



**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
“КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ”
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ**

На правах рукописи

Котов Андрей Юрьевич

**Моделирование влияния внешних воздействий на свойства КХД
на решетке**

Специальность 01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук В.В. Брагута

Москва, 2016

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Кварк-глюонная плазма	3
1.2	Решеточная квантовая хромодинамика	4
1.2.1	Теория Янга - Миллса на решетке	5
1.2.2	Решеточные фермионы	6
1.2.3	Внешние условия	8
1.2.4	Численные методы	13
1.3	Содержание диссертации	15
1.4	Результаты, выносимые на защиту диссертации	16
2	Сверхпроводимость вакуума в сильных магнитных полях	19
2.1	Внешнее магнитное поле и ρ -мезоны.	19
2.2	Конденсация ρ -мезонов. Численные расчеты	20
2.3	Сверхпроводящий конденсат. Вихри	23
3	Моделирование $SU(2)$-КХД с ненулевой барионной плотностью	27
3.1	Вычисления с ненулевой барионной плотностью и проблема знака	27
3.2	Решеточная формулировка и детали расчетов	28
3.3	Результаты и обсуждение	29
4	Квантовая хромодинамика с ненулевой киральной плотностью	32
4.1	Киральная плотность и эксперимент	32
4.2	Двухцветная КХД и «staggered» фермионы	33
4.2.1	Детали расчетов	33
4.2.2	Результаты вычислений	36
4.3	Трехцветная КХД и вильсоновские фермионы	43
4.3.1	Детали расчетов	43
4.3.2	Результаты вычислений	44
4.4	Катализ динамического нарушения киральной симметрии киральным хиральным потенциалом	46
4.4.1	Модель Намбу - Йона-Лазинио и уравнение для щели	47
4.4.2	Слабо взаимодействующая киральная среда	48
4.4.3	Сильно взаимодействующая киральная среда	48
4.4.4	Киральная среда и теория сверхпроводимости БКШ	49
4.4.5	Сравнение с решеточными расчетами	50

4.5	Обсуждение и выводы	52
5	Транспортные коэффициенты в решеточной глюодинамике	53
5.1	Кварк-глюонная плазма - самая идеальная жидкость	53
5.2	Транспортные коэффициенты и корреляторы тензора энергии-импульса	54
5.3	Спектральная функция $\rho_{12,12}$	55
5.4	Решеточная дискретизация тензора-энергии импульса	56
5.5	Перенормировка тензора энергии-импульса	57
5.6	Многоуровневый алгоритм	58
5.7	Измерение энтропии	59
5.8	Обращение формул Кубо.	59
	5.8.1 Линейный метод	60
	5.8.2 Модельная функция	62
5.9	$SU(3)$ -глюодинамика	67
5.10	Численные результаты	67
6	Корреляции абелевых монополей в кварк-глюонной плазме	69
6.1	Введение	69
6.2	Детали расчетов	70
6.3	Результаты	72
7	Заключение	75
8	Благодарности	77
A	Ультрафиолетовые расходимости в киральном конденсате при ненулевом киральном химическом потенциале	78
A.1	«staggered» фермионы	78
A.2	Вильсоновские фермионы	81
B	Ультрафиолетовые расходимости в петле Полякова при ненулевом киральном химическом потенциале	84

Глава 1

Введение

1.1 Кварк-глюонная плазма

Кварк-глюонная плазма - это состояние, в которое переходит адронное вещество при очень высоких температурах или плотностях барионного заряда. Носители цветного заряда - кварки и глюоны, из которых состоят адроны, - становятся отдельными степенями свободы, в то время как в обычной фазе они связаны в бесцветные (нейтральные) объекты - мезоны и барионы. Похожее явление происходит и в обычном веществе - при высоких температурах происходит ионизация атомов, при этом электрически нейтральные атомы разделяются на заряженные ионы и электроны.

Предположительно, вещество Вселенной на ранних этапах ее развития находилось в состоянии кварк-глюонной плазмы. Сейчас такие высокие температуры и плотности получают в столкновениях тяжелых ионов очень высоких энергий, также, возможно, кварк-глюонная плазма есть в центре нейтронных звезд.

Экспериментально было обнаружено, что кварк-глюонная плазма является не квази-идеальным газом из почти свободных кварков и глюонов, а практически идеальной жидкостью, то есть взаимодействие между частицами - носителями цветного заряда - достаточно велико. По этой причине один из основных методов квантовой теории поля, пертурбативные вычисления, успешно работающие в квантовой электродинамике, очень часто не применимы для изучения свойств кварк-глюонной плазмы. Одним из основных способов получения теоретических данных о кварк-глюонной плазме является численное моделирование квантовой хромодинамики на суперкомпьютерах. С его помощью исследуются термодинамические и гидродинамические свойства кварк-глюонной плазмы.

Стоит отметить, что кварк-глюонная плазма, возникающая в столкновениях тяжелых ионов, в нейтронных звездах или на ранних этапах жизни Вселенной, находится под воздействием экстремальных внешних условий. Такие условия включают в себя высокую температуру $\sim 10^{13}$ К, сильные магнитные поля $\sim 10^{14}$ Тесла, большие плотности различных зарядов: барионного, электрического и кирального и др. Поведение квантовой хромодинамики под воздействием этих условий может сильно изменяться. Эти условия также необходимо учитывать для описания свойств системы.

Представленная диссертационная работа посвящена изучению свойств теории сильных взаимодействий - квантовой хромодинамики - во внешних условиях методами

решеточного моделирования.

Дальнейшая часть данной главы посвящена краткому обзору методов моделирования решеточной квантовой хромодинамики во внешних условиях (разд. 1.2). Остаток введения (разд. 1.3) представляет собой анонс основной части работы.

1.2 Решеточная квантовая хромодинамика

Аналитические расчеты в квантовой теории поля по большей части полагаются на пертурбативное разложение по малой константе связи α . По этой причине получение точных результатов в квантовой хромодинамике - теории сильных взаимодействий, константа связи которой $\alpha \sim 1$, - является трудной задачей и требует применения других, непертурбативных методов.

Уже более сорока лет назад был предложен новый метод изучения квантовой теории поля - решеточное компьютерное моделирование [1]. Было показано, что статистическая сумма в квантовой теории поля (в частности, в квантовой хромодинамике), записываемая как след оператора эволюции (в мнимом времени) $Z = \text{Tr}^{-\beta H}$, может быть переписана как интеграл по путям в пространстве Евклида. В таком формализме след по всем состояниям частиц заменяется на континуальный интеграл по калибровочным и фермионным полям. Интегрирование по пространству и времени может быть дискретизовано, то есть записано как дискретная сумма по решетке конечного размера. Формулировка квантовой хромодинамики в дискретном, а не непрерывном пространстве-времени естественным образом вводит как ультрафиолетовое Λ_{UV} , так и инфракрасное Λ_{IR} обрезание по импульсам: $\Lambda_{UV} \sim 1/a$, $\Lambda_{IR} \sim 1/L$, где a - шаг решетки, а L - линейный размер решетки. Другими словами, переход к решеточному формализму регуляризует теорию. Таким образом, решеточная квантовая хромодинамика является с математической точки зрения строго определенной. Результат для непрерывной теории получается после взятия термодинамического $L \rightarrow \infty$ и континуального $a \rightarrow \infty$ пределов. Интегрирование по кварковым полям может быть проделано явно, а полученная решеточная статистическая сумма для калибровочных полей может быть исследована при помощи высокопроизводительных суперкомпьютеров методами Монте-Карло моделирования.

Ключевой особенностью решеточной формулировки КХД является то, что она сохраняет калибровочную инвариантность. Этот факт отличает решеточную КХД от пертурбативных расчетов, в которых важным шагом является фиксация калибровки. Сохранение калибровочной инвариантности приводит к значительным упрощениям, например, обеспечивает безмассовость глюонов в регуляризованной теории.

За прошедшее время метод решеточной КХД значительно развился и позволил получать физические непертурбативные результаты и сравнивать их с экспериментальными данными. Например, в [2] этим методом была определена масса протона.

Стоит отметить и недостатки данного метода. Основной недостаток данного метода заключается в том, что с его помощью можно получить результаты, но нельзя объяснить физические механизмы, лежащие в основе полученных данных или явлений. Например, с его помощью можно вычислить, что в квантовой хромодинамике без динамических фермионов потенциал взаимодействия кварк - антикварк растет линейно

с расстоянием между ними, что является подтверждением явления невылетаия (конфайнмента) цвета. Однако физические причины конфайнмента кварков до сих пор не известны.

Второй серьезный недостаток решеточного компьютерного моделирования – это невозможность его применения для изучения квантовой хромодинамики с большой барионной плотностью. Данная трудность выглядит чисто технической: весовая функция, используемая для генерации равновесных конфигураций, перестает быть положительно определенной для ненулевого барионного химического потенциала. Другими словами, значения функций, от которых нужно посчитать интегралы, флуктуируют между положительными и отрицательными значениями. Однако оказалось, что это сильно усложняет численные расчеты и вычисления на решетках удовлетворительного размера пока что невозможны.

1.2.1 Теория Янга - Миллса на решетке

Переход от непрерывной к решеточной теории поля заключается в замене непрерывных координат на дискретные:

$$x_\mu^{(cont)} \rightarrow x_\mu^{(lat)} = a(n_1, n_2, n_3, n_4), \quad (1.1)$$

где $n_j = 0, 1, \dots, N - 1$ - целые числа, а a - шаг решетки. Интегрирование по пространству-времени заменяется на конечную сумму: $\int d^4x \rightarrow \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{N-1}$. Размер решетки в физических единицах равен $L = Na$.

Как уже было сказано выше, решеточная регуляризация сохраняет калибровочную инвариантность. Калибровочные преобразования решеточных кварковых полей остаются такими же, как и в непрерывной теории: $q(x) \rightarrow V(x)q(x)$ и $\bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(x)V^\dagger(x)$, где $V(x)$ - произвольный элемент калибровочной группы.

Чтобы сделать калибровочно инвариантными кварковые операторы, содержащие фермионные поля в разных точках пространства-времени, необходимо ввести калибровочное поле $U_\mu(x)$. Например, для соседних точек кварковый калибровочно инвариантный оператор имеет вид: $\bar{q}(x)U_\mu(x)q(x + a\hat{\mu})$, где $\hat{\mu}$ - единичный вектор в направлении μ . Глюонное поле $U_\mu(x)$ является элементом калибровочной группы, в отличие от непрерывной теории, в которой глюонное поле описывается переменными A_μ , принимающими значения в соответствующей алгебре Ли. Написанный выше билинейный оператор является калибровочно инвариантным, если U_μ преобразуется следующим образом: $U_\mu(x) \rightarrow V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x + a\hat{\mu})$. Таким образом, решеточное калибровочное поле $U_\mu(x)$ естественным образом связано с ребром, соединяющим вершины x и $x + a\hat{\mu}$ и соответствует в непрерывной теории линии Вильсона, соединяющей эти две точки, $P \exp(i \int_x^{x+a\hat{\mu}} dx_\mu A_\mu^{(cont)})$. След произведения $U_\mu(x)$ вдоль любой замкнутой петли является калибровочно инвариантным.

Самое простое калибровочное действие, обычно называемое вильсоновским действием, дается произведением решеточных переменных вокруг элементарного квадрата (плакета):

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu, \nu} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) \right] \quad (1.2)$$

Здесь N_c - это число цветов, а $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ - обратная константа связи. Легко проверить, что действие (1.2) является инвариантным относительно решеточных калибровочных преобразований. Для малых шагов решетки, в предположении, что калибровочные поля меняются слабо, можно разложить действие по степеням шага решетки a , используя выражение $U_\mu(x) = \exp(iaA_\mu(x))$. В первом порядке возникает континуальное выражение для действия калибровочных полей:

$$S_g \rightarrow \int d^4x \frac{1}{4g^2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}^2(x)], \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad (1.3)$$

На практике расчеты проводятся с ненулевым шагом решетки a , что приводит к ошибкам дискретизации. Например, при конечном шаге решетки нарушена инвариантность относительно поворотов в пространстве Евклида до дискретной группы вращений гиперкуба. Результат для непрерывной теории получается только в пределе $a \rightarrow 0$, поэтому желательно как можно сильнее уменьшить ошибки дискретизации. Для этого в действие (1.3) можно добавлять более сложные слагаемые, например, произведение решеточных переменных вокруг прямоугольника 1×2 , получающее действие называют улучшенным вильсоновским действием.

1.2.2 Решеточные фермионы

При дискретизации фермионных полей возникают некоторые трудности, и способов их дискретизации больше, чем для калибровочных полей. Самой простой наивный способ дискретизации непрерывного действия $S_f = \int d^4x \bar{q}(D_\mu \gamma_\mu + m_q)q$ состоит в замене производной на симметричную разность:

$$D_\mu q(x) \rightarrow \frac{1}{2a} [U_\mu(x)q(x + a\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})q(x - a\hat{\mu})] \quad (1.4)$$

Множители $U_\mu(x)$ приводят к тому, что $D_\mu q(x)$ преобразуется как $q(x)$ при калибровочных преобразованиях, таким образом, дискретизованная версия фермионного действия также является калибровочно инвариантной. При использовании этой наивной дискретизации возникает, однако, следующая проблема. Рассмотрение полюсов в пропагаторе оператора Дирака в наивной дискретизации показывает, что в d -мерном пространстве действие (1.4) соответствует 2^d фермионным ароматам. Появление этих фермионных дублеров связано с теоретической задачей определения кирально симметричных фермионов на решетке. Нильсен и Ниномия доказали [3], что нельзя сформулировать решеточную версию фермионов с точной, аналогичной непрерывной, киральной симметрией без дублеров. Наивные фермионы обладают киральной симметрией, но они соответствуют 16 фермионным ароматам.

Существует ряд способов решения проблемы фермионных дублеров, в частности, ряд способов дискретизации, которые не обладают теми или иными свойствами непрерывной теории. Ниже будут приведены способы дискретизации фермионов, которые будут в дальнейшем обсуждаться в представленной диссертационной работе.

Один из способов состоит в добавлении к решеточному действию дополнительного слагаемого, называемого вильсоновским, имеющего вид $\sim a\bar{q}\Delta q$ (где Δ - решеточ-

ная дискретизация лапласиана):

$$S_W = (ma + 4r) \sum_x \bar{q}_x q_x - \frac{1}{2} \sum_{x\mu} [\bar{q}_x (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) q_{x+\hat{\mu}} + \bar{q}_x (r + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) q_{x-\hat{\mu}}], \quad (1.5)$$

где ma - фермионная масса в решеточных единицах, r - коэффициент перед вильсоновским слагаемым, обычно в расчетах используется $r = 1$. Новое слагаемое дает массу $O(1/a)$ ненужным 15 дублерам, таким образом, они исчезают в непрерывном пределе [1]. Однако это дополнительное слагаемое явно нарушает киральную симметрию и приводит к ошибкам дискретизации, линейным по шагу решетки a . Стоит отметить, что от этих ошибок дискретизации, вообще говоря, можно избавиться при помощи дополнительных слагаемых аналогично глюонному действию. Наиболее часто используется $O(a)$ улучшенное вильсоновское, или клеверное, действие [4].

Достоинствами вильсоновских фермионов являются их теоретическая простота и относительно невысокие вычислительные затраты. Основным их недостатком является отсутствие киральной симметрии, которое не позволяет применять их в расчетах, для которых киральная симметрия важна. Вильсоновское действие, явно нарушающее киральную симметрию, может приводить к дополнительному смешиванию операторов, что сильно мешает расчетам, особенно если коэффициенты перед данными операторами включают расходимости, пропорциональные степеням $1/a$. Получающиеся результаты требуют дополнительной перенормировки (вычитания расходимостей).

Еще одна очень часто используемая дискретизация фермионов - «staggered» фермионы. «Staggered» фермионы являются уменьшенной копией наивных фермионов, соответствующей 4 фермионным ароматам. В данной дискретизации в каждой решеточной вершине остается только одна фермионная дираковская компонента из четырех, а полная дираковская структура образуется из соседних вершин [5]. Действие для данной фермионной дискретизации имеет следующий вид:

$$S_{st} = ma \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x + \frac{1}{2} \sum_{x\mu} \bar{\psi}_x \alpha_\mu(x) (U_\mu(x) \psi_{x+\hat{\mu}} - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \psi_{x-\hat{\mu}}) \quad (1.6)$$

В каждом узле x находится одна компонента ψ_x , а $\alpha_\mu(x) = (-1)^{x_0+x_1+\dots+x_{\mu-1}}$ - специальные численные множители, соответствующие γ -матрицам. Данное действие можно явно переписать в базисе дираковских спиноров и ароматов q_y , объединив 16 компонент одного гиперкуба 2^4 . Полученное действие в континуальном пределе $a \rightarrow 0$ соответствует 4 фермионам.

К преимуществам «staggered» фермионов можно отнести следующее: 1) расчеты с ними требуют меньше ресурсов, чем с вильсоновскими фермионами, 2) у «staggered» фермионов есть некоторый аналог непрерывной киральной симметрии и 3) их ошибки дискретизации порядка $\sim O(a^2)$. Недостатком является наличие дублеров (3 для $d = 4$). Действие соответствует четырем вырожденным фермионам в непрерывном пределе. Их обычно называют «тейстами» фермионов, чтобы отличить от физических фермионных ароматов. Ненарушенная киральная симметрия является несинглетной по тейстам:

$$\begin{aligned} q_y &\rightarrow \exp(i\theta\gamma_5 \otimes \gamma_5) q_y \\ \bar{q}_y &\rightarrow \bar{q}_y \exp(i\theta\gamma_5 \otimes \gamma_5) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь в тензорном произведении $\gamma_5 \otimes \gamma_5$ первая γ_5 -матрица действует на дираковский спинор, то есть соответствует непрерывной синглетной киральной симметрии, а вторая γ_5 -матрица действует на тейстовые индексы.

Все четыре фермионных тейста одинаковы и нарушить симметрию между ними, введя разные массы для разных тейстов, нельзя, поэтому тейсты нельзя связать с различными фермионными ароматами. В практических расчетах необходимо вводить для каждого аромата отдельный «staggered» оператор Дирака, а ненужных дублеров обычно убирают при помощи процедуры извлечения корня. Данная процедура заключается в следующем. Континуальный интеграл по фермионным полям $\int D\psi D\bar{\psi} e^{-S_f}$ равен детерминанту оператора Дирака $\det D$. Если исходное действие соответствует четырем фермионам, то одному фермиону должен соответствовать корень четвертой степени из оператора Дирака $\sqrt[4]{\det D}$, который и используется в конкретных расчетах. Законность этого действия, на самом деле, не столь очевидна, так как симметрия между различными тейстами восстанавливается только в непрерывном пределе. Однако стоит отметить, что существуют теоретические аргументы, подтвержденные численными расчетами [6], подтверждающие обоснованность процедуры извлечения корня, если сначала берется континуальный ($a \rightarrow 0$) предел, а потом киральный (то есть предел нулевой массы кварка).

Часто используется еще один класс решеточных фермионов, фермионы Гинспарга-Вильсона, обладающие некоторым решеточным аналогом киральной симметрией и отсутствием дублеров. Решеточный оператор Дирака для таких фермионов удовлетворяет соотношению Гинспарга-Вильсона $D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D$ [7]. В непрерывной теории правая часть этого соотношения обращается в ноль (это и есть непрерывная киральная симметрия). На решетке можно определить модифицированное киральное преобразование:

$$\delta\psi = i\epsilon\gamma_5\left(1 - \frac{a}{2}D\right)\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\epsilon\bar{\psi}\left(1 - \frac{a}{2}D\right)\gamma_5, \quad (1.8)$$

относительно которого фермионы Гинспарга-Вильсона будут обладать точной киральной симметрией [8]. Эти фермионы обладают теми же свойствами относительно киральных преобразований, что и непрерывные, включая теорему об индексе [9], если рассматривать киральное преобразование (1.8). Конкретная наиболее часто применяемая фермионная дискретизация называется «overlap» и имеет следующий вид [10]:

$$D_{ov} = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{D_W(-1/a)}{\sqrt{D_W^\dagger(-1/a)D_W(-1/a)}} \right], \quad (1.9)$$

где $D_W(-1/a)$ - вильсоновский оператор Дирака с массовым параметром $m = -\frac{1}{a}$. Основным существенным недостатком этих фермионов является то, что они требуют очень больших вычислительных мощностей по сравнению с другими способами дискретизации фермионов.

1.2.3 Внешние условия

В этом параграфе будет рассмотрено, как происходит решеточное моделирование КХД во внешних условиях.

Моделирование на решетке размером L^4 в пределе бесконечного объема $L \rightarrow \infty$ дает вакуумное среднее от рассматриваемых операторов. Это соответствует системе с нулевой температурой. Для изучения термодинамики КХД, или, другими словами, КХД при ненулевой температуре нужен другой подход. В квантовой статистической механике система при ненулевой температуре T описывается статистической суммой ($\beta = 1/T$, H -гамильтониан системы)

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (1.10)$$

Можно показать [11], что эта статистическая сумма может быть переписана как континуальный интеграл от полей по четырехмерному пространству-времени с компактным четвертым евклидовым измерением x_4 :

$$Z(\beta) = \int D[\phi] e^{-S} \quad (1.11)$$

$$S = \int_0^\beta dx_4 \int d^3x L, \quad (1.12)$$

где L - лагранжиан рассматриваемой теории, а на бозонные поля наложены периодические граничные условия в четвертом направлении (для фермионов вследствие статистики граничные условия антипериодические)

$$\phi(x_4 + \beta) = \phi(x_4) \quad (1.13)$$

Это соответствие между теорией поля при конечной температуре и теорией поля с компактным евклидовым временем известно давно [12].

При переходе к решеточной регуляризации рассматривается решетка с конечным количеством шагов по времени N_4 . Тогда температура системы равна $T = \frac{1}{N_4 a}$. Размер решетки по другим направлениям $N = N_1 = N_2 = N_3$ должен быть бесконечным. На практике он конечен, но удовлетворяет соотношению $N \gg N_4$. В пределе $N_4 \rightarrow \infty$ система переходит в теорию поля при нулевой температуре.

Первые решеточные вычисления в КХД при конечной температуре были проделаны более 30 лет назад и состояли в моделировании $SU(N)$ глюодинамики. В настоящее время эти вычисления проводятся с динамическими фермионами и с массами, соответствующими реальным кваркам.

В последние годы с помощью решеточных вычислений удалось решить две давние задачи: была измерена псевдокритическая температура сильновзаимодействующего вещества с физическими массами легких и странного кварков $T/T_c = (154 \pm 9)$ МэВ [13] и было измерено уравнение состояния КХД вещества на достаточно широком промежутке температур [14, 15]. Полученные данные часто используются в гидродинамическом моделировании столкновений тяжелых ионов.

Не менее интересным вопросом термодинамики сильных взаимодействий является изучение свойств квантовой хромодинамики с ненулевой барионной плотностью, на исследование которых направлены эксперименты на таких установках, как LHC, RHIC, FAIR и др. Для изучения системы с ненулевой барионной плотностью обычно вводят сопряженный к ней барионный химический потенциал μ . Статистическая сумма

такой системы имеет вид $Z(\mu, T) = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu Q_b)}$ и может также быть записана в виде континуального интеграла по четырехмерному пространству с компактным временем. Действие для КХД с барионным химическим потенциалом имеет вид

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \bar{q}(D_\mu \gamma_\mu + \mu \gamma_4 + m_q)q \right) \quad (1.14)$$

В решеточной регуляризации для того, чтобы избежать дополнительных расходимостей [16], барионный химический потенциал обычно вводят как временную компоненту абелевого калибровочного поля (дополнительный экспоненциальный фактор на времениподобных ребрах): $U_{x,4} \rightarrow \exp(\mu a)U_{x,4}$, $U_{x,4}^\dagger \rightarrow \exp(-\mu a)U_{x,4}^\dagger$. Например, для наивной дискретизации фермионов действие с барионным химическим потенциалом имеет вид:

$$S = ma \sum_x \bar{q}_x q_x + \frac{1}{2} \sum_{xi} \left[\bar{q}_x \gamma_i U_i(x) q_{x+i} - \bar{q}_x \gamma_i U_i^\dagger(x - \hat{i}) q_{x-\hat{i}} \right] + \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{q}_x \gamma_4 U_4(x) \exp(\mu a) q_{x+\hat{4}} - \bar{q}_x \gamma_4 U_4^\dagger(x - \hat{4}) \exp(-\mu a) q_{x-\hat{4}} \right], \quad (1.15)$$

Добавление барионного химического потенциала, однако, приводит к тому, что фермионный детерминант перестает быть действительным. Статистическая сумма все еще остается действительна, но фермионный детерминант становится комплексным и сильно осциллирующим. Эта проблема, еще называемая «проблемой знака», не позволяет применять стандартные методы Монте-Карло, разработанные для численного моделирования системы. Сейчас разрабатываются различные подходы, позволяющие проводить вычисления при ненулевом барионном химическом потенциале, к ним относятся моделирование комплексной динамики Ланжевена [17, 18, 19], интегрирование по «наперсткам» Лефшеца [20, 21, 22], разложение в ряд Тейлора [23, 24] и интегрирование по каноническому ансамблю [25]. Стоит отметить, что в теории с калибровочной группой $SU(2)$ проблемы знака не возникает [26].

Проблема знака также не возникает, если рассматривать систему с киральной плотностью, то есть систему с разными плотностями левых и правых кварков. Напомним, что безмассовые кварки называются левыми, если их спин сонаправлен с импульсом, и правыми, если они антинаправлены¹. Если взять систему, рождающуюся в столкновениях тяжелых ионов, то в среднем ее киральная плотность равна 0. Однако, некоторое время назад было высказано предположение, что могут возникать локальные домены с ненулевой киральной плотностью [27, 28]. Помимо столкновений тяжелых ионов, киральная плотность может быть реализована в дираковских полуметаллах [29], вейлевских полуметаллах [30], в нейтронных звездах и сверхновых [31, 32], таким образом, системы, в которых может возникать ненулевая киральность, весьма разнообразны и интересны.

Чтобы изучать КХД с ненулевой киральной плотностью, также как и для барионной плотности, обычно переходят к киральному химическому потенциалу μ_5 :

$$S = \int d^4x \bar{q}(D_\mu \gamma_\mu + \mu_5 \gamma_4 \gamma_5 + m_q)q \quad (1.16)$$

¹Стоит отметить, что кварки в КХД не являются безмассовыми, но масса легких кварков много меньше всех остальных размерных параметров, необходимых для описания столкновений тяжелых ионов, поэтому ей можно пренебречь.

Необходимо отметить отличие формулы (1.16) от (1.14) в дополнительном факторе γ_5 в слагаемом, соответствующем химическому потенциалу. Этот множитель соответствует разным знакам для левых и правых частиц.

В решеточной регуляризации киральный химический потенциал μ_5 можно ввести различными способами. Одна из возможностей заключается в введении дополнительных экспоненциальных множителей $e^{\mu_5 a \gamma_5}$ и $e^{-\mu_5 a \gamma_5}$ на временных линках по аналогии с барионным химическим потенциалом. Например, для наивной дискретизации фермионов действие будет выглядеть следующим образом:

$$S = ma \sum_x \bar{q}_x q_x + \frac{1}{2} \sum_{xi} \left[\bar{q}_x \gamma_i U_i(x) q_{x+\hat{i}} - \bar{q}_x \gamma_i U_i^\dagger(x - \hat{i}) q_{x-\hat{i}} \right] + \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{q}_x \gamma_4 U_4(x) \exp(\mu_5 a \gamma_5) q_{x+\hat{4}} - \bar{q}_x \gamma_4 U_4^\dagger(x - \hat{4}) \exp(-\mu_5 a \gamma_5) q_{x-\hat{4}} \right], \quad (1.17)$$

Данный способ обладает тем недостатком, что, если его применить к расчетам со «staggered» фермионами, в которых разные дираковские компоненты соответствуют разным узлам, то действие будет нелокальным. Системы с нелокальным фермионным действием трудно изучать численными методами. Поэтому для вычислений со «staggered» фермионами можно ввести μ_5 линейным образом:

$$S_f = ma \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x + \frac{1}{2} \sum_{x\mu} \eta_\mu(x) (\bar{\psi}_{x+\mu} U_\mu(x) \psi_x - \bar{\psi}_x U_\mu^\dagger(x) \psi_{x+\mu}) + \frac{1}{2} \mu_5 a \sum_x s(x) (\bar{\psi}_{x+\delta} \bar{U}_{x+\delta,x} \psi_x - \bar{\psi}_x \bar{U}_{x+\delta,x}^\dagger \psi_{x+\delta}). \quad (1.18)$$

В слагаемом, нарушающем киральность, $s(x) = (-1)^{x_2}$, $\delta = (1, 1, 1, 0)$ обозначает сдвиг к диагонально расположенной вершине пространственного 2^3 элементарного куба. $\bar{U}_{x+\delta,x}$ представляет собой произведение калибровочных линков, соединяющих вершины x и $x + \delta$, для калибровочной инвариантности действия. Можно показать, что данное действие соответствует одинаковому киральному химическому потенциалу μ_5 для всех четырех теистов «staggered» фермионов. Возникающие при таком способе дискретизации расходимости в наблюдаемых величинах изучены в Приложении.

Влияние киральной плотности (кирального химического потенциала) на свойства КХД было изучено аналитическими методами в ряде работ [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]. Акцент в данных работах был сделан на фазовую диаграмму сильновзаимодействующего вещества в плоскости киральный химический потенциал - температура. Из работ, выполненных методами решеточного моделирования, стоит отметить [43, 44], темой которой является киральный магнитный эффект.

Киральный химический потенциал вызывает огромный интерес прежде всего потому, что он позволяет изучать механизмы взаимодействия квантовой хромодинамики и электромагнитного взаимодействия. Один из нетривиальных эффектов, который часто рассматривают в данном контексте, - это киральный магнитный эффект [28, 45].

Суть данного эффекта в следующем. Рассмотрим систему с ненулевой киральной плотностью, то есть систему, в которой левых кварков больше, чем правых. При включении внешнего магнитного поля спины частиц выстраиваются по полю, а значит, импульс левых частиц будет направлен вдоль поля, а правых против. Из-за кирального дисбаланса частиц с импульсом по полю будет больше, а значит в системе потечет электрический ток вдоль магнитного поля.

В экспериментах по столкновению тяжелых ионов пролетающие нуклоны создают сверхсильное магнитное поле, а, значит, есть условия для возникновения кирального магнитного эффекта, который может быть виден в конечном распределении адронов (см., например, [46, 47]). Взаимодействие между магнитным полем и сильновзаимодействующим веществом в последнее время привлекает пристальное внимание не только из-за кирального магнитного эффекта, но и благодаря ряду других очень интересных явлений: магнитный катализ [48], обратный магнитный катализ [49, 50], возможно расщепление температур перехода конфайнмент - деконфайнмент и перехода нарушение - восстановление киральной симметрии [51].

В решеточных вычислениях обычно для простоты используется однородное постоянное магнитное поле, не зависящее от временных и пространственных координат. Абеливо калибровочное (электромагнитное) поле вводится аналогично глюонному калибровочному полю. Электромагнитный потенциал определяется как новые коммутирующие элементы на ребрах решетки: $V_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)} \in U(1)$ с компактными углами $0 \leq \theta_\mu(x) < 2\pi$. Например, для наивной фермионной дискретизации действие имеет вид $S_f = \int d^4x \bar{q}(D_\mu \gamma_\mu + m_q)q$ с

$$D_\mu q(x) \rightarrow \frac{1}{2a} [V_\mu(x) U_\mu(x) q(x + a\hat{\mu}) - V_\mu^*(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) q(x - a\hat{\mu})] \quad (1.19)$$

В [52] была предложена конструкция для определения магнитного поля в непрерывной теории и в решеточной регуляризации с учетом периодических граничных условий в пространственных направлениях. В непрерывной теории, для постоянного магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B)$ в направлении z координаты векторный потенциал можно определить следующим образом:

$$A_\mu(x, y, z, t) = \frac{B}{2} (x\delta_{\mu,2} - y\delta_{\mu,1}) \quad (1.20)$$

Из-за периодических граничных условий векторный потенциал A_μ испытывает скачок на границе, который проявляется в магнитном поле как δ -функция. Другими словами, магнитное поле $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ постоянно везде, кроме границы, на которой возникает большое магнитное поле. При этом среднее магнитное поле равно 0:

$$\frac{1}{L_x L_y} \int_{(x,y)} dx dy B_z = 0 \quad (1.21)$$

Эта конструкция хорошо подходит для использования в решеточных вычислениях, поскольку на решетке магнитный поток через элементарный плакет определен по модулю 2π .

Постоянное магнитное поле в направлении z координаты соответствующее постоянному потоку ϕ через все плакеты в (x, y) -плоскости может быть определено следующим образом

$$\begin{aligned} V_1(x) &= e^{-i\phi x_2/2} & (x_1 = 1, 2, \dots, L-1) \\ V_2(x) &= e^{i\phi x_1/2} & (x_2 = 1, 2, \dots, L-1) \\ V_1(L, x_2, x_3, x_4) &= e^{-i\phi(L+1)x_2/2} \\ V_2(x_1, L, x_3, x_4) &= e^{i\phi(L+1)x_1/2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Стоит отметить, что указанный способ не является единственным. Любое калибровочное преобразование полей (1.22) также соответствует однородному магнитному полю.

Для того, чтобы магнитное поле было постоянным везде, в том числе и на границе, оно должно быть квантованным следующим образом (q - это электрический заряд фермионов):

$$\phi = a^2 q B = \frac{2\pi N_b}{L^2}, \quad N_b \in \mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

где L - пространственный линейный размер решетки. Таким образом, в решеточной теории всегда есть минимальное значение магнитного потока. Поскольку угол является периодической величиной, то есть и максимальное значение магнитного потока: ϕ ограничено сверху $\phi \leq \pi$, или $N_b \leq L^2/2$.

1.2.4 Численные методы

Выборка по значимости

Задача решеточной квантовой теории поля состоит в вычислении континуального интеграла (здесь для простоты рассматривается только одно бозонное поле ϕ)

$$\langle O[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi O[\phi] e^{-S[\phi]}, \quad (1.24)$$

$$Z = \int D\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.25)$$

Здесь Z - статистическая сумма системы, $O[\phi]$ - наблюдаемая, среднее значение которой необходимо найти. Это может быть, например, среднее некоторого оператора, как-то, плотность энергии, плотность действия, давление или коррелятор операторов. Даже после дискретизации и перехода к решеточной теории требуется интегрирование в (1.24) по многомерному пространству. Из-за высокой размерности интеграла непосредственное его вычисление численными методами представляет очень трудную численную задачу. Вместо этого обычно используют *методы Монте-Карло*. Суть данных методов заключается в следующем. Для вычисления среднего значения (1.24) генерируется некая репрезентативная выборка конфигураций полей $\phi^{(i)}$ с вероятностью, заданной действием: $p \sim e^{-S[\phi]}$. Тогда величина

$$\bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O[\phi^{(i)}] \quad (1.26)$$

является оценкой среднего значения оператора $O: \bar{O} \rightarrow \langle O[\phi] \rangle$ в пределе бесконечно большого числа конфигураций $N \rightarrow \infty$. Задача, таким образом, сводится к генерации репрезентативной выборки конфигураций полей $\phi^{(i)}$ (еще называемой выборкой по значимости).

Для задачи генерации конфигураций обычно используют процедуру обновления конфигураций, которая начинается с некоторой конфигурации (например, случайной), случайным образом генерирует некоторую новую конфигурацию, потом, с помощью новой конфигурации генерирует следующую и так далее, строя таким образом Марковскую цепь конфигураций: $\psi^{(0)} \rightarrow \psi^{(1)} \rightarrow \psi^{(2)} \rightarrow \dots$. Через некоторое количество конфигураций (как говорят, после термализации), новые конфигурации будут генерироваться с нужным весом и могут быть использованы для оценки среднего значения (1.26).

Для процедуры обновления конфигураций был разработан ряд алгоритмов. Более подробно будут рассмотрены два базовых метода, используемых в дальнейшем в представленной диссертационной работе: алгоритм Метрополиса и метод молекулярной динамики.

Алгоритм Метрополиса

Предположим, имеется процедура, которая из заданной конфигурации ψ предлагает новую конфигурацию ψ' с какой-то вероятностью $Q(\psi \rightarrow \psi')$, причем вероятность обратного перехода равна вероятности прямого: $Q(\psi \rightarrow \psi') = Q(\psi' \rightarrow \psi)$. Пусть есть случайное число $\lambda \in [0, 1]$, равномерно распределенное на интервале $[0, 1]$. Тогда алгоритм Метрополиса принимает предложенную новую конфигурацию ψ' в следующих случаях:

- Если $S[\psi'] < S[\psi]$, новая конфигурация принимается
- В противном случае конфигурация принимается, если $e^{S[\psi]-S[\psi']} > \lambda$

Это называется условием принятия/отклонения конфигурации. Если новая конфигурация отклонена, предпринимается новая попытка и так далее. Можно показать, что вероятность перехода от одной конфигурации к другой $R(\psi \rightarrow \psi')$ удовлетворяет условию детального баланса:

$$R(\psi \rightarrow \psi')/R(\psi' \rightarrow \psi) = \exp(-S[\psi'])/\exp(-S[\psi]). \quad (1.27)$$

Тогда можно показать, что последовательное применение таких шагов $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \psi_i \rightarrow \dots$ через достаточное большое время будет генерировать новые конфигурации с весом $P[\psi] \sim e^{-S[\psi]}$.

Данный метод часто применяется при генерации конфигураций в глюодинамике, где действие локальное, поэтому позволяет совершать последовательное изменение отдельных переменных с весом $P[\psi] \sim e^{-S[\psi]}$. Однако для работы с теорией с динамическими фермионами он оказывается не очень эффективным и вместо него применяют методы молекулярной динамики или методы гибридного Монте-Карло, объединяющие алгоритм Метрополиса с методами молекулярной динамики.

Методы молекулярной динамики

В данном методе определяются вспомогательные импульсы p_n , сопряженные полям ψ_n , и рассматривается гамильтониан

$$H(p, \psi) = \sum_n \frac{p_n^2}{2} + S[\psi] \quad (1.28)$$

Этот гамильтониан определяет классическую эволюцию во вспомогательном молекулярно-динамическом времени τ :

$$\dot{\psi}_n = p_n \quad \dot{p}_n = -\partial S / \partial \phi_n, \quad (1.29)$$

где точка означает производную по τ . Начиная с некоторой начальной точки ($p_n(\tau = 0), \phi_n(\tau = 0)$), эти уравнения определяют траекторию $(p_n(\tau), \phi_n(\tau))$ в фазовом пространстве. Соответствующая классическая статистическая сумма имеет вид

$$Z = \int [dp][d\phi] \exp(-H(p, \phi)) \quad (1.30)$$

Интеграл по импульсам представляет собой простой Гауссов интеграл и может быть легко посчитан, и в результате получается квантовая статистическая сумма (1.25). То есть квантовая статистическая сумма может быть рассчитана методами классической молекулярной динамики. В соответствии с классической эргодической гипотезой, вероятность каждой конфигурации пропорциональна $\exp(-S[\psi])$. Среднее значение наблюдаемых вычисляется посредством усреднения по траектории молекулярной динамики:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} d\tau O[\psi(\tau)] \quad (1.31)$$

Как и в остальных методах, необходимо выбрать начальное время τ_0 достаточно большим для установления термодинамического равновесия.

1.3 Содержание диссертации

В **главе 2** рассматривается поведение вакуума КХД во внешних магнитных полях. Обсуждается гипотеза о превращении вакуума в сверхпроводник в сверхсильных магнитных полях из-за конденсации ρ -мезонов. Методами решеточного моделирования изучается коррелятор ρ -мезонных полей в $SU(2)$ калибровочной теории без динамических фермионов. Показано, что в сверхсильных магнитных полях в пределе бесконечного размера решетки поведение коррелятора согласуется с ненулевым конденсатом ρ -мезонов. Обсуждается структура данного конденсата. С помощью коррелятора ρ -мезонных полей анализируется поведение дефектов, образующих конденсат. Полученные данные говорят о том, что конденсат проявляет свойства жидкости сверхпроводящих вихрей.

В **главе 3** обсуждается поведение $SU(2)$ калибровочной теории при ненулевой барионной плотности. Представлены результаты расчетов в двухцветной КХД с двумя

фермионными ароматами и ненулевым барионным химическим потенциалом. Обсуждается влияние барионного химического потенциала на фазовый переход конфайнмент - деконфайнмент и на нарушение - восстановление киральной симметрии.

В **главе 4** обсуждается влияние ненулевой киральной плотности на свойства $SU(2)$ и $SU(3)$ КХД. Производится численный анализ наблюдаемых в зависимости от температуры, кирального химического потенциала, массы кварков. Показано, что ненулевой киральный химический потенциал приводит к росту температуры фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент, которая по-прежнему совпадает с температурой нарушения - восстановления киральной симметрии. Обсуждается физический механизм, за счет которого киральный химический потенциал приводит к усилению нарушения киральной симметрии.

В **главе 5** рассматривается вязкость кварк-глюонной плазмы. Обсуждаются различные методы расчета вязкости и возможность их применения в современных численных расчетах. Представлены результаты моделирования $SU(2)$ - и $SU(3)$ - глюодинамики в фазе деконфайнмента и измерения вязкости в указанных теориях. Для $SU(3)$ теории представлены результаты измерения зависимости вязкости от температуры.

В **главе 6** обсуждаются свойства абелевых монополей в кварк-глюонной плазме. Изучается взаимодействие между монополями и антимонополями. Показано, что система монополей и антимонополей проявляет свойства идеального газа с попарным взаимодействием между частицами.

В **заключении** обсуждаются основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

В **Приложении** рассматриваются ультрафиолетовые расходимости, связанные с ненулевым киральным химическим потенциалом. Показано, что они не влияют на полученные результаты.

1.4 Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Проанализирована экзотическая фаза сверхпроводимости в сверхсильных магнитных полях [53] в решеточной квантовой хромодинамике. Исследована структура ρ -мезонного конденсата в решеточной теории и обнаружена жидкость из сверхпроводящих вихрей [54, 55].
- Проведено изучение фазовой структуры двухцветной квантовой хромодинамики с ненулевой барионной плотностью. Показано, что увеличение барионного химического потенциала приводит к уменьшению температуры фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент и восстановлению киральной симметрии [56].
- Исследована фазовая диаграмма квантовой хромодинамики в плоскости киральный химический потенциал - температура. Показано, что в двухцветной и трехцветной КХД рост кирального химического потенциала приводит к росту температуры фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент и фазового перехода нарушение - восстановление киральной симметрии [57, 58, 59, 60]. Обнаружено явление катализа динамического нарушения киральной симметрии киральным химическим потенциалом [61].

- Проведено численное измерение вязкости в $SU(2)$ и $SU(3)$ -глюодинамике. Для $SU(3)$ теории измерена зависимость вязкости от температуры среды. Изучены различные методы определения вязкости в решеточных вычислениях [62, 63, 64].
- Изучены корреляции абелевых монополей и их взаимодействие. Обнаружено, что они проявляют свойства слабовзаимодействующего газа с попарным взаимодействием между частицами [65].

По теме диссертационного исследования опубликованы статьи в ведущих реферируемых журналах:

1. V. V. Braguta, P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, A. Yu. Kotov, and M. I. Polikarpov. Electromagnetic superconductivity of vacuum induced by strong magnetic field: numerical evidence in lattice gauge theory. *Phys. Lett.*, B718:667–671, 2012.
2. В. В. Брагута, А. Ю. Котов, А. А. Николаев и С. Н. Валгушев. Изучение свойств $SU(2)$ КХД с ненулевой барионной плотностью в рамках решеточного моделирования. *Письма в ЖЭТФ*, 101(11):827, 2015.
3. В. В. Брагута, В. А. Гой, М. Ильгенфритц, А. Ю. Котов, А. В. Молочков, М. Мюллер-Пройскер. Study of the phase diagram of $SU(2)$ quantum chromodynamics with nonzero chirality. *Письма в ЖЭТФ*, 100(9):623, 2015.
4. V. V. Braguta, V. A. Goy, E. M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, A. V. Molochkov, M. Muller-Preussker, and B. Petersson. Two-Color QCD with Non-zero Chiral Chemical Potential. *JHEP*, 06:094, 2015.
5. В. В. Брагута и А. Ю. Котов. Вычисление вязкости $SU(2)$ -глюодинамики в рамках моделирования КХД на решетке. *JETP Letters*, 98(3):127, 2013.
6. V. V. Braguta and A. Yu Kotov. Shear viscosity in $SU(2)$ lattice gluodynamics. *J. Phys. Conf. Ser.*, 607(1):012019, 2015.
7. N. Yu. Astrakhantsev, V. V. Braguta, and A. Yu. Kotov. Study of shear viscosity of $SU(2)$ -gluodynamics within lattice simulation. *JHEP*, 09:082, 2015.
8. V. V. Braguta and A. Yu. Kotov. Correlations of Abelian monopoles in quark-gluon plasma. *Phys. Rev.*, D86:014511, 2012.

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных конференциях:

1. International Moscow Workshop on Phenomenology of Particle Physics (Москва, Россия, 2013),
2. The 31st International Symposium on Lattice Field Theory (Майнц, Германия, 2013),
3. International Conference-Session of the Section of Nuclear Physics of PSD RAS (Протвино, Московская область, 2013),

4. 18th International Seminar on High Energy Physics «QUARKS — 2014» (Суздаль, Россия, 2014),
5. The 32st International Symposium on Lattice Field Theory (Нью-Йорк, США, 2014),
6. Quark Confinement and the Hadron Spectrum XI (Санкт-Петербург, Россия, 2014),
7. Monte Carlo methods in computer simulations of complex systems (Владивосток, Россия, 2014),
8. International Conference-Session of the Section of Nuclear Physics of PSD RAS (Москва, Россия, 2014),
9. Strangeness in Quark Matter (Дубна, Россия, 2015),
10. The 33st International Symposium on Lattice Field Theory (Кобе, Япония, 2015),
11. Quark Matter 2015 (Кобе, Япония, 2015),
12. Monte Carlo methods in computer simulations of complex systems, (Владивосток, Россия, 2015),
13. Challenges and opportunities at FAIR and NICA (Москва, Россия, 2015),

а также на научных семинарах ИТЭФ (г. Москва), ОИЯИ (г. Дубна), Университет Франсуа Рабле (г. Тур, Франция), университет им. Гумбольдта (г. Берлин, Германия).

Глава 2

Сверхпроводимость вакуума в сильных магнитных полях

2.1 Внешнее магнитное поле и ρ -мезоны.

Эксперименты по столкновению тяжелых ионов направлены на изучение фазовой диаграммы квантовой хромодинамики в той ее области, где она еще не до конца изучена, и на исследование экзотических свойств фаз, возникающих при больших плотностях энергии и барионного заряда. Изучение взаимодействия сильных электромагнитных полей и базовых механизмов квантовой хромодинамики оказалось не менее интересной областью исследований [66]. При столкновениях тяжелых ионов из-за того, что сталкивающиеся частицы заряжены, на некоторое короткое время в области пространства между ионами возникает очень сильное магнитное поле. С этой точки зрения одним из интереснейших вопросов является изучение фазовой диаграммы квантовой хромодинамики с дополнительным внешним параметром - магнитным полем B . Стоит отметить, что в данной области был обнаружен ряд очень интересных нетривиальных новых явлений [28, 35, 67, 68, 69, 70, 71, 51, 72, 73, 74, 75, 76]. В данной главе будут рассматриваться свойства холодного КХД вещества во внешнем магнитном поле, а именно речь пойдет о существовании новой экзотической фазы сверхпроводимости при достаточно сильных магнитных полях.

В ряде теоретических работ [77, 78, 79] было высказано предположение, что в сверхсильных магнитных полях вакуум квантовой хромодинамики может становиться сверхпроводником. Для данного эффекта ключевым является наличие заряженных частиц со спином 1. В квантовой хромодинамике такие частицы есть - ρ -мезоны. В соответствии с упрощенными аргументами [77] энергия ϵ такой частицы во внешнем магнитном поле задается следующей формулой для уровней Ландау:

$$\epsilon^2 = p_z^2 + (2n - 1)eB + m^2, \quad (2.1)$$

где p_z - импульс частицы в направлении, параллельном полю, e и m - заряд и масса частицы соответственно, B - внешнее магнитное поле, а n - целое число - номер уровня Ландау. Данная формула позволяет заключить, что для нижнего уровня Ландау ($n = 0$)

при магнитном поле больше критического $B > B_c$, где

$$B_c = \frac{m^2}{e}, \quad (2.2)$$

квадрат энергии ϵ^2 становится отрицательным, что в свою очередь означает, что происходит конденсация частиц. Подставив в формулу заряд и массу ρ -мезонов, можно получить численную оценку критического магнитного поля в квантовой хромодинамике $B_c \approx 10^{16}$ Тесла. Поля такого порядка могут возникать при ультрапериферических столкновениях, а значит есть условия для возникновения подобного явления на эксперименте.

Стоит отметить, что формула (2.1) справедлива только для точечных частиц. Поскольку ρ -мезоны являются составными частицами, то для них зависимость энергии от магнитного поля может, вообще говоря, отличаться от формулы (2.1) вплоть до того, что конденсация ρ -мезонов может не происходить. Данный эффект необходимо проанализировать при помощи более точных модельно независимых непертурбативных методов в рамках квантовой хромодинамики.

2.2 Конденсация ρ -мезонов. Численные расчеты

В данной главе будет рассмотрено поведение ρ -мезонов в квантовой решеточной хромодинамике во внешних магнитных полях. Представлены результаты расчетов в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и без динамических фермионов.

Для изучения ρ -мезонов на решетке необходимо использовать оператор с квантовыми числами ρ -мезона:

$$\rho_\mu = \bar{u}\gamma_\mu d \quad (2.3)$$

Исходя из теоретических представлений можно ожидать, что будет конденсироваться ρ -мезон с проекцией спина $+1$ на направление магнитного поля: $\rho_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1 + i\rho_2)$, в то время как компоненты поля с проекцией спина 0 и -1 : $\rho_{(0)} = \rho_3$, $\rho_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1 - i\rho_2)$ конденсироваться не должны.

Так как ρ_μ представляет собой заряженное поле, то из-за калибровочной инвариантности его среднее значение обращается в ноль $\langle \rho_+ \rangle = 0$, поэтому для изучения конденсации ρ -мезонов был проанализирован коррелятор двух операторов ρ_+ в направлении z вдоль магнитного поля. При наличии ненулевого конденсата этот коррелятор стремится на больших расстояниях к константе - квадрату величины конденсата:

$$\langle \rho_+^\dagger(0)\rho_+(z) \rangle \rightarrow |\langle \rho \rangle|^2, z \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Корреляционные функции (2.4) были вычислены численно с помощью решеточных Монте-Карло вычислений в $SU(2)$ решеточной калибровочной теории в «quenched» приближении, то есть без динамических фермионов. Для кварковых фермионных полей был использован «overlap» решеточный оператор Дирака с точной киральной симметрией [10]. Корреляционные функции (2.4) являются линейной комбинацией корреляторов токов в векторном мезонном канале. Векторный коррелятор может быть выражен

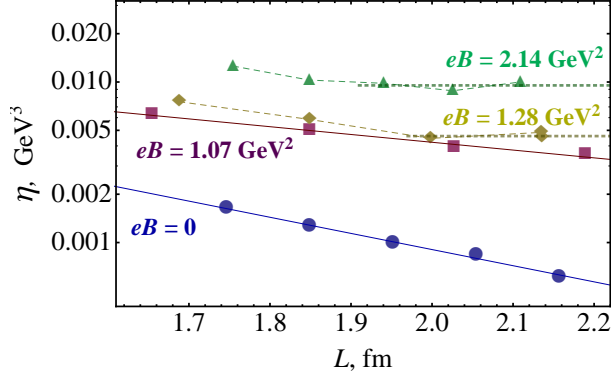


Рис. 2.1: Параметр $\eta(L)$ из формулы (2.6) в зависимости от размера решетки для нескольких значений магнитного поля. Сплошные линии соответствуют фите $\eta \sim e^{-L/L_0}$ для малых значений магнитного поля, пунктирными линиями соединены соседние точки для больших значений магнитного поля. Точками обозначена экстраполяция $L \rightarrow \infty$

через дираковские пропагаторы на фоне фиксированных абелевого (электромагнитного) и неабелевого (глюонного) калибровочных полей и затем усреднен по равновесному ансамблю неабелевых глюонных калибровочных полей A_μ :

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}(x)\gamma_\mu d(x)\bar{d}(y)\gamma_\nu u(y) \rangle &= \left(\int DA_\mu e^{-S_{YM}[A_\mu]} \right)^{-1} \\ &\times \int DA_\mu e^{-S_{YM}[A_\mu]} \text{Tr} \left(\frac{1}{\mathcal{D}_u + m} \gamma_\mu \frac{1}{\mathcal{D}_d + m} \gamma_\nu \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $S_{YM}[A_\mu]$ - решеточное действие для глюонных полей A_μ .

Однородное независящее от времени магнитное поле B вводится в оператор Дирака \mathcal{D}_f для фермионных ароматов $f = u, d$ стандартным способом при помощи замены векторного потенциала со значениями в алгебре $su(2)$ на векторный потенциал со значениями в алгебре $u(2)$: $A_{\mu ij} \rightarrow A_{\mu ij} + \delta_{ij} q_f F_{\mu\nu} x_\nu x_\nu / 2$, где q_f - электрический заряд соответствующего кварка, $q_u = +2e/3$, $q_d = -e/3$, и i, j - цветовые индексы. Также был введен дополнительный фактор на пространственных границах решетки для фермионов, чтобы учесть периодические граничные условия [52, 80]. Было зафиксировано небольшое конечное значение голой массы кварков $am_0 = 0.01$, где a - шаг решетки. Векторные корреляционные функции зависят слабо от голой массы кварков при расчетах с помощью «overlap» оператора Дирака [81, 82].

Численные вычисления проводятся на решетке с конечными размерами, поэтому, чтобы проверить свойство (2.4), были рассмотрены решетки с разными пространственными размерами и изучена зависимость коррелятора от размера решетки. Было обнаружено, что численно коррелятор $\langle \rho_+^\dagger(0)\rho_+(z) \rangle$ можно хорошо профитировать следующей формулой:

$$\langle \rho_+^\dagger(0)\rho_+(z) \rangle \sim C \cosh(\mu(z - L/2)) + \eta^2(L), \quad (2.6)$$

где C , μ , η - фитируемые параметры, L - размер решетки, z - расстояние, на котором измеряется коррелятор. Параметры расчетов и результаты фита представлены в

$eB, \text{ GeV}^2$	$L, \text{ fm}$	$a, \text{ fm}$	l_s	k	$\eta, \text{ GeV}^3$	$m, \text{ GeV}$	$\chi^2/\text{d.o.f.}$
1.07	1.654	0.0973	17	4	0.00626(5)	3.1(1)	0.59
1.07	1.849	0.1027	18	5	0.00501(4)	3.1(2)	0.48
1.07	2.027	0.1126	18	6	0.00392(4)	2.5(3)	0.56
1.07	2.189	0.1152	19	7	0.00353(4)	2.5(2)	0.87
1.28	1.688	0.0993	17	5	0.00753(4)	3.4(1)	0.22
1.28	1.849	0.1027	18	6	0.00585(4)	3.0(1)	0.41
1.28	1.998	0.111	18	7	0.00446(5)	2.6(2)	0.49
1.28	2.135	0.1186	18	8	0.00486(5)	2.2(3)	0.33
1.28	2.136	0.1124	19	8	0.00454(5)	2.3(2)	0.61
2.14	1.754	0.1032	17	9	0.01257(7)	2.5(1)	0.20
2.14	1.849	0.1027	18	10	0.01028(6)	2.5(2)	0.33
2.14	1.940	0.1078	18	11	0.00981(8)	2.2(2)	0.41
2.14	2.025	0.1066	19	12	0.00881(7)	2.2(2)	0.54
2.14	2.109	0.111	19	13	0.01001(6)	2.1(3)	0.32

Таблица 2.1: Параметры решеточных расчетов, используемые для термодинамического предела для ненулевых значений магнитного поля B , и соответствующие параметры фитирования, полученные с помощью формулы (2.6). Данные визуализированы на Рис. 2.1.

Табл. 2.1.

Для изучения эффектов конечного объема рассматривалась зависимость параметра $\eta(L)$ от размера решетки L при фиксированном значении внешнего магнитного поля (в физических единицах). Было обнаружено, что при малых значениях магнитного поля $eB = 0 \text{ GeV}^2$ и $eB = 1.07 \text{ GeV}^2$ зависимость $\eta(L)$ прекрасно описывается экспоненциальным падением:

$$\eta^{fit}(L) = C e^{-L/L_0}, \quad (2.7)$$

где C и L_0 - параметры фитирования. В пределе бесконечного объема, как и ожидалось, конденсат стремится к 0.

При больших значениях магнитного поля ($eB = 1.28 \text{ ГэВ}$ и $eB = 2.14 \text{ ГэВ}$) зависимость $\eta(L)$ уже не экспоненциальная, а выходит на плато при больших размерах решетки L (см. Рис. 2.1). Другими словами, в пределе большого размера решеток конденсат остается ненулевым. Для численной оценки конденсата в пределе бесконечного объема решетки $L \rightarrow \infty$, можно, например, усреднить параметр $\eta(L)$ при двух наибольших размерах решетки L (горизонтальная точечная линия на Рис. 2.1).

Итак, полученные данные говорят о том, что при малых значениях магнитного поля $eB = 0 \text{ ГэВ}$, $eB = 1.07 \text{ ГэВ}$ конденсат ρ -мезонов равен нулю, а при $eB = 1.28 \text{ ГэВ}$ и $eB = 2.14 \text{ ГэВ}$ отличен от нуля в пределе бесконечного размера решеток, что соответствует существованию сверхпроводящей фазы. Стоит отметить, что эти данные согласуются с формулой для критического поля $eB_c = m_\rho^2$ с учетом того, что в решеточной $SU(2)$ глюодинамике масса ρ -мезона равна $m_\rho = 1.1 \text{ ГэВ}$ [83].

2.3 Сверхпроводящий конденсат. Вихри

В теоретической работе [84] была детально рассмотрена структура сверхпроводящего конденсата. Основным результатом данной работы заключается в том, что в состоянии с наименьшей энергией ρ -мезонный конденсат является не однородным, а образует треугольную решетку из дефектов – вихрей, которые во многом аналогичны вихрям Абрикосова в обычных сверхпроводниках. При этом было получено, что энергии различных решеток (треугольная, квадратная, шестиугольная и др.) очень близки друг к другу. Это означает, что аккуратный учет квантовых поправок может сильно изменить полученный результат, например, квантовые флуктуации могут сделать энергетически наиболее выгодной не треугольную, а какую-либо другую решетку или вообще «расплавить» треугольную решетку и привести к образованию жидкости или газа из ρ -мезонных вихрей. Данный результат был получен в рамках эффективной модели КХД, поэтому требует дополнительного рассмотрения. Указанный эффект также был рассмотрен при помощи решеточных вычислений, о которых и пойдет речь дальше в этом параграфе.

Как уже было отмечено выше, в используемом подходе нельзя смотреть напрямую на значение оператора $\rho_\mu(x)$, поэтому в качестве наблюдаемого выступало поле

$$\phi(x) = \langle \rho_+^\dagger(0) \rho_+(x) \rangle_f \quad (2.8)$$

Формально его нельзя отождествить с полем ρ -мезонов, так как при увеличении x оно экспоненциально спадает, однако с его помощью можно изучать структуру конденсата, нормировав все наблюдаемые на $|\phi|$ в соответствующей степени. Исходя из эффективной теории для ρ -мезонов [84], можно написать следующие наблюдаемые, характеризующие неоднородный конденсат (приведены выражения для наблюдаемых в непрерывной теории):

$$\begin{aligned} \text{Плотность энергии: } E(x) &= \frac{|D_\mu \phi(x)|^2}{|\phi(x)|^2}, D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \\ \text{Электрический ток: } j_\mu(x) &= \frac{\phi^* D_\mu \phi - \phi (D_\mu \phi)^*}{2i|\phi(x)|^2} \\ \text{Плотность вихрей: } v(x) &= \text{sing arg } \phi(x) = \frac{\epsilon^{ab}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_b} \arg \phi(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

На Рис. 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 представлены результаты для данных наблюдаемых. На Рис. 2.2, 2.3, 2.4 визуализирована плотность энергии для трех значений магнитного поля - ниже критического значения, вблизи перехода и выше критического значения. Изображены два среза - один в перпендикулярном к магнитному полю направлении, один - в параллельном. Видно, что при малых значениях поля (Рис. 2.2) хотя в плотности энергии наблюдаются неоднородности, но они не образуют никаких регулярных структур. В окрестности критического значения поля $B \approx B_c$ (Рис. 2.3) на срезе, параллельном к полю, виден дефект, вытянутый вдоль поля, при этом флуктуации приводят к отклонению его формы от прямой. На перпендикулярном срезе видно несколько пиков, соответствующих положению вихрей. При еще большем магнитном поле $B > B_c$

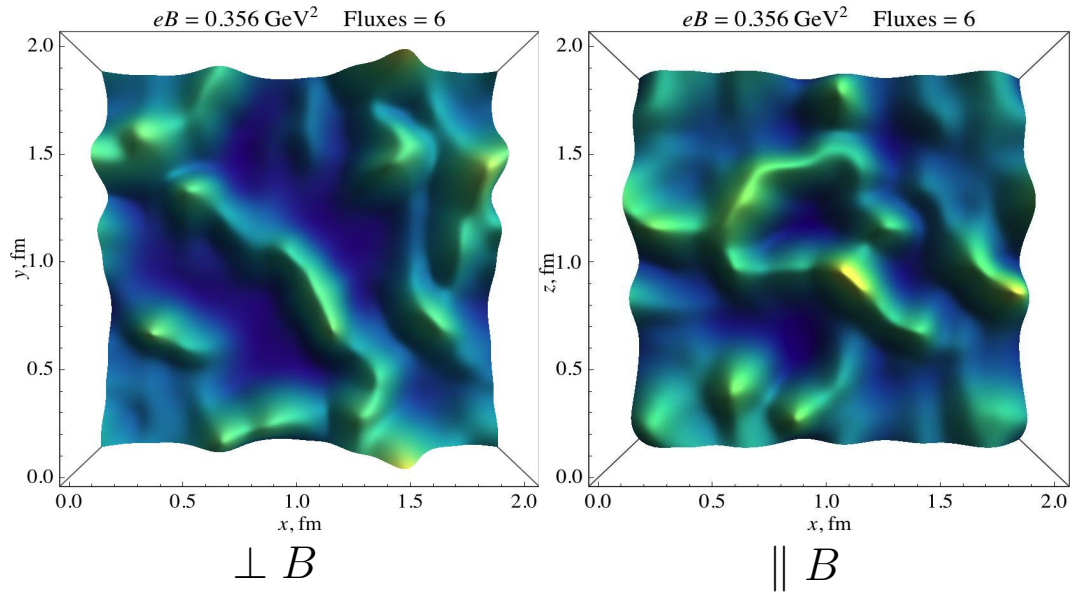


Рис. 2.2: Плотность энергии для магнитных полей ниже критического значения $B < B_c$.

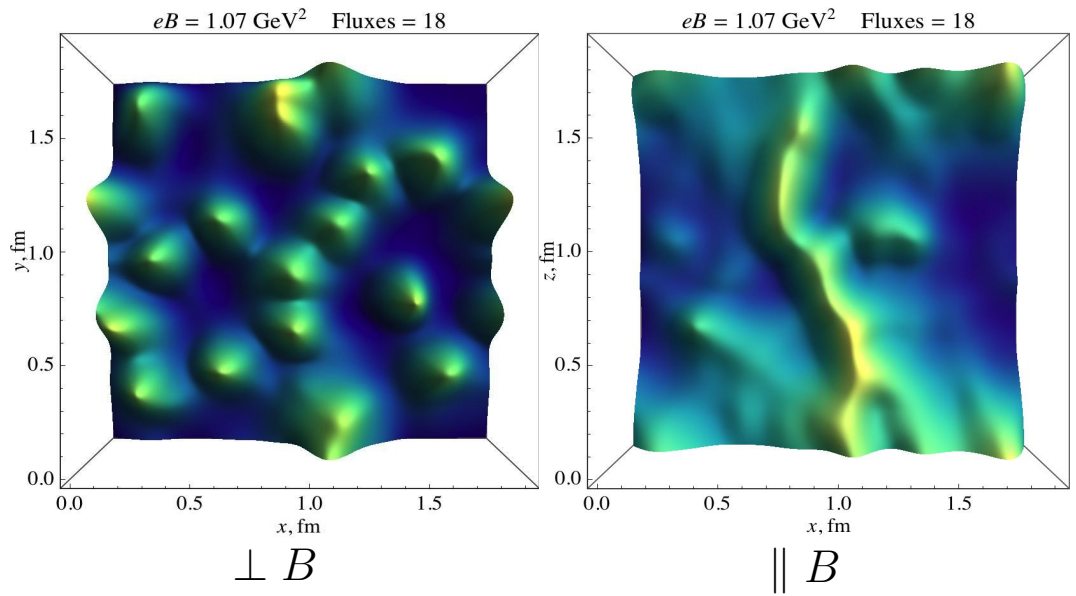


Рис. 2.3: Плотность энергии для магнитных полей около критического значения $B \approx B_c$.

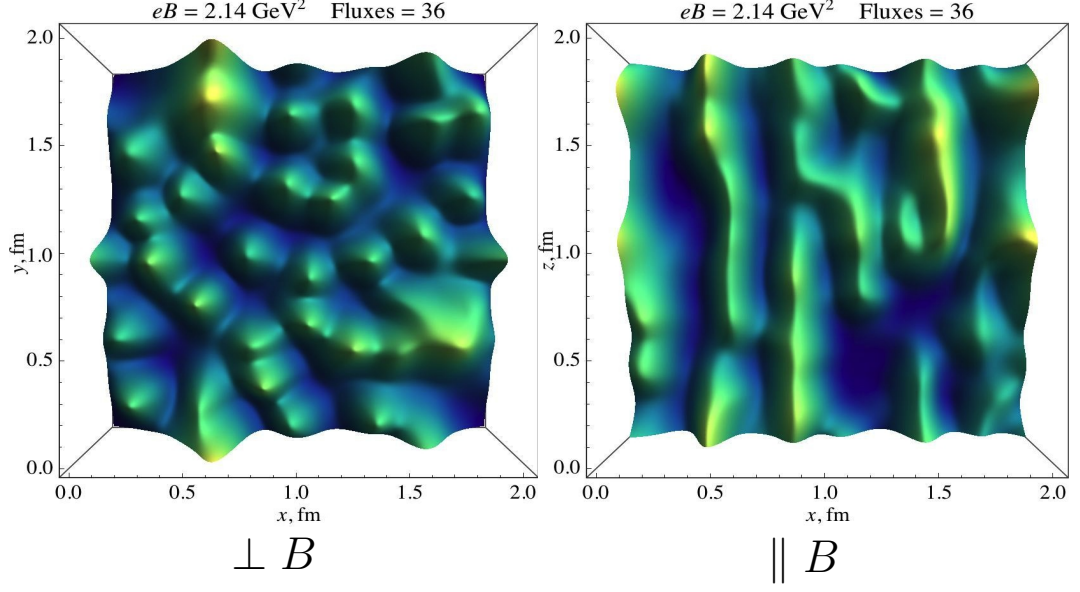


Рис. 2.4: Плотность энергии для магнитных полей выше критического значения $B > B_c$.

(Рис. 2.4) количество вихрей растёт, что видно на обоих срезах. Вихри при этом вытянуты гораздо сильнее вдоль поля.

На Рис. 2.5 визуализированы положения вихрей (определяемые как сингулярности фазы коррелятора ϕ) и электромагнитный ток в перпендикулярной к магнитному полю плоскости для двух значений магнитного поля. В правом нижнем углу изображено предсказание теории - треугольная решетка из вихрей. Видно, что токи закручены вокруг положения вихрей, как и ожидалось, однако никакой решетки не наблюдается. Для подтверждения этого факта были построены графика корреляционных функций положения вихрей. В случае образования решетки из вихрей можно было бы ожидать резких пиков на расстояниях, соответствующих шагу данной решетки. Однако корреляционные функции выглядят достаточно гладко (Рис. 2.6). При малых значениях магнитного поля корреляционные функции ведут себя монотонно, стремятся к 1 на больших расстояниях, в то время как при больших полях наблюдается широкий и невысокий пик в корреляционных функциях, что означает, что скорее всего система представляет собой жидкость из вихрей.

В данной главе была изучена гипотеза существования экзотической фазы сверхпроводимости в квантовой хромодинамике в сильных магнитных полях. Была рассмотрена $SU(2)$ решеточная калибровочная теория без динамических фермионов. Были проведены вычисления, свидетельствующие о существовании данной фазы, и в решеточной теории была изучена структура сверхпроводящего конденсата ρ -мезонов. Получено, что в рассматриваемой теории конденсат состоит из сверхпроводящих вихрей, вытянутых вдоль направления магнитного поля, при этом система вихрей проявляет свойства жидкости.

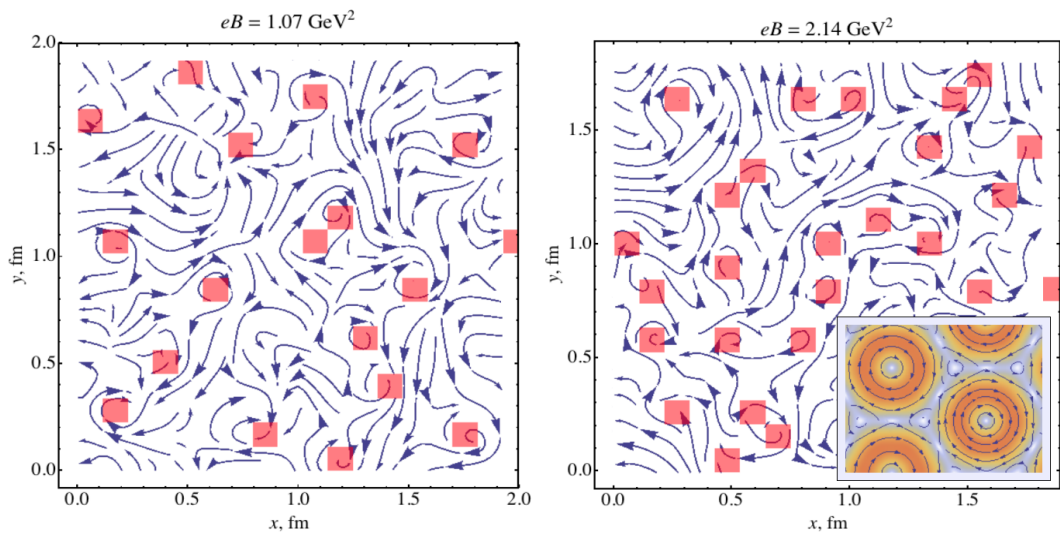


Рис. 2.5: Электромагнитный ток вокруг вихрей для двух значений магнитного поля. В правом нижнем углу представлено предсказание теории.

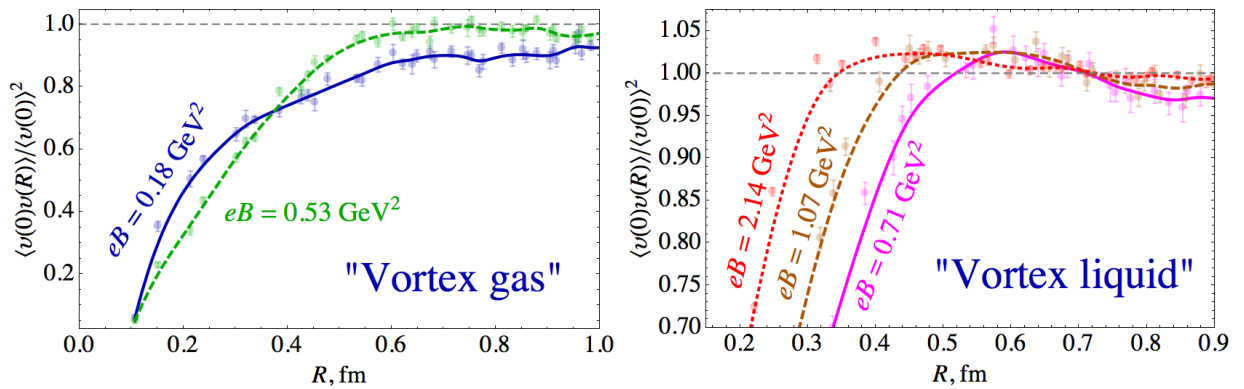


Рис. 2.6: Корреляционные функции положения вихрей

Глава 3

Моделирование $SU(2)$ -КХД с ненулевой барионной плотностью

3.1 Вычисления с ненулевой барионной плотностью и проблема знака

После обсуждения фазовой диаграммы квантовой хромодинамики во внешнем магнитном поле перейдем к вопросу о фазовой диаграмме КХД с ненулевой барионной плотностью. Эта область в настоящее время вызывает огромный интерес, поскольку одной из целей экспериментов по столкновению тяжелых ионов является именно изучение свойств сильно взаимодействующего вещества при ненулевых температуре и барионной плотности. Не менее важна фазовая диаграмма КХД для астрофизики и космологии. Однако стоит отметить, что сейчас фазовая диаграмма КХД точно неизвестна, ни экспериментально, ни теоретически. Наиболее часто представляют некоторый предполагаемый вид фазовой диаграммы на основе общих знаний о свойствах системы.

Стоит напомнить, что одна из основных трудностей, возникающих при теоретическом изучении свойств КХД, состоит в том, что теория при физически наиболее интересных значениях плотности и температуры описывает сильно взаимодействующие кварки и глюоны, что затрудняет использование таких стандартных методов квантовой теории поля, как, например, теория возмущений.

Одним из основных методов получения результатов для сильно взаимодействующих систем является решеточное моделирование на суперкомпьютерах. Однако вычисления в решеточной квантовой хромодинамике, позволяющие теоретически изучать свойства кварк-глюонной плазмы на основе первопринципов, в настоящее время невозможно применить для изучения свойств теории при ненулевой барионной плотности. Причина этого заключается в так называемой проблеме знака фермионного детерминанта. Как только в квантовую хромодинамику вводится барионная плотность (при помощи ненулевого барионного химического потенциала), фермионный детерминант становится комплексным, тем самым делая стандартные методы моделирования Монте-Карло неприменимыми. Стоит отметить, что в двухцветной КХД (то есть, КХД с калибровочной группой $SU(2)$) проблемы знака не возникает [26]:

$$\det[M(\mu_q)] = \det[M(\mu_q^*)]^* \quad (3.1)$$

где $M(\mu_q) = \gamma_\mu D_\mu + m - \mu_q \gamma_4$ представляет собой оператор Дирака. Таким образом, решеточная теория с калибровочной группой $SU(2)$ является моделью, позволяющей качественно изучать явления при ненулевой барионной плотности.

Особый интерес представляет собой двухцветная КХД с двумя ароматами кварков, поскольку в таком случае фазовая диаграмма в плоскости (T, μ_q) имеет нетривиальную структуру и частично похожа на фазовую диаграмму реальной трехцветной КХД [85, 86, 87]. Однако, в указанных работах в качестве фермионов на решетке использовались вильсоновские фермионы, явно нарушающие киральную симметрию [88]. Альтернативой предстают «staggered» фермионы, которые сохраняют аналог киральной симметрии в решеточной формулировке [89], но до сих пор для двухцветной КХД со «staggered» фермионами и ненулевым барионным химическим потенциалом проводились расчеты только при $N_f = 4$ и $N_f = 8$ [90, 91]. В данной главе рассматриваются свойства двухцветной решеточной квантовой хромодинамики с двумя ароматами «staggered» фермионов и ненулевым барионным химическим потенциалом. Представлены результаты измерения зависимости петли Полякова и кирального конденсата от барионного химического потенциала μ_q и температуры T , показано, что увеличение барионного химического потенциала приводит к восстановлению киральной симметрии и уменьшению температуры фазового перехода конфаинмент - деконфаинмент.

3.2 Решеточная формулировка и детали расчетов

Статистическая сумма рассматриваемой системы имеет вид:

$$Z = \int DU \det \left[M^\dagger(\mu_q) M(\mu_q) \right]^{\frac{1}{4}} e^{-S_G[U]}, \quad (3.2)$$

где интегрирование проводится по групповому многообразию $SU(2)$: $DU = \prod_x \prod_{\mu=1}^4 dU_{x,\mu}$, $U_{x,\mu}$ обозначает калибровочную реберную переменную для узла x в направлении μ . $M(\mu_q)$ в (3.2) представляет собой решеточный оператор Дирака для «staggered» фермионов с барионным химическим потенциалом, а $S_G[U]$ является вильсоновским действием калибровочных полей [1]:

$$S_G = \beta \sum_x \sum_{\mu < \nu = 1}^4 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_{x,\mu\nu} \right), \quad (3.3)$$

где $\beta = \frac{4}{g^2}$, а $U_{x,\mu\nu} = U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger$. Оператор $M(\mu_q)$ имеет следующий вид:

$$M_{xy} = ma \delta_{xy} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu(x) \left[U_{x,\mu} \delta_{x+\hat{\mu},y} e^{\mu_q a \delta_{\mu,4}} - U_{x-\hat{\mu},\mu}^\dagger \delta_{x-\hat{\mu},y} e^{-\mu_q a \delta_{\mu,4}} \right], \quad (3.4)$$

где a - шаг решетки, m - масса кварка, а функции $\eta_\mu(x)$ являются стандартными множителями для «staggered» фермионов: $\eta_1(x) = 1$, $\eta_2(x) = (-1)^{x_1}$, $\eta_3(x) = (-1)^{x_1+x_2}$, $\eta_4(x) =$

$(-1)^{x_1+x_2+x_3}$. Химический потенциал μ_q вводится в (3.4) именно таким (экспоненциальным) способом, чтобы избежать расходимостей в непрерывном пределе [92].

Решеточный оператор Дирака (3.4) при ненулевом μ_q может иметь отрицательные собственные значения, но спектр $M^\dagger(\mu_q)M(\mu_q)$ при $m > 0$ является строго положительным, что позволяет применять методы Монте-Карло для вычисления функционального интеграла (3.2). Исходно $\det M$ в функциональном интеграле для «staggered» фермионов соответствует четырем фермионным ароматам [89], $\det M^\dagger$ также соответствует четырем ароматам, извлечение корня четвертой степени из фермионного детерминанта $\det M \det M^\dagger$ приводит к $N_f = 2$ фермионам.

Генерация конфигураций проводилась с помощью гибридного Монте-Карло, для работы с фермионным детерминантом применялся Ф-алгоритм [88]. Для корня четвертой степени из $M^\dagger M$ использовалась рациональная аппроксимация с точностью $O(10^{-15})$ [93]. Рассматривалась решетка $16^3 \times 6$ с голой фермионной массой $ma = 0.01$, $\beta = 1.6 \dots 2.7$ и $\mu_q a = 0.0, 0.2, 0.5$, для каждого набора параметров было сгенерировано 400 независимых конфигураций. Программный код был написан с использованием CUDA, расчеты проводились на Суперкомпьютере ИТЭФ и кластере ИФВЭ.

3.3 Результаты и обсуждение

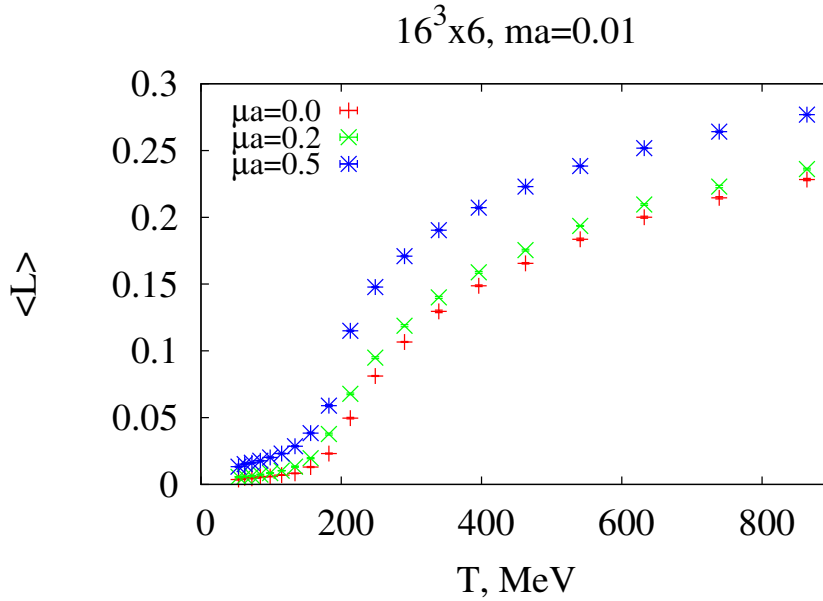


Рис. 3.1: Зависимость петли Полякова от температуры T для трех значений барионного химического потенциала.

Для исследования физических свойств системы были рассмотрены следующие наблюдаемые ($\langle \dots \rangle$ означает термодинамическое среднее):

- петля Полякова:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_s^3} \sum_{x_1, x_2, x_3=0}^{N_s-1} \frac{1}{2} \left\langle \text{Tr} \prod_{x_4=0}^{N_\tau-1} U_{x,4} \right\rangle; \quad (3.5)$$

- киральный конденсат:

$$\begin{aligned} a^3 \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= -\frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial (ma)} \ln(Z) = \\ &= \frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{1}{8} \langle \text{Tr} M^{-1} + \text{Tr}(M^\dagger)^{-1} \rangle; \end{aligned} \quad (3.6)$$

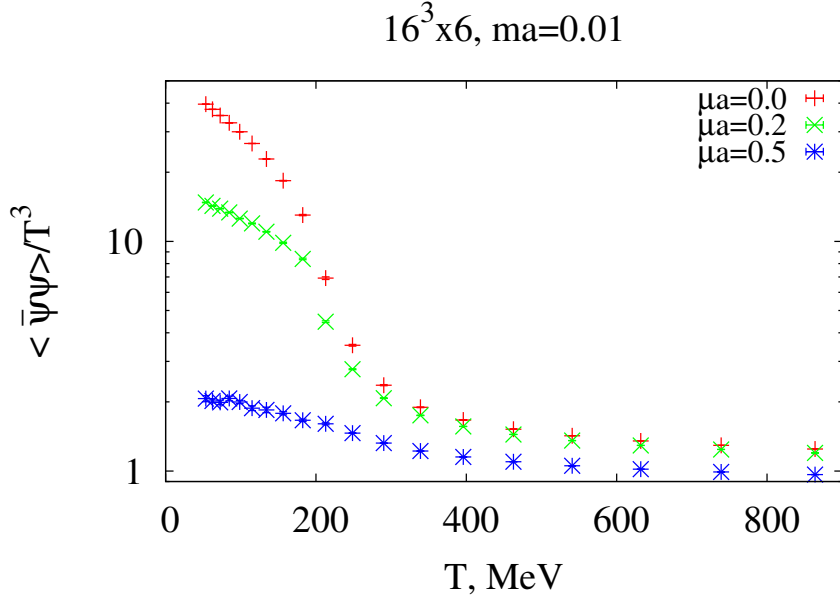


Рис. 3.2: Зависимость кирального конденсата от температуры T для трех значений барионного химического потенциала. По оси ординат используется логарифмический масштаб.

Петля Полякова в глюодинамике является параметром порядка фазового перехода конфаинмент - деконфаинмент. На Рис. 3.1 представлена зависимость петли Полякова от температуры T для трех значений $\mu_q a$. Можно наблюдать фазовый переход, похожий на кроссовер, но имеющаяся статистика не позволяет с необходимой точностью измерить восприимчивость петли Полякова и установить его порядок. Из рисунка видно, что увеличение барионного химического потенциала уменьшает T_c .

На Рис. 3.2 изображена зависимость кирального конденсата от T для различных значений μ_q . Увеличение барионного химического потенциала приводит к значительному уменьшению $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, то есть к восстановлению киральной симметрии, что согласуется с результатами, полученными для Вильсоновских фермионов [86]. Также, сравнив Рис. 3.1 и 3.2, можно сказать, что критические температуры для деконфаинмента и восстановления киральной симметрии приблизительно одинаковы.

Подведем итоги данной главы. Представлены результаты решеточного моделирования двухцветной КХД с двумя ароматами кварков и ненулевым барионным химическим потенциалом. Показано, что увеличение барионного химического потенциала μ_q приводит к уменьшению температуры фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент и восстановлению киральной симметрии.

Глава 4

Квантовая хромодинамика с ненулевой киральной плотностью

4.1 Киральная плотность и эксперимент

Рассмотрев фазовую диаграмму КХД с ненулевой барионной плотностью, перейдем к изучению влияния на свойства КХД другого заряда - кирального.

Как для вакуумного состояния квантовой хромодинамики, так и для свойств КХД при конечной температуре важно существование нетривиальных топологических возбуждений. Известным примером являются инстантоны [94] – классические решения в евклидовом пространстве, соответствующие туннельным переходам между топологически различными вакуумами при нулевой температуре. Роль топологии в решении известной $U_A(1)$ проблемы поняли очень рано [95, 96]. В настоящий момент аномальное нарушение $U_A(1)$ симметрии при температуре выше перехода конфайнмент - деконфайнмент активно изучается в решеточном сообществе (см., например, [97]).

Глюонные поля, входящие в континуальный интеграл при конечной температуре, могут также содержать калороны [98, 99]. Будучи откалиброваны к нетривиальной голономии, они имеют более богатую структуру (в терминах «дионных» составляющих), чем инстантоны. Изменения этой структуры при фазовом переходе конфайнмент - деконфайнмент сейчас активно исследуются [100, 101].

Некоторое время назад было предположено, что глюонная топологическая структура и знаменитая аксиальная аномалия могут быть наблюдаемы непосредственно на экспериментах по столкновению тяжелых ионов при помощи доменов, нарушающих P - и CP - четность (а также трансляционную инвариантность) [27, 28]. При помощи детальных численных вычислений было показано [27, 102], что макроскопические области с (анти-)параллельными цвето-электрическими и цвето-магнитными полями могут возникать в столкновениях тяжелых ионов, приводя к возникновению кирального дисбаланса для кварков, не связанных в адроны из-за большой плотности энергии. В этой ситуации магнитное поле, создаваемое пролетающими нуклонами может привести к разделению заряда относительно плоскости реакции (параллельно внешнему электромагнитному полю) [66]. Возникающая асимметрия кварков становится наблюдаемой и в рекомбинировавших адронах (киральный магнитный эффект) [46, 47]. Величина (и, в частности, зависимость от энергии сталкивающихся ядер) этого эффекта была изучена

теоретически и предложена выступать в роли сигнала существования промежуточной фазы несвязанных кварков [27, 28, 103].

В последние годы зависимость кирального перехода и перехода конфайнмент - деконфайнмент от магнитного поля была изучена и в различных моделях, и в решеточных вычислениях из первопринципов, см., например, [48, 104]. С другой стороны, вопрос о том, зависит ли фазовый переход от кварков к адронам, то есть наступление конфайнмента и нарушения киральной симметрии (и наоборот), от кирального дисбаланса остается открытым.

В данной главе пойдет речь об изменении фазовой структуры, вызванной киральным химическим потенциалом в равновесных решеточных вычислениях. Топологический фон (нарушающие CP -четность топологически нетривиальные глюонные конфигурации в столкновениях тяжелых ионов) имитируется при помощи ненулевого кирального химического потенциала, создающего киральный дисбаланс. Изменение фазовой диаграммы в таком подходе, при помощи кирального химического потенциала μ_5 , было изучено, в основном, при помощи эффективных моделей КХД [35, 36, 37, 39, 105, 40, 106], с предсказаниями которых и будут соотнесены представленные результаты.

Решеточные вычисления с ненулевым киральным химическим потенциалом, в отличие от ненулевого барионного химического потенциала, не затруднены проблемой знака¹. В таком случае, расчеты можно проводить стандартными алгоритмами гибридного Монте-Карло. Такие решеточные вычисления с $\mu_5 \neq 0$ уже были проделаны в [43, 44]. Основной целью данных работ было изучение кирального магнитного эффекта, поэтому фазовая диаграмма КХД в них не была систематически изучена.

4.2 Двухцветная КХД и «staggered» фермионы

4.2.1 Детали расчетов

В данном параграфе приведены результаты расчетов с калибровочной группой $SU(2)$. В расчетах было использовано стандартное вильсоновское плакетное действие

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Tr} U_{\mu\nu}(x) \right). \quad (4.1)$$

Для фермионной части действия были использованы «staggered» фермионы

$$\begin{aligned} S_f = & ma \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{x\mu} \eta_\mu(x) (\bar{\psi}_{x+\mu} U_\mu(x) \psi_x - \bar{\psi}_x U_\mu^\dagger(x) \psi_{x+\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} \mu_5 a \sum_x s(x) (\bar{\psi}_{x+\delta} \bar{U}_{x+\delta, x} \psi_x - \bar{\psi}_x \bar{U}_{x+\delta, x}^\dagger \psi_{x+\delta}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

¹Необходимо отметить, что в КХД с калибровочной группой $SU(2)$ нет проблемы знака и при ненулевом барионном химическом потенциале.

где $\eta_\mu(x)$ – стандартные фазовые множители для «staggered» фермионов: $\eta_1(x) = 1$, $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1 + \dots + x_{\mu-1}}$ для $\mu = 2, 3, 4$. Шаг решетки обозначен a , голая фермионная масса – m , и μ_5 – значение кирального химического потенциала. В слабом, нарушающем киральность, $s(x) = (-1)^{x_2}$, $\delta = (1, 1, 1, 0)$ обозначает сдвиг к диагонально расположенной вершине пространственного 2^3 элементарного куба. Комбинация трех линков, соединяющих вершины x и $x + \delta$,

$$\bar{U}_{x+\delta,x} = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=\text{perm}(1,2,3)} U_i(x + e_j + e_k) U_j(x + e_k) U_k(x) \quad (4.3)$$

симметризована по 6 кратчайшим путям, соединяющим эти вершины. В статистической сумме после формального интегрирования по фермионным полям получается соответствующий детерминант оператора Дирака. Процедура извлечения корня четвертой степени из этого детерминанта для перехода к теории с одним ароматом фермионов не используется, то есть, в непрерывном пределе представленная модель соответствует теории четырех (вырожденных) фермионов.

В непрерывном пределе формула (4.2) может быть переписана в базисе дираковских спиноров и ароматов [107, 11] следующим образом

$$S_f \rightarrow S_f^{(cont)} = \int d^4x \sum_{i=1}^4 \bar{q}_i (\partial_\mu \gamma_\mu + ig A_\mu \gamma_\mu + m + \mu_5 \gamma_5 \gamma_4) q_i. \quad (4.4)$$

Необходимо подчеркнуть, что киральный химический потенциал, определенный в формуле (4.2), соответствует синглетному по ароматам оператору $\gamma_5 \gamma_4 \otimes \mathbf{1}$ в непрерывном пределе.

Стоит отметить, что обычный барионный химический потенциал после обсуждения в [16] и также киральный химический потенциал, использованный в [44], были определены как модификация временных линков с помощью соответствующих экспоненциальных факторов для того, чтобы избежать квадратичных расходимостей, зависящих от химического потенциала. Тем не менее, для используемой дискретизации фермионов и кирального химического потенциала такая модификация приводит к сильно нелокальному действию [44]. Поэтому в данной главе μ_5 вводится в формулу (4.2) аддитивным способом по аналогии с массовым членом.

Известно, что аддитивный способ определения химического потенциала приводит к дополнительным расходимостям в наблюдаемых. В Приложении подробно изучаются возникающие расходимости как аналитическими, так и численными методами. Основной результат исследования расходимостей заключается в том, что в петле Полякова нет дополнительной расходимости, в то время как в киральном конденсате появляется дополнительная логарифмическая расходимость. Численное значение этой расходимости оказывается маленьким и она не влияет на представленные результаты расчетов.

Вычисления были проделаны с двумя размерами решеток $N_\tau \times N_\sigma^3 = 6 \times 20^3, 10 \times 28^3$. Измеряемые наблюдаемые

- петля Полякова

$$L = \frac{1}{N_\sigma^3} \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle \text{Tr} \prod_{n_4=1}^{N_\tau} U_4(n_1, n_2, n_3, n_4) \rangle, \quad (4.5)$$

- киральный конденсат

$$a^3 \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{1}{N_\tau N_\sigma^3} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (ma)} \log Z = \frac{1}{N_\tau N_\sigma^3} \frac{1}{4} \langle \text{Tr} \frac{1}{D + ma} \rangle, \quad (4.6)$$

- восприимчивость петли Полякова

$$\chi_L = N_\sigma^3 (\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2), \quad (4.7)$$

- несвязанная часть киральной восприимчивости

$$\chi_{disc} = \frac{1}{N_\tau N_\sigma^3} \frac{1}{16} (\langle (\text{Tr} \frac{1}{D + ma})^2 \rangle - \langle \text{Tr} \frac{1}{D + ma} \rangle^2). \quad (4.8)$$

Петля Полякова и соответствующая восприимчивость чувствительны к фазовому переходу конфайнмент/деконфайнмент, в то время как киральный конденсат и киральная восприимчивость соответствуют нарушению/восстановлению киральной симметрии.

Вычисления были проделаны при помощи кода, написанного на платформе CUDA, для проведения расчетов алгоритмами гибридного Монте-Карло на графических ускорителях.

Параметрами данных решеточных вычислений являются голая обратная константа сильного взаимодействия β , голая масса ma и голый киральный химический потенциал $a\mu_5$ (все в безразмерных единицах), а также размер решетки. Физическая температура и объем равны

$$V = (N_\sigma a(\beta))^3$$

$$T = \frac{1}{a(\beta) N_\tau}. \quad (4.9)$$

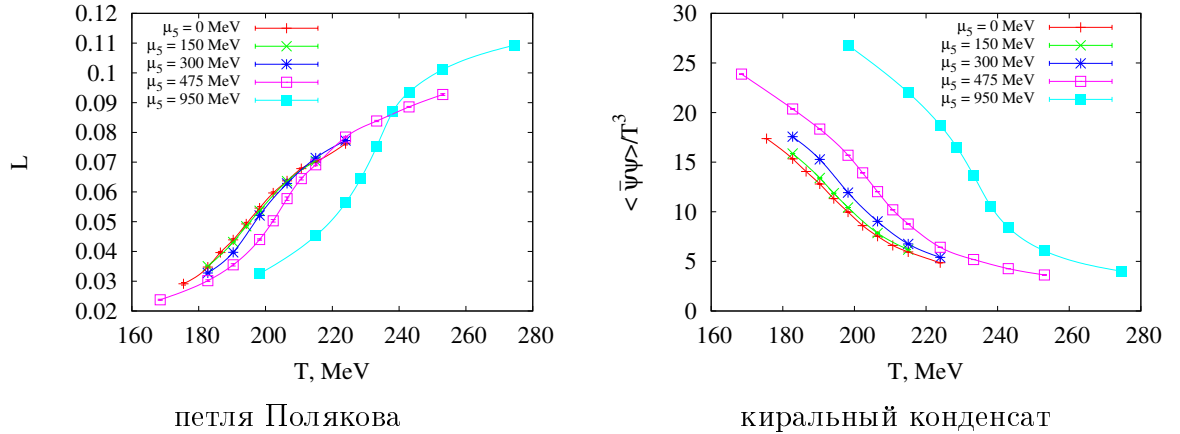


Рис. 4.1: Петля Полякова и киральный конденсат как функции T для пяти значений μ_5 . Размер решетки 6×20^3 , фермионная масса $t \approx 12$ МэВ. Погрешности меньше символов точек. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

Для определения масштаба (шага решетки) были использованы результаты [108]. В указанной работе был измерен статический потенциал взаимодействия кварк - антикварк в той же самой теории при нулевой температуре и нулевой величине кирального химического потенциала для нескольких значений β . Параметр Зоммера r_0 , характеризующий потенциал, был вычислен в решеточных единицах и его значение было соотнесено с физическим значением, которое было предположено таким же, что и в реальной КХД, то есть $r_0 = 0.468(4)$ фм. Было найдено, что зависимость $a(\beta)$ в той области параметров, в которой были проведены вычисления, хорошо описывается двухпетлевой β -функцией. Таким образом, для данного β можно получить, например, температуру T в МэВ. Более подробно используемый способ определения шага решетки описан в [108].

4.2.2 Результаты вычислений

Вначале будут представлены результаты моделирования на решетке размером 6×20^3 для пяти фиксированных значений $\mu_5 = 0, 150, 300, 475, 950$ МэВ и различных значений температуры T . В представленных расчетах фермионная масса была фиксирована в физических единицах $m \approx 12$ МэВ (что соответствует $m_\pi \approx 330$ МэВ). Средние значения петли Полякова и кирального конденсата представлены на Рис. 4.1. Резкое изменение наблюдаемых как функций температуры T соответствует положению перехода в деконфайнмент и восстановлению киральной симметрии. Видно, что температура обоих переходов растет с увеличением кирального химического потенциала. Также видно, что фазовый переход становится более резким при повышении кирального химического потенциала.

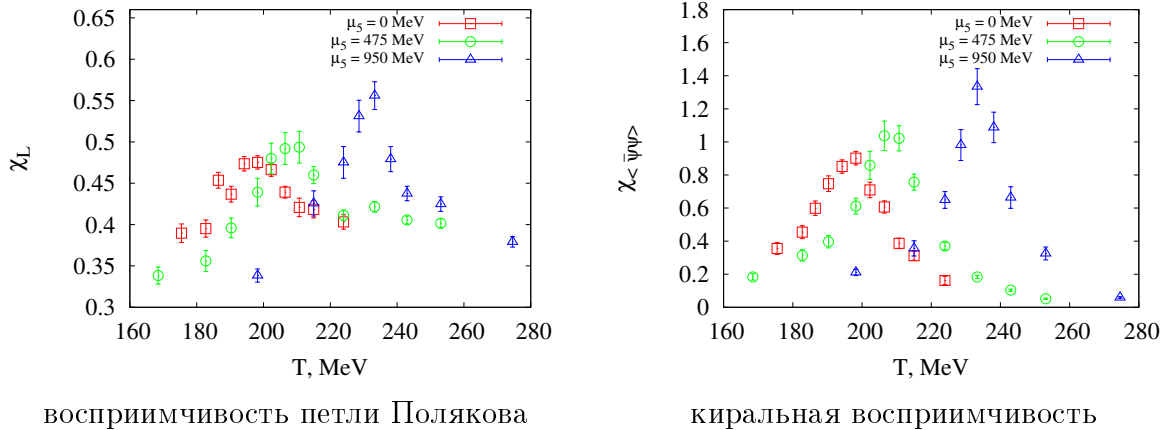


Рис. 4.2: Восприимчивость петли Полякова и киральная восприимчивость в зависимости от T для трех значений $\mu_5 = 0, 475, 950$ МэВ. Размер решетки 6×20^3 , фермионная масса $m \approx 12$ МэВ.

Чтобы количественно изучить изменение критической температуры в зависимости от величины кирального химического потенциала, также были вычислены восприимчивости петли Полякова и кирального конденсата. Для того, чтобы сделать графики более читаемыми, были отдельно построены восприимчивости для значений

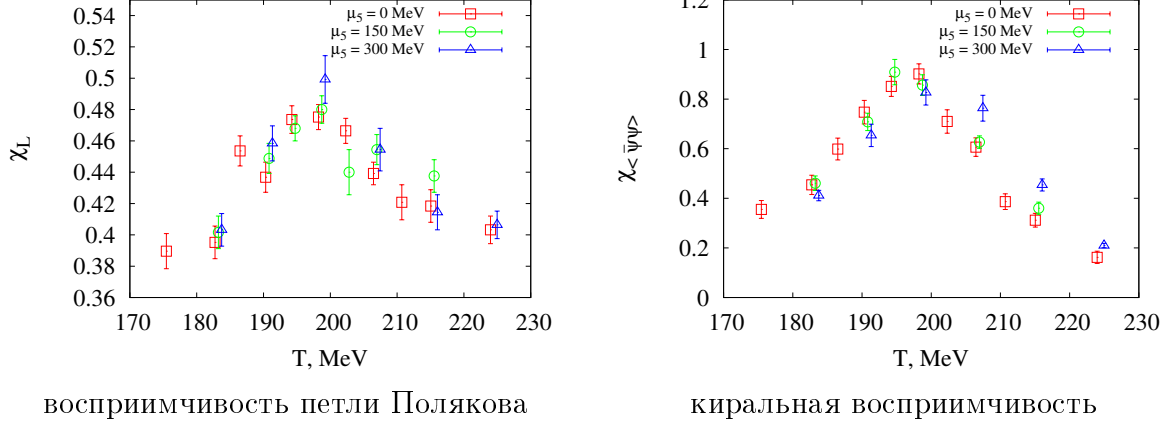


Рис. 4.3: Аналогично Рис. 4.2, для трех значений $\mu_5 = 0, 150, 300$ МэВ.

$\mu_5 = 0, 475, 950$ МэВ на Рис. 4.2 и для значений $\mu_5 = 0, 150, 300$ МэВ на Рис. 4.3. Четко видно, что увеличение значения кирального химического потенциала приводит к смещению пиков для киральной восприимчивости и восприимчивости петли Полякова в область более высоких температур T , то есть, температуры переходов растут. Полученные данные для обеих восприимчивостей были профитированы в окрестности пика при помощи функции Гаусса $\chi = a_0 + a_1 \exp\left(-\frac{(\beta - \beta_c)^2}{2\sigma^2}\right)$, и с помощью параметров фитирования были извлечены критические температуры $T_c^X(\beta_c^X)$ для киральной восприимчивости и $T_c^L(\beta_c^L)$ для восприимчивости петли Полякова. Измеренные таким способом зависимости обеих критических температур от величины кирального химического потенциала μ_5 представлены на Рис. 4.4 и в Табл. 4.1. Значения β_c^X, β_c^L и T_c^X, T_c^L их погрешности были вычислены из фитирования 5-6 точек в окрестности пика при помощи приведенной выше функции Гаусса. Видно, что для всех точек, кроме $\mu_5 = 950$ МэВ, критические температуры T_c^X и T_c^L совпадают в пределах погрешности. Для точки $\mu_5 = 950$ МэВ есть небольшое различие между определенными значениями T_c^X и T_c^L , но из-за возможных систематических погрешностей фитирования, а также ошибок конечного шага решетки, нельзя строго утверждать, что температуры переходов различаются.

Стоит отметить, что для небольших значений μ_5 зависимость T_c от μ_5 хорошо описывается функцией $T_c = a + b\mu_5^2$, но чем больше μ_5 , тем больше отклонение от этой простой формулы. Для больших μ_5 зависимость $T_c(\mu_5)$ может быть описана линейной зависимостью.

Кроме вычислений на решетке размера 6×20^3 было проведено моделирование на решетке большего размера 10×28^3 . Это позволило исследовать большие значения μ_5 . Восприимчивости требуют гораздо большей статистики, поэтому имеющиеся компьютерные ресурсы не позволили измерить их на большей решетке. В расчетах была фиксирована фермионная масса в физических единицах: $m = 18.5$ МэВ ($m_\pi \approx 550$ МэВ).

На решетке такого размера также были вычислены наблюдаемые L и $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ как функции температуры T для различных значений μ_5 . Результаты для петли Полякова и кирального конденсата представлены на Рис. 4.5. Они подтверждают тот факт, что критическая температура растет с увеличением μ_5 . Значение кирального химического

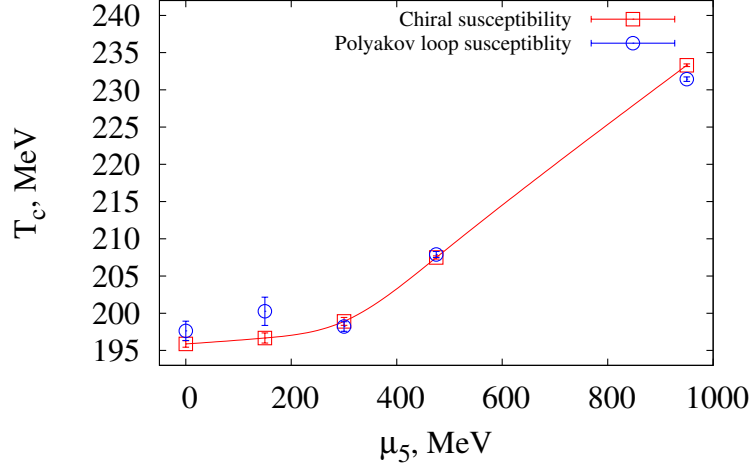


Рис. 4.4: Зависимость критических температур T_c^x и T_c^L от величины кирального химического потенциала. Размер решетки 6×20^3 , фермионная масса $m \approx 12$ МэВ. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

μ_5 (МэВ)	β_c^x	T_c^x (MeV)	β_c^L	T_c^L (МэВ)
0	1.7975 ± 0.0005	195.8 ± 0.4	1.7993 ± 0.0016	197.6 ± 1.3
150	1.7984 ± 0.0009	196.7 ± 0.7	1.8025 ± 0.0023	200.3 ± 1.9
300	1.8012 ± 0.0007	198.9 ± 0.5	1.8000 ± 0.0008	198.2 ± 0.6
475	1.8116 ± 0.0003	207.5 ± 0.2	1.8117 ± 0.0005	207.9 ± 0.4
950	1.8404 ± 0.0002	233.3 ± 0.2	1.8381 ± 0.0003	231.4 ± 0.3

Таблица 4.1: Критические температуры T_c^x и T_c^L и параметры решетки β_c^x и β_c^L как функции кирального химического потенциала μ_5 , полученные при фитировании киральной восприимчивости и восприимчивости петли Полякова в окрестности пика функцией Гаусса $\chi = a_0 + a_1 \exp\left(-\frac{(\beta-\beta_c)^2}{2\sigma^2}\right)$.

потенциала, используемое в представленных расчетах, было достаточно велико (до $\mu_5 = 3345$ МэВ), но сигналов того, что фазовый переход становится первого рода, не видно, хотя переход становится более резким с ростом кирального химического потенциала.

Также интересно изучить, как наблюдаемые L и $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ зависят от μ_5 при фиксированной температуре. Для этого петля Полякова и киральный конденсат были измерены в зависимости от μ_5 для трех различных значений β , $\beta = 1.87$ (что соответствует температуре $T = 158$ МэВ), 1.91 (186 МэВ) и 1.95 (219 МэВ). Для нулевого значения кирального химического потенциала эти параметры соответствуют области ниже перехода, области перехода и высокотемпературной фазе. Результаты этих измерений показаны на Рис. 4.6. Как можно видеть на представленных графиках, в фазе конфайнмента петля Полякова остается почти постоянной с ростом кирального химического потенциала. Это означает, что если система находилась в фазе конфайнмента при $\mu_5 = 0$, то она и остается в этой фазе при $\mu_5 > 0$. Кроме того, видно, что петля Полякова падает с ростом μ_5 , как в фазе деконфайнмента, так и в области перехода. Таким образом,

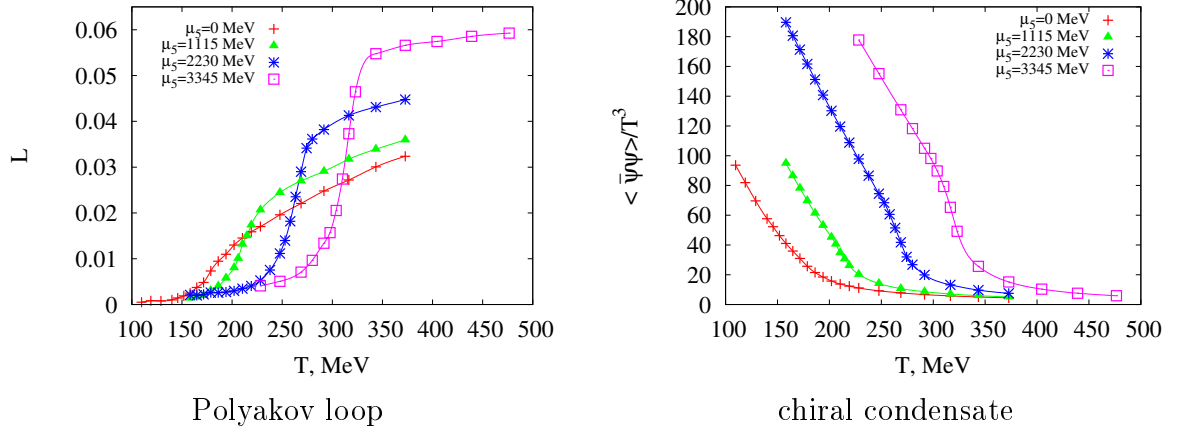


Рис. 4.5: Петля Полякова и киральный конденсат в зависимости от температуры T для четырех значений μ_5 и решетки размером 10×28^3 , масса фермионов $ma \approx 18.5$ МэВ. Погрешности меньше символов точек. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

система переходит в фазу конфайнмента при достаточно больших значениях μ_5 . Значение кирального конденсата растет с ростом μ_5 для всех значений β , то есть киральный конденсат усиливает нарушение киральной симметрии. Можно заключить, что критическая температура растет с ростом кирального химического потенциала, что находится в согласии с ранее представленными данными. Стоит отметить, что описанное выше поведение выглядит довольно похожим на поведение, полученное для двухцветной КХД во внешнем магнитном поле [108, 100].

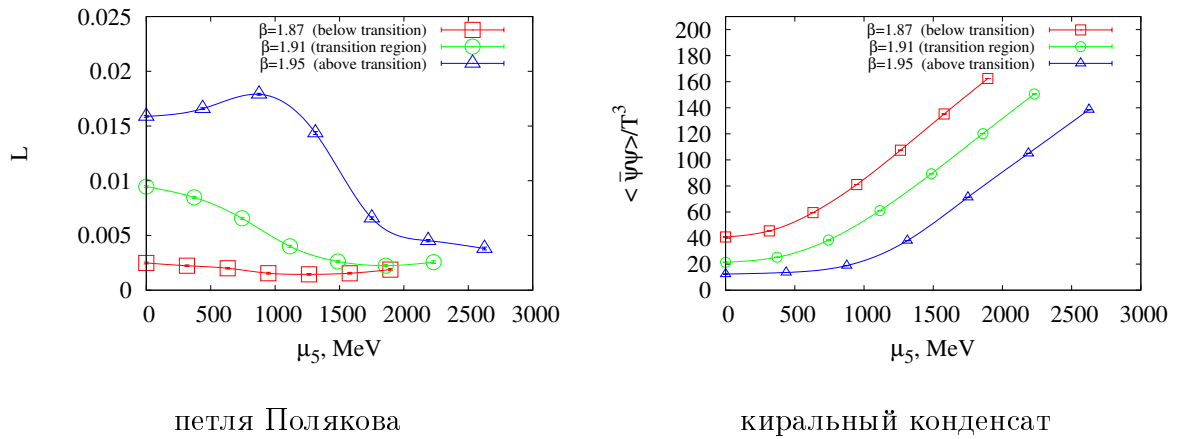


Рис. 4.6: Зависимость петли Полякова и кирального конденсата от μ_5 для трех значений β и решетки размером 10×28^3 , фермионная масса $ma \approx 18.5$ МэВ. Погрешности меньше символов точек. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

Чтобы изучить зависимость наблюдаемых от величины массы кварков для различных значений кирального химического потенциала, были выбраны четыре значения β : одно в фазе конфайнмента, $\beta = 1.8$ (соответствует температуре $T = 119$ МэВ), два

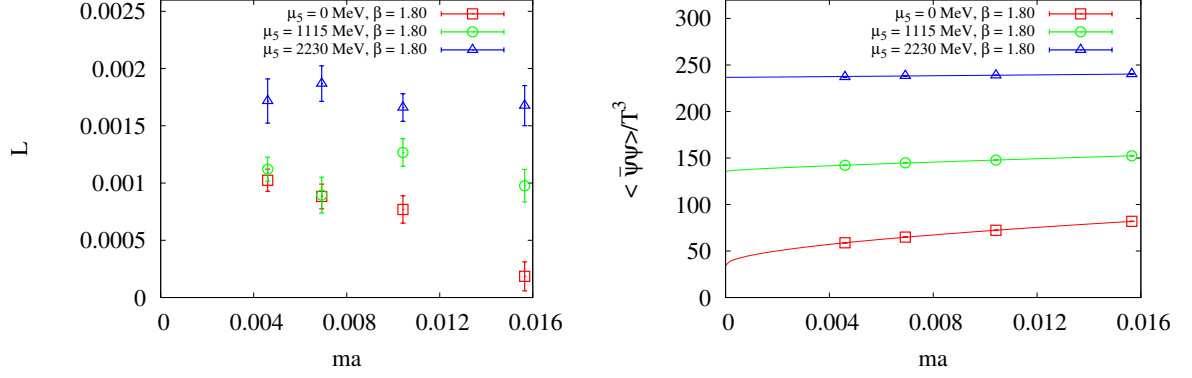


Рис. 4.7: Зависимость петли Полякова и кирального конденсата от ma для трех значений μ_5 при $\beta = 1.80$ на решетке размером 10×28^3 . $\beta = 1.80$ соответствует фазе конфайнмента.

в области перехода, $\beta = 1.9$ ($T = 178$ МэВ) и $\beta = 2.0$ ($T = 268$ МэВ), и одно в области деконфайнмента, $\beta = 2.1$ ($T = 404$ МэВ). Размер решетки, используемый в этих расчетах, равен 10×28^3 . Были использованы четыре значения массы фермионов ma и три значения химического потенциала $\mu_5 = 0$ МэВ, $\mu_5 = 1115$ МэВ и $\mu_5 = 2230$ МэВ. Среднее значение петли Полякова и кирального конденсата как функции ma для разных значений β представлены на Рис. 4.7, Рис. 4.8, Рис. 4.9 и Рис. 4.10.

		$f_1(ma)$				$f_2(ma)$			
β	μ_5 , МэВ	χ_{dof}^2	a_0	a_1	a_2	χ_{dof}^2	b_0	b_1	b_2
1.80	0	0.56	0.034(1)	0.34(2)	0.3(1)	1.2	0.042(1)	-0.9(1)	-1.1(4)
1.80	1115	1.83	0.135(2)	0.06(5)	0.6(2)	2.0	0.137(1)	-0.15(13)	0.4(5)
1.80	2230	2.0	0.237(5)	-0.004(100)	0.3(5)	2.0	0.237(3)	0.02(26)	0.3(9)
1.90	1115	2.7	0.034(3)	0.31(6)	0.3(3)	3.9	0.042(2)	-0.8(2)	-1.0(7)
1.90	2230	0.62	0.144(2)	0.18(3)	-0.11(15)	0.3	0.1486(5)	-0.47(6)	-0.9(2)

Таблица 4.2: Параметры фитирования $f_1(ma)$ уравнения (4.10) и $f_2(ma)$ уравнения (4.11), позволяющие экстраполировать в киральный предел для $\beta = 1.80$ и $\beta = 1.90$ и различных значений кирального химического потенциала. Кривые, полученные в результате фитирования функцией f_1 , показаны на правой панели Рис. 4.7 и Рис. 4.8.

На Рис. 4.7 показаны результаты в области конфайнмента при $\beta = 1.80$ ($T = 119$ МэВ). Значение петли Полякова мало и на графике не видно нетривиального поведения этой наблюдаемой. Киральный конденсат остается практически постоянным при изменении массы фермиона.

Экстраполяция к киральному пределу ($ma = 0$) была проделана двумя способами. Поскольку система находится недалеко от области перехода, можно предположить, что можно использовать формулы для редуцированной трехмерной модели [109]. В этом случае может быть использован анзац $a^3 \langle \bar{\psi}\psi \rangle = f_1(ma)$, где

$$f_1(ma) = a_0 + a_1\sqrt{ma} + a_2ma \quad (4.10)$$

Неаналитический вклад в данную формулу обеспечивают голдстоуновские бозоны. Такая параметризация была использована в [13] при изучении фазового перехода при конечной температуре в КХД. В качестве альтернативы также была использована формулу для киральной экстраполяции при нулевой температуре, а именно $a^3 \langle \bar{\psi}\psi \rangle = f_2(ma)$, где

$$f_2(ma) = b_0 + b_1 ma \log ma + b_2 ma. \quad (4.11)$$

Результаты фитирования данных с помощью формулы (4.10) представлены линиями на Рис. 4.7. Соответствующие значения параметров для обоих фитов представлены в Табл. 4.2. Как можно видеть в этой таблице и на соответствующем графике, значение кирального конденсата не равно нулю в киральном пределе.

При больших значениях $\beta = 1.90$ ($T = 178$ МэВ), $\beta = 2.00$ ($T = 268$ МэВ) и $\beta = 2.10$ ($T = 404$ МэВ) и нулевом значении кирального химического потенциала система находится в фазе с восстановленной киральной симметрией, когда m стремится к нулю. Тем не менее, при $\beta = 1.90$ ($T = 178$ МэВ) и $\mu_5 = 1115, 2230$ МэВ киральный конденсат отличен от нуля. Для экстраполяции были использованы те же методы, что и для $\beta = 1.80$, и полученные результаты также представлены в Табл. 4.2. Результаты подтверждают, что для этих значений μ_5 в киральном пределе киральный конденсат отличен от нуля. Это означает, что в киральном пределе ненулевое значение кирального химического потенциала сдвигает положение фазового перехода в область более высоких температур. График для петли Полякова (левая панель на Рис. 4.8) подтверждает этот результат: для двух наименьших значений фермионной массы ma значения петли Полякова для $\mu_5 a = 0$ в несколько раз больше, чем для ненулевых значений μ_5 , то есть система при ненулевом μ_5 находится глубже в области конфайнмента, чем для нулевого значения кирального химического потенциала.

При $\beta = 2.00$ ($T = 268$ МэВ) и $\beta = 2.10$ ($T = 404$ МэВ) киральный конденсат уходит в ноль в киральном пределе (Рис. 4.9, 4.10), таким образом, система находится в фазе с восстановленной киральной симметрией. Зависимость кирального конденсата от значения массы кварков является почти линейной функцией для данных значений β , кроме поведения для $\beta = 2.00$ ($T = 268$ МэВ) при наибольшем рассмотренном значении кирального химического потенциала. Это поведение может быть объяснено если

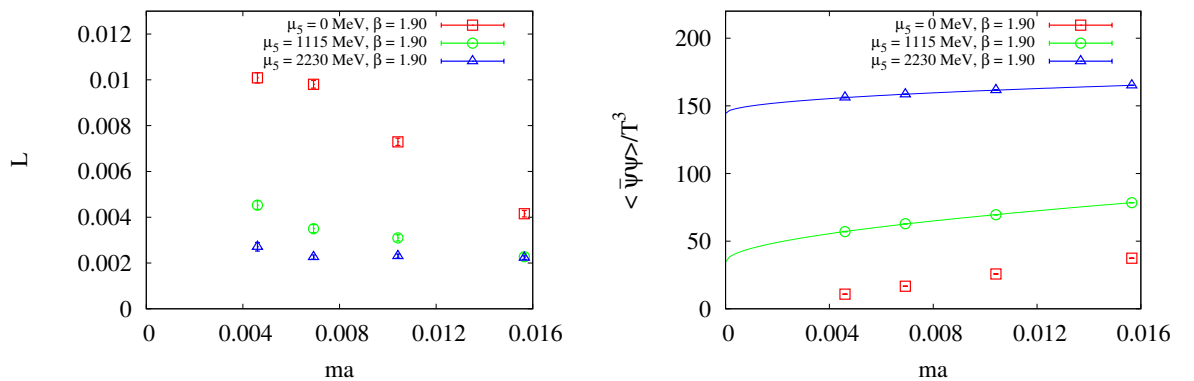


Рис. 4.8: Аналогично Рис. 4.7, но для $\beta = 1.90$, соответствующей области перехода.

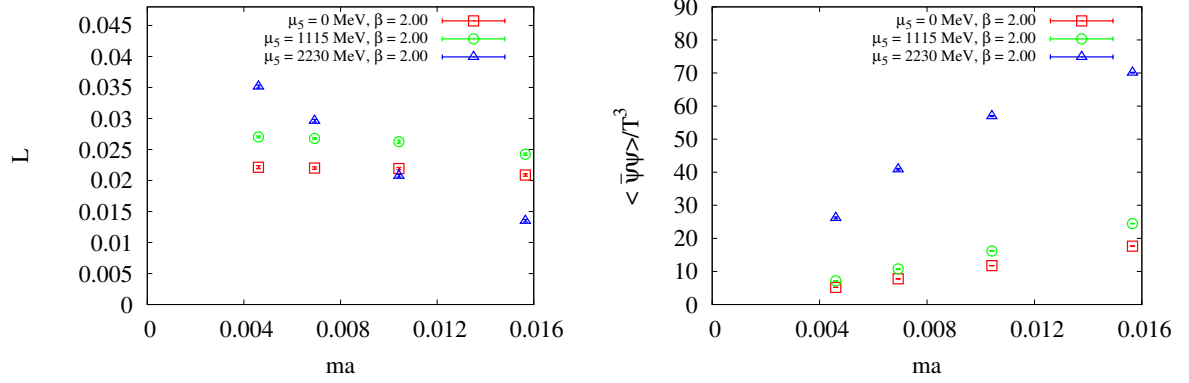


Рис. 4.9: Аналогично Рис. 4.7, но для $\beta = 2.00$, также соответствующей области перехода.

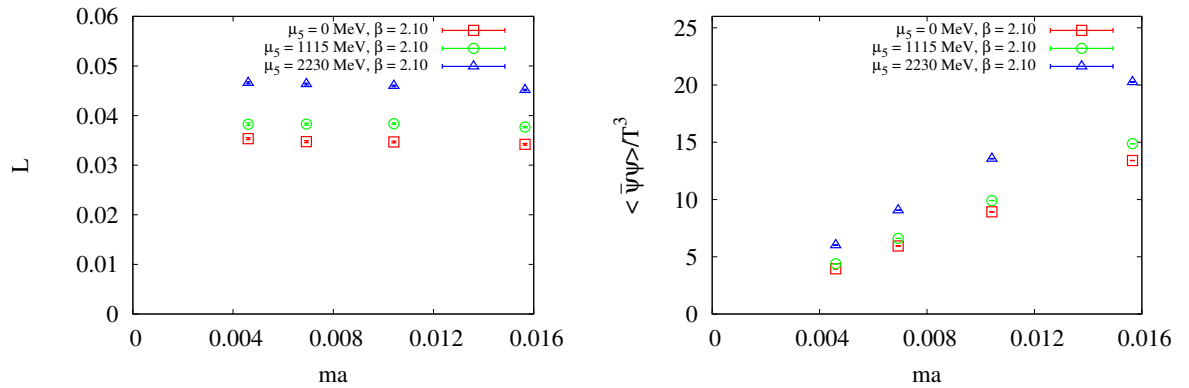


Рис. 4.10: Аналогично Рис. 4.7, но для $\beta = 2.10$, соответствующей фазе деконфайнмента.

предположить, что эта точка находится возле фазового перехода. Известно, что увеличение массы сдвигает положение перехода в область более высоких температур [108]. Таким образом, при низких значениях массы система находится в фазе с восстановленной киральной симметрией, а с увеличением массы система проходит через киральный фазовый переход. График для петли Полякова подтверждает это предположение. Петля Полякова мала при низких массах, что означает, что система в фазе конфайнмента, и растет с уменьшением массы, то есть система оказывается в фазе деконфайнмента. Это поведение означает, что при самом большом рассмотренном значении $\mu_5 = 2230$ МэВ переход происходит при еще большей температуре. Эти результаты находятся в согласии с приведенными выше.

4.3 Трехцветная КХД и вильсоновские фермионы

4.3.1 Детали расчетов

Рассмотрев влияние кирального химического потенциала на свойства $SU(2)$ -теории с 4 фермионными ароматами, перейдем к более близкой к КХД теории, а именно к $SU(3)$ КХД с 2 фермионными ароматами.

Для данных расчетов было использовано $SU(3)$ плакетное калибровочное действие и вильсоновское фермионное действие с двумя вырожденными ароматами кварков. Оператор Дирака с ненулевым киральным химическим потенциалом имеет вид [43]

$$D_{xy} = 1 - \kappa \sum_i \left((1 - \gamma_i) U_i(x) \delta_{x+i,y} + (1 + \gamma_i) U_i^\dagger(y) \delta_{x-i,y} \right) - \kappa \left((1 - \gamma_4 e^{\mu_5 a \gamma_5}) U_4(x) \delta_{x+4,y} + (1 + \gamma_4 e^{-\mu_5 a \gamma_5}) U_4^\dagger(y) \delta_{x-4,y} \right) \quad (4.12)$$

Стоит отметить, что здесь μ_5 входит как дополнительный экспоненциальный фактор для времениподобных линковых переменных. В наивном континуальном пределе $a \rightarrow 0$, фермионное действие с оператором Дирака (4.12) соответствует фермионному действию с киральным химическим потенциалом:

$$S_f^{(cont)} = \int d^4x \bar{\psi} (\partial_\mu \gamma_\mu + ig A_\mu \gamma_\mu + m + \mu_5 \gamma_5 \gamma_0) \psi \quad (4.13)$$

Вильсоновский оператор Дирака (4.12) является γ_5 -эрмитовым.

$$\gamma_5 D^\dagger(\mu_5) \gamma_5 = D(\mu_5) \quad (4.14)$$

Это свойство означает, что его детерминант $\det D(\mu_5)$ действителен, а в случае $N_f = 2$ фермионных ароматов он положителен. Таким образом, в данной системе нет проблемы знака, и ее можно моделировать стандартными методами гибридного Монте-Карло.

В представленных расчетах были использованы вильсоновские фермионы, поскольку с их помощью можно определить киральный химический потенциал в форме локального экспоненциального фактора, что не возможно для «staggered» фермионов. Кроме того, расчеты с динамическими вильсоновскими фермионами требуют немного вычислительных ресурсов.

Расчеты были проведены на решетке размером 4×16^3 с фиксированным в вычислениях параметром $\kappa = 0.1665$, то есть было проведено сканирование по параметру β . Для $\beta = 5.32144$ (в области перехода) выбранное значение κ соответствует шагу решетки $a = 0.13$ фм и массе пиона $m_\pi = 418$ МэВ. Были измерены следующие наблюдаемые: петля Полякова, киральный конденсат и их восприимчивости. Петля Полякова и ее восприимчивость чувствительны к переходу конфайнмент/деконфайнмент, в то время как киральный конденсат и его восприимчивость соответствуют нарушению/восстановлению киральной симметрии. Рассматриваемые наблюдаемые представлены как функции β для четырех различных значений $\mu_5 a = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$.

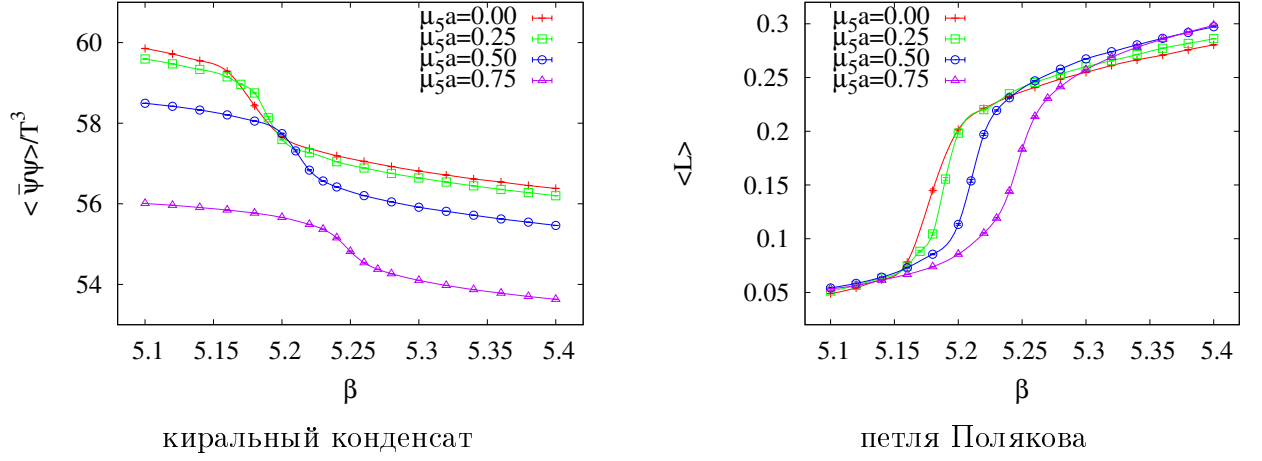


Рис. 4.11: Киральный конденсат и петля Полякова как функции β для четырех значений $\mu_5 a$. Размер решетки 4×16^3 , параметр $\kappa = 0.1665$. Ошибки меньше символов точек. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

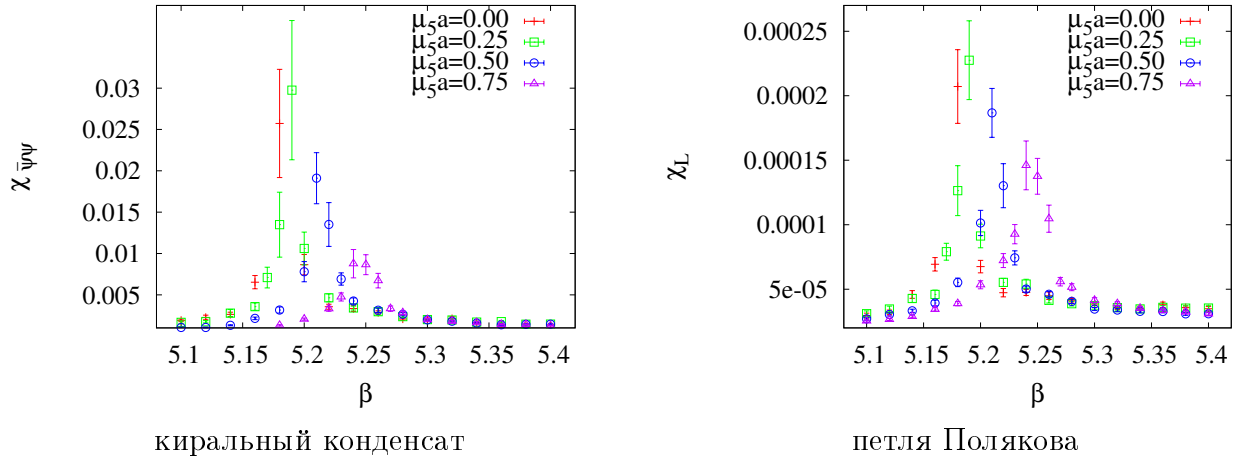


Рис. 4.12: Киральная восприимчивость и восприимчивость петли Полякова как функции β для четырех значений $\mu_5 a$. Размер решетки 4×16^3 , параметр $\kappa = 0.1665$.

4.3.2 Результаты вычислений

На Рис. 4.11 показана петля Полякова и киральный конденсат как функции β для различных значений $\mu_5 a$. Резкое изменение наблюдаемых показывает положение фазового перехода. Ясно видно, что ненулевое значение кирального химического потенциала сдвигает оба фазовых перехода в область больших значений β . Это означает, что температура перехода растет с μ_5 . Стоит отметить, что разделение обоих фазовых переходов не было наблюено.

Чтобы подтвердить данные наблюдения и получить количественные предсказания, были также измерены киральная восприимчивость и восприимчивость петли Полякова как функции β . Результаты расчетов данных наблюдаемых представлены на

Рис. 4.12. Положения пиков в восприимчивости соответствуют положению соответствующих переходов. С помощью этих наблюдаемых можно совершенно четко сказать, что критическая температура растет с ростом μ_5 .

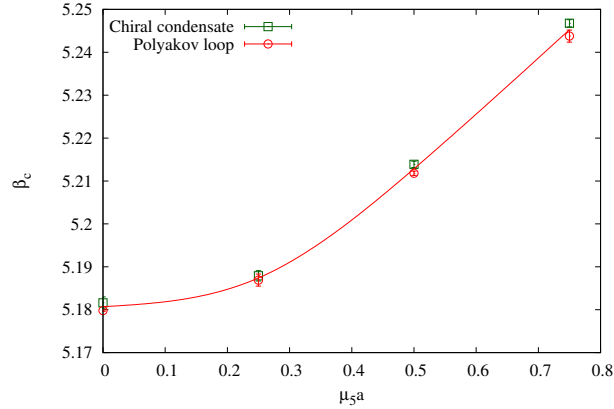


Рис. 4.13: Критическое значение β_c для кирального конденсата и петли Полякова от $\mu_5 a$. Размер решетки 4×16^3 , параметр $\kappa = 0.1665$. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

Чтобы определить критические температуры, результаты для восприимчивостей были профитированы с помощью функции Гаусса $f(\beta) = a_0 + a_1 e^{-(\beta - \beta_c)^2 / \sigma^2}$ (было использовано 6-7 точек в окрестности пика). Зависимость критического значения β_c от величины кирального химического потенциала μ_5 , полученная при помощи фитирования, показана на Рис. 4.13. Для обеих восприимчивостей эта зависимость может быть описана квадратичной функцией:

$$\beta_c = 5.18 + 0.12(\mu_5 a)^2 \quad (4.15)$$

С помощью двухпетлевой β -функции может быть извлечена зависимость критической температуры от $\mu_5 a$. Получающаяся фазовая диаграмма представлена на Рис. 4.14.

В конце данного параграфа также стоит обсудить возникающие из-за μ_5 дополнительные ультрафиолетовые расходимости в рассматриваемых наблюдаемых: петле Полякова и киральном конденсате для вильсоновской фермионной дискретизации. Вначале можно повторить все рассуждения для «staggered» фермионов (см. Приложение) и показать, что дополнительных расходимостей в поляризационном операторе из-за $\mu_5 \neq 0$ для вильсоновских фермионов нет, что означает, что дополнительные расходимости в петле Полякова также отсутствуют.

В Приложении приведен аналитический расчет дополнительных расходимостей в киральном конденсате для свободных вильсоновских фермионов. Результаты этого исследования позволяют заключить, что есть две дополнительных расходимости от ненулевого кирального химического потенциала: одна логарифмическая, $\sim \mu_5^2 \log(a)$ и вторая линейная, $\sim \mu_5^2 / a$. Логарифмическая расходимость существует и для «staggered» фермионов, причем с тем же коэффициентом. По всей видимости, дополнительная линейная расходимость в киральном конденсате связана с явным нарушением киральной

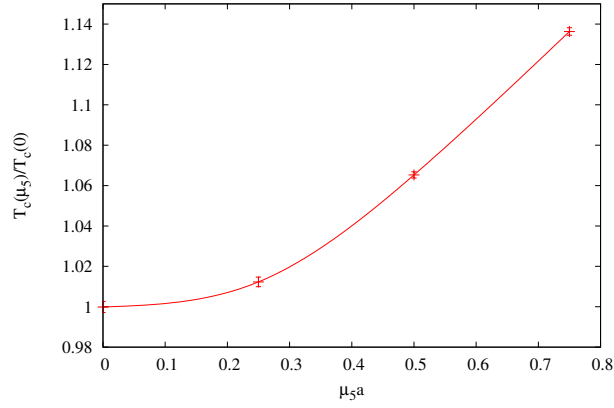


Рис. 4.14: Критическая температура $T_c(\mu_5)/T_c(0)$ для кирального конденсата как функция $\mu_5 a$. Размер решетки 4×16^3 , параметр $\kappa = 0.1665$. Точки соединены интерполирующими кубическими сплайнами.

симметрии вильсоновскими фермионами. Стоит отметить, что коэффициент перед этой расходимостью отрицательный, поэтому увеличение кирального химического потенциала приводит к уменьшению кирального конденсата. По всей видимости, поведение этой расходимости в киральном конденсате такое же и во взаимодействующем случае. На Рис. 4.11 видно, что кривые с большим μ_5 сдвинуты вниз относительно кривых с меньшим значением μ_5 .

Несмотря на факт, что вклад от дополнительных расходимостей из-за $\mu_5 \neq 0$ в киральный конденсат значителен, по всей видимости, расходимости не влияют на положение перехода нарушение/восстановление киральной симметрии по следующим причинам. Во-первых, как было отмечено выше, в петле Полякова нет дополнительных расходимостей. Поэтому, если бы дополнительные расходимости влияли на положение фазового перехода нарушение/восстановление киральной симметрии, это было бы заметно как разделение между переходами нарушение/восстановление киральной симметрии и конфайнмент/деконфайнмент, которое, однако, не наблюдается. Также стоит отметить, что положение фазового перехода определяется по пику восприимчивости. Очевидно, что дополнительная ультрафиолетовая расходимость не приведет к пику. Все это позволяет заключить, что ультрафиолетовые расходимости, связанные с ненулевым μ_5 , не влияют на сделанные выводы.

4.4 Катализ динамического нарушения киральной симметрии киральным химическим потенциалом

В этой части будет рассмотрен физический механизм, приводящий к росту кирального конденсата при введении кирального химического потенциала. Рассуждения, приведенные в этой части, относятся ко всем системам с ненулевой киральной плотностью. Будет показано, что для рассматриваемых систем киральный химический по-

тенциал приводит к возникновению или усилению динамического нарушения киральной симметрии. Другими словами, киральный химический потенциал выступает в роли катализатора динамического нарушения киральной симметрии. Физический механизм этого явления - возникновение поверхности Ферми и дополнительных фермионных состояний на этой поверхности, которые принимают участие в динамическом нарушении киральной симметрии.

4.4.1 Модель Намбу - Йона-Лазинио и уравнение для щели

В данном параграфе для расчетов планируется использовать модель Намбу - Йона-Лазинио с $U_L(1) \times U_R(1)$ киральной симметрией в присутствии кирального химического потенциала μ_5 . Несмотря на то, что рассматривается модель Намбу - Йона-Лазинио, ниже будет показано, что основные результаты модельно независимы. Евклидово действие для модели Намбу - Йона-Лазинио имеет следующий вид

$$S_E = \int d^4x \left(\bar{\psi} (\hat{\partial} - \mu_5 \gamma_4 \gamma_5) \psi - G [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2] \right). \quad (4.16)$$

В данной формуле предполагается, что у фермионных полей есть цветовые индексы $\alpha = 1, \dots, N_c$ и по ним происходит суммирование. Чтобы избавиться от четырехфермионного взаимодействия, обычно вводят скалярное и псевдо-скалярное поля σ, π , которые позволяют переписать евклидово действие (4.16) в следующем виде

$$S_E = \int d^4x \left(\bar{\psi} (\hat{\partial} - \mu_5 \gamma_4 \gamma_5 + \sigma + i \gamma_5 \pi) \psi + \frac{1}{4G} [\sigma^2 + \pi^2] \right). \quad (4.17)$$

Такая форма позволяет провести интегрирование по фермионными полям, и, в результате, получить эффективное действие для полей σ, π

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \int d^4x \left(\frac{1}{4G} (\sigma^2 + \pi^2) - \text{Tr} \log (\hat{\partial} - \mu_5 \gamma_4 \gamma_5 + \sigma + i \gamma_5 \pi) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{4G} (\sigma^2 + \pi^2) - N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{s=\pm 1} \log (k_4^2 + (|\vec{k} - s\mu_5)^2 + \sigma^2 + \pi^2) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Эффективное действие зависит от $\sigma^2 + \pi^2$. В таком случае можно выбрать любое направление конденсата в плоскости (σ, π) . Ниже будет выбрано направление конденсата вдоль σ , при этом $\pi = 0$. Для нулевой голой массы значение σ совпадает со значением динамической массы $M = \sigma$.

В пределе $N_c \rightarrow \infty$ основной вклад в континуальный интеграл по полям σ определяется стационарной точкой $\delta S_{eff} / \delta \sigma = 0$. Значение динамической фермионной массы M может быть определено из уравнения для щели

$$\frac{1}{GN_c} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 dk \left[\frac{1}{\sqrt{(|\vec{k}| - \mu_5)^2 + M^2}} + \frac{1}{\sqrt{(|\vec{k}| + \mu_5)^2 + M^2}} \right] \quad (4.19)$$

Стоит отметить, что в последнем уравнении была использована схема регуляризации с обрезанием по трехмерному импульсу. Предполагая, что $M, \mu_5 \ll \Lambda$, можно переписать

уравнение (4.19):

$$\frac{1}{\alpha_{NJL}} - 1 = \left(y^2 - \frac{x^2}{2} \right) \log \frac{1}{x^2} \quad (4.20)$$

$$\alpha_{NJL} = \frac{GN_c \Lambda^2}{\pi^2}, \quad x = \frac{M}{\Lambda}, \quad y = \frac{\mu_5}{\Lambda}$$

При нулевом киральном химическом потенциале уравнение (4.20) совпадает с уравнением для щели в модели Намбу - Йона-Лазинио для динамической массы фермионы (см. обзор [110]). Для $\mu_5 = 0$ и $\alpha_{NJL} < 1$ левая сторона выражения (4.20) положительна, но правая отрицательна, поэтому уравнение (4.20) имеет ненулевое решение $M \neq 0$ только при достаточно сильном взаимодействии $\alpha_{NJL} > 1$. Ниже будет показано, что ненулевое значение μ_5 полностью меняет свойства уравнения для щели (4.20).

4.4.2 Слабо взаимодействующая киральная среда

Для начала рассмотрим случай слабого взаимодействия $\alpha_{NJL} \ll 1$. Уравнение для щели (4.20) не имеет решений при $\mu_5 = 0$, то есть динамическая масса обращается в ноль $M = 0$. Тем не менее, для любых $\mu_5 \neq 0$ и $\alpha_{NJL} \ll 1$ появляется решение, которое может быть записано как

$$M^2 = \Lambda^2 \exp \left[-\frac{\pi^2}{GN_c \mu_5^2} \right]. \quad (4.21)$$

Последнее уравнение показывает, что ненулевой киральный химический потенциал приводит к динамическому нарушению киральной симметрии и генерации массы фермиона даже для исчезающе малого взаимодействия между фермионами. Динамическая масса M для слабого взаимодействия $\alpha_{NJL} \ll 1$ определяется поведением системы в окрестности поверхности Ферми $|\vec{k}| = \mu_5$. Чтобы это увидеть, запишем уравнение для щели (4.19) в следующем виде

$$\frac{1}{GN_c} \approx \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 dk \frac{1}{\sqrt{(|k| - \mu_5)^2 + M^2}} \approx \frac{\mu_5^2}{\pi^2} \int_{\mu_5 - \delta}^{\mu_5 + \delta} dk \frac{1}{\sqrt{(|k| - \mu_5)^2 + M^2}} \approx \nu(E_F) \log(M^2), \quad (4.22)$$

где $\nu(E_F)$ - плотность состояний на поверхности Ферми

$$\nu(E_F) = \frac{1}{V} \frac{dN(E)}{dE} \Big|_{|\vec{k}|=\mu_5} = \frac{\mu_5^2}{\pi^2}. \quad (4.23)$$

Выражение (4.22) соответствует нестабильности БКШ на поверхности Ферми. Динамическая масса (4.21), записанная с помощью $\nu(E_F)$ имеет вид $M^2 = \Lambda^2 \exp(-1/GN_c \nu(E_F))$, что очень похоже на выражение для массовой щели в теории сверхпроводимости БКШ $\Delta = \omega_D \exp(-const/G_S \nu_F)$ [111], где ω_D - частота Дебая, G_S - константа связи и ν_F - плотность состояний на поверхности Ферми.

4.4.3 Сильно взаимодействующая киральная среда

В этом параграфе будет изучено уравнение для щели (4.20) для сильного взаимодействия $\alpha_{NJL} \sim 1$. Для начала рассмотрим случай, когда взаимодействие сильное,

но его еще не достаточно для динамического нарушения киральной симметрии без кирального химического потенциала: $0 < 1 - \alpha_{NJL} \ll 1$. Также как и для слабо взаимодействующей среды, $\mu_5 \neq 0$ приводит к нарушению киральной симметрии и генерации фермионной массы, которая может быть получена из уравнения (4.20)

$$M^2 \simeq 2\mu_5^2 \quad (4.24)$$

Необходимо отметить, что поправки к уравнению (4.24) порядка $\sim 1/N_c$. Поскольку расчеты представлены только в первом порядке разложения по $1/N_c$, данные поправки не рассматриваются.

Если $\alpha_{NJL} > 1$, то у уравнения для щели (4.20) для нулевого кирального химического потенциала есть ненулевое решение M_0 . Вначале будет рассмотрен случай маленького кирального химического потенциала $\mu_5 \ll M_0$. Разложение уравнения (4.20) в окрестности решения M_0 приводит к следующей формуле:

$$M^2 \simeq M_0^2 + 2\mu_5^2. \quad (4.25)$$

Таким образом, M является квадратично растущей функцией μ_5 при малых μ_5 . В случае большого кирального химического потенциала $\mu_5 \gg M_0$ динамическая фермионная масса дается формулой (4.24).

Стоит отметить, что при выводе формул (4.24) и (4.25) слагаемое, которое представляет логарифмическую расходимость (слагаемое $\sim y^2$ в уравнении (4.20)), то есть динамика на поверхности Ферми, играет решающую роль.

4.4.4 Киральная среда и теория сверхпроводимости БКШ

Нестабильность БКШ и формула для динамической массы (4.21) позволяют говорить, что существует аналогия между моделью Намбу - Йона-Лазинио с киральным химическим потенциалом и теории сверхпроводимости БКШ. Это можно показать явно с помощью вариационного подхода. Для начала отметим, что в модели Намбу - Йона-Лазинио без взаимодействия $G = 0$, при $T = 0$ и $\mu_5 > 0$ вакуумное состояние $-|p_F\rangle$ состоит из двух Ферми-сфер правых частиц и левых античастиц радиусом μ_5 . Логично предположить, что во взаимодействующей модели Намбу - Йона-Лазинио происходит конденсация пар правый кварк - левый антикварк. Подходящее вакуумное состояние для этой модели может быть записано как

$$\begin{aligned} |vac\rangle &= \hat{G}_1 \hat{G}_2 \hat{G}_3 |p_F\rangle, \\ \hat{G}_1 &= \prod_p \left(\cos(\theta_L) - \sin(\theta_L) \hat{a}_{L,p}^+ \hat{b}_{R,-p}^+ \right), \\ \hat{G}_2 &= \prod_{p > \mu_5} \left(\cos(\theta_R) + \sin(\theta_R) \hat{a}_{R,p}^+ \hat{b}_{L,-p}^+ \right), \\ \hat{G}_3 &= \prod_{p < \mu_5} \left(\cos(\tilde{\theta}_R) + \sin(\tilde{\theta}_R) \hat{b}_{L,-p} \hat{a}_{R,p} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $(\hat{a}_{L,p}^+, \hat{a}_{L,p}) / (\hat{b}_{L,p}^+, \hat{b}_{L,p})$ - операторы рождения и уничтожения для левых частиц и античастиц, $(\hat{a}_{R,p}^+, \hat{a}_{R,p}) / (\hat{b}_{R,p}^+, \hat{b}_{R,p})$ - операторы рождения и уничтожения для правых

частиц и античастиц соответственно². Энергия вакуумного состояния модели может быть записана

$$E_{vac} = 2N_c \int_{p < \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p - \mu_5) \cos^2 \tilde{\theta}_R + 2N_c \int_{p > \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p - \mu_5) \sin^2 \theta_R + \quad (4.27)$$

$$+ 2N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p + \mu_5) \sin^2 \theta_L$$

$$- GN_c^2 \left(\int_{p < \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\tilde{\theta}_R + \int_{p > \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta_R + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta_L \right)^2 \quad (4.28)$$

Вариация E_{vac} относительно параметров $\theta_L, \theta_R, \tilde{\theta}_R$ приводит к следующим значениям

$$\tan 2\theta_L = 2GN_c \frac{\Delta}{p + \mu_5}, \quad \tan 2\theta_R = 2GN_c \frac{\Delta}{p - \mu_5}, \quad \tan 2\tilde{\theta}_R = 2GN_c \frac{\Delta}{\mu_5 - p}, \quad (4.29)$$

$$\Delta = \left(\int_{p < \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\tilde{\theta}_R + \int_{p > \mu_5} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta_R + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sin 2\theta_L \right). \quad (4.30)$$

Подставляя значения $\theta_L, \theta_R, \tilde{\theta}_R$ из (4.29) в выражение (4.30), получим уравнение для щели (4.20) и динамическую фермионную массу $M = 2GN_c \Delta$.

Из этого рассуждения видно, что минимум энергии модели Намбу - Йона-Лазинио с $\mu_5 > 0$ реализуется при помощи конденсации куперовских пар, которые состоят из правой частицы и левой античастицы и нарушают киральную симметрию. Энергия в этом минимуме меньше энергии свободной киральной плазмы. Таким образом, киральная плазма нестабильна относительно нарушения киральной симметрии и конденсации куперовских пар.

Стоит также отметить, что для рассмотренных в данной главе систем киральный химический потенциал приводит к динамическому нарушению киральной симметрии, если она не была нарушена, или усиливает ее в противном случае. Физически этот эффект происходит из-за образования поверхности Ферми и появления дополнительных фермионных состояний на этой поверхности, которые принимают участие в динамическом нарушении киральной симметрии. По этой причине киральный химический потенциал играет роль катализатора динамического нарушения киральной симметрии.

В представленных рассуждениях была использована модель Намбу - Йона-Лазинио. Однако понятно, что в любой модели ненулевое значение μ_5 приводит к образованию поверхности Ферми с дополнительными фермионными состояниями, которые из-за нестабильности БКШ создают или усиливают нарушение киральной симметрии. Полученный эффект является универсальным, то есть модельно независимым.

4.4.5 Сравнение с решеточными расчетами

Считается, что модель Намбу - Йона-Лазинио в режиме сильной связи является эффективной низкоэнергетической моделью КХД. Поэтому было бы интересно

²Стоит отметить, что в вариационном подходе, кроме параметров $\theta_L, \theta_R, \tilde{\theta}_R$, нужно ввести относительный фазы между слагаемыми $\cos(\theta), \sin(\theta)$. Было проверено, что указанное вакуумное состояние (4.26) дает минимум энергии относительно этих фаз.

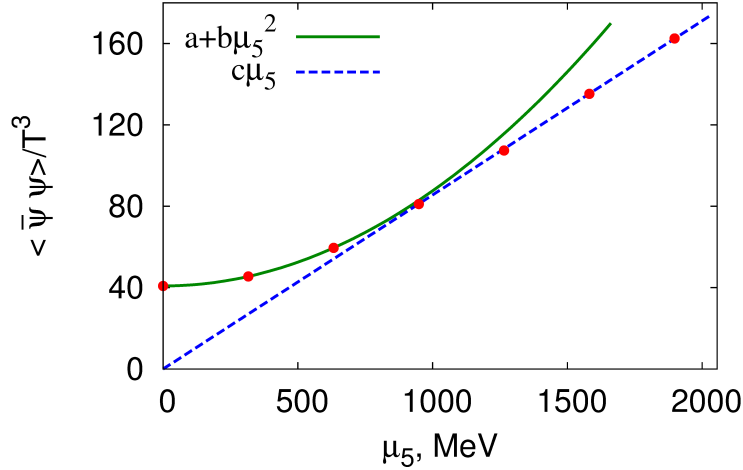


Рис. 4.15: Киральный конденсат как функция μ_5 в фазе конфайнмента ($T = 158$ МэВ).

сравнить ее предсказания с результатами решеточного моделирования КХД-подобных теорий.

Одно из предсказаний модели Намбу - Йона-Лазинио состоит в том, что динамическая фермионная масса квадратично растет при малых μ_5 , а при больших μ_5 рост становится линейным. Это очень важное свойство, поскольку при малых μ_5 перестройка вакуума происходит из-за сильного взаимодействия, а при больших μ_5 - из-за дополнительных фермионных состояний на поверхности Ферми. В модели Намбу - Йона-Лазинио $M \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, поэтому поведение динамической массы и кирального конденсата должны быть похожи. На Рис. 4.15 показана зависимость кирального конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ от μ_5 в фазе конфайнмента, полученная ранее в решеточных расчетах в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и $N_f = 4$ фермионными ароматами. Видно, что точки с $\mu_5 < 1000$ МэВ лежат на кривой $a + b\mu_5^2$, а точки $\mu_5 > 1000$ МэВ лежат на кривой $c\mu_5$. Статистические погрешности в данных порядка $\sim 0.1\%$. Итак, представленные решеточные и аналитические данные находятся в полном согласии.

Стоит также отметить, что, поскольку чем больше μ_5 , тем больше динамическая фермионная масса M , то можно ожидать, что критическая температура фазового перехода нарушение/восстановление киральной симметрии растет с ростом кирального химического потенциала, что также находится в согласии с решеточными данными.

В работе [41] было изучено, как результаты вычислений с ненулевым киральным химическим потенциалом зависят от регуляризации в модели Намбу - Йона-Лазинио. В частности, авторами было показано, что киральный конденсат растет, как функция μ_5 для $\mu_5 < \mu_5^c \sim \Lambda$ и является убывающей функцией μ_5 для $\mu_5 > \mu_5^c$. Предположительно это расхождение представленных результатов и результатов работы [41] можно объяснить следующим образом. В данной главе было показано, что динамика возле поверхности Ферми $|\vec{k}| = \mu_5$ очень важна для корректного описания киральной среды. Если $\mu_5 \sim \mu_5^c \sim \Lambda$, ультрафиолетовое обрезание Λ эффективно удаляет важные степени свободы возле поверхности Ферми и приводит к неправильному результату. По

этой причине, если $\mu_5 \ll \Lambda$, представленные результаты согласуются с [41]. Другими словами, чтобы получить правильный результат в эффективной модели, все масштабы энергии в этих моделях должны быть сильно меньше ультрафиолетового обрезания Λ .

4.5 Обсуждение и выводы

В данной главе методами решеточного моделирования была изучена фазовая диаграмма следующих КХД-подобных теорий с ненулевой киральной плотностью: $SU(2)$ КХД с $N_f = 4$ «staggered» фермионными ароматами и $SU(3)$ КХД с $N_f = 2$ вильсоновскими фермионными ароматами. Основной полученный результат заключается в том, что при ненулевых значениях кирального химического потенциала критические температуры фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент и фазового перехода нарушение/восстановление киральной симметрии по-прежнему совпадают и положение общего перехода сдвигается в область более высоких температур с ростом μ_5 .

Стоит отметить, что вычисления с различными фермионными дискретизациями и различным количеством цветов и ароматов приводят к схожим результатам, что является еще одним аргументом в пользу того, что полученный результат применим для всех КХД-подобных систем.

Также было показано аналитически, что киральный химический потенциал выступает в роли катализатора динамического нарушения киральной симметрии из-за образования поверхности Ферми и дополнительных фермионных состояний на этой поверхности, участвующих в динамическом нарушении киральной симметрии.

Отметим, что изучение фазовой диаграммы КХД с киральным химическим потенциалом с помощью различных эффективных моделей приводит к противоречивым результатам. Например, авторами работ [35, 36, 37, 40, 106] было получено, что переход смещается в область низких температур с ростом μ_5 . В тоже время, результаты, полученные в [39, 41], подразумевают рост критической температуры с ростом μ_5 . Предположительно, причина расхождения связана с тем, что в данных работах используемый киральный химический потенциал порядка ультрафиолетового обрезания, тем самым очень важная динамика системы эффективно обрезается.

Помимо эффективных моделей, фазовая диаграмма КХД в плоскости (μ_5, T) была изучена в работах [33, 34] в формализме уравнений Дайсона-Швингера. Стоит также отметить работу [42]. В данной работе авторы рассматривали вопрос универсальности фазовых диаграмм КХД и КХД-подобных теорий с помощью эквивалентности при больших N_c . Авторы данных работ получили, что критическая температура растет с μ_5 . Эти результаты согласуются с представленными в данной главе.

Глава 5

Транспортные коэффициенты в решеточной глюодинамике

5.1 Кварк-глюонная плазма - самая идеальная жидкость

Одним из важнейших результатов, полученных на эксперименте RHIC по столкновению тяжелых ионов, является измерение распределения рождающихся частиц по углам и определение значения эллиптического потока [112, 113]. Экспериментальные данные могут быть объяснены в рамках гидродинамического приближения, если предположить, что кварк-глюонная плазма, полученная в столкновениях тяжелых ионов, очень близка к идеальной жидкости [114, 115, 116]. В первом порядке поправки, связанные с неидеальностью жидкости, параметризуются сдвиговой и объемной вязкостями: η , ζ . Обычно в качестве количественной меры неидеальности жидкости используют следующую безразмерную величину: отношение вязкости к плотности энтропии η/s . Использование этой величины позволяет сравнивать вязкость сред различной температуры и/или плотности.

Численное моделирование кварк-глюонной плазмы позволяет на основе экспериментальных данных получить следующую оценку для отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии [117]: $\eta/s = (1 - 3) \frac{1}{4\pi} \sim 0.08 - 0.24$. Для сравнения, для воды в области перехода это отношение равно $\eta/s \sim 2.0$, для гелия $\eta/s \sim 0.8$. Видно, что отношение η/s для кварк-глюонной плазмы значительно меньше, чем для других жидкостей. Интересно, что получаемое значение вязкости кварк-глюонной плазмы очень близко к теоретическому ограничению для всех жидкостей, полученному с помощью AdS/CFT-соответствия [118]:

$$\eta/s > \frac{1}{4\pi}. \quad (5.1)$$

Также стоит сравнить эти данные с пертурбативным вычислением, которое в ведущем порядке приводит к результату:

$$\left(\frac{\eta}{s}\right)_{\text{leading-log}} = \frac{c}{g^4 \log 1/g}, \quad (5.2)$$

где c - фиксированное число [119], а g - константа связи сильного взаимодействия. Численно при $\alpha_s = 0.15$ получается следующее значение: $\eta/s \approx 2.0$. Насколько можно продолжить пертурбативное вычисление в область более высоких констант связи, которая необходима для описания столкновения тяжелых ионов, не известно.

В связи с этим одной из важнейших задач современной теоретической физики является вычисление вязкости кварк-глюонной плазмы из первопринципов. В этих условиях на первый план выходит численное моделирование КХД на решетке. Отметим, что существуют ряд работ, посвященных изучению вязкости кварк-глюонной плазмы в рамках моделирования КХД на решетке [120, 121, 122]. Однако, из-за сложности вычислений, результаты, которые получены в этих работах нельзя назвать исчерпывающими.

Ниже будет представлено численное моделирование вязкости $SU(2)$ - и $SU(3)$ -глюодинамики в рамках моделирования КХД на решетке. Поскольку $SU(2)$ теория несколько проще с точки зрения необходимых компьютерных ресурсов, вначале будет рассмотрена именно она, будут описаны необходимые алгоритмы и методы определения вязкости, а потом эти способы будут применены для $SU(3)$ теории, в том числе измерена зависимость вязкости от температуры среды.

5.2 Транспортные коэффициенты и корреляторы тензора энергии-импульса

Для вычисления вязкости и других транспортных коэффициентов применяются так называемые формулы Кубо [123], связывающие коэффициенты линейных диссипативных процессов с запаздывающими временными корреляционными функциями соответствующих операторов. Для вязкости (как сдвиговой, так и объемной) нужны корреляционные функции оператора тензора энергии-импульса. Сдвиговая и объемная вязкости определяются исходя их следующих формул:

$$\begin{aligned} \eta &= - \int d^3x' \int_{-\infty}^t e^{\epsilon(t_1-t)} \int_{-\infty}^{t_1} dt' \langle T_{12}(x, t) T_{12}(x', t') \rangle_{ret} \\ \frac{4}{3}\eta + \zeta &= - \int d^3x' \int_{-\infty}^t e^{\epsilon(t_1-t)} \int_{-\infty}^{t_1} dt' \langle T_{11}(x, t) T_{11}(x', t') \rangle_{ret}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

в которых нужно взять предел $\epsilon \rightarrow 0$. Для описания системы часто рассматривается так называемая спектральная плотность, которая определяется как мнимая часть соответствующего запаздывающего коррелятора в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu, \rho\sigma}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle T_{\mu\nu} T_{\rho\sigma} \rangle_{ret}(\omega, \mathbf{q}) \\ \langle T_{\mu\nu} T_{\rho\sigma} \rangle_{ret}(\omega, \mathbf{q}) &= \int d^3\mathbf{x} dt e^{i\mathbf{q}\mathbf{x} - i\omega t} \langle T_{\mu\nu}(0, 0) T_{\rho\sigma}(\mathbf{x}, t) \rangle_{ret} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Это позволяет переписать формулу (5.3) в импульсном представлении. Вязкость определяется поведением спектральной плотности при низких частотах и нулевом пространственном импульсе $q = 0$:

$$\eta = \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho(\omega, \mathbf{q} = 0)}{\omega} \quad (5.5)$$

Функция Грина, вычисляемая на решетке, определяется следующим образом:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0, \mathbf{p}) = \beta^5 \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle T_{\mu\nu}(0) T_{\rho\sigma}(x_0, \mathbf{x}) \rangle, \quad (5.6)$$

где $x_0 = ka$, $\beta = 1/T$, T - это температура системы. Численные вычисления на решетке проводятся в пространстве с евклидовской метрикой, поэтому коррелятор, вычисляемый на решетке, не совпадает с запаздывающим коррелятором, определенном выше. Можно показать, что один переходит в другой при аналитическом продолжении [124]: $p_0 \rightarrow i\omega$. Аналитическое продолжение позволяет связать евклидов коррелятор со спектральной плотностью:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0, \mathbf{p}) = \beta^5 \int_0^\infty \rho_{\mu\nu\rho\sigma}(\omega, \mathbf{p}) \frac{\cosh \omega(\frac{1}{2}L_0 - x_0)}{\sinh \frac{\omega L_0}{2}} d\omega \quad (5.7)$$

Задача о нахождении вязкости, таким образом, заключается в численном вычислении коррелятора $C_{1212}(x_0, \mathbf{q} = 0)$, затем обращении формулы (5.7) и нахождении $\rho_{1212}(\omega, \mathbf{p} = 0)$ с учетом того, что коррелятор известен в конечном количестве точек и с конечной точностью. После этого низкочастотное поведение спектральной плотности при $\omega \rightarrow 0$ и определяет вязкость.

Поскольку для вычисления вязкости необходим коррелятор с нулевым пространственным импульсом $C_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0, \mathbf{q} = 0)$, то везде в дальнейшем предполагается, что пространственный импульс $\mathbf{q} = 0$.

5.3 Спектральная функция $\rho_{12,12}$

Прежде чем перейти непосредственно к описанию численных расчетов и их результатов, стоит упомянуть известные свойства спектральной функции (5.4), так как учетывание этих свойств необходимо для обращения соотношения (5.7) и извлечения вязкости.

Важными свойствами спектральной функции являются положительность $\rho(\omega)/\omega > 0$ и нечетность $\rho(-\omega) = -\rho(\omega)$. Также важным является выражение для спектральной функции в первом порядке теории возмущений [125]:

$$\rho^{LO}(\omega) = \frac{1}{10} \frac{d_A}{(4\pi)^2} \frac{\omega^4}{\tanh(\frac{\omega}{4T})} + \left(\frac{2\pi}{15}\right)^2 d_A T^4 \omega \delta(\omega), \quad (5.8)$$

где $d_A = N_c^2 - 1$ ($d_A = 3$ для $SU(2)$ -глюодинамики, $d_A = 8$ для $SU(3)$ -глюодинамики). Можно показать, что в формализме жестких термальных петель (Hard Thermal Loop) слагаемое, пропорциональное δ -функции модифицируется из-за взаимодействий в некоторую функцию конечной ширины [126]. Например, можно аппроксимировать эту функцию $\delta(\omega) \sim 1/(1+b^2\omega^2)$. Однако, как будет показано ниже, полученные численные данные не могут быть описаны спектральной функцией такого вида.

Известно также выражение в следующем порядке теории возмущений для спектральной функции при больших частотах [127]:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \rho^{NLO}(\omega) = \frac{1}{10} \frac{d_A}{(4\pi)^2} \omega^4 \left(1 - \frac{5\alpha_s N_c}{9\pi}\right) \quad (5.9)$$

Стоит отметить, что при больших ω спектральная функция растет как $\rho(\omega) \sim \omega^4$, что приводит к большому пертурбативному вкладу в корреляционную функцию для всех евклидовых времен x_0 . Вычисление показывает, что даже на максимальном удалении $x_0 = 1/(2T)$, этот пертурбативный вклад составляет $\sim 85\%$ от всей величины коррелятора. Поведение спектральной функции при больших частотах ω приводит к резкому падению коррелятора $C(x_0) \sim 1/x_0^5$ на малых расстояниях. По этой причине отношение сигнал/шум для $C(x_0)$ мало при $x_0 \gg a$ и решеточное вычисление коррелятора при $x_0 \sim 1/(2T)$ становится затратным в плане компьютерных ресурсов.

5.4 Решеточная дискретизация тензора-энергии импульса

В данной главе обсуждается измерение вязкости в рамках решеточной глюодинамики с калибровочной группой $SU(2)$ и $SU(3)$. Используется вильсоновское действие для калибровочных полей $U_\mu(x)$:

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } U_{\mu, \nu}(x) \right) \quad (5.10)$$

$$U_{\mu, \nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{e}_\mu) U_\mu^\dagger(x + \hat{e}_\nu) U_\nu^\dagger(x)$$

В этой формуле $U_\mu(x)$ - это переменные, соответствующие калибровочному полю, $\beta = \frac{2N_c}{g_0^2}$, g_0 - голая константа связи, N_c - количество цветов.

В непрерывном случае тензор энергии-импульса в глюодинамике имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\alpha}^a - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a \quad (5.11)$$

Существует несколько способов дискретизовать его на решетке (a - шаг решетки):

- Плакетная дискретизация.

$$a^4 T_{\mu\mu}(x) = \frac{\beta}{N_c} \text{Re Tr} \left(\sum_{\nu \neq \mu} U_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} \sum_{\nu, \rho \neq \mu} (U_{\nu\rho}(x) + U_{\nu\rho}(x + \hat{e}_\mu)) \right) \quad (5.12)$$

Данный метод работает только для диагональных компонент тензора энергии-импульса (в этой формуле нет суммирования по μ).

- Клеверная дискретизация. В этом случае используется формула (5.11), в то время как для тензора напряженности глюонного поля используется дискретизация в форме клевера:

$$F_{\mu\nu}(x) \sim \frac{1}{4} (V_{\mu, \nu}(x) + V_{\nu, -\mu}(x) + V_{-\mu, -\nu}(x) + V_{-\nu, \mu}(x)) \quad (5.13)$$

$$V_{\mu, \nu}(x) = \frac{1}{2} (U_{\mu, \nu}(x) - U_{\nu, \mu}(x))$$

Такая форма позволяет дискретизовать и недиагональные компоненты тензора энергии-импульса.

Стоит отметить, что существуют другие способы дискретизации, например, основанные на уже приведенных, но использующих также предварительное сглаживание глюонных полей [128], но они не рассматриваются, поскольку приводят к менее локальной дискретизации тензора-энергии импульса, тем самым усложняя расчеты коррелятора при помощи многоуровневого алгоритма (см. Раздел 5.6). Выбор конкретной схемы дискретизации основывается на балансе между локальностью действия, временем, необходимым для расчета тензора энергии-импульса в данной дискретизации, и статистическими погрешностями в корреляторе при использовании данной схемы. В [128] было показано, что для клеверной дискретизации статистические ошибки значительно меньше, чем для плакетной, кроме того, данная дискретизация достаточно локальна, поэтому именно она используется в представленных расчетах корреляционной функции тензора энергии-импульса.

Так как для определения транспортных коэффициентов необходим коррелятор тензора энергии-импульса с $\mathbf{q} = 0$, то операторы, используемые при расчете вязкости, имеют следующий вид:

$$O_{\mu\nu}(t) = \frac{1}{N_s^3} \sum_{\mathbf{x}} T_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \quad (5.14)$$

5.5 Перенормировка тензора энергии-импульса

Поскольку в решеточной регуляризации непрерывная группа вращений и сдвигов нарушена до дискретной, то, вообще говоря, тензор энергии-импульса, являющийся сохраняющимся током по отношению к группе вращений пространства, должен быть перенормирован. Можно показать [129], что перенормированный тензор энергии-импульса имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(R)} &= Z^{[1]}(g_0)T_{\mu\nu}^{[1]} + Z^{[2]}(g_0)(T_{\mu\nu}^{[2]} - \langle T_{\mu\nu}^{[2]} \rangle_0) + Z^{[3]}(g_0)T_{\mu\nu}^{[3]}, \\ T_{\mu\nu}^{[1]} &= (1 - \delta_{\mu\nu})F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\alpha}^a, T_{\mu\nu}^{[2]} = \delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a, T_{\mu\nu}^{[3]} = \delta_{\mu\nu}(F_{\mu\alpha}^a F_{\mu\alpha}^a - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a) \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $T_{\mu\nu}^{[1]}$ - дискретизованная версия недиагональных компонент тензора-энергии импульса, $T_{\mu\nu}^{[3]}$ - дискретизованная версия диагональных компонент бесследовой части тензора энергии импульса, $T_{\mu\nu}^{[2]}$ - след тензора энергии импульса, ненулевое значение которого есть так называемая аномалия следа. Компоненты $T_{\mu\nu}^{[1]}$ и $T_{\mu\nu}^{[3]}$ тензора энергии импульса перенормируются мультипликативно, а компонента $T_{\mu\nu}^{[2]}$ мультипликативно и аддитивно.

Для расчета вязкости кварк-глюонной плазмы необходимо вычислять коррелятор следующих компонент тензора энергии-импульса: $T_{12}(0)T_{12}(t_0)$. В непрерывной теории коррелятор компонент тензора энергии-импульса $T_{ij}(0)T_{kl}(t_0)$, где i, j, k, l - пространственные индексы, имеет следующую структуру:

$$\langle T_{ij}(0)T_{kl}(t_0) \rangle = A(t_0)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + B(t_0)\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (5.16)$$

В частности, это позволяет переписать коррелятор $T_{12}(0)T_{12}(t_0)$ через диагональные компоненты тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} \langle T_{12}(0)T_{12}(t_0) \rangle &= \frac{1}{2} (\langle T_{11}(0)T_{11}(t_0) \rangle - \langle T_{11}(0)T_{22}(t_0) \rangle) = \\ &= \frac{1}{4} (\langle (T_{11}(0) - T_{22}(0))(T_{11}(t_0) - T_{22}(t_0)) \rangle) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Заметим также, что в последнем выражении аномалия следа сокращается. Поэтому, в данных расчетах будет вычислен именно коррелятор $\frac{1}{4} (\langle (T_{11}(0) - T_{22}(0))(T_{11}(t_0) - T_{22}(t_0)) \rangle)$, где под $T_{\mu\nu}$ понимается перенормированная диагональная часть тензора энергии-импульса $Z^{[3]}(g_0)T_{\mu\nu}^{[3]}$. Основным достоинством такого подхода является то, что перенормировочный коэффициент $Z^{[3]}$ может быть вычислен.

Данный перенормировочный коэффициент зависит от способа дискретизации рассматриваемых наблюдаемых. Для плакетной дискретизации его можно вычислить при помощи асимметричных решеток, то есть таких решеток, для которых параметр β в (5.10) различается для пространственных и временных плакетов. Перенормировочный коэффициент равен [130]:

$$Z_{pl}^{[3]}(g_0) = 1 - \frac{g_0^2}{2} \left(\frac{\partial g_\sigma^2}{\partial \xi} - \frac{\partial g_\tau^2}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \quad (5.18)$$

где g_τ, g_σ - соответственно, голые константы связи для времени- и пространственноподобных плакетов, $\xi = a_\sigma/a_\tau$ - анизотропия решетки. Производные по параметру анизотропии ξ в формуле (5.18) берутся при $g_\tau = g_\sigma = g_0$. Численные значения производных $\frac{\partial g_\sigma^2}{\partial \xi}, \frac{\partial g_\tau^2}{\partial \xi}$ для калибровочной группы $SU(2)$ приведены в [131]. Для калибровочной группы $SU(3)$ есть приближенная формула для коэффициентов $Z_{pl}^{[3]}(g_0)$, полученная с помощью аппроксимации Паде [120]. Эти значения и были использованы для перенормировки тензора энергии-импульса.

Для клеверной дискретизации перенормировочный коэффициент $Z_{cl}^{[3]}(g_0)$ можно вычислить следующим способом. Для начала вычисляется среднее $\langle T_{00} \rangle$ для обеих дискретизаций. Тогда перенормировочный множитель для клеверной дискретизации равен $Z_{cl}^{[3]}(g_0) = Z_{pl}^{[3]}(g_0) \frac{\langle T_{00}^{(pl)} \rangle}{\langle T_{00}^{(cl)} \rangle}$.

5.6 Многоуровневый алгоритм

При численном вычислении коррелятора тензора энергии-импульса используется двухуровневый алгоритм, позволяющий значительно улучшить точность вычислений [132].

Прежде чем перейти к его описанию, напомним, как обычно происходит генерация конфигураций. Обычный алгоритм генерации конфигураций в глюодинамике заключается в следующем. На каждом шаге по очереди меняются все калибровочные переменные на ребрах решетки в соответствии с вероятностью для каждой конфигурации, равной e^{-S} . После каждого изменения всех ребер проводится измерение коррелятора.

В двухуровневом алгоритме после термализации фиксируется значение пространственных калибровочных переменных для двух временных срезов $t = 0$ и $t = N_t/2$, называемых граничными условиями. После этого делается несколько итераций N_{fix} , в которых меняются все остальные линки, в то время как граничные условия фиксированы. Легко видеть, что все оставшиеся линки состоят из двух несвязанных между собой областей, причем, так как действие локальное, то можно разбить его на два слагаемых, каждое из которых относится к своей области. По этой причине при фиксированных граничных условиях коррелятор двух локальных операторов, расположенных в двух разных областях, есть произведение средних значений каждого оператора. Можно показать, что коррелятор двух операторов $O(t_1)$, $O(t_2)$ можно найти по следующей формуле:

$$\langle O(t_1)O(t_2) \rangle = \frac{1}{N_{bc}} \sum_{bc} \langle O(t_1) \rangle_{bc} \langle O(t_2) \rangle_{bc}, \quad (5.19)$$

где N_{bc} - количество различных граничных условий, $\langle \dots \rangle_{bc}$ означает усреднение при фиксированных граничных условиях, \sum_{bc} означает суммирование по различным граничным условиям с весом, определяемым начальным глюонным действием.

5.7 Измерение энтропии

В настоящее время общепринятым является представление результатов измерения вязкости в виде отношения η/s , где s - плотность энтропии. Измерение этой величины позволяет сравнить неидеальность жидкостей при разных температурах и плотностях. Энтропия в данных расчетах определяется при помощи соотношения: $s = \frac{\epsilon+p}{T}$ и стандартного метода для определения $\epsilon + p$ [133]:

$$\frac{\epsilon + p}{T^4} = 4\beta N_t^4 Z_{pl}(g_0)(P_\sigma - P_\tau), \quad (5.20)$$

где $Z_{pl}(g_0)$ - тот же самый перенормировочный коэффициент, что и в формуле (5.18), P_σ, P_τ - среднее значение для пространственного и временного плакета:

$$\begin{aligned} P_\sigma &= \frac{1}{3N_t^3 N_s} \left\langle \sum_{x, 0 < \mu < \nu} S_{\mu, \nu}(x) \right\rangle \\ P_\tau &= \frac{1}{3N_t^3 N_s} \left\langle \sum_{x, 0 < \mu} S_{0, \mu}(x) \right\rangle \\ S_{\mu, \nu}(x) &= \frac{1}{N_c} \text{Tr}(1 - U_{\mu, \nu}(x)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.8 Обращение формул Кубо.

Задача об обращении формулы Кубо (5.7) является очень сложной [124]. Тем не менее, существуют способы решить данную задачу, по крайней мере приближенно.

5.8.1 Линейный метод

Линейный метод - один из способов приближенного обращения формулы Кубо (5.7), основывающийся на предположении о том, что спектральная плотность достаточно гладкая. Его достоинствами является его модельно-независимость и возможность в некотором смысле оценить его погрешность. Суть этого метода в следующем. Спектральная плотность ищется в следующем виде:

$$\rho(\omega) = m(\omega)(1 + a(\omega)) = m(\omega)\left(1 + \sum_l a_l u_l(\omega)\right), \quad (5.22)$$

где $m(\omega)$ - это некоторая начальная функция, которая выбирается исходя из ожидаемого поведения спектральной плотности при низких и больших частотах, $u_l(\omega)$ - функции, выбор которых будет описан чуть ниже, a_l - подбираемые параметры.

Пусть $K(x_0, \omega) = \frac{\cosh \omega(\frac{1}{2}L_0 - x_0)}{\sinh \frac{\omega L_0}{2}}$ - ядро (5.7). Подставляя (5.22) в (5.7):

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) = \frac{1}{T^5} \int_0^\infty \tilde{K}(x_0, \omega) \left(1 + \sum_l a_l u_l(\omega)\right) d\omega, \quad (5.23)$$

где $\tilde{K}(x_0, \omega) = m(\omega)K(x_0, \omega)$. В таком случае можно предположить, что нужно выбрать в качестве $u_l(\omega)$ функции, к которым наиболее чувствителен коррелятор $C_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0)$, например, собственные функции оператора $H(\omega, \omega') = T \int dx_0 \tilde{K}(x_0, \omega) \tilde{K}(x_0, \omega')$.

Численно собственные функции оператора $H(\omega, \omega')$ находятся следующим образом. Для начала непрерывная переменная ω заменяется на дискретную: $\omega_j = j\delta\omega$, а непрерывное ядро $\tilde{K}(x_0, \omega)$ на матрицу $K_{ij} = \sqrt{\delta\omega} \tilde{K}(t_i, j\delta\omega)$. Тогда собственные функции могут быть получены при помощи сингулярного разложения матрицы K_{ij} : $K^t = U\omega V^t$. Диагональные элементы ω_l являются собственными значениями, в то время как столбцы U - собственными векторами $u_l(\omega')$ ядра $H(\omega, \omega')$.

Используя сингулярное разложение матрицы K_{ij} , можно показать, что решением задачи об обращении будет следующая функция $\hat{a}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\omega) &= \sum_{i=1}^N q_i(\omega) (G_i - \tilde{G}_i) \\ q_i(\omega) &= \sum_{l=1}^N \sum_{l'=1}^N U_{il'} \frac{1}{\omega_{l'}} V_{l'l} u_l(\omega), \quad i = 1 \dots N, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где G_i - значение коррелятора в точке x_i , $\tilde{G}_i = \int d\omega \tilde{K}(x_i, \omega)$ - начальное значение коррелятора в точке x_i .

Можно также показать, что такой метод вместо истинного $a(\omega)$ выдает $\hat{a}(\omega)$, связанный с $a(\omega)$ следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\omega') &= \int_0^\infty d\omega \hat{\delta}(\omega', \omega) a(\omega) \\ \hat{\delta}(\omega', \omega) &= \sum_{i=1}^N q_i(\omega') K(x_i, \omega) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Функция $\hat{\delta}(\omega', \omega)$ называется разрешающей функцией. Чем она ближе к дельта-функции Дирака $\delta(\omega' - \omega)$, тем более точный результат дает данный метод. Наибольший интерес представляет $\hat{\delta}(0, \omega)$, поскольку вязкость определяется как раз поведением спектральной плотности в нуле. В [134] приводится характерный вид функции $\hat{\delta}(0, \omega)$, возникающей при использовании данного метода. Видно, что $\hat{\delta}(0, \omega)$ отлична от нуля в достаточно большой области до $\omega \sim 5T$, поэтому этот метод для данного размера решеток позволяет определить только общий вид спектральной плотности, в то время как детали спектральной плотности $\sim T$ данный метод не позволяет определить. Для улучшения точности необходимо увеличивать количество точек в решетке по временному направлению N_t , что в свою очередь ведет к увеличению временных затрат.

Погрешность измерения вязкости определяется следующим образом. Для начала определяется производная измеряемой спектральной плотности по значению коррелятора в каждой точке (для линейных методов она равна коэффициенту перед коррелятором в соответствующей точке) $\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial C_i}$, тогда полная погрешность (с учетом того, что значения коррелятора для разных точек не являются независимыми) определяется по следующей формуле:

$$\sigma^2(\omega) = \frac{1}{N_m - 1} \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial C_i} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial C_j}, \quad (5.26)$$

где S_{ij} - матрица ковариации для коррелятора тензора энергии-импульса на различных расстояниях.

С помощью указанного метода были проведены расчеты вязкости в $SU(2)$ -глюодинамике на решетке размером $N_t \times N_s^3 = 8 \times 32^3$ с константой связи $\beta = 2.643$, что соответствует температуре $T/T_c \approx 1.2$, где T_c - температура фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент. В качестве начального приближения выбрана функция, совпадающая с поведением спектральной функции при больших частотах, определяемым асимптотической свободой:

$$m(\omega) = \frac{A\omega^4}{\text{th}^2 \frac{\omega}{4T} \text{th}^2 \frac{\omega}{2T}} \quad (5.27)$$

На Рис. 5.1 приводится график для коррелятора $C_{12,12}$, необходимого для определения сдвиговой вязкости, а на Рис. 5.2 спектральной функции, извлекаемой из этого коррелятора при помощи линейного метода. Закрашенная область на графике соответствует статистической неопределенности начальных данных коррелятора.

Полученное значение вязкости и энтропии:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{T^3} &= 0.120 \pm 0.035 \\ \frac{s}{T^3} &= 1.09 \pm 0.02 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Отношение вязкости к энтропии:

$$\frac{\eta}{s} = 0.111 \pm 0.32 \quad (5.29)$$

Ошибка в полученном результате соответствует статистической неточности полученных данных.

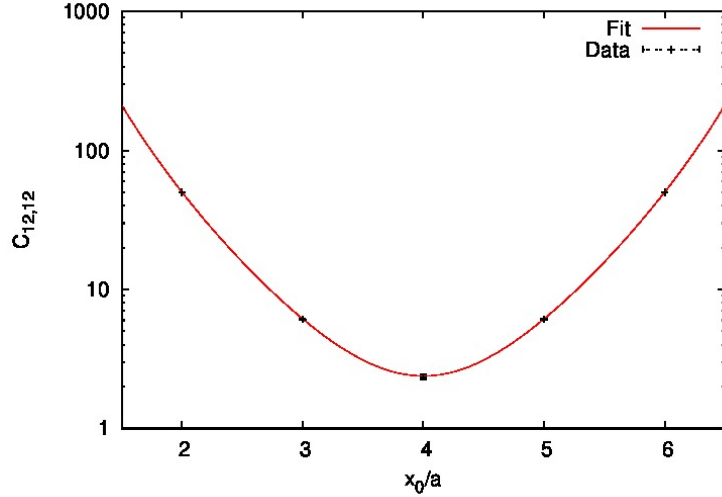


Рис. 5.1: Коррелятор $C_{12,12}(x_0)$ тензора энергии-импульса. Точки соответствуют данным, определяемым на решетке, непрерывная линия - спектральной функции, извлекаемой из этих данных.

5.8.2 Модельная функция

Несмотря на все достоинства линейного метода, он дает среднее спектральной плотности по некоторому промежутку частот $\delta\omega \sim 5T$. Чтобы уменьшить ширину этого промежутка, необходимо увеличить используемый размер решетки во временном направлении. Были проведены тестовые расчеты на решетках с большим N_t . Однако при увеличении N_t этот метод становится нестабильным из-за увеличения количество параметров, которыми фитируются получаемые данные, что в результате приводит к тому, что статистическая погрешность полученной спектральной функции становится очень большой и не позволяет извлечь вязкость с разумной точностью. Другой очень часто используемый в подобных задачах способ - метод максимальной энтропии. Однако точность наших расчетов и используемые размеры решетки не позволили определить с его помощью спектральную функцию. Вместо этого в данной главе используется физически мотивированный анзац для спектральной плотности.

Рассмотрим результаты моделирования $SU(2)$ -глюодинамики. На Рис. 5.3 представлены перенормированные корреляционные функции (5.6) в зависимости от евклидова времени x_0 для решеток размера 16×32^3 и 18×44^3 . Многоуровневый алгоритм позволил добиться точности коррелятора $\sim 3\%$ для решетки 16×32^3 и $\sim 10\%$ для решетки 18×44^3 в точке $Tx_0 = 0.5$. Для остальных точек точность значительно лучше. Визуально множество значений корреляционных функций, измеренный на разных решетках, лежит на одной кривой. Значения корреляционных функций, измеренные в близких точках в области $Tx_0 \sim 0.5$ очень близки друг к другу. Стоит отметить, что параметры фита (см. ниже) обеих корреляционных функций очень близки друг к другу. Эти факты позволяют ожидать, что эффекты конечного объема и шага решетки в представленных расчетах достаточно малы.

Возможно, наиболее простая формула для спектральной плотности может быть

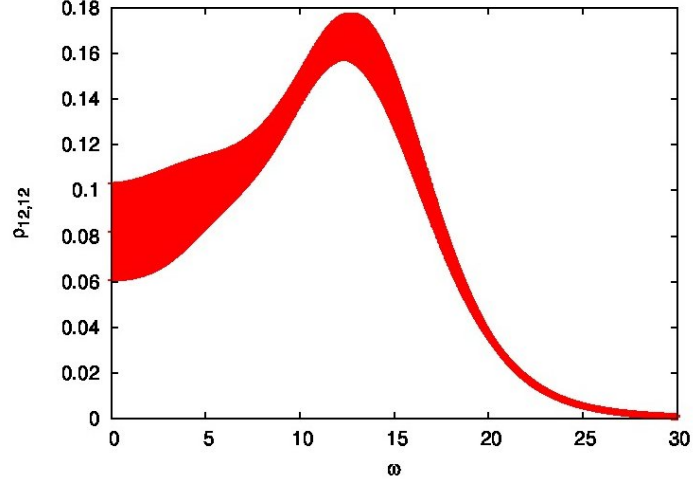


Рис. 5.2: Спектральная плотность $\rho_{12,12}(\omega)$. Закрашенная область соответствует неопределенностям в $\rho_{12,12}(\omega)$.

написана по аналогии с правилом сумм КХД [135], если соединить гидродинамическое поведение на малых частотах с асимптотической свободой на больших частотах¹:

$$\rho_1(\omega) = BT^3 \omega \theta(\omega_0 - \omega) + A\rho_{lat}(\omega) \theta(\omega - \omega_0). \quad (5.30)$$

В последней формуле $\rho_{lat}(\omega)$ - это древесное решеточное выражение для спектральной функции, вычисленной для корреляционной функции $\sim \frac{1}{2}(\langle T_{11}(x)T_{11}(y) \rangle - \langle T_{11}(x)T_{22}(y) \rangle)$ с клеверной дискретизацией тензора $F_{\mu\nu}$ на решетке с фиксированным L_t и $L_s \rightarrow \infty$. Хотя вычисление $\rho_{lat}(\omega)$ можно легко провести при помощи формул из работы [136], получающееся выражение достаточно сложное. По этой причине вместо явного выражения для ρ_{lat} приведен график отношения $\rho_{lat}(\omega)/\rho_{cont}(\omega)$ на Рис. 5.4 для решетки $L_t = 16$.

Фитирование решеточных данных ($x_0/a \geq 2$) с помощью формулы (5.7) и спектральной функции (5.30) дает следующие значения: $A = 0.723 \pm 0.002$, $B = 0.079 \pm 0.016$, $\omega_0/T = 7.5 \pm 0.5$, $\chi^2/dof \simeq 1.4$ для решетки 16×32^3 и $A = 0.703 \pm 0.003$, $B = 0.096 \pm 0.026$, $\omega_0/T = 8.3 \pm 0.7$, $\chi^2/dof \simeq 0.7$ для решетки 18×44^3 . Полученные данные показывают, что анзац (5.30) для спектральной плотности хорошо описывает решеточные данные и параметры фита для разных решеток находятся в согласии друг с другом. Параметры фитирования соответствуют значению сдвиговой вязкости $\eta/s = 0.179 \pm 0.036$ для решетки 16×32^3 и $\eta/s = 0.217 \pm 0.059$ для решетки 18×44^3 . На Рис. 5.5 показана данная спектральная плотность $\rho_1(\omega)$ как функция ω для решетки $L_t = 16$.

Отметим, что в рамках разложения жестких термических петель (Hard Thermal Loop) гидродинамическое поведение при малых частотах заменяется на транспортный пик конечной ширины $\sim T: \omega/(1 + b^2\omega^2)$ [126]. χ^2/dof на решетке 16×32^3 для этой формы спектральной плотности минимизируется при $b \sim 0$ и результат для вязкости

¹Отметим, что частота ω измеряется в физических единицах

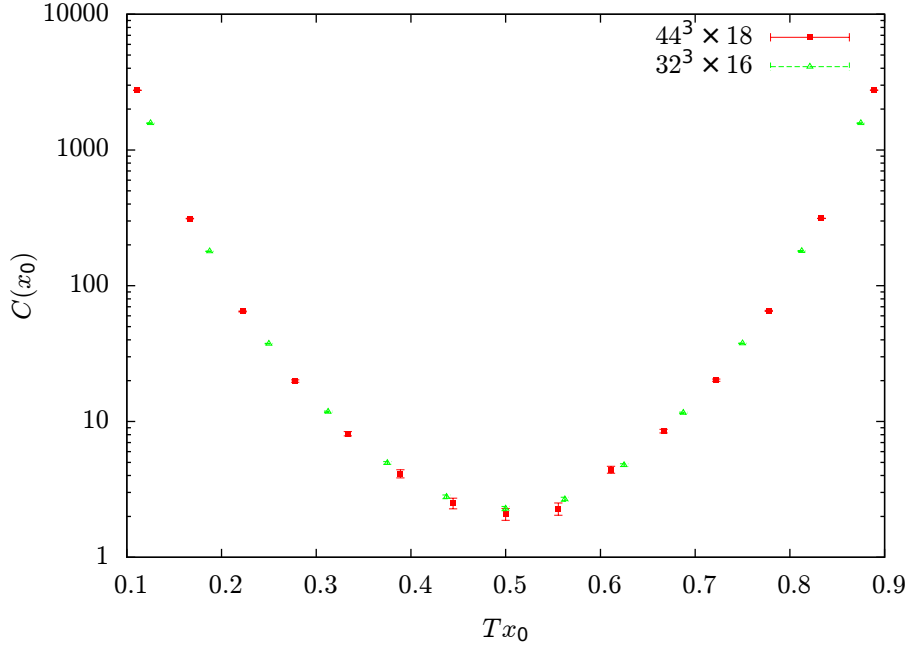


Рис. 5.3: Перенормированные корреляционные функции $C(x_0)$ в зависимости от евклидова времени x_0 , измеренные на решетках 16×32^3 и 18×44^3

получается $\eta/s = 0.20 \pm 3$. Таким образом, в пределах погрешности транспортный пик сводится к гидродинамической форме (5.30) с тем же значением сдвиговой вязкости.

Стоит сделать несколько замечаний:

- В формуле (5.30) была использована $\rho_{lat}(\omega)$ вместо непрерывного древесного выражения для $\rho(\omega)$ (см. формулу (5.8)). Это позволило точнее учесть ошибки дискретизации и вклад от асимптотической свободы. Если использовать непрерывное древесное выражение в формуле (5.30), χ^2/dof фита становится значительно больше: $\chi^2/dof \simeq 5.2$ для решетки 16×32^3 и $\chi^2/dof \simeq 4.5$ для решетки 18×44^3 .
- Как было отмечено выше, асимптотическое поведение спектральной функции при больших частотах ω фиксировано $\rho \sim \omega^4$. Тем не менее, численный коэффициент перед ω^4 модифицируется поправками следующего уровня (см. формулу (5.9)). Чтобы принять во внимание этот эффект, в формуле (5.30) был добавлен множитель A . В этом месте применяемый анзац сильно отличается от используемого в работах [120, 137]. Если в процедуре фитирования зафиксировать $A = 1$, анзац (5.30) не описывает полученные решеточные данные ($\chi^2/dof > 100$ для обеих решеток).
- Полученные значения параметров фитирования физически мотивированы. Например, значения параметра A меньше единицы, что находится в согласии с результатом следующего порядка теории возмущений (5.9). Значение константы сильного взаимодействия на пороговом параметре ω_0 ($\omega_0 \sim 2.7$ ГэВ в физических единицах) равняется $\alpha_s(\omega_0) \sim 0.2 - 0.3$. Это позволяет заключить, что пертурбативное выражение для спектральной функции применимо для $\omega > \omega_0$.

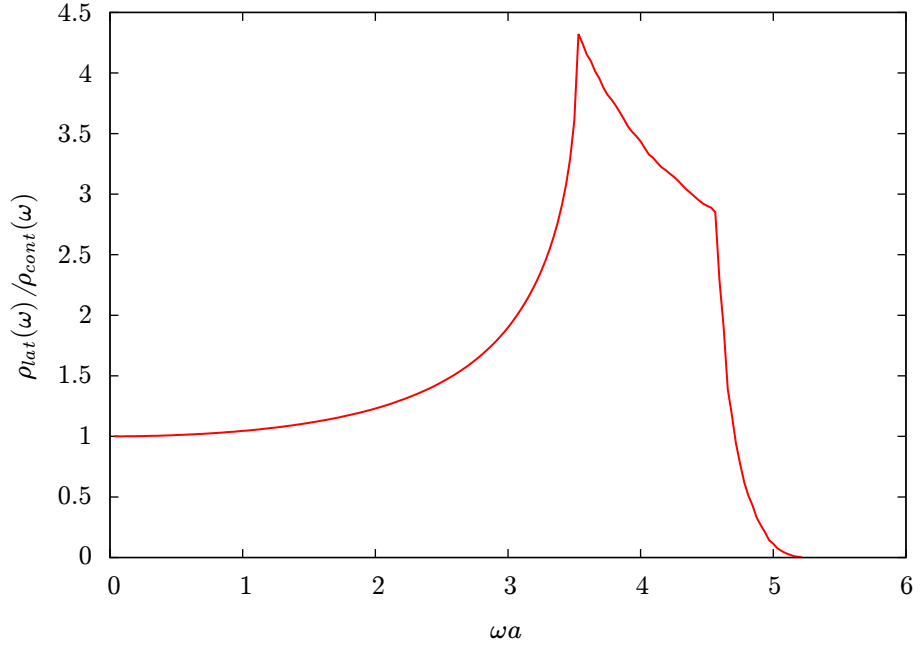


Рис. 5.4: Отношение $\rho_{lat}(\omega)/\rho_{cont}(\omega)$ как функция ωa

Низкочастотная часть спектральной плотности (5.30) дается выражением для гидродинамики первого порядка $\sim \omega$. Сравнение спектральных функций корреляторов тензора энергии-импульса, полученных в $N = 4$ SYM [138], и вычисленных в гидродинамике первого порядка, позволяет ожидать, что это приближение работает хорошо до $\omega \leq \pi T \simeq 1$ ГэВ [139]. С другой стороны, высокочастотное пертурбативное выражение для спектральной функции определяется с высокой точностью и хорошо описывает данные для $\omega \geq \omega_0 = 2.7$ ГэВ. Форма спектральной функции в области $1 \text{ ГэВ} \leq \omega \leq 2.7 \text{ ГэВ}$ известна хуже. В формуле (5.30) выражение для гидродинамики первого порядка продолжено на область $1 \text{ ГэВ} \leq \omega \leq 2.7 \text{ ГэВ}$ (см. Рис. 5.5). В результате у получающейся спектральной функции в точке ω_0 разрыв, который для решетки 16×32^3 составляет $(\rho_1(\omega_0 + 0) - \rho_1(\omega_0 - 0))/\rho_1(\omega_0 - 0) \simeq 6.7$. Этот факт позволяет заключить, что при использовании спектральной функции вида (5.30) настоящая спектральная функция недооценена в области $1 \text{ ГэВ} \leq \omega \leq 2.7 \text{ ГэВ}$ и, в результате, получаемое при помощи такого фитирования значение вязкости больше, чем настоящее значение.

Как уже было отмечено, серьезный недостаток спектральной функции $\rho(\omega)$ - ее разрывность в точке $\omega = \omega_0$. Чтобы решить эту проблему, можно использовать другой вид спектральной функции, для которого также выполняются все базовые свойства спектральной функции (5.30):

$$\rho_2(\omega) = BT^3\omega + A\rho_{lat}(\omega) \tanh^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (5.31)$$

Фитирование решеточных данных ($x_0/a \geq 2$) формулой (5.7) со спектральной функцией (5.31) дает следующие результаты: $A = 0.723 \pm 0.003$, $B = 0.039 \pm 0.012$, $\omega_0/T = 5.6 \pm 0.6$, $\chi^2/dof \simeq 1.2$ для решетки размера 16×32^3 и $A = 0.705 \pm 0.004$, $B =$

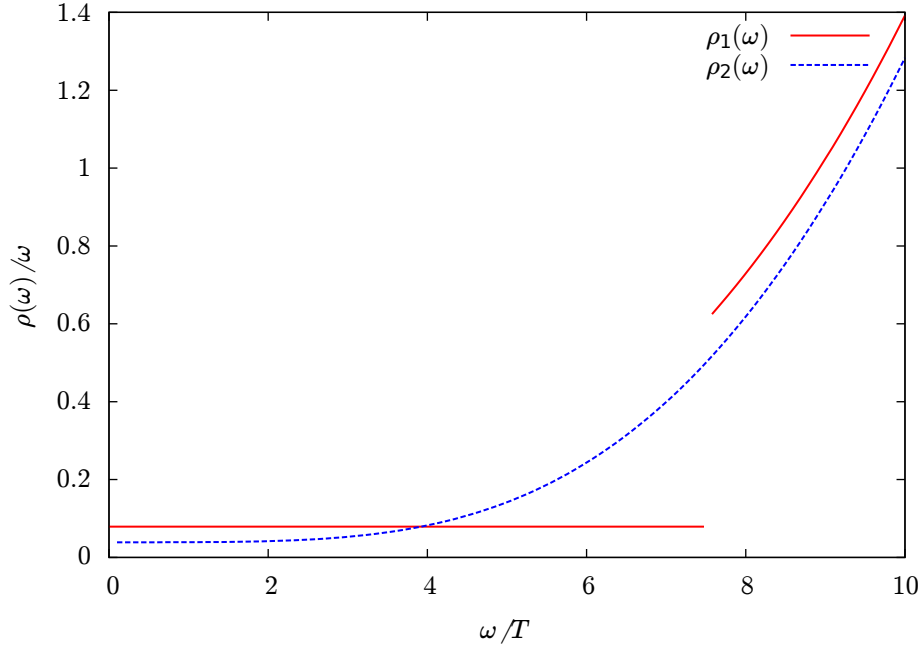


Рис. 5.5: Спектральные функции $\rho_1(\omega)$ и $\rho_2(\omega)$ как функции ω/T для решетки размера $L_t = 16$.

0.055 ± 0.022 , $\omega_0/T = 6.5 \pm 0.9$, $\chi^2/dof \simeq 0.6$ для решетки размера 18×44^3 . Видно, что анзац (5.31) для спектральной функции также хорошо фитирует решеточные данные и параметры фита для разных решеток находятся в согласии друг с другом. Получаемое значение сдвиговой вязкости равно $\eta/s = 0.088 \pm 0.027$ для решетки 16×32^3 и $\eta/s = 0.125 \pm 0.050$ для решетки 18×44^3 . На Рис. 5.5 изображена спектральная функция $\rho_2(\omega)$ как функция ω для решетки с $L_t = 16$. Отметим, что функция (5.31) проходит выше, чем (5.30) в области $1 \text{ ГэВ} \leq \omega \leq 2.7 \text{ ГэВ}$, как результат, значение сдвиговой вязкости становится меньше. Также отметим, что значение сдвиговой вязкости, полученное на решетке 16×32^3 очень близко к предсказанию, полученному в $N = 4$ SYM $\eta/s = 1/4\pi \simeq 0.080$.

Чтобы изучить систематические ошибки, вызванные использованием функций (5.30) и (5.31), были также изучены и другие возможные варианты спектральной функции. Вместо $\tanh^2(\omega/\omega_0)$ в формуле (5.31) можно использовать, например, любую степень этой функции $\sim \tanh^{2k}(\omega/\omega_0)$ или линейную комбинацию $\sim \sum_k A_k \tanh^{2k}(\omega/\omega_0)$.² Было обнаружено, что в этих случаях данные также хорошо фитируются, а получаемое значение вязкости больше, чем для спектральной функции (5.31) и меньше, чем для спектральной функции (5.30).

Полученные данные могут быть представлены в виде следующего конечного результата:

$$\frac{\eta}{s} = 0.134 \pm 0.034 \pm 0.046. \quad (5.32)$$

² Стоит отметить, что в области $1 \text{ ГэВ} \leq \omega \leq 2.7 \text{ ГэВ}$ любая функция может быть аппроксимирована такой линейной комбинацией с хорошей точностью.

Центральное значение - это среднее значение сдвиговой вязкости, полученное для спектральных функций в форме (5.30) и (5.31) при фитировании решеточных данных на решетках размера 16×32^3 . Первая указанная погрешность связана с процедурой фитирования и примерно равна 25%. Вторая указанная погрешность определяется неизвестным видом спектральной функции. Эта погрешность может быть оценена исходя из того, что вязкость может находиться между центральными значениями фитов (5.31) и (5.30). Стоит отметить, что есть еще другие источники погрешности, но ошибка, с ними связанная, значительно меньше статистической и погрешности выбора модельной функции.

5.9 $SU(3)$ -глюодинамика

После анализа методов обращения интегрального соотношения (5.7), извлечения спектральной плотности и оценки вязкости в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$, будет рассмотрен расчет вязкости в $SU(3)$ -теории. Поскольку теории обладают рядом похожих свойств, был использован тот же метод, что и ранее, а именно фитирование спектральных функций анзацами (5.30) и (5.31). Стоит напомнить, что результаты фитирования этими функциями ограничивают вязкость сверху и снизу. Полученные данные полностью аналогичны $SU(2)$ -теории, поэтому в данном параграфе будут сразу приведены результаты фитирования. Используемый размер решетки 16×32^3 . На Рис. 5.6 представлено отношение вязкости к плотности энтропии η/s для четырех значений температуры среды $T/T_c = 1, 1.2, 1.7, 2.4$ в $SU(3)$ -глюодинамике, где T_c - температура фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент. Видно, что, во-первых, полученные данные прекрасно согласуются с экспериментальными оценками, а во-вторых, в пределах ошибок отношение η/s остается почти постоянным (стоит отметить, что все данные получены в фазе деконфайнмента).

5.10 Численные результаты

Приведем еще раз полученные результаты для вязкости при температуре $T/T_c \approx 1.2$:

- $SU(2)$ -глюодинамика, размер решетки 8×32^3 , $T/T_c \approx 1.2$

$$\frac{\eta}{s} = 0.111 \pm 0.32(\text{стат.}) \quad (5.33)$$

- $SU(2)$ -глюодинамика, размер решетки 16×32^3 , $T/T_c \approx 1.2$

$$\frac{\eta}{s} = 0.134 \pm 0.03(\text{стат.}) \pm 0.05(\text{сис.}) \quad (5.34)$$

- $SU(3)$ -глюодинамика, размер решетки 16×32^3 , $T/T_c \approx 1.2$

$$\frac{\eta}{s} = 0.178 \pm 0.04(\text{стат.}) \pm 0.05(\text{сис.}) \quad (5.35)$$

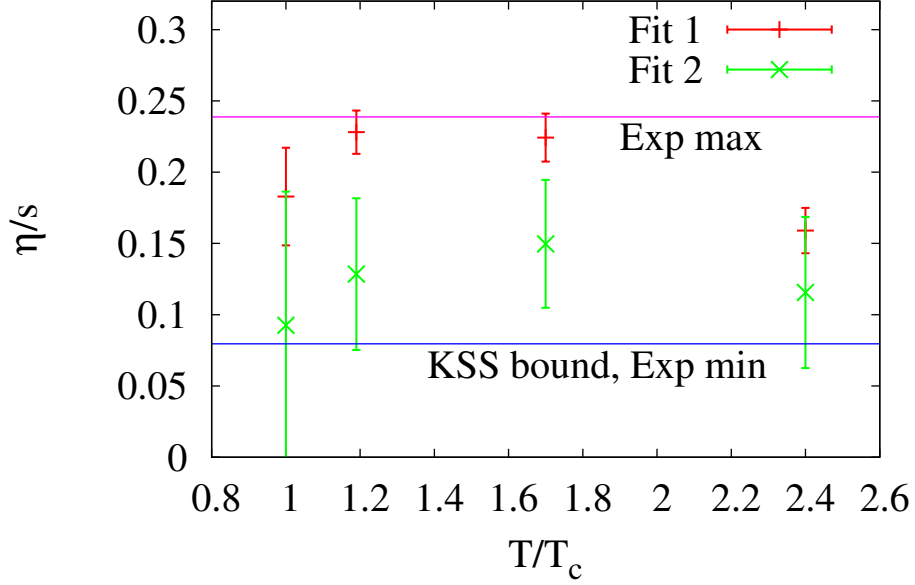


Рис. 5.6: Зависимость отношения вязкости к плотности энтропии η/s для $SU(3)$ -глюодинамики от температуры. Размер решетки 16×32^3 . Представлены результаты фитирования спектральной функции анзацами (5.30) и (5.31). Горизонтальные линии соответствуют экспериментальным ограничениям $\eta/s = (1 - 3)^{\frac{1}{4\pi}}$ и теоретическому KSS ограничению $\frac{1}{4\pi}$.

Стоит также отметить, что полученные численные значения находятся очень близко к так называемому KSS -ограничению, полученному при помощи AdS/CFT-соответствия [118]: $\eta/s > 1/4\pi \approx 0.08$. Помимо этого, результат (5.29) согласуется с данными, полученными из описания результатов эксперимента RHIC $\eta/s = 0.08 - 0.24$ [117].

Глава 6

Корреляции абелевых монополей в кварк-глюонной плазме

6.1 Введение

Как уже было сказано выше, эксперименты по столкновению тяжелых ионов показали, что кварк-глюонная плазма ведет себя как почти идеальная жидкость с очень маленькой вязкостью, что также было подтверждено численными расчетами, результаты которых представлены в предыдущей главе. В ряде работ было высказано предположение, что необычные свойства кварк-глюонной плазмы тесно связаны с магнитными степенями свободы [140, 141, 142, 143, 143].

В [143] эти магнитные степени свободы были связаны с так называемыми абелевыми монополями, испаряющимися из магнитного конденсата, который, как полагают, приводит к конфайнменту при низких температурах. Кроме того, было предложено изучать монополи при помощи численных вычислений в рамках КХД при конечной температуре как монополярные токи с ненулевой намоткой вдоль временного направления [143, 144, 145].

На решетке свойства монополей изучаются при помощи абелевой проекции после фиксации максимальной абелевой калибровки [146, 147]. Эта калибровка, а также свойства монополярных кластеров рассматривались в ряде работ, как при нулевой, так и при конечной температурах (список ссылок можно найти, например, в [148]). Было найдено, что многие непертурбативные свойства КХД, такие, как конфайнмент, фазовый переход конфайнмент - деконфайнмент, нарушение киральной симметрии и др., тесно связаны с абелевыми монополями. Этот факт называют монополярной доминантностью.

Поскольку температурные абелевы монополи могут быть связаны с необычными свойствами кварк-глюонной плазмы, изучение их свойств является важной задачей для понимания динамики кварк-глюонной плазмы. В данной главе будут представлены результаты исследования свойств монополей, в частности, изучения корреляционных функций монополей, которое было проведено для того, чтобы понять динамику коллективных явлений магнитной компоненты кварк-глюонной плазмы. Хотя изучение двухточечных корреляционных функций, проведенное в [149, 150, 151, 152], показало крайне нетривиальное взаимодействие между монополями, оно не позволяет сделать какое-либо достоверное утверждение о свойствах кварк-глюонной плазмы. Чтобы

изучить свойства среды, в данной главе рассмотрены трехточечные корреляционные функции монополей.

6.2 Детали расчетов

Рассматриваемая трехточечная корреляционная функция имеет вид:

$$g^{(3)}(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \frac{\langle \rho(\bar{r}_1) \rho(\bar{r}_2) \rho(\bar{r}_3) \rangle}{\rho^3}, \quad (6.1)$$

где r_1, r_2, r_3 - положения трех монополей, $r_{12} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$, $r_{13} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_3|$, $r_{23} = |\bar{r}_2 - \bar{r}_3|$ - расстояния между монополями, $\rho(\bar{r})$ - оператор плотности монополей в точке \bar{r} , а ρ -средняя плотность монополей.

Для изучения коллективных явлений и эффектов среды корреляционная функция (6.1) будет сравнена с модельной корреляционной функцией, которая представляет произведение попарных двухточечных корреляционных функций:

$$G^{(3)}(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = g^{(2)}(r_{12})g^{(2)}(r_{13})g^{(2)}(r_{23}) \quad (6.2)$$

где $g^{(2)}(r)$ - двухточечная корреляционная функция

$$g^{(2)}(r_{12}) = \frac{\langle \rho(\bar{r}_1) \rho(\bar{r}_2) \rangle}{\rho^2}, \quad (6.3)$$

которая была рассчитана в [151].

Стоит сделать два комментария:

1. Модель (6.2) означает, что все трехточечные корреляции связаны только с попарными корреляциями монополей. Такая корреляционная функция будет для систем, похожих на разреженный газ. Очевидно, что в разреженном газе нет коллективных эффектов и можно пренебречь влиянием среды монополей на систему из трех монополей. Таким образом, отклонение корреляционной функции (6.1) от формулы (6.2) может быть рассмотрено как оценка коллективных явлений и эффектов среды монополей.
2. Исходя из корреляционной функции (6.2) можно заключить, что взаимодействие между монополями в среде монополей является попарным взаимодействием, описываемым некоторым универсальным потенциалом $V(r)$, который может быть получен исходя из двухточечной корреляционной функции. Потенциал $V(r)$ зависит от расстояний между двумя монополями r и температуры плазмы.

Для изучения системы абелевых монополей в кварк-глюонной плазме была использована $SU(2)$ калибровочная теория со стандартным вильсоновским действием:

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu > \nu} \left[1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(U_{x, \mu} U_{x+\mu, \nu} U_{x+\nu, \mu}^\dagger U_{x, \nu}^\dagger) \right] \quad (6.4)$$

Представленные расчеты проделаны на решетке размером $L_t L_s^3$, где $L_{t,s}$ - количество шагов решетки во временном(пространственном) направлении соответственно. Температура равна $T = \frac{1}{aL_t}$.

Для фиксации максимальной абелевой калибровки необходимо найти экстремум следующего функционала

$$F_U(g) = \frac{1}{4V} \sum_{x\mu} \frac{1}{2} \text{Tr}(U_{x\mu}^g \sigma_3 U_{x\mu}^{g\dagger} \sigma_3) \quad (6.5)$$

относительно калибровочных преобразований g_x . Для нахождения экстремума был использован алгоритм имитации отжига, который очень эффективен для максимальной абелевой калибровки [153].

β	$a[\text{фм}]$	L_t	L_s	T/T_c	N_{meas}
2.43	0.108	4	32	1.5	1000
2.635	0.054	4	36	3.0	500
2.80	0.034	4	48	4.8	1000
2.93	0.024	4	48	6.8	1000

Таблица 6.1: Значения β , размеров решетки, температур, количество конфигураций, используемые в расчетах. Для определения масштаба было использовано натяжение струны $\sqrt{\sigma} = 440 \text{ MeV}$.

В Табл. 6.1 приведена информация об ансамблях конфигураций калибровочных полей, используемых в представленных расчетах.

Решеточная версия корреляционной функции (6.1) может быть записана следующим образом

$$g^{(3)}(r_1, r_2, r_3) = \frac{1}{\rho^3} \frac{dN(r_1, r_2, r_3)}{dV(r_1, r_2, r_3)}, \quad (6.6)$$

где $dN(r_1, r_2, r_3)$ - количество троек монополей, таких, что расстояния между монополями лежат в области $r_{12} \in (r_1, r_1 + \Delta r)$, $r_{13} \in (r_2, r_2 + \Delta r)$, $r_{23} \in (r_3, r_3 + \Delta r)$. $dV(r_1, r_2, r_3)$ - количество решеточных вершин, расположенных в этой же области. Для учета ошибок дискретизации $dV(r_1, r_2, r_3)$ было рассчитано численно. Δr - размер одного бина. Дополнительный множитель $\frac{1}{\rho^3}$ введен для нормировки всего выражения. На больших расстояниях, когда никаких корреляций нет, $g = 1$.

Были рассмотрены только монополи с магнитным зарядом $q = \pm 1$. Полученные результаты показывают, что монополи с большим зарядом сильно подавлены. Поскольку эффективно рассматриваются только два типа частиц (монополи с зарядом $q = 1$ и антимнополи с зарядом $q = -1$), всего существует четыре возможных коррелятора $g_{MMM}^{(3)}$, $g_{AMM}^{(3)}$, $g_{AAM}^{(3)}$, $g_{AAA}^{(3)}$, где M, A обозначают монополь и антимнополь соответственно. Монополи эквивалентны антимнополям с той точки зрения, что можно сделать магнитно-зарядовое сопряжение, и это не изменит свойств системы, по этой причине из четырех корреляторов остается два независимых:

$$g_1^{(3)} = \frac{1}{2}(g_{MMM}^{(3)} + g_{AAA}^{(3)}), \quad g_2^{(3)} = \frac{1}{2}(g_{MMA}^{(3)} + g_{AAM}^{(3)}) \quad (6.7)$$

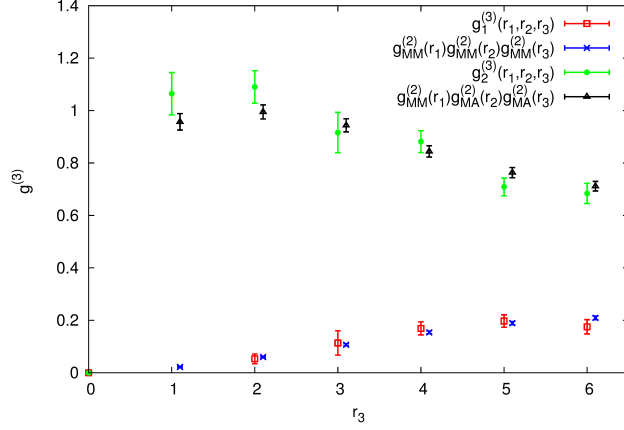


Рис. 6.1: Корреляционная функция $g^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ и модельная функция $G^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$. Расстояние между первым и вторым, первым и третьим монополями фиксированы $r_1 = r_2 = 3$ шагов решетки. Меняется расстояние между вторым и третьим монополями r_3 .

6.3 Результаты

На Рис. 6.1, 6.2 и 6.3 представлены результаты для корреляционных функций $g_1^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ и $g_2^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ и модельной функции (6.2) для конфигураций при $\beta = 2.43$, $T/T_c = 1.5$. Для наглядности результаты представлены следующим образом. На Рис. 6.1 зафиксировано расстояние между первым и вторым монополями и расстояние между первым и третьим монополями равными $r_1 = r_2 = 3$ шагам решетки, и расстояние между вторым и третьим монополями r_3 варьировалось. Аналогично, на Рис. 6.2 расстояния $r_1 = r_2 = 6$ были зафиксированы. На Рис. 6.3 представлены данные для следующей геометрии: монополи расположены в вершинах равностороннего треугольника $r_1 = r_2 = r_3 = r$ и варьируется его сторона r . На представленных графиках видно, что с точной до статистической погрешности корреляционные функции $g_1^{(3)}$, $g_2^{(3)}$ совпадают с модельной функцией (6.2). Такой же вывод можно сделать для других изученных: $T/T_c = 3.0, 4.8, 6.8$.

Рис. 6.1, 6.2 и 6.3 позволяют получить только качественные результаты. Для количественной оценки отклонения корреляционных функций от модели (6.2), может быть рассмотрена следующая величина

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{r_1, r_2, r_3} \frac{(g^{(3)}(r_1, r_2, r_3) - G^{(3)}(r_1, r_2, r_3))^2}{\sigma^2(r_1, r_2, r_3)} \quad (6.8)$$

Здесь, $\sigma(r_1, r_2, r_3)$ - статистическая погрешность корреляционной функции $g^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ в заданной точке (r_1, r_2, r_3) . Отметим, что статистической погрешностью двухточечных корреляторов можно пренебречь, поскольку она значительно меньше по сравнению с $\sigma(r_1, r_2, r_3)$.

На расстояния между монополями есть некоторые ограничения. Первое связано с эффектами конечного объема. Очевидно, если $r_1 + r_2 + r_3 > L_s$, то из-за периодических граничных условий появятся новые нефизические тройки монополей, намотанные на пространственные измерения. Такие расстояния между монополями не были учтены в

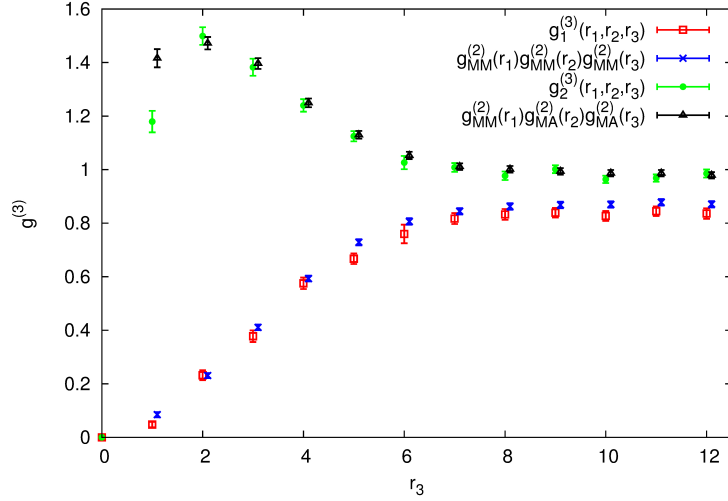


Рис. 6.2: $\beta = 2.43, T/T_c = 1.5$. Корреляционная функция $g^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ и модельная функция $G^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$. Расстояние между первым и вторым, первым и третьим монополями фиксированы $r_1 = r_2 = 6$ шагов решетки. Меняется расстояние между вторым и третьим монополями r_3 .

представленных расчетах. Другое ограничение связано с неравенством треугольника: $|r_1 - r_2| < r_3 < r_1 + r_2$. Также не были учтены расстояния, меньшие трех шагов решетки, из-за больших статистических погрешностей. В формуле (6.8) сумма вычисляется с учетом всех упомянутых ограничений. N - это общее количество троек вершин, которые удовлетворяют указанным ограничениям. Очевидно, что $\delta \sim 1$, если нет расхождений между двумя корреляционными функциями. В Табл. 6.2 представлены результаты для δ для различных значений β . Из этой таблицы видно, что корреляционные функции в пределах погрешности описываются модельной функцией (6.2).

β	T/T_c	δ_1	δ_2
2.43	1.5	0.59	0.67
2.635	3.0	0.67	0.68
2.80	4.8	0.66	0.69
2.93	6.8	0.62	0.68

Таблица 6.2: Значения β , температуры, отклонение δ корреляционных функций (6.1) от соответствующих моделей (6.2). δ_1 соответствует корреляционной функции g_1 в (6.7), δ_2 соответствует корреляционной функции g_2 в (6.7).

В заключение отметим, что в данной главе были изучены свойства термических абелевых монополей в фазе деконфайнмента в $SU(2)$ глюодинамике. В частности, для изучения свойств абелевой монополевой компоненты в кварк-глюонной плазме были вычислены трехточечные корреляционные функции положения монополей для различных температур в области $T/T_c \in (1.5, 6.8)$. Представленные результаты показывают,

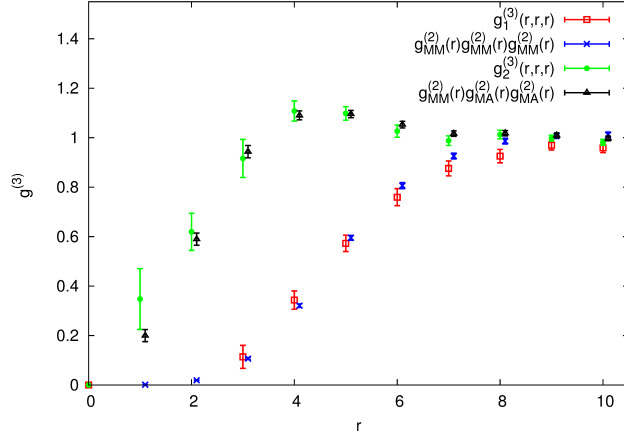


Рис. 6.3: $\beta = 2.43, T/T_c = 1.5$. Корреляционная функция $g^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$ и модельная функция $G^{(3)}(r_1, r_2, r_3)$. Монополи расположены в вершинах равностороннего треугольника $r_1 = r_2 = r_3 = r$ и варьируется сторона r этого треугольника.

что трехточечные корреляционные функции могут быть описаны независимыми попарными корреляциями монополей. Исходя из последнего утверждения, можно заключить, что система абелевых монополей в кварк-глюонной плазме проявляет свойства разреженного газа. Кроме того, можно утверждать, что взаимодействие между абелевыми монополями попарное и между ними нет трехточечных сил.

Глава 7

Заключение

В диссертационной работе были представлены результаты изучения свойств квантовой хромодинамики в экстремальных внешних условиях методами решеточного моделирования. Были рассмотрены свойства квантовой хромодинамики при ненулевой температуре, магнитном поле, киральной и барионной плотности. Эти внешние параметры могут возникать в экспериментах, направленных на изучение сильновзаимодействующего вещества, и сильно менять его свойства.

Было изучено поведение КХД во внешнем магнитном поле в рамках решеточного моделирования. Было рассмотрено теоретически предсказанное превращение вакуума КХД в сверхпроводник в сверхсильных магнитных полях. Интересной особенностью данного явления является то, что для его существования необходимо сильное магнитное поле, что полностью отличает его от обычной сверхпроводимости, которая разрушается внешним магнитным полем. Были проведены расчеты, свидетельствующие о существовании данной экзотической сверхпроводящей фазы в решеточной КХД, а также было показано, что в сверхпроводящем состоянии вакуум представляет собой жидкость из дефектов - сверхпроводящих вихрей. Стоит отметить, что расчеты были проведены в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и без динамических фермионов, в полной квантовой хромодинамике картина может измениться. Это было бы интересным направлением дальнейшего развития данной области.

Другим вопросом, рассмотренным в представленной диссертационной работе, является изучение свойств квантовой хромодинамики с ненулевой барионной плотностью. На исследование данной задачи направлен ряд экспериментов по столкновению тяжелых ионов, поэтому довольно важно получить данные об этой системе на основе теоретических представлений. Было изучено влияние ненулевой барионной плотности на фазовые переходы конфайнмент - деконфайнмент и нарушение - восстановление киральной симметрии в теории с калибровочной группой $SU(2)$, поскольку решеточные расчеты в теории с калибровочной группой $SU(3)$ в настоящее время не возможны из-за проблемы знака, при этом теории обладают рядом общих свойств. Было получено, что увеличение барионной плотности приводит к восстановлению киральной симметрии, температуры обоих фазовых переходов конфайнмент - деконфайнмент и нарушение - восстановление киральной симметрии совпадают и падают с ростом барионного химического потенциала.

Не менее интересным вопросом является изучение фазовой диаграммы кванто-

вой хромодинамики с ненулевой киральной плотностью, параметризованной киральным химическим потенциалом. Этот вопрос интересен в контексте недавно предложенных явлений аномального транспорта, самым известным из которых является киральный магнитный эффект. Было получено, что в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и $N_f = 4$ «staggered» фермионами и в теории с калибровочной группой $SU(3)$ и $N_f = 2$ вильсоновскими фермионами температуры фазовых переходов конфайнмент - деконфайнмент и нарушение - восстановление киральной симметрии совпадают и общая температура перехода растет с ростом кирального химического потенциала. Киральный химический потенциал при этом приводит к росту кирального конденсата, то есть усиливает нарушение киральной симметрии. Был также предложен физический механизм данного катализа динамического нарушения киральной симметрии ненулевым киральным химическим потенциалом.

Вызывает особый интерес задача теоретического изучения вязкости кварк-глюонной плазмы, поскольку экспериментальные оценки дают чрезвычайно малое значение. Были рассмотрены методы расчета вязкости в рамках решеточной $SU(2)$ - и $SU(3)$ - глюодинамики, было измерено ее численное значение в данных теориях, а для $SU(3)$ теории была также промерена зависимость вязкости от температуры среды в области $T/T_c \in (1.0, 2.4)$. Представленные данные согласуются с другими теоретическими работами и экспериментальными оценками, тем самым подтверждая утверждение о том, что кварк-глюонная плазма является самой сверхтекучей жидкостью, то есть обладает наименьшим среди всех известных сред отношением вязкости к плотности энтропии η/s . Полученные данные о малости вязкости также свидетельствуют о том, что кварк-глюонная плазма является сильновзаимодействующей системой. Было бы интересно провести расчеты вязкости в теории с динамическими фермионами, однако, они потребуют либо очень серьезного роста мощностей, либо разработки новых алгоритмов.

Было бы также интересно понять, чем объясняется столь маленькая вязкость кварк-глюонной плазмы. Было выдвинуто предположение, что такое поведение среды может быть описано с помощью магнитных степеней свободы - монополей. В представленной диссертационной работе были изучены свойства абелевых монополей в решеточной теории в фазе кварк-глюонной плазмы. Основное внимание было уделено взаимодействию монополей и нетривиальным коллективным эффектам. Были изучены корреляционные функции абелевых монополей. Полученные результаты позволили сделать вывод, что при рассмотренных параметрах системы монополи проявляют свойства разреженного газа с попарным взаимодействием между частицами.

Глава 8

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю, д.ф.-м.н. Виктору Валерьевичу Брагуге, за многолетнее кропотливое научное руководство. Автор признателен своему научному консультанту, д.ф.-м.н. Валентину Ивановичу Захарову, за постоянную помощь в работе, полезные советы и поддержку на протяжении всех этапов исследования. Автор глубоко обязан Михаилу Игоревичу Поликарпову, начальнику решеточной группы ИТЭФ, открывшему автору путь в область решеточных вычислений. Автор искренне признателен Виталию Геннадьевичу Борнякову, Александру Валентиновичу Молочкову и Павлу Васильевичу Буйвидовичу за конструктивную критику, идеи и полезные обсуждения, которые сильно помогли автору при выполнении исследования. Автор выражает свою благодарность Александру Александровичу Николаеву, Владимиру Александровичу Гою, Денису Леонидовичу Бойде, Максиму Владимировичу Улыбышеву, Семену Николаевичу Валгушеву, Никите Юрьевичу Астраханцеву за помощь в разработке и использовании программного обеспечения.

Приложение А

Ультрафиолетовые расходимости в киральном конденсате при ненулевом киральном химическом потенциале

А.1 «staggered» фермионы

Решеточный фермионный пропагатор при ненулевом киральном химическом потенциале может быть записан в следующей форме

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta}(x, y) &= \frac{\delta^{\alpha\beta}}{L_t L_s^3} \sum_{\{p\}} \sum_s e^{ip(x-y)} \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu}) + m + \mu_5 \gamma_0 \gamma_5}{\sin^2(p_0) + (|p| - s\mu_5)^2 + m^2} \times P(s), \quad (\text{A.1}) \\ P(s) &= \frac{1}{2} \left(1 - is \sum_i \frac{\gamma_i \sin(p_i)}{|p|} \gamma_0 \gamma_5 \right), \quad i = 1, 2, 3, \\ |p|^2 &= \sin^2(p_1) + \sin^2(p_2) + \sin^2(p_3), \\ p_i &= \frac{2\pi}{L_s} n_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad n_i = 0, \dots, L_s - 1, \\ p_4 &= \frac{2\pi}{L_t} n_4 + \frac{\pi}{L_t}, \quad n_4 = 0, \dots, L_t - 1. \end{aligned}$$

Здесь m и μ_5 - это масса и киральный химический потенциал в решеточных единицах, α, β являются цветовыми индексами, суммирование происходит по всем возможным значениям (n_1, n_2, n_3, n_4) и $s = \pm 1$.

В пределе $L_s, L_t \rightarrow \infty$ киральный конденсат, нормированный на один фермионный аромат, может быть записан в следующем виде

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{1}{16} \text{Tr}[S(x, x)] = \frac{m}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_s \frac{1}{\sin^2(p_0) + (|p| - s\mu_5)^2 + m^2}. \quad (\text{A.2})$$

Для вычисления интеграла в формуле (A.2) будет использован стандартный

метод, в котором разделяется основная расходимость и остальная часть интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_s \frac{1}{\sin^2(p_0) + (|p| - s\mu_5)^2 + m^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2}{\sin^2(p_0) + |p|^2 + m^2} + \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_s \left(\frac{1}{\sin^2(p_0) + (|p| - s\mu_5)^2 + m^2} - \frac{1}{\sin^2(p_0) + |p|^2 + m^2} \right).$$

Первое слагаемое в этом выражение представляет собой обыкновенный петлевой интеграл для $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ без кирального химического потенциала. Выражение для этого интеграла в непрерывном пределе $a \rightarrow 0$ может быть найдено в [154]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sin^2(p_0) + |p|^2 + m^2} = 0.619734 + m^2 \left(\frac{\log(m^2)}{\pi^2} - 0.345071 \right) + O(m^4). \quad (\text{A.4})$$

Второе слагаемое в (A.3) пропорционально μ_5^2 и содержит логарифмическую расходимость в непрерывном пределе. Эта расходимость может быть вычислена методом перевала. Для вычисления второго слагаемого в (A.3) необходимо также вычесть основную расходимость и вычислить оставшуюся часть интеграла в пределе $a \rightarrow 0$. Результат вычисления может быть записан в следующем виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_s \left(\frac{1}{\sin^2(p_0) + (|p| - s\mu_5)^2 + m^2} - \frac{1}{\sin^2(p_0) + |p|^2 + m^2} \right) =$$

$$= \mu_5^2 \left(-4 \frac{\log(m^2)}{\pi^2} + 0.671036 \right) + O(m^4, \mu_5^2 m^2, \mu_5^4). \quad (\text{A.5})$$

Последняя формула была также проверена численно. Вводя массу $m_p a = m$ и киральный химический потенциал $\mu_5^p a = \mu_5$ в физических единицах, можно переписать выражения для конденсата

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_p = 0.309867 \frac{m_p}{a^2} + m_p^3 \left(\frac{\log(m_p a)}{\pi^2} - 0.172536 \right) + m_p (\mu_5^p)^2 \left(-2 \frac{\log(m_p a)}{\pi^2} + 0.167759 \right) \quad (\text{A.6})$$

Последняя формула показывает, что в одной петле теории возмущений введение ненулевого кирального химического потенциала приводит к дополнительным логарифмическим расходимостям. По всей видимости, это утверждение верно и при учете радиационных поправок в формуле (A.6). Чтобы это увидеть, необходимо рассмотреть диаграммы Фейнмана, которые приводит к радиационным поправкам в формуле (A.6). Разложение одной такой диаграммы по степеням μ_5 может быть сведено к добавлению к диаграмме оператора размерности 3, который уменьшает степень расходимости на единицу для каждой степени μ_5 . Разложение кирального конденсата по степеням μ_5 содержит только четные степени. Основная расходимость в киральном конденсате $\sim 1/a^2$, таким образом, степень расходимости в следующем порядке по μ_5 на две степени ниже, чем $\sim 1/a^2$, то есть расходимость может быть не более логарифмической.

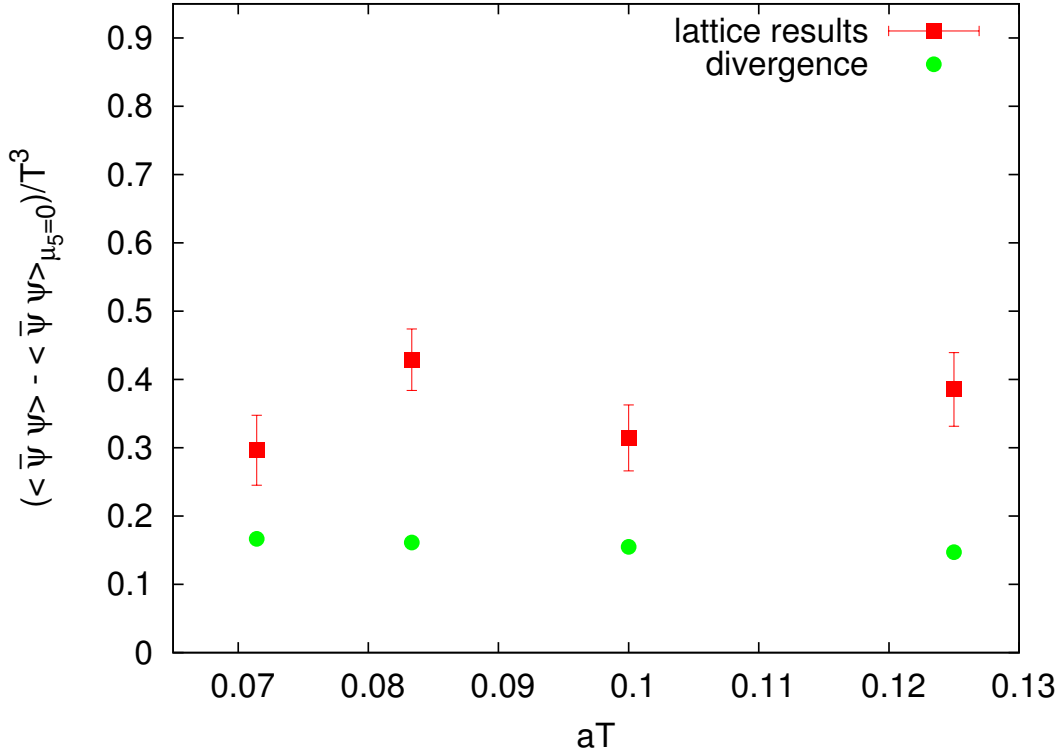


Рис. А.1: Разность кирального конденсата при $\mu_5 = 0$ МэВ и $\mu_5 = 330$ МэВ для различных шагов решетки ($T = 270$ МэВ). Квадратные символы соответствуют решеточным измерениям, круглые точки соответствуют вкладу от логарифмической расходимости (А.6) в разность.

Важно понять, как дополнительная расходимость, связанная с ненулевым μ_5 влияет на представленные результаты расчетов. Для этой оценки была зафиксирована температура $T = 270$ МэВ, масса кварков $m_p = 33$ МэВ и измерен киральный конденсат $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ в фазе деконфайнмента для $\mu_5 = 0$ и $\mu_5 = 330$ МэВ для различных значений шага решетки a . В частности, были рассмотрены следующие решеточные параметры: $16^3 \times 8$ $\beta = 1.9500$, $20^3 \times 10$ $\beta = 2.0047$, $24^3 \times 12$ $\beta = 2.0493$ и $28^3 \times 14$ $\beta = 2.0870$. Разность между измеренным киральным конденсатом при нулевом и ненулевом значении μ_5 для разных шагов решетки показана на Рис. А.1. Кроме решеточных результатов, на Рис. А.1 изображен вклад логарифмической расходимости (А.6) в разность $\langle \bar{\psi} \psi \rangle - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\mu_5=0}$.

На Рис. А.1 видно, что погрешность расчетов не позволяет подтвердить то, что расходимость является логарифмической. Тем не менее, изменение решеточных результатов при изменении шага решетки достаточно медленное, что позволяет сделать предположение, что других расходимостей, кроме логарифмической, нет. Стоит отметить, что величина логарифмического вклада от $\mu_5 \neq 0$ в киральный конденсат, полученного в пертурбативном разложении до одной петли, в 2-3 раза меньше решеточных результатов. Это отличие может быть связано с эффектами ненулевой температуры или радиационными поправками. Этот факт позволяет сделать вывод, что эффект перенормировки выражения для логарифмической расходимости в одной петле (А.6) не очень

большой. То есть это выражение можно использовать для оценки ультрафиолетовой логарифмической расходимости в фазе конфайнмента.

Вычисление показывает, что характерные значения разности $\langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu_5=0}$ в фазе конфайнмента для различных используемых значений решеточных параметров приблизительно на один порядок больше, чем дополнительная логарифмическая расходимость из-за $\mu_5 \neq 0$, которую была оценена по формуле (А.6). Например, на Рис. 4.1 видно, что при температуре $T = 200$ МэВ (близко к фазовому переходу при $\mu_5 = 0$) разность $(\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu_5=300\text{MeV}} - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu_5=0})/T^3 \approx 2$. В тоже время дополнительная ультрафиолетовая расходимость в соответствии с формулой (А.6) равна $(\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{add})/T^3 \approx 0.1$. Стоит отметить, что положение фазового перехода определяется как пик в восприимчивости. Очевидно, что дополнительная ультрафиолетовая расходимость не приводит к пику в восприимчивости. Все это позволяет заключить, что на основные результаты дополнительная ультрафиолетовая расходимость при $\mu_5 \neq 0$ не влияет.

А.2 Вильсоновские фермионы

Фермионный пропагатор для вильсоновских фермионов с учетом кирального химического потенциала может быть записан в следующей форме

$$\begin{aligned}
S^{\alpha\beta}(x, y) &= \frac{\delta^{\alpha\beta}}{L_t L_s^3} \sum_{\{k\}} \sum_{s=\pm 1} e^{ip(x-y)} \times \\
&\times \frac{m + \frac{\hat{k}^2}{2} - i \sum_{i=1}^3 \gamma_i \sin k_i - i \gamma_4 \sin k_4 \text{ch } \mu_5 - \cos k_4 \text{sh } \mu_5 \gamma_4 \gamma_5}{\left(m + \frac{\hat{k}^2}{2}\right)^2 + \sin^2 k_4 \text{ch}^2 \mu_5 + (|\bar{\mathbf{k}}| + s \cos k_4 \text{sh } \mu_5)^2} P(s), \\
P(s) &= \frac{1}{2} \left(1 - i s \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i \sin k_i}{|\bar{\mathbf{k}}|} \gamma_4 \gamma_5 \right), \\
\bar{k}_\mu &= \sin k_\mu, \mu = 1, 2, 3, 4, \\
|\bar{\mathbf{k}}| &= \sqrt{\sin^2 k_1 + \sin^2 k_2 + \sin^2 k_3}, \\
\hat{k}_\mu &= 2 \sin(k_\mu/2), \mu = 1, 2, 3, 4, \\
\hat{k}^2 &= \sum_{\mu=1}^4 \hat{k}_\mu^2, \\
k_i &= \frac{2\pi}{L_s} n_i, i = 1, 2, 3, n_i = 0, \dots, L_s - 1, \\
k_4 &= \frac{2\pi}{L_t} n_4 + \frac{\pi}{L_t}, n_4 = 0, \dots, L_t - 1.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Здесь m и μ_5 обозначают массу и киральный химический потенциал в решеточных единицах, α, β - цветовые индексы, сумма берется по всем возможным значениям (n_1, n_2, n_3, n_4) . Соотношение между массой m и параметром перескока κ в данном случае имеет вид $\kappa = \frac{1}{2m+8}$.

В пределе $L_s, L_t \rightarrow \infty$ конденсат может быть записан

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= Tr[S(x, x)] = 6 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \sum_{s=\pm 1} \frac{m + \frac{\hat{k}^2}{2}}{(m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sin^2 k_4 \operatorname{ch}^2 \mu_5 + (|\bar{\mathbf{k}}| + s \cos k_4 \operatorname{sh} \mu_5)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Для вычисления интеграла в формуле (A.8) будет использован алгебраический метод, описанный в [155, 154]. Разложение в ряд Тейлора по μ_5 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{m + \frac{\hat{k}^2}{2}}{(m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2} + \right. \\ &\left. \mu_5^2 \left(-\frac{2(m + \frac{\hat{k}^2}{2})}{\left((m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2 \right)^2} + \frac{8 \cos^2 k_4 |\bar{\mathbf{k}}|^2 (m + \frac{\hat{k}^2}{2})}{\left((m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2 \right)^3} \right) \right] + O(\mu_5^4) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует петлевому интегралу для $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ без кирального химического потенциала. Выражение для этого интеграла в пределе $a \rightarrow 0$ может быть записано в следующей форме

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m + \frac{\hat{k}^2}{2}}{(m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2} &= c_0 + c_1 m + c_2 m^2 + m^3 \left(\frac{\log m^2}{8\pi^2} + c_3 \right) + O(m^4) \\ c_0 &= 0.469363, \quad c_1 = -0.067967, \quad c_2 = -0.023613, \quad c_3 = -0.075829. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Второе слагаемое в (A.9) можно вычислить аналогичным образом. В результате получится следующее выражение

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{2(m + \frac{\hat{k}^2}{2})}{\left((m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2 \right)^2} + \frac{8 \cos^2 k_4 |\bar{\mathbf{k}}|^2 (m + \frac{\hat{k}^2}{2})}{\left((m + \frac{\hat{k}^2}{2})^2 + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu}^2 \right)^3} \right) &= c_4 + m \left(-\frac{\log m^2}{4\pi^2} + c_5 \right) + \\ &+ O(m^2) \\ c_4 &= -0.010738, \quad c_5 = 0.045999. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Последние две формулы можно проверить численно. Восстанавливая шаг решетки в представленных результатах

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= \frac{6c_0}{a^3} + \frac{6c_1 m}{a^2} + \frac{6c_2 m^2}{a} + m^3 \left(\frac{3 \log(ma)}{2\pi^2} + 6c_3 \right) + \\ &+ \frac{6c_4 \mu_5^2}{a} + \mu_5^2 m \left(-\frac{3 \log(ma)}{\pi^2} + 6c_5 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Первая строчка в формуле (A.12) соответствует киральному конденсату без кирального химического потенциала, в то время как вторая строчка представляет собой

вклад от ненулевого μ_5 . Видно, что есть дополнительная логарифмическая расходимость из-за $\mu_5 \neq 0$. Эта же расходимость с таким же коэффициентом возникала и в случае «staggered» фермионов. Тем не менее, есть также и линейная расходимость $\sim \mu_5^2/a$, которая отсутствует для «staggered» фермионов. По всей видимости, эта линейная расходимость в киральном конденсате возникает из-за явного нарушения киральной симметрии вильсоновскими фермионами. Стоит отметить, что коэффициент перед линейной расходимостью отрицательный. Таким образом, киральный химический потенциал приводит к уменьшению кирального конденсата, что видно на Рис. 4.11.

Приложение В

Ультрафиолетовые расходимости в петле Полякова при ненулевом киральном химическом потенциале

В первом порядке разложения по константе сильного взаимодействия g петля Полякова может быть записана в следующей форме

$$L = 1 - \beta \frac{g^2}{4} \int_0^\beta d\tau D_{00}^{aa}(\tau, \vec{0}) = 1 - \beta \frac{g^2}{4} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{D}_{00}^{aa}(0, \vec{q}), \quad (\text{B.1})$$

где $D_{00}^{ab}(t, \vec{x})$ и $\tilde{D}_{00}^{aa}(q_0, \vec{q})$ обозначают пропагатор временной компоненты глюонного поля в пространстве координат и импульсов соответственно. β - это обратная температура, и предполагается суммирование по цветовым индексам a . Уравнение (B.1) явно показывает, что дополнительные расходимости, связанные с ненулевым μ_5 , в одно-петлевом приближении могут появиться из вклада фермионной части собственной энергии в глюонный пропагатор. Изучение расходимостей в части пропагатора, соответствующей собственной энергии, в решеточной теории является довольно громоздкой задачей, поэтому для изучения расходимостей в петле Полякова будет использована схема регуляризации с обрезанием по импульсам.

Фермионный вклад в одной петле в собственную энергию глюонного пропагатора \tilde{D}_{00}^{ab} может быть записан в следующей форме

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(\vec{q}) = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k_0^2 + (\mu_5 - s_1|\vec{k}|)(\mu_5 - s_2|\vec{k} + \vec{q}|) + m^2}{(k_0^2 + (|\vec{k}| - s_1\mu_5)^2 + m^2)(k_0^2 + (|\vec{k} + \vec{q}| - s_2\mu_5)^2 + m^2)} \times \\ \times \left(1 + s_1 s_2 \frac{\vec{k} \cdot (\vec{k} + \vec{q})}{|\vec{k}| |\vec{k} + \vec{q}|} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где \vec{q} - внешний импульс, $s_1, s_2 = \pm 1$.

Для дальнейших расчетов необходимо разложить (B.2) по степеням μ_5^2 . Очевидно, что каждый следующий член в этом разложении уменьшает степень расходимости

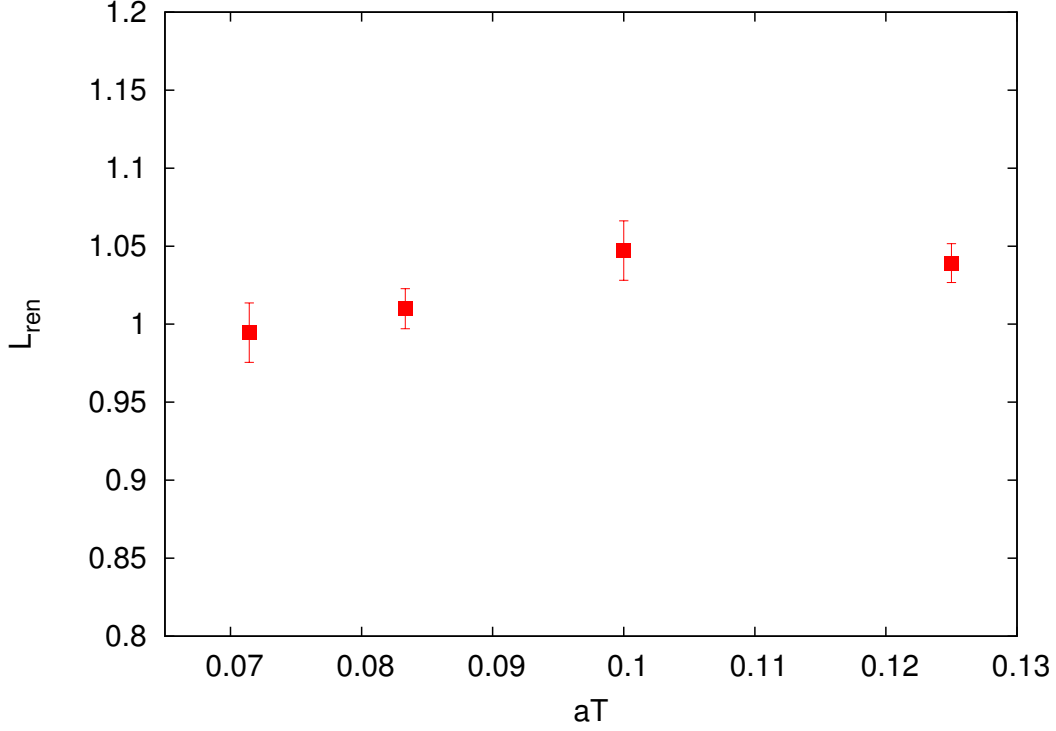


Рис. В.1: Перенормированная петля Полякова (В.4) в зависимости от шага решетки ($T = 270$ МэВ).

на два. Это означает, что, начиная со слагаемого μ_5^4 , все члены ряда является ультрафиолетово сходящимися. Первое слагаемое ($\Pi_{00}(\vec{q})|_{\mu_5=0}$) является просто выражением для собственной энергии без кирального химического потенциала. Итак, чтобы вычислить расходимость, связанную с ненулевым киральным химическим потенциалом, необходимо рассмотреть только расходимость во втором члене. Производная выражения (В.2) по μ_5^2 имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(\vec{q}) - \Pi_{00}(\vec{q})|_{\mu_5=0} = 4\mu_5^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} & \left(\frac{1}{(k_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2)(k_0^2 + |\vec{k} + \vec{q}|^2 + m^2)} - \right. \\ & - \frac{2m^2 + 4|k + q|^2 + 6\vec{k} \cdot (\vec{k} + \vec{q}) - 2k_0^2}{(k_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2)^2(k_0^2 + |\vec{k} + \vec{q}|^2 + m^2)} + \frac{8|\vec{k}|^2(m^2 + \vec{k} \cdot (\vec{k} + \vec{q}) - k_0^2)}{(k_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2)^3(k_0^2 + |\vec{k} + \vec{q}|^2 + m^2)} + \\ & \left. + \frac{4(m^2 - k_0^2)(\vec{k} \cdot (\vec{k} + \vec{q})) + 4|\vec{k}|^2|\vec{k} + \vec{q}|^2}{(k_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2)^2(k_0^2 + |\vec{k} + \vec{q}|^2 + m^2)^2} \right) + O(\mu_5^4) \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

Можно легко проверить, что это выражение не содержит ультрафиолетовых расходимостей. Более того, вычисление показывает, что при больших \vec{q}^2 выражение (В.3) ведет себя как $\Pi_{00}(\vec{q}) - \Pi_{00}(\vec{q})|_{\mu_5=0} \sim \mu_5^2(c_1 \log \vec{q}^2 + c_2)$, где c_1, c_2 - некоторые константы. Итак, в однопетлевом приближении дополнительных расходимостей в петле Полякова, связанных с киральным химическим потенциалом, нет. Аналогично описанному в предыдущей части способу можно показать, что нет дополнительных вкладов от $\mu_5 \neq 0$ в ультрафиолетовые расходимости в петле Полякова и в следующих порядках.

Чтобы численно изучить роль расходимостей в петле Полякова, возникающих из-за ненулевого кирального химического потенциала, было использовано следующее определение перенормированной петли Полякова

$$L_{ren} = \frac{L}{L_{\mu_5=0}}, \quad (\text{B.4})$$

где L - это петля Полякова, а $L_{\mu_5=0}$ - петля Полякова на решетке того же размера, но при $\mu_5 = 0$. Очевидно, что L_{ren} не содержит расходимостей, возникающих при вычислениях с нулевым киральным химическим потенциалом. По аналогии с предыдущими расчетами было зафиксировано физическое значение температуры $T = 270$ МэВ, массы кварка $m_p = 33$ МэВ и измерена величина L_{ren} в фазе деконфайнмента для $\mu_5 = 330$ МэВ и различных значений шага решетки a в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и 4 ароматами «staggered» фермионов. Результат этого вычисления показан на Рис. В.1.

На этом графике явно видно, что поведение перенормированной петли Полякова L_{ren} может быть описано постоянной функцией (не зависящей от шага решетки) для рассмотренных параметров системы. В то же время, неперенормированная петля Полякова меняется на рассмотренных данных в два раза. Эти наблюдения позволяют заключить, что дополнительные ультрафиолетовые расходимости в петле Полякова из-за ненулевого кирального химического конденсата отсутствуют.

Литература

- [1] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [2] S. Durr et al. Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science*, 322:1224–1227, 2008.
- [3] Holger Bech Nielsen and M. Ninomiya. No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions. *Phys. Lett.*, B105:219, 1981.
- [4] B. Sheikholeslami and R. Wohlert. Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions. *Nucl. Phys.*, B259:572, 1985.
- [5] Leonard Susskind. Lattice Fermions. *Phys. Rev.*, D16:3031–3039, 1977.
- [6] Maarten Golterman. QCD with rooted staggered fermions. *PoS, CONFINEMENT8*:014, 2008.
- [7] Paul H. Ginsparg and Kenneth G. Wilson. A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice. *Phys. Rev.*, D25:2649, 1982.
- [8] Martin Luscher. Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation. *Phys. Lett.*, B428:342–345, 1998.
- [9] Peter Hasenfratz, Victor Laliena, and Ferenc Niedermayer. The Index theorem in QCD with a finite cutoff. *Phys. Lett.*, B427:125–131, 1998.
- [10] Herbert Neuberger. Exactly massless quarks on the lattice. *Phys. Lett.*, B417:141–144, 1998.
- [11] I. Montvay and G. Munster. *Quantum fields on a lattice*. Cambridge University Press, 1997.
- [12] R. P. Feynman. Atomic Theory of the λ Transition in Helium. *Phys. Rev.*, 91:1291–1301, 1953.
- [13] A. Bazavov et al. The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition. *Phys. Rev.*, D85:054503, 2012.
- [14] Szabolcs Borsanyi, Zoltan Fodor, Christian Hoelbling, Sandor D. Katz, Stefan Krieg, and Kalman K. Szabo. Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors. *Phys. Lett.*, B730:99–104, 2014.

- [15] A. Bazavov et al. Equation of state in (2+1)-flavor QCD. *Phys. Rev.*, D90:094503, 2014.
- [16] P. Hasenfratz and F. Karsch. Chemical Potential on the Lattice. *Phys. Lett.*, B125:308, 1983.
- [17] Gert Aarts, Frank A. James, Erhard Seiler, and Ion-Olimpiu Stamatescu. Complex Langevin: Etiology and Diagnostics of its Main Problem. *Eur. Phys. J.*, C71:1756, 2011.
- [18] Gert Aarts, Lorenzo Bongiovanni, Erhard Seiler, Denes Sexty, and Ion-Olimpiu Stamatescu. Controlling complex Langevin dynamics at finite density. *Eur. Phys. J.*, A49:89, 2013.
- [19] Dénes Sexty. New algorithms for finite density QCD. *PoS, LATTICE2014:016*, 2014.
- [20] Marco Cristoforetti, Francesco Di Renzo, and Luigi Scorzato. New approach to the sign problem in quantum field theories: High density QCD on a Lefschetz thimble. *Phys. Rev.*, D86:074506, 2012.
- [21] H. Fujii, D. Honda, M. Kato, Y. Kikukawa, S. Komatsu, and T. Sano. Hybrid Monte Carlo on Lefschetz thimbles - A study of the residual sign problem. *JHEP*, 10:147, 2013.
- [22] M. Cristoforetti, F. Di Renzo, G. Erucci, A. Mukherjee, C. Schmidt, L. Scorzato, and C. Torrero. An efficient method to compute the residual phase on a Lefschetz thimble. *Phys. Rev.*, D89(11):114505, 2014.
- [23] Rajiv V. Gavai and Sourendu Gupta. Pressure and nonlinear susceptibilities in QCD at finite chemical potentials. *Phys. Rev.*, D68:034506, 2003.
- [24] C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, and C. Schmidt. The Equation of state for two flavor QCD at nonzero chemical potential. *Phys. Rev.*, D68:014507, 2003.
- [25] Ryutaro Fukuda, Atsushi Nakamura, and Shotaro Oka. Canonical approach to finite density QCD with multiple precision computation. 2015.
- [26] Atsushi Nakamura. Quarks and Gluons at Finite Temperature and Density. *Phys. Lett.*, B149:391, 1984.
- [27] Dmitri Kharzeev. Parity violation in hot QCD: Why it can happen, and how to look for it. *Phys. Lett.*, B633:260–264, 2006.
- [28] Kenji Fukushima, Dmitri E. Kharzeev, and Harmen J. Warringa. The Chiral Magnetic Effect. *Phys. Rev.*, D78:074033, 2008.
- [29] Qiang Li, Dmitri E. Kharzeev, Cheng Zhang, Yuan Huang, I. Pletikosic, A. V. Fedorov, R. D. Zhong, J. A. Schneeloch, G. D. Gu, and T. Valla. Observation of the chiral magnetic effect in ZrTe5. 2014.

- [30] Xiaochun Huang, Lingxiao Zhao, Yujia Long, Peipei Wang, Dong Chen, Zhanhai Yang, Hui Liang, Mianqi Xue, Hongming Weng, Zhong Fang, Xi Dai, and Genfu Chen. Observation of the chiral-anomaly-induced negative magnetoresistance in 3d weyl semimetal taas. *Phys. Rev. X*, 5:031023, Aug 2015.
- [31] James Charbonneau and Ariel Zhitnitsky. Topological Currents in Neutron Stars: Kicks, Precession, Toroidal Fields, and Magnetic Helicity. *JCAP*, 1008:010, 2010.
- [32] Akira Ohnishi and Naoki Yamamoto. Magnetars and the Chiral Plasma Instabilities. 2014.
- [33] Bin Wang, Yong-Long Wang, Zhu-Fang Cui, and Hong-Shi Zong. Effect of the chiral chemical potential on the position of the critical endpoint. *Phys. Rev.*, D91(3):034017, 2015.
- [34] Shu-Sheng Xu, Zhu-Fang Cui, Bin Wang, Yuan-Mei Shi, You-Chang Yang, and Hong-Shi Zong. Chiral phase transition with a chiral chemical potential in the framework of Dyson-Schwinger equations. *Phys. Rev.*, D91(5):056003, 2015.
- [35] Kenji Fukushima, Marco Ruggieri, and Raoul Gatto. Chiral magnetic effect in the PNJL model. *Phys. Rev.*, D81:114031, 2010.
- [36] M. N. Chernodub and A. S. Nedelin. Phase diagram of chirally imbalanced QCD matter. *Phys. Rev.*, D83:105008, 2011.
- [37] Raoul Gatto and Marco Ruggieri. Hot Quark Matter with an Axial Chemical Potential. *Phys. Rev.*, D85:054013, 2012.
- [38] Alexander A. Andrianov, Domenec Espriu, and Xumeu Planells. An effective QCD Lagrangian in the presence of an axial chemical potential. *Eur. Phys. J.*, C73(1):2294, 2013.
- [39] Alexander A. Andrianov, Domenec Espriu, and Xumeu Planells. Chemical potentials and parity breaking: the Nambu-Jona-Lasinio model. *Eur. Phys. J.*, C74(2):2776, 2014.
- [40] Jingyi Chao, Pengcheng Chu, and Mei Huang. Inverse magnetic catalysis induced by sphalerons. *Phys. Rev.*, D88:054009, 2013.
- [41] Lang Yu, Hao Liu, and Mei Huang. The effect of the chiral chemical potential on the chiral phase transition in the NJL model with different regularization schemes. 2015.
- [42] Masanori Hanada and Naoki Yamamoto. Universality of phase diagrams in QCD and QCD-like theories. *PoS*, LATTICE2011:221, 2011.
- [43] Arata Yamamoto. Chiral magnetic effect in lattice QCD with a chiral chemical potential. *Phys. Rev. Lett.*, 107:031601, 2011.
- [44] Arata Yamamoto. Lattice study of the chiral magnetic effect in a chirally imbalanced matter. *Phys. Rev.*, D84:114504, 2011.

- [45] A. Vilenkin. EQUILIBRIUM PARITY VIOLATING CURRENT IN A MAGNETIC FIELD. *Phys. Rev.*, D22:3080–3084, 1980.
- [46] B. I. Abelev et al. Azimuthal Charged-Particle Correlations and Possible Local Strong Parity Violation. *Phys. Rev. Lett.*, 103:251601, 2009.
- [47] B. I. Abelev et al. Observation of charge-dependent azimuthal correlations and possible local strong parity violation in heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C81:054908, 2010.
- [48] Igor A. Shovkovy. Magnetic Catalysis: A Review. *Lect. Notes Phys.*, 871:13–49, 2013.
- [49] Falk Bruckmann, Gergely Endrodi, and Tamas G. Kovacs. Inverse magnetic catalysis in QCD. 2013.
- [50] Niklas Mueller and Jan M. Pawłowski. Magnetic catalysis and inverse magnetic catalysis in QCD. *Phys. Rev.*, D91(11):116010, 2015.
- [51] Ana Julia Mizher, M. N. Chernodub, and Eduardo S. Fraga. Phase diagram of hot QCD in an external magnetic field: possible splitting of deconfinement and chiral transitions. *Phys. Rev.*, D82:105016, 2010.
- [52] M. H. Al-Hashimi and U. J. Wiese. Discrete Accidental Symmetry for a Particle in a Constant Magnetic Field on a Torus. *Annals Phys.*, 324:343–360, 2009.
- [53] V. V. Braguta, P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, A. Yu. Kotov, and M. I. Polikarpov. Electromagnetic superconductivity of vacuum induced by strong magnetic field: numerical evidence in lattice gauge theory. *Phys. Lett.*, B718:667–671, 2012.
- [54] V. V. Braguta, P. V. Buividovich, M. Chernodub, M. I. Polikarpov, and A. Yu. Kotov. Vortex liquid in magnetic-field-induced superconducting vacuum of quenched lattice QCD. *PoS, ConfinementX*:083, 2012.
- [55] V. V. Braguta, P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, A. Y. Kotov, and M. I. Polikarpov. Vortex liquid in the superconducting vacuum of the quenched QCD induced by strong magnetic field. *PoS, LATTICE2013*:362, 2014.
- [56] V. V. Braguta, A. Yu. Kotov, A. A. Nikolaev, and S. N. Valgushev. Lattice simulation study of SU(2) QCD with a nonzero baryon density. *JETP Lett.*, 101(11):732–734, 2015. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.101,no.11,827–829(2015)].
- [57] V. V. Braguta, E. M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, M. Müller-Preussker, B. Petersson, and A. Schreiber. Two-Color QCD with Chiral Chemical Potential. *PoS, LATTICE2014*:235, 2015.
- [58] V. V. Braguta, V. A. Goi, M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, A. V. Molochkov, and M. Müller-Preussker. Study of the phase diagram of SU(2) quantum chromodynamics with nonzero chirality. *JETP Lett.*, 100(9):547–549, 2015. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.100,no.9,623(2015)].

- [59] V. V. Braguta, V. A. Goy, E. M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, A. V. Molochkov, M. Muller-Preussker, and B. Petersson. Two-Color QCD with Non-zero Chiral Chemical Potential. *JHEP*, 06:094, 2015.
- [60] V. V. Braguta, E. M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, B. Petersson, and S. A. Skinderev. Study of QCD Phase Diagram with Non-Zero Chiral Chemical Potential. 2015.
- [61] V. V. Braguta and A. Yu. Kotov. Catalysis of Dynamical Chiral Symmetry Breaking by Chiral Chemical Potential. 2016.
- [62] V.V. Braguta and A.Yu. Kotov. Calculation of the viscosity of su(2) gluodynamics with the lattice simulation. *JETP Letters*, 98(3):127–129, 2013.
- [63] V. V. Braguta and A. Yu. Kotov. Shear viscosity in SU(2) lattice gluodynamics. *J. Phys. Conf. Ser.*, 607(1):012019, 2015.
- [64] N. Yu. Astrakhantsev, V. V. Braguta, and A. Yu. Kotov. Study of shear viscosity of SU(2)-gluodynamics within lattice simulation. *JHEP*, 09:082, 2015.
- [65] V. V. Braguta and A. Yu. Kotov. Correlations of Abelian monopoles in quark-gluon plasma. *Phys. Rev.*, D86:014511, 2012.
- [66] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. The Effects of topological charge change in heavy ion collisions: 'Event by event P and CP violation'. *Nucl. Phys.*, A803:227–253, 2008.
- [67] K. G. Klimenko. Three-dimensional Gross-Neveu model at nonzero temperature and in an external magnetic field. *Z. Phys.*, C54:323–330, 1992.
- [68] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in (2+1)-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3499–3502, 1994. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 76,1005(1996)].
- [69] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy. Magnetic catalysis and anisotropic confinement in QCD. *Phys. Rev.*, D66:045006, 2002.
- [70] Efrain J. Ferrer and Vivian de la Incera. Dynamically Induced Zeeman Effect in Massless QED. *Phys. Rev. Lett.*, 102:050402, 2009.
- [71] Massimo D'Elia and Francesco Negro. Chiral Properties of Strong Interactions in a Magnetic Background. *Phys. Rev.*, D83:114028, 2011.
- [72] Massimo D'Elia, Swagato Mukherjee, and Francesco Sanfilippo. QCD Phase Transition in a Strong Magnetic Background. *Phys. Rev.*, D82:051501, 2010.
- [73] Raoul Gatto and Marco Ruggieri. Dressed Polyakov loop and phase diagram of hot quark matter under magnetic field. *Phys. Rev.*, D82:054027, 2010.
- [74] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schafer, and K. K. Szabo. The QCD phase diagram for external magnetic fields. *JHEP*, 02:044, 2012.

- [75] P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, D. E. Kharzeev, T. Kalaydzhyan, E. V. Luschevskaya, and M. I. Polikarpov. Magnetic-Field-Induced insulator-conductor transition in SU(2) quenched lattice gauge theory. *Phys. Rev. Lett.*, 105:132001, 2010.
- [76] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov. Quark mass dependence of the vacuum electric conductivity induced by the magnetic field in SU(2) lattice gluodynamics. *Phys. Rev.*, D83:094508, 2011.
- [77] M. N. Chernodub. Superconductivity of QCD vacuum in strong magnetic field. *Phys. Rev.*, D82:085011, 2010.
- [78] M. N. Chernodub. Spontaneous electromagnetic superconductivity of vacuum in strong magnetic field: evidence from the Nambu–Jona-Lasinio model. *Phys. Rev. Lett.*, 106:142003, 2011.
- [79] N. Callebaut, D. Dudal, and H. Verschelde. Holographic rho mesons in an external magnetic field. *JHEP*, 03:033, 2013.
- [80] P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, E. V. Luschevskaya, and M. I. Polikarpov. Numerical evidence of chiral magnetic effect in lattice gauge theory. *Phys. Rev.*, D80:054503, 2009.
- [81] Thomas A. DeGrand and Anna Hasenfratz. Low lying fermion modes, topology and light hadrons in quenched QCD. *Phys. Rev.*, D64:034512, 2001.
- [82] Ronald Babich, Federico Berruto, Nicolas Garron, Christian Hoelbling, Joseph Howard, Laurent Lellouch, Claudio Rebbi, and Noam Shoresh. Light hadron spectroscopy in quenched QCD with overlap fermions. *PoS*, LAT2005:043, 2006.
- [83] Chris Stewart and Roman Koniuk. Hadronic molecules in lattice QCD. *Phys. Rev.*, D57:5581–5585, 1998.
- [84] M. N. Chernodub, Jos Van Doorselaere, and Henri Verschelde. Electromagnetically superconducting phase of vacuum in strong magnetic field: structure of superconductor and superfluid vortex lattices in the ground state. *Phys. Rev.*, D85:045002, 2012.
- [85] Takahiro Makiyama, Yuji Sakai, Takuya Saito, Masahiro Ishii, Junichi Takahashi, Kouji Kashiwa, Hiroaki Kouno, Atsushi Nakamura, and Masanobu Yahiro. Phase structure of two-color QCD at real and imaginary chemical potentials; lattice simulations and model analyses. 2015.
- [86] Seamus Cotter, Pietro Giudice, Simon Hands, and Jon-Ivar Skullerud. Towards the phase diagram of dense two-color matter. *Phys. Rev.*, D87(3):034507, 2013.
- [87] Seamus Cotter, Jon-Ivar Skullerud, Pietro Giudice, Simon Hands, Seyong Kim, and Dhagash Mehta. Phase structure of QC2D at high temperature and density. *PoS*, LATTICE2012:091, 2012.
- [88] Christof Gattringer and Christian B. Lang. Quantum chromodynamics on the lattice. *Lect. Notes Phys.*, 788:1–343, 2010.

- [89] H. J. Rothe. Lattice gauge theories: An Introduction. *World Sci. Lect. Notes Phys.*, 43:1–381, 1992. [World Sci. Lect. Notes Phys.82,1(2012)].
- [90] John B. Kogut, Dominique Toublan, and D. K. Sinclair. The Phase diagram of four flavor SU(2) lattice gauge theory at nonzero chemical potential and temperature. *Nucl. Phys.*, B642:181–209, 2002.
- [91] Simon Hands, John B. Kogut, Maria-Paola Lombardo, and Susan E. Morrison. Symmetries and spectrum of SU(2) lattice gauge theory at finite chemical potential. *Nucl. Phys.*, B558:327–346, 1999.
- [92] Rajiv V. Gavai and Sayantan Sharma. On curing the divergences in the quark number susceptibility. *PoS, LATTICE2014*:189, 2014.
- [93] M. A. Clark. The Rational Hybrid Monte Carlo Algorithm. *PoS, LAT2006*:004, 2006.
- [94] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin. Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations. *Phys. Lett.*, B59:85–87, 1975.
- [95] Edward Witten. Current Algebra Theorems for the U(1) Goldstone Boson. *Nucl. Phys.*, B156:269, 1979.
- [96] G. Veneziano. U(1) Without Instantons. *Nucl. Phys.*, B159:213–224, 1979.
- [97] Viktor Dick, Frithjof Karsch, Edwin Laermann, Swagato Mukherjee, and Sayantan Sharma. Microscopic origin of $U_A(1)$ symmetry violation in the high temperature phase of QCD. *Phys. Rev.*, D91(9):094504, 2015.
- [98] Thomas C. Kraan and Pierre van Baal. Periodic instantons with nontrivial holonomy. *Nucl. Phys.*, B533:627–659, 1998.
- [99] Ki-Myeong Lee and Chang-hai Lu. SU(2) calorons and magnetic monopoles. *Phys. Rev.*, D58:025011, 1998.
- [100] E. M. Ilgenfritz, B. V. Martemyanov, and M. Müller-Preussker. Topology near the transition temperature in lattice gluodynamics analyzed by low lying modes of the overlap Dirac operator. *Phys. Rev.*, D89(5):054503, 2014.
- [101] V. G. Bornyakov, E. M. Ilgenfritz, B. V. Martemyanov, and M. Muller-Preussker. Dyon structures in the deconfinement phase of lattice gluodynamics: topological clusters, holonomies and Abelian monopoles. *Phys. Rev.*, D91(7):074505, 2015.
- [102] D. Kharzeev, A. Krasnitz, and R. Venugopalan. Anomalous chirality fluctuations in the initial stage of heavy ion collisions and parity odd bubbles. *Phys. Lett.*, B545:298–306, 2002.
- [103] L. Adamczyk et al. Beam-energy dependence of charge separation along the magnetic field in Au+Au collisions at RHIC. *Phys. Rev. Lett.*, 113:052302, 2014.

- [104] Massimo D’Elia. Lattice QCD Simulations in External Background Fields. *Lect. Notes Phys.*, 871:181–208, 2013.
- [105] Xumei Planells, Alexander A. Andrianov, Vladimir A. Andrianov, and Domenec Espriu. An effective theory for QCD with an axial chemical potential. *PoS, QFTHEP2013:049*, 2013.
- [106] Lang Yu, Hao Liu, and Mei Huang. Spontaneous generation of local CP violation and inverse magnetic catalysis. *Phys. Rev.*, D90(7):074009, 2014.
- [107] H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly, and B. Petersson. Flavors of Lagrangian Susskind Fermions. *Nucl. Phys.*, B220:447, 1983.
- [108] E. M. Ilgenfritz, M. Kalinowski, M. Muller-Preussker, B. Petersson, and A. Schreiber. Two-color QCD with staggered fermions at finite temperature under the influence of a magnetic field. *Phys. Rev.*, D85:114504, 2012.
- [109] Robert D. Pisarski and Frank Wilczek. Remarks on the Chiral Phase Transition in Chromodynamics. *Phys. Rev.*, D29:338–341, 1984.
- [110] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, 1992.
- [111] John Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, 1957.
- [112] John Adams et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nucl. Phys.*, A757:102–183, 2005.
- [113] K. Adcox et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl. Phys.*, A757:184–283, 2005.
- [114] P. F. Kolb, P. Huovinen, Ulrich W. Heinz, and H. Heiselberg. Elliptic flow at SPS and RHIC: From kinetic transport to hydrodynamics. *Phys. Lett.*, B500:232–240, 2001.
- [115] P. Huovinen, P. F. Kolb, Ulrich W. Heinz, P. V. Ruuskanen, and S. A. Voloshin. Radial and elliptic flow at RHIC: Further predictions. *Phys. Lett.*, B503:58–64, 2001.
- [116] D. Teaney, J. Lauret, and Edward V. Shuryak. Flow at the SPS and RHIC as a quark gluon plasma signature. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4783–4786, 2001.
- [117] Derek A. Teaney. *Viscous Hydrodynamics and the Quark Gluon Plasma*. 2009.
- [118] P. Kovtun, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, 94:111601, 2005.
- [119] Peter Brockway Arnold, Guy D Moore, and Laurence G. Yaffe. Transport coefficients in high temperature gauge theories. 2. Beyond leading log. *JHEP*, 05:051, 2003.

- [120] Harvey B. Meyer. A Calculation of the shear viscosity in SU(3) gluodynamics. *Phys. Rev.*, D76:101701, 2007.
- [121] Atsushi Nakamura and Sunao Sakai. Transport coefficients of gluon plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 94:072305, 2005.
- [122] F. Karsch and H. W. Wyld. Thermal Green's Functions and Transport Coefficients on the Lattice. *Phys. Rev.*, D35:2518, 1987.
- [123] Ryogo Kubo. Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems. *J. Phys. Soc. Jap.*, 12:570–586, 1957.
- [124] Harvey B. Meyer. Transport Properties of the Quark-Gluon Plasma: A Lattice QCD Perspective. *Eur. Phys. J.*, A47:86, 2011.
- [125] Harvey B. Meyer. Energy-momentum tensor correlators and spectral functions. *JHEP*, 08:031, 2008.
- [126] Gert Aarts and Jose Maria Martinez Resco. Transport coefficients, spectral functions and the lattice. *JHEP*, 04:053, 2002.
- [127] A. L. Kataev, N. V. Krasnikov, and A. A. Pivovarov. Two Loop Calculations for the Propagators of Gluonic Currents. *Nucl. Phys.*, B198:508–518, 1982. [Erratum: *Nucl. Phys.*B490,505(1997)].
- [128] Harvey B. Meyer and John W. Negele. Gluon contributions to the pion mass and light cone momentum fraction. *Phys. Rev.*, D77:037501, 2008.
- [129] Leonardo Giusti and Michele Pepe. A novel computation of the thermodynamics of the SU(3) Yang-Mills theory. In *Proceedings, 33rd International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2015)*, 2015.
- [130] Christopher Michael. Lattice sum rules for the color fields. *Phys. Rev.*, D53:4102–4105, 1996.
- [131] J. Engels, F. Karsch, and K. Redlich. Scaling properties of the energy density in SU(2) lattice gauge theory. *Nucl. Phys.*, B435:295–310, 1995.
- [132] Harvey B. Meyer. Locality and statistical error reduction on correlation functions. *JHEP*, 01:048, 2003.
- [133] J. Engels, F. Karsch, and T. Scheideler. Determination of anisotropy coefficients for SU(3) gauge actions from the integral and matching methods. *Nucl. Phys.*, B564:303–324, 2000.
- [134] Harvey B. Meyer. A Calculation of the bulk viscosity in SU(3) gluodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 100:162001, 2008.

- [135] Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein, and Valentin I. Zakharov. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations. *Nucl. Phys.*, B147:385–447, 1979.
- [136] Harvey B. Meyer. Cutoff Effects on Energy-Momentum Tensor Correlators in Lattice Gauge Theory. *JHEP*, 06:077, 2009.
- [137] Harvey B. Meyer. Transport properties of the quark-gluon plasma from lattice QCD. *Nucl. Phys.*, A830:641C–648C, 2009.
- [138] Pavel Kovtun and Andrei Starinets. Thermal spectral functions of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Rev. Lett.*, 96:131601, 2006.
- [139] Harvey B. Meyer. Energy-momentum tensor correlators and viscosity. *PoS, LATTICE2008:017*, 2008.
- [140] M. N. Chernodub, H. Verschelde, and V. I. Zakharov. Magnetic component of gluon plasma and its viscosity. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 207-208:325–328, 2010.
- [141] Jinfeng Liao and Edward Shuryak. Magnetic Component of Quark-Gluon Plasma is also a Liquid! *Phys. Rev. Lett.*, 101:162302, 2008.
- [142] Jinfeng Liao and Edward Shuryak. Strongly coupled plasma with electric and magnetic charges. *Phys. Rev.*, C75:054907, 2007.
- [143] M. N. Chernodub and V. I. Zakharov. Magnetic component of Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 98:082002, 2007.
- [144] V. G. Bornyakov, V. K. Mitrjushkin, and M. Muller-Preussker. Deconfinement transition and Abelian monopoles in SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Lett.*, B284:99–105, 1992.
- [145] Shinji Ejiri. Monopoles and spatial string tension in the high temperature phase of SU(2) QCD. *Phys. Lett.*, B376:163–168, 1996.
- [146] Gerard 't Hooft. Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, B190:455, 1981.
- [147] Gerard 't Hooft. The Topological Mechanism for Permanent Quark Confinement in a Nonabelian Gauge Theory. *Phys. Scripta*, 25:133–142, 1982.
- [148] Georges Ripka. Dual superconductor models of color confinement. 2003. [Lect. Notes Phys.639,1(2004)].
- [149] Alessio D’Alessandro and Massimo D’Elia. Magnetic monopoles in the high temperature phase of Yang-Mills theories. *Nucl. Phys.*, B799:241–254, 2008.
- [150] V. G. Bornyakov and V. V. Braguta. Thermal Abelian monopoles as selfdual dyons. *Phys. Rev.*, D84:074502, 2011.
- [151] V. G. Bornyakov and V. V. Braguta. Study of the thermal abelian monopoles with proper gauge fixing. *Phys. Rev.*, D85:014502, 2012.

- [152] V. G. Bornyakov and A. G. Kononenko. Abelian monopoles in finite temperature lattice SU(2) gluodynamics: first study with improved action. *Phys. Rev.*, D86:074508, 2012.
- [153] G. S. Bali, V. Bornyakov, M. Muller-Preussker, and K. Schilling. Dual superconductor scenario of confinement: A Systematic study of Gribov copy effects. *Phys. Rev.*, D54:2863–2875, 1996.
- [154] Stefano Capitani. Lattice perturbation theory. *Phys. Rept.*, 382:113–302, 2003.
- [155] Giuseppe Burgio, Sergio Caracciolo, and Andrea Pelissetto. Algebraic algorithm for the computation of one loop Feynman diagrams in lattice QCD with Wilson fermions. *Nucl. Phys.*, B478:687–722, 1996.