alpha$  и  $\alpha'$ . При этом все дополнительные неполиномиальные факторы должны быть отброшены. Кроме того, эти полиномы полностью определяются полюсами конформных блоков и величиной внешней размерности  $\Delta_e$ . Эта особая форма модулярного ядра для конечно-полюсных блоков является ещё одним наблюдением, которое естественно продолжить до общей гипотезы. Кроме того, это свойство сохраняется и для конечно-полюсных сферических блоков, к рассмотрению которых мы переходим.

### 4.3.2 Сферический случай

Мы кратко обсудим модулярные преобразования сферических конечно-полюсных конформных блоков, которые в общем случае выглядят как

$$B_{\Delta}(\Delta_i, c | \tilde{q}) = \int_{i\mathbb{R}_+} d\alpha' M_{\alpha\alpha'}(\Delta_i, c) B_{\Delta'}(\Delta_i, c | q) . \quad (4.81)$$

#### Модулярные ядра без полюсов

С точностью до перестановки внешних размерностей есть два семейства безполюсных конформных блоков: (4.50) и (4.51). В каждом из семейств эллиптический конформный блок равняется единице, но асимптотические множители (29) различны. Наиболее существенным отличием является степень тета-функции в общем множителе

$$D = \frac{c-1}{2} - 4(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) . \quad (4.82)$$

Для первого семейства  $D = -1$ , а для второго  $D = -3$ . Из-за этого различия конформные блоки этих двух типов преобразуются отличными модулярными ядрами. Можно проверить, что модулярные ядра для конформных блоков (4.50) и (4.51) равны

$$M_{\alpha\alpha'} = 2\sqrt{2} \frac{16^{-\alpha'^2}}{16^{-\alpha^2}} \cos 2\pi\alpha\alpha' \quad (4.83)$$

и

$$M_{\alpha\alpha'} = 2\sqrt{2} \frac{16^{-\alpha'^2}}{16^{-\alpha^2}} \frac{\alpha'}{\alpha} \sin 2\pi\alpha\alpha' \quad (4.84)$$

соответственно. Нетрудно заметить сходство с безполюсными торическими блоками, см. формулы (4.65) и (4.71).

## Модулярное ядро с одним полюсом

В качестве последнего примера рассмотрим однополюсный сферический блок (4.58) и применим интуицию, приобретённую при рассмотрении торических конформных блоков к выбранному случаю. Напомним, что в обсуждаемой ситуации  $c = 1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_3 = 1/16$ ,  $\Delta_2 = \Delta_4 = 9/16$ . В качестве ответа мы ожидаем модулярные ядра типа (4.83) и (4.84), перенормированные для учета полюса в точке  $\Delta = 0$ , что при  $c = 1$  означает полюс кратности два по  $\alpha = 0$ . Существует два возможных варианта

$$M_{\alpha\alpha'}(\Delta_i, c) = 2\sqrt{2} \frac{16^{-\alpha'^2}}{16^{-\alpha^2}} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \cos 2\pi\alpha\alpha' \quad (4.85)$$

и

$$\widetilde{M}_{\alpha\alpha'}(\Delta_i, c) = 2\sqrt{2} \frac{16^{-\alpha'^2}}{16^{-\alpha^2}} \frac{\alpha'^3}{\alpha^3} \sin 2\pi\alpha\alpha' . \quad (4.86)$$

По аналогии с торическим случаем можно утверждать, что последний вариант заведомо неверен. Полином по  $\alpha'$  третьей степени приведёт к появлению общего множителя  $\mathcal{T}^{-3}$  после интегрирования в формуле (4.81). Однако, степень тета-функции в общем множителе (29) равна  $D = -5$ . Закон преобразования  $\theta_3$  (см. приложение A.2) подразумевает появление множителя  $\mathcal{T}^{-2}$ . Это будет согласовано с результатом, к которому приводит модулярное ядро (4.85), но не (4.86). Более того, в духе уравнения (4.77) можно во всех деталях проверить, что ядро (4.85) действительно корректно осуществляет модулярное преобразование.

По аналогии с торическим случаем это наблюдение подразумевает, что существует связь между величиной  $D$  (4.82) и количеством полюсов  $k$ . А именно,

$$k = \left\lfloor -\frac{D+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \frac{c+1}{8} \right\rfloor . \quad (4.87)$$

### 4.4 Обсуждение результатов главы

Мы проанализировали необычные конформные блоки, обнаруженные в работе [51], с точки зрения формулы Замолодчикова. Эти специальные блоки

выделяются тем, что имеют лишь конечное число полюсов в  $\Delta$ -плоскости. Формула Замолодчикова прямо диктует необходимые для этого условия: центральный заряд теории должен быть таким, чтобы существовала пара совпадающих размерностей (22) вида  $\Delta_{1,\pm(2M+1)} = \Delta_{2N+1,\pm 1}$  для некоторых  $N, M \geq 0$ , см. (4.34). Однако, разбор этих случаев оказывается значительно более сложным, чем можно было ожидать первоначально.

Простейшими в этом экзотическом семействе являются конформные блоки, не имеющие полюсов при конечных  $\Delta$ . Согласно классификации уравнений (4.34) они появляются, когда  $N = 0$  или  $M = 0$ .

**Наблюдение 1.** При любом значении центрального заряда торический конформный блок с  $\Delta_e = 0$  или  $\Delta_e = 1$  не содержит полюсов и сводится к характеру Вирасоро (4.2). При любом значении центрального заряда сферический конформный блок с

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{4 + 3b^{-2}}{16} \quad (4.88)$$

или

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{8 + 3b^{-2} + 4b^2}{16}, \quad \Delta_4 = \frac{3(4 + b^{-2})}{16} \quad (4.89)$$

(или любой комбинацией размерностей, которая получается перестановкой) не содержит полюсов и сводится к функции (29).

Для конкретной пары  $N, M \geq 1$  условия (4.34) оставляют конечный набор центральных зарядов с рациональными значениями вида (4.35), где допустимые значения  $n, m \in \mathbb{Z}$  зависят от  $N$  и  $M$ . Мы получили достаточно много свидетельств того, что в случае  $n$  и  $m$  одного знака ( $c \leq 1$ ), т.е. при центральном заряде как в минимальных моделях, действительно можно получить конечно-полюсной конформный блок, положив внешнюю размерность равной совпадающей паре  $\Delta_e = \Delta_{1,\pm(2M+1)} = \Delta_{2N+1,\pm 1}$ . С другой стороны, при  $n$  и  $m$  разных знаков ( $c > 1$ ), соответствующие конформные блоки не могут обрываться на конечном числе полюсов ни при каком выборе внешней размерности  $\Delta_e$ . Таким образом, мы делаем

**Наблюдение 2.** Конечно-полюсные блоки существуют только в теориях с центральными зарядами, равными центральному заряду минимальных моделей

$$c = 1 - 6 \frac{(n - m)^2}{nm}, \quad c \leq 1, \quad (4.90)$$

где  $n$  и  $t$  взаимно просты. Это относится как к торическим, так и к сферическим конформным блокам.

Эта гипотеза доказана для торических блоков в случае  $M = 1$  и произвольного  $N$  (что эквивалентно  $N = 1$  и произвольному  $M$ ) в приложении **Е**. Доказательство довольно трудоёмко и не обобщается непосредственным образом на  $M > 1$ . Тем не менее, при помощи вспомогательных вычислений на компьютере мы проверили эту гипотезу для нескольких  $N, M > 1$  вплоть до  $N \times M = 6$ . Эти проверки, однако, не являются полностью строгими, и выполняются следующим образом. Вычисляется столько коэффициентов  $q$ -разложения конформного блока, сколько представляется возможным в данном случае. При  $s > 1$  можно наблюдать примерно линейный рост количества полюсов с ростом числа коэффициентов: новые полюса появляются почти в каждом следующем порядке. В противоположность, при  $s \leq 1$  количество полюсов стабилизируется на каком-то конечном значении. Требуемые вычислительные мощности быстро растут с увеличением порядка, и характерным пределом для наших вычислений была точность  $O(q^{10})$ . Можно усомниться в достаточности этой точности для достоверности описанных проверок. Однако, на наш взгляд, общая согласованность проявляющейся картины делает гипотезу весьма вероятной.

**Наблюдение 3.** Для данного значения центрального заряда из уравнения (4.90) существует бесконечно много конечно-полюсных блоков. Размерности этих блоков принадлежат множеству

$$\Delta_e \in \bigcup_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}_+ \\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} \left\{ (pn - 1)(pt - 1), p^2nt + pn - pt \right\}. \quad (4.91)$$

По всей видимости, это множество исчерпывает все конечно-полюсные торические конформные блоки.

Из-за большего числа параметров получение подобной классификации в рамках нашего подхода в сферическом случае было бы очень громоздким и выходит за рамки текущего исследования. Масштаб дополнительных сложностей можно оценить уже для безполюсных конформных блоков, описанных в наблюдении **1**.

**Наблюдение 4.** Другим замечательным свойством конечно-полюсных блоков является то, что их зависимость от  $q$  может быть выражена через конечное число рядов Эйзенштейна и тета-функций. При этом максимальный

вес модулярных форм по всей видимости пропорционален числу полюсов. Отталкиваясь от такого модулярного анзаца конечного веса, можно вычислять соответствующие конформные блоки во всех порядках по  $q$ , см., например, (4.30), (4.31), (4.58).

Как отмечалось в разделе 4.1.3, этот анзац необходим, поскольку сама формула Замолодчикова не позволяет находить полную зависимость от  $q$  конформных блоков и не объясняет ограничение веса модулярных форм. В этом отношении наш анализ не расширяет результаты работы [51].

Мы также изучили модулярные преобразования конечно-полюсных конформных блоков и явно построили ядра соответствующих модулярных преобразований. Результаты в каждом случае оказываются очень предсказуемы.

**Наблюдение 5.** Для конечно-полюсного торического конформного блока с полюсами в точках  $\Delta = d_1, \dots, d_k$  модулярное ядро равно

$$M_{\alpha\alpha'} = \frac{(\Delta(\alpha') - d_1) \dots (\Delta(\alpha') - d_k)}{(\Delta(\alpha) - d_1) \dots (\Delta(\alpha) - d_k)} m_{\alpha\alpha'}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{c-1}{24} - \alpha^2, \quad (4.92)$$

где

$$m_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos 4\pi\alpha\alpha', & \text{если } \Delta_e - 2k = 0 \\ 2\sqrt{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \sin 4\pi\alpha\alpha', & \text{если } \Delta_e - 2k = 1 \end{cases}. \quad (4.93)$$

С небольшими изменениями эти формулы справедливы и для сферических конечно-полюсных блоков. А именно, достаточно заменить<sup>5</sup>  $\cos 4\pi\alpha\alpha'$  на  $\cos 2\pi\alpha\alpha'$  (и  $\sin 4\pi\alpha\alpha'$  на  $\sin 2\pi\alpha\alpha'$ ), ввести множитель  $\frac{16^{-\alpha'^2}}{16^{-\alpha^2}}$ , а также использовать  $D = \Delta_1 + \dots + \Delta_4 - \frac{c+1}{8}$  вместо  $\Delta_e$  для выбора из двух вариантов в уравнении (4.93).

Формула (4.92) имеет ясную интерпретацию. Во-первых, как показано в настоящем исследовании, вклад подобный ядру Фурье присутствует в любом модулярном ядре. Кроме того, модулярное ядро как функция  $\Delta$  должно иметь те же самые полюса, что и конформный блок. Полиномиальные множители в уравнении (4.92) являются простейшей возможностью ввести эти полюса (числитель необходим для выполнения свойства (4.63)). Простейшим решением этих критериев является верхняя строка в (4.93). И эта возможность часто реализуется, см. (4.65), (4.78), (4.85). Однако, менее очевидный вариант во второй

<sup>5</sup>По существу это связано лишь с выбором обозначений.

строке (4.93) также приводит к необходимым аналитическим свойствам. И он тоже реализуется в некоторых случаях (4.71), (4.76), (4.84). Как указано в уравнении (4.93), правильный выбор можно сделать судя по количеству полюсов в конформном блоке  $k$  и по величине промежуточной размерности  $\Delta_e$ . При этом неявно подразумевается, что величина  $\Delta_e - 2k$  может быть равна только 0 или 1. Это довольно нетривиально, и заслуживает отдельное

**Наблюдение 6.** *Количество полюсов  $k$  в конечно-полюсном торическом конформном блоке напрямую связано с величиной внешней размерности*

$$k = \left\lfloor \frac{\Delta_e}{2} \right\rfloor, \quad (4.94)$$

где  $\lfloor x \rfloor$  обозначает целую часть  $x$ . Аналог этого соотношения для сферических конечно-полюсных конформных блоков есть

$$k = \left\lfloor \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \frac{c+1}{8} \right\rfloor. \quad (4.95)$$

Как проиллюстрировано в разделе 4.3.1, в предположении, что модулярное преобразование осуществляется ядром Фурье, перенормированным полиномиальным множителем, обе гипотезы 5, 6 могут быть доказаны. Более того, есть независимый способ найти модулярное ядро, основанный на решении разностных уравнений. К сожалению, для конечно-полюсных блоков эти уравнения могут быть решены лишь с точностью до некоторого неполиномиального множителя. Предположив отсутствие такого множителя, снова получим формулу (4.92).

Основная часть настоящего раздела состоит из довольно громоздких вычислений. На первый взгляд, каждый отдельный разобранный пример содержит множество случайных особенностей. Однако, при взгляде на всю совокупность рассмотренных случаев проступает на удивление простая и стройная картина, которую мы описали как набор наблюдений. К сожалению, каждое из этих наблюдений находится на уровне гипотезы. Тем не менее, их совместная согласованность делает всю структуру очень прочной. Вероятно, существует даже больше взаимосвязей между обнаруженными свойствами, чем нам удалось обнаружить.

Наконец, конкретные примеры замкнутых конформных блоков могут представлять самостоятельный интерес, независимо от того, будут ли они вложены в некоторую общую иерархию или нет. Мы ожидаем, что разработанный

подход будет применим к другим ситуациям, в которых доступны уравнения типа Замолодчикова, например, для суперконформных блоков [53; 54]. Кроме того, было бы интересно поместить конечно-полюсные блоки в общий контекст непертурбативных конформных блоков, сформулированный в работе [55].

## Заключение

В настоящем исследовании изучался один из принципиальных непertурбативных аспектов конформных блоков – их поведение при модулярных преобразованиях. Следуя работе [29] и основываясь на разложении конформных блоков в пределе больших промежуточных размерностей было показано, что асимптотическая форма модулярного преобразования есть просто преобразование Фурье, пертурбативные поправки к которому отсутствуют. В то же время, известные из литературы результаты подразумевают гораздо более сложный вид полных модулярных преобразований [12–14]. Нам удалось вывести набор разностных уравнений, точно описывающих модулярные ядра. Анализ этих уравнений доказывает, что предельный вид модулярного ядра действительно сводится к преобразованию Фурье, а формулы, найденные в работах [12–14], можно интерпретировать как непertурбативное продолжение преобразования Фурье. Для случая сферических конформных блоков явный вид уравнений оказался слишком сложным, чтобы прямым решением можно было получить замкнутый ответ. Тем не менее, было показано, что в специальном случае единичного центрального заряда уравнения значительно упрощаются и могут быть решены точно. Решение оказывается упрощённым представлением для формулы, найденной в работе [12]. Кроме того, было доказано, что аналогичные решения существуют при многих других рациональных значениях центрального заряда. Для случая торических конформных блоков разностные уравнения удалось решить точно и представить ответ в виде непertурбативного разложения во всех порядках. Было показано, что этот результат можно интерпретировать как представление в виде ряда интегрального выражения для модулярного ядра, найденного в работах [13; 14]. Кроме того была проиллюстрирована несомненная полезность полученного представления для конкретных расчётов. В частности, с использованием этой формулы удалось проверить, что аналитическая структура модулярного ядра находится в согласии со свойствами невырожденных конформных блоков общего вида. Эта проверка представляется концептуально важной по той причине, что даёт весьма нетривиальный способ удостовериться в правильности найденного результата и самосогласованности теории Лиувилля с точки зрения программы модулярного бутстрапа. Кроме того, основываясь на работе [51], нам удалось найти большое семейство точных реше-

ний формулы Замолотчикова, обладающих рядом замечательных свойств. Эти решения могут быть представлены в виде замкнутых функций модулярных параметров, а соответствующие интегральные преобразования – построены явно в простом виде.

### Благодарности

Я хотел бы выразить благодарность научному руководителю настоящей диссертации А.Ю.Морозову, а также руководителю моей магистерской диссертации А.Д.Миронову за помощь с первыми шагами в новой области, за постановку интересных научных задач и всестороннюю помощь в их решении. Я также благодарен моим коллегам и учителям Г.А.Аминову, А.С.Анохиной, С.Б.Артамонову, Э.Т.Ахмедову, Д.В.Васильеву, Д.М.Галахову, А.С.Горскому, И.А.Даниленко, П.И.Дунину-Барковскому, Е.А.Зенкевичу, А.В.Зотову, С.А.Миронову, А.А.Морозову, И.В.Полюбину, А.В.Пополитову и А.В.Слепцову за множество плодотворных обсуждений и за вклад каждого из них в копилку моих знаний. Я также благодарен Е.С.Сусловой за помощь во многих немаловажных вопросах.

## Список литературы

1. *Minahan J. A.* Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.1: Spin Chains in N=4 Super Yang-Mills // *Lett. Math. Phys.* — 2012. — Vol. 99. — P. 33–58. — arXiv: [1012.3983 \[hep-th\]](#).
2. *Nakayama Y.* Liouville field theory: A Decade after the revolution // *Int. J. Mod. Phys.* — 2004. — Vol. A19. — P. 2771–2930. — arXiv: [hep-th/0402009 \[hep-th\]](#).
3. *Поляков А.* Негамильтонов подход в конформной теории поля // *ЖЭТФ.* — 1974. — Т. 66. — С. 23–42.
4. *Belavin A., Polyakov A., Zamolodchikov A.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // *Nucl.Phys.* — 1984. — Vol. B241. — P. 333–380.
5. *Замолодчиков А.* Конформная симметрия в двумерном пространстве: о рекуррентном представлении конформного блока // *Теор. Мат. Физ.* — 1987. — Т. 73. — С. 1088–1093.
6. *Zamolodchikov A.* Conformal symmetry in two dimensions: an explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude // *Commun.Math.Phys.* — 1984. — Vol. 96. — P. 419–422.
7. *Fateev V. A., Litvinov A. V., Neveu A., Onofri E.* Differential equation for four-point correlation function in Liouville field theory and elliptic four-point conformal blocks // *J. Phys.* — 2009. — Vol. A42. — P. 304011. — arXiv: [0902.1331 \[hep-th\]](#).
8. *Gaberdiel M. R., Lang S.* Modular differential equations for torus one-point functions // *J. Phys.* — 2009. — Vol. A42. — P. 045405. — arXiv: [0810.0106 \[hep-th\]](#).
9. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* On AGT Relations with Surface Operator Insertion and Stationary Limit of Beta-Ensembles // *J. Geom. Phys.* — 2011. — Vol. 61. — P. 1203–1222. — arXiv: [1011.4491 \[hep-th\]](#).
10. *Friedan D., Shenker S. H.* The Analytic Geometry of Two-Dimensional Conformal Field Theory // *Nucl. Phys.* — 1987. — Vol. B281. — P. 509–545.

11. *Poghossian R.* Recursion relations in CFT and N=2 SYM theory // JHEP. — 2009. — Vol. 12. — P. 038. — arXiv: [0909.3412 \[hep-th\]](#).
12. *Iorgov N., Lisovsky O., Tykhyy Yu.* Painleve VI connection problem and monodromy of  $c = 1$  conformal blocks // JHEP. — 2013. — Vol. 12. — P. 029. — arXiv: [1308.4092 \[hep-th\]](#).
13. *Ponsot B., Teschner J.* Liouville bootstrap via harmonic analysis on a non-compact quantum group. — 1999. — arXiv: [hep-th/9911110 \[hep-th\]](#).
14. *Ponsot B., Teschner J.* Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of  $U(\mathfrak{q})(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$  // Commun. Math. Phys. — 2001. — Vol. 224. — P. 613–655. — arXiv: [math/0007097 \[math-qa\]](#).
15. *Nemkov N.* S-duality as Fourier transform for arbitrary  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  // J. Phys. A. — 2014. — Vol. 47, no. 10. — P. 105401. — arXiv: [1307.0773 \[hep-th\]](#).
16. *Немков Н.* О модулярных преобразованиях в теории Лиувилля // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т. 189, № 2. — С. 1574–1591.
17. *Nemkov N.* On modular transformations of toric conformal blocks // JHEP. — 2015. — Vol. 10. — P. 039. — arXiv: [1504.04360 \[hep-th\]](#).
18. *Nemkov N.* On new exact conformal blocks and Nekrasov functions // JHEP. — 2016. — Vol. 12. — P. 017. — arXiv: [1606.05324 \[hep-th\]](#).
19. *Seiberg N., Witten E.* Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B426. — P. 19–52. — arXiv: [hep-th/9407087 \[hep-th\]](#). — [Erratum: Nucl. Phys.B430,485(1994)].
20. *Seiberg N., Witten E.* Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B431. — P. 484–550. — arXiv: [hep-th/9408099 \[hep-th\]](#).
21. *Montonen C., Olive D. I.* Magnetic Monopoles as Gauge Particles? // Phys. Lett. — 1977. — Vol. 72B. — P. 117–120.
22. *Goddard P., Nuyts J., Olive D. I.* Gauge Theories and Magnetic Charge // Nucl. Phys. — 1977. — Vol. B125. — P. 1–28.
23. *Witten E., Olive D. I.* Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges // Phys. Lett. — 1978. — Vol. B78. — P. 97–101.

24. *Osborn H.* Topological Charges for N=4 Supersymmetric Gauge Theories and Monopoles of Spin 1 // *Phys. Lett.* — 1979. — Vol. B83. — P. 321–326.
25. *Losev A., Nekrasov N., Shatashvili S. L.* Issues in topological gauge theory // *Nucl. Phys.* — 1998. — Vol. B534. — P. 549–611. — arXiv: [hep-th/9711108](#) [[hep-th](#)].
26. *Nekrasov N. A.* Seiberg-Witten prepotential from instanton counting // *Adv. Theor. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 7, no. 5. — P. 831–864. — arXiv: [hep-th/0206161](#) [[hep-th](#)].
27. *Nekrasov N., Witten E.* The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory // *JHEP.* — 2010. — Vol. 09. — P. 092. — arXiv: [1002.0888](#) [[hep-th](#)].
28. *Nekrasov N., Okounkov A.* Seiberg-Witten theory and random partitions // *Prog. Math.* — 2006. — Vol. 244. — P. 525–596. — arXiv: [hep-th/0306238](#) [[hep-th](#)].
29. *Galakhov D., Mironov A., Morozov A.* S-duality as a beta-deformed Fourier transform // *JHEP.* — 2012. — Vol. 1208. — P. 067. — arXiv: [1205.4998](#) [[hep-th](#)].
30. *Alday L. F., Gaiotto D., Tachikawa Y.* Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 91. — P. 167–197. — arXiv: [0906.3219](#) [[hep-th](#)].
31. *Wyllard N.* A(N-1) conformal Toda field theory correlation functions from conformal N = 2 SU(N) quiver gauge theories // *JHEP.* — 2009. — Vol. 11. — P. 002. — arXiv: [0907.2189](#) [[hep-th](#)].
32. *Mironov A., Morozov A.* The Power of Nekrasov Functions // *Phys. Lett.* — 2009. — Vol. B680. — P. 188–194. — arXiv: [0908.2190](#) [[hep-th](#)].
33. *Billo M., Frau M., Gallot L., Lerda A., Pesando I.* Deformed N=2 theories, generalized recursion relations and S-duality // *JHEP.* — 2013. — Vol. 04. — P. 039. — arXiv: [1302.0686](#) [[hep-th](#)].
34. *Schiappa R., Wyllard N.* An A(r) threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d N=2 gauge theories // *J. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 51. — P. 082304. — arXiv: [0911.5337](#) [[hep-th](#)].

35. *Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov A. B.* Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory // Nucl. Phys. — 1996. — Vol. B477. — P. 577–605. — arXiv: [hep-th/9506136 \[hep-th\]](#).
36. *Dorn H., Otto H. J.* Two and three point functions in Liouville theory // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B429. — P. 375–388. — arXiv: [hep-th/9403141 \[hep-th\]](#).
37. *Galakhov D., Mironov A., Morozov A.* S-Duality and Modular Transformation as a non-perturbative deformation of the ordinary pq-duality // JHEP. — 2014. — Vol. 06. — P. 050. — arXiv: [1311.7069 \[hep-th\]](#).
38. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* Matrix Model Conjecture for Exact BS Periods and Nekrasov Functions // JHEP. — 2010. — Vol. 02. — P. 030. — arXiv: [0911.5721 \[hep-th\]](#).
39. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* Conformal blocks as Dotsenko-Fateev Integral Discriminants // Int. J. Mod. Phys. — 2010. — Vol. A25. — P. 3173–3207. — arXiv: [1001.0563 \[hep-th\]](#).
40. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* Brezin-Gross-Witten model as 'pure gauge' limit of Selberg integrals // JHEP. — 2011. — Vol. 03. — P. 102. — arXiv: [1011.3481 \[hep-th\]](#).
41. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Conformal blocks and generalized Selberg integrals // Nucl. Phys. — 2011. — Vol. B843. — P. 534–557. — arXiv: [1003.5752 \[hep-th\]](#).
42. *Alexandrov A. S., Mironov A., Morozov A.* Unified description of correlators in non-Gaussian phases of Hermitean matrix model // Int. J. Mod. Phys. — 2006. — Vol. A21. — P. 2481–2518. — arXiv: [hep-th/0412099 \[hep-th\]](#).
43. *Alexandrov A. S., Mironov A., Morozov A.* Solving Virasoro constraints in matrix models // Fortsch. Phys. — 2005. — Vol. 53. — P. 512–521. — arXiv: [hep-th/0412205 \[hep-th\]](#).
44. *Mironov A., Morozov A.* Check-operators and Quantum Spectral Curves. — 2017. — arXiv: [1701.03057 \[hep-th\]](#).
45. *Teschner J.* From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces. — 2003. — arXiv: [hep-th/0308031 \[hep-th\]](#).

46. *Ponsot B., Teschner J.* Liouville bootstrap via harmonic analysis on a non-compact quantum group. — 1999. — arXiv: [hep-th/9911110 \[hep-th\]](#).
47. *Iorgov N., Lisovsky O., Tykhyy Y.* Painleve VI connection problem and monodromy of  $c = 1$  conformal blocks // JHEP. — 2013. — Vol. 1312. — P. 029. — arXiv: [1308.4092 \[hep-th\]](#).
48. *Verlinde E. P.* Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory // Nucl. Phys. — 1988. — Vol. B300. — P. 360–376.
49. *Drukker N., Gomis J., Okuda T., Teschner J.* Gauge Theory Loop Operators and Liouville Theory // JHEP. — 2010. — Vol. 02. — P. 057. — arXiv: [0909.1105 \[hep-th\]](#).
50. *Alday L. F., Gaiotto D., Gukov S., Tachikawa Y., Verlinde H.* Loop and surface operators in  $N=2$  gauge theory and Liouville modular geometry // JHEP. — 2010. — Vol. 01. — P. 113. — arXiv: [0909.0945 \[hep-th\]](#).
51. *Beccaria M., Macorini G.* Exact partition functions for the  $\Omega$ -deformed  $\mathcal{N} = 2^*$   $SU(2)$  gauge theory // JHEP. — 2016. — Vol. 07. — P. 066. — arXiv: [1606.00179 \[hep-th\]](#).
52. *Billo M., Frau M., Fucito F., Lerda A., Morales J. F., Poghossian R., Ricci Pacifici D.* Modular anomaly equations in  $\mathcal{N} = 2^*$  theories and their large- $N$  limit // JHEP. — 2014. — Vol. 10. — P. 131. — arXiv: [1406.7255 \[hep-th\]](#).
53. *Suchanek P.* Elliptic recursion for 4-point superconformal blocks and bootstrap in  $N=1$  SLFT // JHEP. — 2011. — Vol. 02. — P. 090. — arXiv: [1012.2974 \[hep-th\]](#).
54. *Hadasz L., Jaskolski Z., Suchanek P.* Recurrence relations for toric  $N=1$  superconformal blocks // JHEP. — 2012. — Vol. 09. — P. 122. — arXiv: [1207.5740 \[hep-th\]](#).
55. *Итояма Х., Миронов А., Морозов А.* Сшивки ветвей непертурбативного конформного блока на его дивизоре сингулярностей // Теор. Мат. Физ. — 2015. — Т. 184, № 1. — С. 891–923. — arXiv: [1406.4750 \[hep-th\]](#).

## Приложение А

### Специальные функции

#### А.1 Двойные гамма- и синус-функции

Двойная гамма-функция  $\Gamma_b(z)$  может быть определена с помощью следующего интегрально представлении

$$\log \Gamma_b(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left( \frac{e^{-zt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-b^{-1}t})} - \frac{(Q - 2z)^2}{8e^t} - \frac{Q - 2z}{2t} \right), \quad (\text{A.1})$$

где  $Q = b + b^{-1}$ . Двойная гамма-функция мероморфна, не имеет нулей, и обладает простыми полюсами в точках  $z = -nb - mb^{-1}$  при  $n, m \geq 0$ , т.е.

$$\Gamma_b(z) \propto \prod_{n, m \geq 0} \frac{1}{z + nb + mb^{-1}}. \quad (\text{A.2})$$

Наиболее важным для настоящего исследования свойством двойной гамма-функции является следующее функциональное уравнение

$$\Gamma_b(z + b) = \frac{\sqrt{2\pi} b^{bz-1/2}}{\Gamma(bz)} \Gamma_b(z). \quad (\text{A.3})$$

Функция двойного синуса  $S_b(z)$  может быть определена через двойную гамма-функцию следующим образом

$$S_b(z) = \frac{\Gamma_b(z)}{\Gamma_b(Q - z)}, \quad (\text{A.4})$$

и удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$S_b(z + b) = 2 \sin \pi bz S_b(z). \quad (\text{A.5})$$

Из определения  $S_b$  также следует, что

$$S_b(Q - z) = \frac{1}{S_b(z)}. \quad (\text{A.6})$$

Отметим инвариантность двойных функций относительно инверсии  $b$

$$\Gamma_{b^{-1}}(z) = \Gamma_b(z), \quad S_{b^{-1}}(z) = S_b(z). \quad (\text{A.7})$$

Это свойство часто называют самодуальностью.

Функция двойного синуса имеет простые полюса в точках  $z = -nb - mb^{-1}$  ( $n, m \geq 0$ ) и нули в точках  $z = nb + mb^{-1}$  ( $n, m \geq 1$ ), т.е.

$$S_b(z) \propto \prod_{n,m \geq 0} \frac{z - (n+1)b - (m+1)b^{-1}}{z + nb + mb^{-1}}. \quad (\text{A.8})$$

Вычеты двойного синуса в полюсах и обратного двойного синуса в нулях даются следующими выражениями

$$\begin{aligned} \text{Res } S_b(-nb - mb^{-1}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^{nm+n+m}}{\prod_{k=1}^n 2 \sin \pi k b^2 \prod_{l=1}^m 2 \sin \pi l b^{-2}}, \\ \text{Res } S_b^{-1}(nb + mb^{-1}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^{nm}}{\prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \pi k b^2 \prod_{l=1}^{m-1} 2 \sin \pi l b^{-2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Следующее представление в виде ряда для функции  $S_b$  играет большую роль в наших вычислениях

$$\begin{aligned} \log S_b(z) &= -\frac{i\pi}{2} \left( z^2 - Qz + \frac{Q^2 + 1}{6} \right) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i n b z}}{e^{2\pi i n b^2} - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i n b^{-1} z}}{e^{2\pi i n b^{-2}} - 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Также, оказывается удобным ввести обозначения

$$\log S_0(z|Q) = -\frac{i\pi}{2} \left( z^2 - Qz + \frac{Q^2 + 1}{6} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\log \tilde{S}(z|b) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i n b z}}{e^{2\pi i n b^2} - 1}, \quad (\text{A.12})$$

так, что  $S_b$  можно разложить на три множителя

$$S_b(z) = S_0(z|Q) \tilde{S}(z|b) \tilde{S}(z|b^{-1}), \quad (\text{A.13})$$

таким образом разделяя нетривиальную зависимость от  $b$  и  $b^{-1}$ . Функция  $\tilde{S}(z|b)$  удовлетворяет функциональному условию

$$\frac{\tilde{S}(z+b|b)}{\tilde{S}(z|b)} = 1 - e^{2\pi i b z}. \quad (\text{A.14})$$

## А.2 Эллиптические функции и модулярные формы

Эта-функция Дедекинда естественным образом появляется в торическом конформном блоке

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) . \quad (\text{A.15})$$

Мы также используем в вычислениях второй и четвёртый ряды Эйзенштейна, определяемые как

$$E_2(q) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n}, \quad E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n} . \quad (\text{A.16})$$

Эллиптические тета-функции определяются следующим образом:

$$\theta_2(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n-1/2)^2}, \quad \theta_3(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} . \quad (\text{A.17})$$

Здесь параметр  $q$  связан с модулярным параметром тора  $\tau$  как  $q = e^{2\pi i \tau}$ . Подытожим модулярные свойства рядов Эйзенштейна и тета-функций, важные для вычислений в работе

$$\eta(\tilde{q}) = \sqrt{-i\tau} \eta(q) , \quad (\text{A.18})$$

$$E_2(\tilde{q}) = \tau^2 E_2(q) + 6\tau/i\pi, \quad E_4(\tilde{q}) = \tau^4 E_4(q) , \quad (\text{A.19})$$

$$\theta_2(\tilde{q}) = \sqrt{-i\tau} \theta_4(q), \quad \theta_4(\tilde{q}) = \sqrt{-i\tau} \theta_2(q), \quad \theta_3(\tilde{q}) = \sqrt{-i\tau} \theta_3(q) , \quad (\text{A.20})$$

где  $\tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau}$ .

## Приложение Б

### Пертурбативное разложение препотенциала

В работе [33] препотенциал деформированной теории Зайберга-Виттена был вычислен как пертурбативное разложение по степеням  $a^{-1}$  с точностью до  $O(a^{-6})$ . Коэффициенты разложения параметризованы следующим образом:

$$P = \sum_{n,m=0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{2n} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{2m} P^{(n,m)} = \sum_{n,m=0} g^{2n+2m} \left( \sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^{2n} (-1)^m P^{(n,m)}, \quad (\text{Б.1})$$

и равны

$$\begin{aligned} P^{(0,0)} &= 2R \log \frac{a}{\Lambda} - \frac{R^2 E_2}{6a^2} + \frac{T_1 \theta_4^4 - T_2 \theta_2^4}{a^2} - \frac{R^3 (5E_2^2 + E_4)}{180a^4} - \frac{NE_4}{5a^4} + \\ &\quad + \frac{RT_1 \theta_4^4 (2E_2 + 2\theta_2^4 + \theta_4^4)}{6a^4} - \frac{RT_2 \theta_2^4 (2E_2 - 2\theta_4^4 - \theta_2^4)}{6a^4} + \dots, \\ P^{(1,0)} &= -\frac{1}{2} \log \frac{a}{\Lambda} + \frac{RE_2}{12a^2} + \frac{R^2 (E_2^2 + E_4)}{48a^4} - \\ &\quad - \frac{T_1 \theta_4^4 (E_2 + 4\theta_2^4 + 2\theta_4^4)}{12a^4} + \frac{T_2 \theta_2^4 (E_2 - 4\theta_4^4 - 2\theta_2^4)}{12a^4} + \dots, \\ P^{(0,1)} &= \frac{1}{2} \log \frac{a}{\Lambda} - \frac{RE_2}{6a^2} - \frac{R^2 (2E_2^2 + E_4)}{36a^4} + \\ &\quad + \frac{T_1 \theta_4^4 (2E_2 + 2\theta_2^4 + \theta_4^4)}{6a^4} - \frac{T_2 \theta_2^4 (2E_2 - 2\theta_4^4 - \theta_2^4)}{6a^4} + \dots, \\ P^{(2,0)} &= -\frac{E_2}{96a^2} - \frac{R(5E_2^2 + 9E_4)}{960a^4} + \dots, \\ P^{(1,1)} &= \frac{E_2}{24a^2} + \frac{R(10E_2^2 + 11E_4)}{360a^4} + \dots, \\ P^{(0,2)} &= -\frac{E_2}{32a^2} - \frac{R(95E_2^2 + 49E_4)}{2880a^4} + \dots, \\ P^{(3,0)} &= \frac{5E_2^2 + 13E_4}{11520a^4} \dots, & P^{(2,1)} &= -\frac{10E_2^2 + 17E_4}{2880a^4} \dots, \\ P^{(1,2)} &= \frac{95E_2^2 + 94E_4}{11520a^4} \dots, & P^{(0,3)} &= -\frac{2E_2^2 + E_4}{384a^4} \dots. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Здесь массы гипермультиплетов входят через  $SO(8)$ -инвариантные величины  $R, T_1, T_2, N$ , определённые как

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2} \sum_f m_f^2, \\
 T_1 &= \frac{1}{12} \sum_{f < f'} m_f^2 m_{f'}^2 - \frac{1}{24} \sum_f m_f^4, \\
 T_2 &= -\frac{1}{24} \sum_{f < f'} m_f^2 m_{f'}^2 + \frac{1}{48} \sum_f m_f^4 - \frac{1}{2} \prod_f m_f, \\
 N &= \frac{3}{16} \sum_{f < f' < f''} m_f^2 m_{f'}^2 m_{f''}^2 - \frac{1}{96} \sum_{f \neq f'} m_f^2 m_{f'}^4 + \frac{1}{96} \sum_f m_f^6,
 \end{aligned} \tag{Б.3}$$

а суммирование по  $f$  идёт от  $f = 1$  до  $f = 4$ .

## Приложение В

### Функциональные коэффициенты в разностных уравнениях

#### В.1 Функции $C_+$ , $C_0$ , $C_-$

Можно разделить все функции  $C_{\pm,0}(\alpha_i, \alpha, \alpha')$  на общий множитель, что соответствует перенормировке однородного уравнения (2.20). При выборе

$$C_+(\alpha_i, \alpha, \alpha') = 1 \quad (\text{B.1})$$

остальные две функции даются выражениями

$$\begin{aligned}
C_0(\alpha_i, \alpha, \alpha') &= -\frac{e^{ib\pi(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}u' \left( \frac{e^{-ib^2\pi}}{u'} - e^{ib^2\pi}u' \right)}{(-1 + e^{2ib\pi(\alpha_2-\alpha_3)}u')(-1 + e^{2ib\pi(\alpha_1-\alpha_4)}u')} \times \\
&\times \left( \frac{e^{-ib\pi(b-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}(-1 + e^{2ib\pi(b-\alpha_2-\alpha_3)}u')(-1 + e^{2ib\pi(b-\alpha_1-\alpha_4)}u')}{e^{2ib^2\pi} - (u')^2} + \right. \\
&+ \frac{e^{-ib\pi(3b-3\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}(e^{2ib\pi(2b-\alpha_1-\alpha_2)} - u)(-1 + e^{2ib\pi(b-\alpha_1-\alpha_2)}u)(-1 + (u')^2)}{u(e^{2ib\pi(\alpha_2-\alpha_3)} - u')(e^{2ib\pi(\alpha_1-\alpha_4)} - u')} + \\
&+ \frac{e^{-ib\pi(3b-3\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}(e^{2ib\pi(2b-\alpha_2-\alpha_3)} - u')(-e^{2ib\pi(b-\alpha_2+\alpha_3)} + u')}{(-e^{2ib\pi(\alpha_2-\alpha_3)} + u')(-e^{2ib\pi(\alpha_1-\alpha_4)} + u')} \times \\
&\times \left. \frac{(-e^{2ib\pi(2b-\alpha_1-\alpha_4)} + u')(-e^{2ib\pi(b-\alpha_1+\alpha_4)} + u')(-1 + (u')^2)}{(-e^{2ib^2\pi} + (u')^2)(-e^{4ib^2\pi} + (u')^2)} \right), \\
C_-(\alpha_i, \alpha, \alpha') &= \frac{e^{2ib\pi(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}(e^{2ib\pi(2b-\alpha_2-\alpha_3)} - u')(e^{2ib\pi(2b-\alpha_1-\alpha_4)} - u')}{(e^{2ib\pi(\alpha_2-\alpha_3)} - u')(e^{2ib\pi(\alpha_1-\alpha_4)} - u')(-1 + e^{2ib\pi(\alpha_2-\alpha_3)}u')} \times \\
&\times \frac{(-e^{2ib\pi(\alpha_2+\alpha_3)} + u')(-e^{2ib\pi(\alpha_1+\alpha_4)} + u')(-1 + (u')^2)(-1 + e^{2ib^2\pi}(u')^2)}{(-1 + e^{2ib\pi(\alpha_1-\alpha_4)}u')(e^{4ib^2\pi} - (u')^2)(e^{6ib^2\pi} - (u')^2)}, \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

где

$$u = e^{2\pi i b \alpha}, \quad u' = e^{2\pi i b \alpha'}. \quad (\text{B.3})$$

## В.2 Функции $E_+$ , $E_0$ , $E_-$

Функции  $E_i$ , входящие в уравнение (2.52), есть

$$\begin{aligned}
 E_+(u, u') &= \frac{e^{-2i\pi(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)} u^2 (e^{2i\pi(\alpha_2 - \alpha_3)} - u')^2 (e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_4)} - u') (-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_4)} u')}{(-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} u) (-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} u) (-1 + (u')^2)^2}, \\
 E_0(u, u') &= -\frac{2e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} u (e^{2i\pi(\alpha_2 - \alpha_3)} - u') (-1 + e^{2i\pi(\alpha_2 + \alpha_3)} u')}{(-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} u) (-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} u) (-1 + (u')^2)^2} \times \\
 &\quad \times \left( -2 \cos(2\pi\alpha_4) u' + \cos(2\pi\alpha_1) (1 + (u')^2) \right), \\
 E_-(u, u') &= \frac{e^{-2i\pi(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} (e^{2i\pi(\alpha_1 + \alpha_4)} - u') (-1 + e^{2i\pi(\alpha_2 + \alpha_3)} u')^2 (-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 + \alpha_4)} u')}{(-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} u) (-1 + e^{2i\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} u) (-1 + (u')^2)^2}. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

## Приложение Г

### Модулярное ядро при единичном центральном заряде как связывающий коэффициент уравнения Пенлеве VI

#### Г.1 Определение и явный вид связывающего коэффициента

В работе [12] была предложена формула для модулярного ядра при  $c = 1$ . Мы дадим краткий обзор подхода и результатов, полученных в этой статье. Центральную роль играет связь между  $c = 1$  конформными блоками и тау-функцией уравнения Пенлеве VI. А именно, конформный блок  $B_\alpha \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} (x)$  оказывается коэффициентом Фурье-разложения тау-функции по отношению к одному из её параметров

$$\begin{aligned} \tau &= \chi_0(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} C \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{bmatrix} ; \sigma_{0t} + n \Big] s_{0t}^n B_{\sigma_{0t}+n} \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{bmatrix} (t) = \\ &= \chi_1(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} C \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{bmatrix} ; \sigma_{1t} + n \Big] s_{1t}^n B_{\sigma_{1t}+n} \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{bmatrix} (1-t) . \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

Для удобства сравнения с оригинальной статьей в этом приложении в основном сохранены обозначения [12]. Они будут пояснены далее. Заметим, что во второй строке вместо исходных  $s$ -канальных конформных блоков появились  $t$ -канальные конформные блоки. Поскольку стандартный конформный блок является рядом по степеням  $t$ , выражение в первой строке может быть использовано для нахождения асимптотики тау-функции вблизи точки  $t = 0$ , в то время как вторая строка даёт разложение в точке  $t = 1$ . Связь между двумя разложениями можно описать величиной

$$\chi_{01} = \chi_0^{-1} \chi_1 , \quad (\text{Г.2})$$

которую называют *связывающим коэффициентом*. Удобно использовать перенормированную версию  $\chi_{01}$

$$\bar{\chi}_{01} = \chi_{01} \frac{C \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_\infty \end{bmatrix} ; \sigma_{1t}}{C \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{bmatrix} ; \sigma_{0t}} . \quad (\Gamma.3)$$

Перед тем как приступить к расшифровке уравнения (Г.1), мы приведём точное соотношение между связывающим коэффициентом и модулярным ядром при единичном центральном заряде

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \bar{\chi}_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) \mu(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) . \quad (\Gamma.4)$$

Здесь  $\bar{\chi}_{01}$  является основным исследуемым объектом в [12],  $\mu$  есть некоторая достаточно простая тригонометрическая функция, а  $C$  – структурные константы, выраженные в терминах двойной гамма-функции Барнса. Точные определения всех этих величин и связь между параметрами в левой и правой частях будут даны ниже.

По определению, связывающий коэффициент есть отношение двух Фурье-разложений. Из уравнения (Г.1) легко видеть, что  $\chi_{01}$  удовлетворяет следующим разностным условиям:

$$\begin{aligned} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t} + 1, \sigma_{1t}) &= s_{0t}^{-1} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) , \\ \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t} + 1) &= s_{1t} \chi_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) . \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

В работе [12] было найдено решение уравнений (Г.5), являющееся единственным при некоторых предположениях

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{01}(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) &= \prod_{k=1}^4 \frac{\hat{G}(\omega_+ + \nu_k)}{\hat{G}(\omega_+ + \lambda_k)} \times \\ &\times \prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} \frac{G(1 + \varepsilon \sigma_{1t} + \varepsilon' \theta_t - \varepsilon \varepsilon' \theta_1) G(1 + \varepsilon \sigma_{1t} + \varepsilon' \theta_0 - \varepsilon \varepsilon' \theta_\infty)}{G(1 + \varepsilon \sigma_{0t} + \varepsilon' \theta_t + \varepsilon \varepsilon' \theta_0) G(1 + \varepsilon \sigma_{0t} + \varepsilon' \theta_1 + \varepsilon \varepsilon' \theta_\infty)} \prod_{\varepsilon = \pm} \frac{G(1 + 2\varepsilon \sigma_{0t})}{G(1 + 2\varepsilon \sigma_{1t})} , \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

где  $G(x)$  есть двойная гамма-функция Барнса, удовлетворяющая

$$G(x + 1) = G(x) \Gamma(x) , \quad (\Gamma.7)$$

а  $\hat{G}(x)$  обозначает отношение

$$\hat{G}(x) = \frac{G(1+x)}{G(1-x)} . \quad (\Gamma.8)$$

В выражении (Г.6) множитель в первой строке представляет собой наиболее важную часть результата. Множители во второй строке могут быть устранены подходящей перенормировкой конформных блоков. Это завершает формулировку основного результата работы [12]. Осталось пояснить все обозначения, введённые выше неявным образом.

Параметры  $\sigma_{0t}$ ,  $\sigma_{1t}$  и  $\theta_0$ ,  $\theta_t$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_\infty$  соответствуют внутренним и внешним лиувиллевским моментам, а параметр  $t$  – проективному инварианту конформного блока

$$\begin{aligned} (\theta_0, \theta_t, \theta_1, \theta_\infty) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) , \\ (\sigma_{0t}, \sigma_{1t}) &= (\alpha, \alpha') , \\ t &= x . \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

Структурные константы даются уравнением

$$C \begin{bmatrix} \theta_t & \theta_1 \\ \theta_0 & \theta_\infty \end{bmatrix} ; \sigma = \frac{\prod_{\varepsilon, \varepsilon' = \pm} G(1 + \theta_t + \varepsilon\theta_0 + \varepsilon'\sigma) G(1 + \theta_1 + \varepsilon\theta_\infty + \varepsilon'\sigma)}{\prod_{\varepsilon = \pm} G(1 + 2\varepsilon\sigma)} \quad (\Gamma.10)$$

и совпадают с нормировочными множителями (2.4), взятыми при  $c = 1$ .

Остаётся объяснить, что означают величины  $s_{0t}$  и  $s_{1t}$ , входящие в уравнение (Г.5), и как определены аргументы гамма-функций Барнса  $\omega_+$ ,  $\nu_k$ ,  $\lambda_k$  в уравнении (Г.6). Для этой цели удобно ввести ещё несколько вспомогательных параметров. А именно, положим

$$\begin{aligned} p_\mu &= 2 \cos 2\pi\theta_\mu, \quad \mu = 0, t, 1, \infty , \\ p_{\mu\nu} &= 2 \cos 2\pi\sigma_{\mu\nu}, \quad \mu\nu = 0t, 1t, 01 . \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

Здесь величина  $\sigma_{01}$  не является независимой от  $\sigma_{0t}$ ,  $\sigma_{1t}$ , но связана с ними квадратичным соотношением вида  $W = 0$ , где

$$W = p_{0t}p_{1t}p_{01} + p_{0t}^2 + p_{1t}^2 + p_{01}^2 - \omega_{0t}p_{0t} - \omega_{1t}p_{1t} - \omega_{01}p_{01} + \omega_4 - 4 , \quad (\Gamma.12)$$

а параметры  $\omega$  заданы исключительно в терминах  $p_\mu$

$$\begin{aligned}\omega_{0t} &= p_0 p_t + p_1 p_\infty , \\ \omega_{1t} &= p_1 p_t + p_0 p_\infty , \\ \omega_{01} &= p_0 p_1 + p_t p_\infty , \\ \omega_4 &= \prod_\mu p_\mu + \sum_\mu p_\mu^2 .\end{aligned}\tag{Г.13}$$

Тогда, функции  $s_{0t}$  и  $s_{1t}$  определяются как

$$\begin{aligned}s_{0t}^\pm &= \frac{q_{01} e^{\pm 2\pi i \sigma_{0t}} - q_{1t}}{16 \prod_{\varepsilon=\pm} \sin(\theta_t \mp \sigma_{0t} + \varepsilon \theta_0) \sin(\theta_1 \mp \sigma_{0t} + \varepsilon \theta_\infty)} , \\ s_{1t}^\pm &= \frac{q_{01} e^{\mp 2\pi i \sigma_{1t}} - q_{0t}}{16 \prod_{\varepsilon=\pm} \sin(\theta_t \mp \sigma_{1t} + \varepsilon \theta_1) \sin(\theta_0 \mp \sigma_{1t} + \varepsilon \theta_\infty)} ,\end{aligned}\tag{Г.14}$$

где  $q_{\mu\nu} = \frac{\partial W}{\partial p_{\mu\nu}}$ :

$$\begin{aligned}q_{01} &= 2p_{01} + p_{0t} p_{1t} - \omega_{01} , \\ q_{0t} &= 2p_{0t} + p_{01} p_{1t} - \omega_{0t} , \\ q_{1t} &= 2p_{1t} + p_{0t} p_{01} - \omega_{1t} .\end{aligned}\tag{Г.15}$$

Параметры  $\nu_k$  и  $\lambda_k$  задаются как простые линейные комбинации величин  $\vec{\theta}$  и  $\sigma_{0t}, \sigma_{1t}$

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \sigma_{0t} + \theta_0 + \theta_t, & \lambda_1 &= \theta_0 + \theta_t + \theta_1 + \theta_\infty , \\ \nu_2 &= \sigma_{0t} + \theta_1 + \theta_\infty, & \lambda_2 &= \sigma_{0t} + \sigma_{1t} + \theta_0 + \theta_1 , \\ \nu_3 &= \sigma_{1t} + \theta_0 + \theta_\infty, & \lambda_3 &= \sigma_{0t} + \sigma_{1t} + \theta_t + \theta_\infty , \\ \nu_4 &= \sigma_{1t} + \theta_t + \theta_1, & \lambda_4 &= 0 .\end{aligned}\tag{Г.16}$$

Здесь стоит отметить, что  $\sum_k \nu_k = \sum_k \lambda_k$ , и эта величина получила отдельное обозначение  $\nu_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_k \nu_k$ .

Параметр  $\omega_+$  зависит от  $\nu, \lambda$  и определяется следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$\prod_k (1 - z e^{2\pi i \nu_k}) = \prod_k (1 - z e^{2\pi i \lambda_k}) .\tag{Г.17}$$

Поскольку  $\nu_\Sigma = \lambda_\Sigma$  это условие является кубическим уравнением относительно  $z$ . У него есть одно тривиальное решение  $z = 0$  и два нетривиальных  $z_\pm$ . Параметры  $\omega_\pm$  определены как

$$z_\pm = e^{2\pi i \omega_\pm} .\tag{Г.18}$$

Нетривиальные решения  $z_{\pm}$  можно представить в виде

$$z_{\pm} = \frac{4 \sin 2\pi\sigma_{0t} \sin 2\pi\sigma_{1t} + 4 \sin 2\pi\theta_t \sin 2\pi\theta_{\infty} + 4 \sin 2\pi\theta_0 \sin 2\pi\theta_1 \pm q_{01}}{2 \sum_k (e^{2\pi i(\nu_{\Sigma} - \nu_k)} - e^{2\pi i(\nu_{\Sigma} - \lambda_k)})}. \quad (\text{Г.19})$$

Наконец, функция  $\mu$ , появляющаяся в уравнении (Г.4), есть

$$\mu(\vec{\theta}, \sigma_{0t}, \sigma_{1t}) = -\frac{4 \sin 2\pi\sigma_{0t} \sin 2\pi\sigma_{1t}}{q_{01}}. \quad (\text{Г.20})$$

Это завершает определение формул (Г.6), (Г.4) с точностью до неоднозначности, которую мы обсудим ниже.

Следует сделать ещё несколько замечаний. Правая часть уравнения (Г.6) является периодической функцией  $\omega_+$ , что позволяет использовать любую ветвь решения уравнения (Г.18). Однако, одна неопределённость остаётся. Мы ввели  $p_{01}$  как решение квадратного уравнения, так что существует два возможных варианта выбора  $p_{01}$ . Если зафиксировать один из них, величины  $q_{01}$  и  $z_+$  находятся единственным образом. Оба выбора  $p_{01}$  дают связывающий коэффициент  $\chi_{01}$ , решающий уравнение (Г.5), но лишь один из них имеет отношение к модулярному ядру. А именно, нужно выбирать такой  $p_{01}$ , для которого в формуле (Г.4) величина  $s_{0t}$  стремится к нулю при стремлении  $\Im(\sigma_{1t}) \rightarrow \infty$ .

## Г.2 Сравнение с результатами настоящего исследования

### Разложение в ряд

Формула для модулярного ядра при  $s = 1$  (Г.4) поддаётся явному разложению по степеням непертурбативных параметров  $u$  и  $u'$ . Для сравнения двух выражений для модулярного ядра нужно принять во внимание возможное различие в нормировках

$$\mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \sim N_{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} N_{\alpha'}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.21})$$

Чтобы устранить эту неопределённость, можно рассмотреть диагональные элементы  $\alpha = \alpha'$  и положить  $\alpha_1 = \alpha_3$ , так что нормировочные факторы сокра-

тятся. Более того, для простоты и наглядности мы наложим дополнительные ограничения на внешние импульсы  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = i/4$ , оставив только  $\alpha_2$  свободным параметром <sup>1</sup>.

В этих предположениях несколько первых членов  $u$ -разложения модулярного ядра при  $c = 1$  из работы [47] есть (работать с логарифмическими производными модулярного ядра оказывается технически более удобно, чем непосредственно с ядром) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \log \mathcal{F}_{\alpha\alpha} \begin{bmatrix} \alpha_2 & i/4 \\ i/4 & i/4 \end{bmatrix} = \\ = 4\pi i \alpha + 2\pi \cos(2\pi\alpha_2) + 8\pi i \alpha (-1 + \sin(2\pi\alpha_2)) + 4 \cos(2\pi\alpha_2) \alpha_2 u - \\ - 4 (\pi \cos(2\pi\alpha_2) (1 - 4i\alpha \cos(2\pi\alpha_2) + \sin(2\pi\alpha_2) + 4 \sin(2\pi\alpha_2) \alpha_2)) u^2 + \\ + O(u^3) . \quad (\text{Г.22}) \end{aligned}$$

Разложение в ряд выражения для модулярного ядра при  $c = 1$ , предложенное в настоящей работе, может быть вычислено как итерациями, согласно процедуре описанной в главе 2, так и напрямую из выражения (2.47) с  $P$  и  $P_2$  заданными формулами (2.49), (2.52) <sup>2</sup>. В результате получим

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \log \mathcal{F}_{\alpha\alpha} \begin{bmatrix} \alpha_2 & i/4 \\ i/4 & i/4 \end{bmatrix} = 4i\alpha\pi + \\ + (4(1 + 2i\alpha\pi) (-1 + \sin(2\pi\alpha_2)) + 8\pi \cos(2\pi\alpha_2) \alpha_2) u + \\ + 4 \cos(2\pi\alpha_2) ((1 + 4i\alpha\pi) \cos(2\pi\alpha_2) - 4\pi \sin(2\pi\alpha_2) \alpha_2) u^2 + O(u^3) . \quad (\text{Г.23}) \end{aligned}$$

Как можно видеть, разложения (Г.22) и (Г.23) совпадают с точностью до функций, периодических по  $\alpha$  и  $\alpha_2$ , которые не фиксируются в нашем подходе. Мы выполнили схожие проверки при других значениях параметров и включая большее число членов разложения, каждый раз обнаруживая полное согласие обоих результатов.

<sup>1</sup>В частности, выбор  $\alpha_2 = i/4$  сведёт обсуждаемую ситуацию к случаю Ашкина-Теллера (33).

<sup>2</sup>Следует также принять во внимание, что при  $\alpha' = \alpha$  и  $\alpha_1 = \alpha_3$  справедливо  $P(\alpha, \alpha') = P'(\alpha, \alpha')$

### Г.3 Подробнее о связывающем коэффициенте уравнения Пенлеве VI

Мы показали согласованность двух представлений для модулярного ядра при единичном центральном заряде, а именно, уравнений (2.47) и (Г.6). Тем не менее, они выглядят совершенно по-разному. Более того, в то время как формула, полученная в текущем исследовании, может быть целиком записана в терминах элементарных функций, формула для связывающего коэффициента уравнения Пенлеве VI существенно использует трансцендентные функции и параметризацию, которая заметно отличается от естественных переменных в конформной теории. Мы исследуем выражение для связывающего коэффициента более подробно и покажем, что его непериодическая часть допускает запись в терминах элементарных функций.

Обозначим первый фактор в уравнении (Г.6) как  $\mathcal{M}$  (напомним, что остаток может быть устранён перенормировкой)

$$\mathcal{M} = \prod_{k=1}^4 \frac{\hat{G}(\omega_+ + \nu_k)}{\hat{G}(\omega_+ + \lambda_k)}. \quad (\text{Г.24})$$

Существует формула отражения для гамма-функции Барнса

$$\log \hat{G}(x) = \log \frac{G(1+x)}{G(1-x)} = x \log 2\pi - \int_0^x \pi y \operatorname{ctg} \pi y. \quad (\text{Г.25})$$

Следовательно

$$\partial_x \log \hat{G}(x) = \log 2\pi - \pi x \operatorname{ctg} \pi x. \quad (\text{Г.26})$$

Взяв логарифмическую производную уравнения (Г.24) по некоторому параметру  $x$  и использовав свойство (Г.26), получим

$$\partial_x \log \mathcal{M} = \sum_k (\log 2\pi - \pi(\omega_+ + \nu_k) \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k)) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\}. \quad (\text{Г.27})$$

Здесь и далее  $\{\lambda\}$  означает предыдущие слагаемые, в которых произведена замена  $\nu$  на  $\lambda$ . Поскольку  $\sum_k \nu_k - \{\lambda\} = 0$  (см. уравнения (Г.16)), получим

$$\log 2\pi \sum_k \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} = 0. \quad (\text{Г.28})$$

Далее, используя определение величин  $\omega_+$  (Г.18) и тот факт, что  $z_+$  удовлетворяет условию (Г.17) можно показать, что

$$\sum_k -\pi\omega_+ \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} = 0 . \quad (\text{Г.29})$$

Следовательно, (Г.27) упрощается до

$$\partial_x \log \mathcal{M} = \sum_k -\pi\nu_k \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_x(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} . \quad (\text{Г.30})$$

Введём следующий разностный оператор

$$D_A = \exp(\partial/\partial\alpha^A) - 1 . \quad (\text{Г.31})$$

Здесь и далее  $\alpha^A$  обозначает любой из внешних или внутренних моментов,  $\alpha^A = \alpha, \alpha', \alpha_1, \dots, \alpha_4$ . Отметим, что  $D_A$  уничтожает функции, периодические по всем  $\alpha^A$ , а также, что  $D_A\alpha^B = \delta_A^B$ .

Применим оператор  $D_A$  к уравнению (Г.30) и положим  $x = \alpha^B$ :

$$D_A \partial_B \log \mathcal{M} = \sum_k -\pi(D_A \nu_k) \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_B(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} . \quad (\text{Г.32})$$

Здесь было использовано, что поскольку  $\nu_k$  – линейные функции  $\alpha^A$  (см. (Г.16)),  $D_A \nu_k$  есть константа, т.е.  $\partial_B D_A \nu_k = 0$ . Кроме того,  $D_A \omega_+ = 0$ , поскольку  $\omega_+$  зависит от  $\alpha^A$  периодическим образом.

С другой стороны, нам известно, что логарифм функции  $\mathcal{M}$  можно представить как

$$\log \mathcal{M} = \sum_A \alpha^A P_A + R , \quad (\text{Г.33})$$

где все  $P_A$  и  $R$  периодичны. Таким образом,

$$P_A = D_A \log \mathcal{M} . \quad (\text{Г.34})$$

Тогда получаем

$$\partial_B P_A = D_A \partial_B \log \mathcal{M} = \sum_k -\pi(D_A \nu_k) \operatorname{ctg} \pi(\omega_+ + \nu_k) \partial_B(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} . \quad (\text{Г.35})$$

Поскольку  $D_A \nu_k$  и  $D_A \lambda_k$  – константы, уравнение (Г.35) может быть непосредственно проинтегрировано

$$P_A = \sum_k -(D_A \nu_k) \log \sin \pi(\omega_+ + \nu_k) - \{\lambda\} . \quad (\text{Г.36})$$

Наконец, заметим, что

$$\sum_A \alpha^A D_A \nu_k = \nu_k \quad (\text{Г.37})$$

и аналогично для  $\lambda_k$ . Тогда, просуммировав (Г.36) с весом  $\alpha^A$ , получим

$$\mathcal{M} = \exp \left( \sum_{\alpha} a^{\alpha} P_{\alpha} + R \right) = \prod_k \frac{\sin \pi(\omega_+ + \nu_k)^{-\nu_k}}{\sin \pi(\omega_+ + \lambda_k)^{-\lambda_k}} e^R . \quad (\text{Г.38})$$

Это подтверждает, что непериодическая часть формулы (Г.24) может быть выражена в элементарных функциях. Остаточный множитель  $e^R$ , вероятно, не может быть упрощён схожим образом.

## Приложение Д

### Свойства торического модулярного ядра

#### Д.1 Двойное разложение модулярного ядра

В этом приложении доказывается тождество (3.25), которое является эквивалентным формуле

$$L(\mathbf{p}, \mu) = R(\mathbf{p}, \mu) , \quad (\text{Д.1})$$

где

$$L(\mathbf{p}, \mu) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + (k-1)b) \sin \pi b(\mu + (k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha' + kb) \sin \pi kb^2} , \quad (\text{Д.2})$$

$$R(\mathbf{p}, \mu) = (1 - e^{4\pi i b \alpha'}) \frac{\tilde{S}(2\alpha'|b)}{\tilde{S}(2\alpha' + \mu|b)} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} \times \quad (\text{Д.3})$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i m b \alpha'} e^{2\pi i b^2 n m} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b \mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1} , \quad (\text{Д.4})$$

а символом  $\mathbf{p}$  обозначена совокупность всех оставшихся параметров помимо  $\mu$ ,  $\mathbf{p} = (\alpha', b, n)$ .

Сперва заметим, что при  $\mu = b$  имеем  $L(\mathbf{p}, b) = 1$ , а исходя из свойства (A.14) также имеем  $R(\mathbf{p}, b) = 1$ , т.е.

$$L(\mathbf{p}, b) = R(\mathbf{p}, b) . \quad (\text{Д.5})$$

Далее, нетрудно проверить, что обе функции удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению первого порядка со сдвигом по  $\mu$  на  $b^{-1}$ :

$$L(\mathbf{p}, \mu + b^{-1}) = L(\mathbf{p}, \mu), \quad R(\mathbf{p}, \mu + b^{-1}) = R(\mathbf{p}, \mu) . \quad (\text{Д.6})$$

Отсюда следует, что

$$L(\mathbf{p}, \mu) = R(\mathbf{p}, \mu) \times f(\mathbf{p}, \mu) , \quad (\text{Д.7})$$

где  $f(\mathbf{p}, \mu)$  – некоторая функция, периодичная по  $\mu$  с периодом  $b$ . В дальнейшем мы покажем, что функции  $L(\mathbf{p}, \mu)$  и  $R(\mathbf{p}, \mu)$  также удовлетворяют одинаковому

разностному уравнению первого порядка со сдвигом по  $\mu$  на  $b$ . Следовательно, функция  $f(\mathbf{p}, \mu)$  оказывается периодичной по  $\mu$  как с периодом  $b$ , так и с периодом  $b^{-1}$ , т.е. на самом деле не зависит от  $\mu$  (для общего случая, когда  $b^2$  не рационален):

$$f(\mathbf{p}, \mu) = g(\mathbf{p}) . \quad (\text{Д.8})$$

С другой стороны, поскольку как мы показали  $L(\mathbf{p}, b) = R(\mathbf{p}, b)$ , можно заключить, что  $g(\mathbf{p}) = 1$  и, следовательно, уравнение (Д.1) выполнено. Остаётся построить ещё одно разностное уравнение, которому удовлетворяют обе функции.

Нетрудно видеть, что

$$L(\mathbf{p}, \mu + b) = \Lambda(\mathbf{p}, \mu) L(\mathbf{p}, \mu) , \quad (\text{Д.9})$$

где

$$\Lambda(\mathbf{p}, \mu) = \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb)}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu) \sin \pi b\mu} . \quad (\text{Д.10})$$

Далее, используя соотношение (А.14) и уравнения

$$e^{b\partial_\mu} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} = \frac{1 - e^{-2\pi i n b^2} e^{-2\pi i b\mu}}{1 - e^{-2\pi i b\mu}} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} , \quad (\text{Д.11})$$

$$e^{b\partial_\mu} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b\mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1} = \frac{1 - e^{2\pi i b\mu}}{1 - e^{-2\pi i m b^2} e^{2\pi i b\mu}} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b\mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1} , \quad (\text{Д.12})$$

можно доказать, что

$$\begin{aligned} R(\mathbf{p}, \mu + b) = & \left\{ \frac{1 - e^{-2\pi i n b^2} e^{-2\pi i b\mu}}{1 - e^{2\pi i b(2\alpha' + \mu)}} \frac{1}{1 - e^{-2\pi i b\mu}} \right\} \times \\ & \times \left( 1 - e^{4\pi i b\alpha'} \right) \frac{\tilde{S}(2\alpha'|b)}{\tilde{S}(2\alpha' + \mu|b)} \prod_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i k b^2} - e^{2\pi i b(b-\mu)}}{e^{2\pi i k b^2} - 1} \times \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i m b\alpha'} \left[ \frac{e^{2\pi i b\mu} - 1}{1 - e^{2\pi i b\mu} e^{-2\pi i m b^2}} \right] e^{2\pi i n m b^2} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b\mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1} . \quad (\text{Д.13}) \end{aligned}$$

Таким образом, замена  $\mu$  на  $\mu + b$  в  $R(\mathbf{p}, \mu)$  равносильна умножению всего выражения на множитель в первой строке (в фигурных скобках) и умножению каждого коэффициента ряда на определённый множитель (в квадратных скобках).

Умножение  $R(\mathbf{p}, \mu)$  на  $\Lambda(\mathbf{p}, \mu)$  приводит к такому же результату. Перепишем  $\Lambda(\mathbf{p}, \mu)$  как

$$\Lambda(\mathbf{p}, \mu) = \left\{ \frac{1 - e^{-2\pi i n b^2} e^{-2\pi i b \mu}}{1 - e^{2\pi i b(2\alpha' + \mu)}} \frac{1}{1 - e^{-2\pi i b \mu}} \right\} \times \left( 1 - e^{4\pi i b \alpha'} e^{2\pi i b \mu} e^{2\pi i n b^2} \right). \quad (\text{Д.14})$$

Здесь множитель в фигурных скобках тот же, что и в формуле (Д.13). Обозначим

$$R^m = e^{2\pi i b^2 n m} \prod_{l=1}^m \frac{e^{2\pi i l b^2} - e^{2\pi i b \mu}}{e^{2\pi i l b^2} - 1}. \quad (\text{Д.15})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left( 1 - e^{4\pi i b \alpha'} e^{2\pi i b \mu} e^{2\pi i n b^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha'} R^m &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha'} R^m \left[ 1 - e^{2\pi i b \mu} e^{2\pi i n b^2} \frac{R^{m-1}}{R^m} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha'} R^m \left[ 1 - e^{2\pi i b \mu} e^{2\pi i n b^2} e^{-2\pi i n b^2} \frac{e^{2\pi i m b^2} - 1}{e^{2\pi i m b^2} - e^{2\pi i b \mu}} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha'} R^m \left[ \frac{1 - e^{2\pi i b \mu}}{1 - e^{2\pi i b \mu} e^{-2\pi i n b^2}} \right]. \quad (\text{Д.16}) \end{aligned}$$

Множитель в квадратных скобках здесь тот же самый, что и в формуле (Д.13). Таким образом, умножение  $R(\mathbf{p}, \mu)$  на  $\Lambda(\mathbf{p}, \mu)$  (Д.10) действительно имеет тот же эффект, что и сдвиг  $\mu$  на  $b$ . Следовательно, функция  $R(\mathbf{p}, \mu)$  удовлетворяет условию

$$R(\mathbf{p}, \mu + b) = \Lambda(\mathbf{p}, \mu) R(\mathbf{p}, \mu), \quad (\text{Д.17})$$

что согласно нашим предыдущим аргументам доказывает тождество (Д.1).

## Д.2 Проверка разностного уравнения со сдвигом по $\mu$

В этом приложении мы проверим, что выражение

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) = e^{4\pi i \alpha \alpha'} e^{2\pi i(\alpha - \alpha')\mu} e^{\frac{i\pi}{2}\mu(Q - \mu)} \frac{\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b)}{\widetilde{S}(2\alpha'|b)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b \alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) \quad (\text{Д.18})$$

с коэффициентами  $\mathcal{M}^n(\alpha', \mu)$ , определёнными как

$$\mathcal{M}^n(\alpha', \mu) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + (k-1)b) \sin \pi b(\mu + (k-1)b)}{\sin \pi b(2\alpha' + kb) \sin \pi kb^2} \quad (\text{Д.19})$$

удовлетворяет уравнению (3.14), т.е.

$$\left( e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} - e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} \right) \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) = 2 \sin 2\pi b\alpha e^{b\partial_\mu} \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) . \quad (\text{Д.20})$$

Нетрудно вычислить левую часть

$$\begin{aligned} \left( e^{\frac{b}{2}\partial_\alpha} - e^{-\frac{b}{2}\partial_\alpha} \right) \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) &= 2i \times \\ &\times e^{4\pi i\alpha\alpha'} e^{2\pi i(\alpha-\alpha')\mu} e^{\frac{i\pi}{2}\mu(Q-\mu)} \frac{\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b)}{\widetilde{S}(2\alpha'|b)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) [\sin \pi b(2\alpha' + \mu + 2nb)] . \end{aligned} \quad (\text{Д.21})$$

Далее, используя соотношение (A.14), можно переписать правую часть как

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\pi b\alpha e^{b\partial_\mu} \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha\alpha'}(\mu) &= i e^{-2\pi i b\alpha'} \left( 1 - e^{2\pi i b(2\alpha'+\mu)} \right) e^{\frac{i\pi}{2}\mu} e^{-i\pi b\mu} \times \\ &\times e^{4\pi i\alpha\alpha'} e^{2\pi i(\alpha-\alpha')\mu} e^{\frac{i\pi}{2}\mu(Q-\mu)} \frac{\widetilde{S}(2\alpha' + \mu|b)}{\widetilde{S}(2\alpha'|b)} \times \\ &\times (1 - e^{4\pi i b\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb)}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu) \sin \pi b\mu} . \end{aligned} \quad (\text{Д.22})$$

Обозначим

$$\mathcal{N}^n(\alpha', \mu) = \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb)}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu) \sin \pi b\mu} . \quad (\text{Д.23})$$

Последняя строка в уравнении (Д.22) есть

$$\begin{aligned} (1 - e^{4\pi i b\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{N}^n(\alpha', \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{N}^n(\alpha', \mu) \left[ 1 - \frac{\mathcal{N}^{n-1}(\alpha', \mu)}{\mathcal{N}^n(\alpha', \mu)} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{N}^n(\alpha', \mu) \left[ 1 - \frac{\sin \pi b(2\alpha' + nb) \sin \pi n b^2}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb)} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) \times \\ &\times \frac{\sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb) - \sin \pi b(2\alpha' + nb) \sin \pi n b^2}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu) \sin \pi b\mu} = \\ &= \frac{1}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{4\pi i n b\alpha} \mathcal{M}^n(\alpha', \mu) [\sin \pi b(2\alpha' + \mu + 2nb) \sin \pi b\mu] , \end{aligned} \quad (\text{Д.24})$$

где в последнем преобразовании было использовано тригонометрическое тождество

$$\begin{aligned} \sin \pi b(2\alpha' + \mu + nb) \sin \pi b(\mu + nb) - \sin \pi b(2\alpha' + nb) \sin \pi nb^2 = \\ = \sin \pi b(2\alpha' + \mu + 2nb) \sin \pi b\mu . \end{aligned} \quad (\text{Д.25})$$

Сумма в последней строке уравнения (Д.24) совпадает с суммой в уравнении (Д.21). Наконец, собирая множители в уравнениях (Д.22), (Д.24) и отмечая, что

$$\frac{ie^{-2\pi ib\alpha'} (1 - e^{2\pi ib(2\alpha'+\mu)}) e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-i\pi b\mu}}{\sin \pi b(2\alpha' + \mu)} = 2i , \quad (\text{Д.26})$$

приходим к желаемому результату (Д.20).

## Приложение Е

### Центральные заряды конечно-полюсных конформных блоков

Мы предположили, что среди решений (4.34) только те, для которых  $c \leq 1$ , приводят к конечно-полюсным конформным блокам. В данном приложении мы докажем эту гипотезу для случая  $M = 1$  и произвольного  $N \geq 1$ <sup>1</sup>. Доказательство очень близко к анализу раздела 4.1.3. Тонкости возникают из-за того, что некоторые вклады в формуле Замолодчикова оказываются сингулярными при стремлении центрального заряда к интересующим нас специальным значениям. Следовательно, эти предельные переходы должны быть проанализированы с аккуратностью.

Для  $M = 1$  внешняя размерность может быть выбрана равной  $\Delta_{1,3}$  или  $\Delta_{1,-3}$ . Для краткости мы обозначим обе эти возможности символом  $\bar{\Delta}_e = \Delta_{1,\pm 3}$ . При подстановке  $\Delta_e = \bar{\Delta}_e$  все коэффициенты  $R_{r \geq 1, s \geq 2}(\Delta_e, c)$  обращаются в нуль, и формула (4.4) сводится к следующему виду

$$H_{\Delta}(\bar{\Delta}_e, c|q) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{R_{r,1}(\bar{\Delta}_e, c)}{\Delta - \Delta_{r,1}} q^r H_{\Delta_{r,-1}}(\bar{\Delta}_e, c|q) . \quad (\text{E.1})$$

#### Случай $c > 1$

Пусть выбранный центральный заряд ( $c > 1$ ) соответствует  $\alpha_{n,m} = 0$  ( $nm < 0$ ). Мы покажем, что в пределе  $\alpha_{n,m} \rightarrow 0$  бесконечное число членов сохраняется в разложении (E.1). Действительно, пусть  $r$  таково, что следующий предел не равен нулю

$$\lim_{\alpha_{n,m} \rightarrow 0} R_{r,1}(\bar{\Delta}_e, c) H_{\Delta_{r,-1}}(\bar{\Delta}_e, c|q) \neq 0 . \quad (\text{E.2})$$

Это означает, что в рассматриваемом конформном блоке есть по крайней мере один полюс в точке  $\Delta = \Delta_{r,1}$ . Тогда, можно показать существование такого  $r' > r$ , что выражение  $R_{r',1}(\bar{\Delta}_e, c) H_{\Delta_{r',-1}}(\bar{\Delta}_e, c|q)$  также не обращается в нуль в этом пределе, а потому приносит полюс в точке  $\Delta = \Delta_{r',1}$ . Следовательно, по индукции, количество полюсов бесконечно.

<sup>1</sup>Это эквивалентно случаю  $N = 1, M \geq 1$  из-за симметрии  $b \leftrightarrow b^{-1}$ , которая переставляет индексы у вырожденных размерностей  $\Delta_{r,s} \rightarrow \Delta_{s,r}$ .

Действительно, подставим  $\Delta = \Delta_{r',-1}$  в уравнение (E.1)

$$H_{\Delta_{r',-1}}(\bar{\Delta}_e, c|q) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{R_{r,1}(\bar{\Delta}_e, c)}{\Delta_{r',-1} - \Delta_{r,1}} q^r H_{\Delta_{r,-1}}(\bar{\Delta}_e, c|q) . \quad (\text{E.3})$$

Конформный блок в левой части может оказаться сингулярным из-за обнуления знаменателя в правой части. Это случается, когда  $\Delta_{r',-1} = \Delta_{r,1}$ , из чего при  $c > 1$  следует, что

$$\alpha_{r'-r,-2} = 0 . \quad (\text{E.4})$$

В обсуждаемом случае ( $M = 1$ ) существует четыре способа выбрать  $c > 1$ , см. уравнение (4.34)

$$\alpha_{N,-1} = 0, \quad \alpha_{N,-2} = 0, \quad \alpha_{N+1,-1} = 0, \quad \alpha_{N+1,-2} = 0 . \quad (\text{E.5})$$

При выборе

$$r' = r + 2N, \quad r' = r + N, \quad r' = r + 2N + 2, \quad r' = r + N + 1 , \quad (\text{E.6})$$

в каждом из этих случаев (соответственно) условие  $\alpha_{r'-r,-2} = 0$  будет выполнено. Следовательно, конформные блоки  $H_{\Delta_{r',-1}}(\bar{\Delta}_e, c)$  имеют простые полюса как функции центрального заряда.

Остаётся показать, что сопровождающие множители  $R_{r',1}(\bar{\Delta}_e, c)$  не имеют кратных нулей в этих точках. Рассмотрим

$$R_{r,1}(\Delta_{1,3}, c) = \frac{\alpha_{r,1}}{Q} \prod_{n=0}^{r-1} \frac{(\Delta_{1,3} - \Delta_{2n+1,1})(\Delta_{1,3} - \Delta_{2n+1,-1})}{\Delta'_{2n+1,1} \Delta_{2n+1,-1}} . \quad (\text{E.7})$$

У этого выражения никогда не бывает кратных нулей. В самом деле, числитель обнуляется, если  $\Delta_{1,3} = \Delta_{2n+1,1}$  или  $\Delta_{1,3} = \Delta_{2n+1,-1}$ , что при  $c > 1$  подразумевает  $\alpha_{n,-1} = 0$  или  $\alpha_{n,-2} = 0$ . Однако, при  $\alpha_{n,-1} = 0$  знаменатель также оказывается сингулярным из-за обнуления  $\Delta_{2n+1,-1}$ . Следовательно, один из нулей, который может появиться в числителе, всегда сопровождается появлением нуля в знаменателе. Отсюда следует, что выражение (E.7) не может иметь кратных нулей. Аналогичные аргументы справедливы для случая  $\Delta_e = \Delta_{1,-3}$ , и мы их не приводим. Это завершает рассмотрение случая  $c > 1$ .

### Случай $c \leq 1$

Вернёмся к рассмотрению уравнения (E.3) при  $c \leq 1$ . Конформный блок

$H_{\Delta_{r',-1}}(\Delta_e, c)$  становится сингулярен, когда происходит совпадение размерностей типа  $\Delta_{r',-1} = \Delta_{r,1}$  что подразумевает  $\alpha_{r'+r,0} = 0$  или  $\alpha_{r'-r,-2} = 0$ . Поскольку  $r' > r > 0$ , ни одно из этих уравнений не имеет решений при  $c \leq 1$ , т.е. в этом случае не возникает сингулярностей подобно случаю  $c > 1$ .

Остаётся лишь возможность, что сами коэффициенты  $R_{r,1}(\Delta_e, c)$  могут оказаться сингулярными. Однако, в полной аналогии со случаем  $c > 1$ , можно показать, что это не так, поскольку нули знаменателя всегда сопровождаются нулями числителя. Следовательно, количество полюсов в случае  $c \leq 1$  действительно конечно.