



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

**Артамонов Семён Борисович**

**Изучение пространства плоских связностей в  
теории поля**

Специальность 01.04.02 —  
Теоретическая физика

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

УДК 530.145

Работа выполнена в ФГБУ «ГНЦ РФ Институт Теоретической и Экспериментальной Физики» НИЦ «Курчатовский Институт»

Научный руководитель: **Ольшанецкий Михаил Аронович**  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
ФГБУ «ГНЦ РФ Институт Теоретической и Экспериментальной Физики» НИЦ «Курчатовский Институт».

Официальные оппоненты: **Славнов Никита Андреевич**,  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
Математический Институт им. В.А.Стеклова РАН.

**Семихатов Алексей Михайлович**,  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
Физический Институт им. П.Н.Лебедева РАН.

Ведущая организация: Объединённый Институт Ядерных Исследований (ОИЯИ), г. Дубна.

Защита состоится 22 декабря 2015 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 201.002.01 на базе конференц-зале ФГБУ «ГНЦ РФ-ИТЭФ» по адресу: Москва, ул. Большая Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУ «ГНЦ РФ ИТЭФ» и на сайте [www.iter.ru](http://www.iter.ru).

Автореферат разослан

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.ф.-м.н.

В. В. Васильев

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Теории поля, возникающие на пространстве плоских связностей, являются одним из наиболее динамически развивающихся разделов математической физики. Связность называется плоской, если оператор параллельного переноса (голономия данной связности) сохраняется при гладких деформациях контура. В диссертации изучены примеры полевых теорий, возникающих на пространстве плоских связностей.

В работе рассматриваются два подхода к квантованию плоских связностей:  $R$ -матричное квантование, в котором алгебра гладких функций на фазовом пространстве полевых моделей заменяется некоммутативной алгеброй квантовой группы, и квантование методом функционального интеграла.

В классической теории поля пространство плоских связностей возникает при изучении инстантонных решений уравнения самодуальности в калибровочно инвариантной теории Янга-Миллса. Метод обратной задачи рассеяния позволяет получать законы сохранения для классических полевых уравнений, которые могут быть представлены в форме уравнения нулевой кривизны. Важный класс таких уравнений может быть получен с помощью полевых обобщений интегрируемых систем Хитчина. Системы Хитчина возникают в результате гамильтоновой редукции на расслоениях Хиггса. Для получения соответствующих полевых обобщений необходимо координатам на фазовом пространстве интегрируемой системы придать смысл полевых переменных. Иными словами, перейти к случаю расслоений бесконечного ранга. Первым примером такого обобщения стала теория поля Тоды, позднее полевые обобщения были предложены для систем Калоджеро-Мозера.

С другой стороны, интегрируемые иерархии также возникают в контексте задачи изомонодромных деформаций. В серии работ А.М. Левина, М.А. Ольшанецкого и А.В. Зотова было предложено неавтономное обобщение конструкции Хитчина для расслоений конечного ранга. А именно, был предложен общий подход к построению гамильтоновых потоков, соответствующих деформациям модулей комплексных структур на римановых поверхностях. Соответствующие гамильтоновы потоки называются иерархиями изомонодромных деформаций. В данной конструкции интегрируемые иерархии типа Хитчина возникают как специальный предел более общих иерархий изомонодромных деформаций. Неавтономные гамильтоновы потоки возникают в результате гамильтоновой редукции на расслоении с плоской связностью относительно действия калибровочной группы. В первой главе диссертации изучены полевые обобщения задачи

изомонодромных деформаций для расслоений бесконечного ранга, связанных с алгеброй некоммутативного тора.

С другой стороны пространство плоских связностей тесно связано с топологическими теориями поля. Предположим, что классические уравнения некоторой калибровочной теории поля гарантируют, что калибровочная связность является плоской. Как следствие, классическая калибровочно инвариантная петля Вильсона (голономия связности вдоль замкнутого контура) более не зависит от точной формы контура, а определяется лишь его гомотопическим классом. То есть в таких калибровочных теориях поля отсутствует плотность классической петли Вильсона (тензор кривизны). Оказывается, в целом классе калибровочных теорий инвариантность петли Вильсона относительно гладких деформаций сохраняется и при переходе к квантовому случаю. Точнее, инвариантным относительно гладких деформаций является среднее от калибровочной петли Вильсона. Описанные калибровочные квантовые теории поля называются топологическими теориями поля и являются существенно непertурбативными. Большой интерес к топологическим теориям поля обусловлен тем, что они являются примером *квантовой теории поля с общей ковариантностью*. В связи с этим становится особенно актуальной задача вычисления наблюдаемых в данной теории — средних от петель Вильсона в различных представлениях калибровочной группы. В квантовой топологической теории Черна-Саймонса автором диссертации впервые были получены явные формулы вильсоновских средних для случая бесконечных семейств зацеплений включающих в себя зацепление Уайтхеда и зацепление кольца Борромео в произвольных симметрических представлениях. Получение автором данных формул для произвольных симметрических представлений открыло возможность для нетривиальной проверки гипотезы зеркальной симметрии с помощью явных вычислений чему и посвящена вторая глава диссертации.

Впервые идея о связи калибровочных теорий в пределе большого числа цветов  $N \rightarrow \infty$ <sup>1</sup> с теорией струн была предложена 'т Хофтом. Явный пример такого соответствия был построен М.Концевичем, связавшим предел  $N \rightarrow \infty$  матричного интеграла с кубическим взаимодействием с топологической теорией струн. Позднее в работах С. Габсера, И.Р. Клебанова, А.М. Полякова, Э. Виттена и Х. Малдасены было показано, что определённые калибровочные теории в пределе 'т Хофта дуальны теории струн на антидэситтеровом фоне.

Во второй главе диссертации изучается специальный пример дуальности предложенный Р. Гопакумаром и К.Ваффой. Данная дуальность связывает между собой предел большого числа цветов калибровочной теории Черна-Саймонса

---

<sup>1</sup>Под пределом большого числа цветов мы всюду подразумеваем предел  $N \rightarrow \infty$  с одновременным скейлингом константы связи калибровочной теории  $g \rightarrow 0$  таким образом, что  $g^2 N = \text{const}$ . Данную константу также называют константой связи 'т Хофта.

на  $S^3$  и топологическую теорию струн на некомпактном трёхмерном многообразии Калаби-Яу (полученным с помощью раздутия  $O(-1) \times O(-1)$  расслоения над  $\mathbb{P}^1$ ). Х.Оогури и К.Вафа предложили подход к проверке данной гипотезы с помощью явных вычислений наблюдаемых в обеих теориях.

**Целью** данной работы является:

- Обобщение процедуры симплектической редукции на случай расслоений бесконечного ранга с плоской связностью.
- Явное вычисление гамильтониана и пары Лакса системы полученной в результате симплектической редукции на расслоении бесконечного ранга, связанного с алгеброй некоммутативного тора.
- Изучение связи полученных полевых уравнений с интегрируемыми теориями поля и изучение различных вырождений данных уравнений.
- Явные вычисления наблюдаемых в теории Черна-Саймонса.
- Вычисление квантовых спектральных кривых зацеплений и изучение их квазиклассических вырождений. Сравнение квазиклассического предела данных спектральных кривых с наблюдаемыми в топологической теории струн.
- Проверка обобщённой объёмной гипотезы с помощью явных вычислений.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- Предложена конструкция полевого обобщения задачи изомонодромных деформаций для расслоений бесконечного ранга.
- Построена иерархия изомонодромных деформаций для расслоений, связанных с алгеброй некоммутативного тора.
- Изучен бездисперсионный предел полученных полевых уравнений; показано, что гамильтоновы уравнения движения предельных полевых уравнений могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны. Кроме того, изучены тригонометрический и рациональный пределы, а также скейлинговый предел.
- Получены явные формулы для цветных полиномов ХОМФЛИ зацеплений Уайтхэда и кольца Борромео для случая произвольных симметрических представлений.
- Произведено вычисление квантовых спектральных кривых вышеупомянутых зацеплений. Данные вычисления являются первым явным вычислением квантовой спектральной кривой для неторических зацеплений в случае произвольного ранга калибровочной группы.
- В результате вычисления квазиклассического предела квантовых спектральных кривых и сравнения с предсказаниями теории струн, произ-

ведена первая нетривиальная проверка обобщённой объёмной гипотезы.

**Научная новизна:** В ходе работы над диссертацией впервые были выполнены явные построения полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций для расслоений, связанных с алгеброй некоммутативного тора. Было показано, что полученные таким образом нелокальные неавтономные полевые уравнения в размерности  $2+1$  являются гамильтоновыми и могут быть представлены в форме уравнения Захарова-Шабата. Соответствующий гамильтониан и пара Лакса были построены явно. В результате вырождения данных полевых уравнений были получены локальные автономные полевые уравнения.

В подразделе 2.1.3 диссертации предъявлены общие формулы для  $H_{[r],[s]}^W$  и  $H_{[r],[s],[t]}^B$  - цветных полиномов ХОМФЛИ зацепления Уайтхеда и колец Борромео для случая произвольных симметрических представлений. Данные формулы являются первым примером явных вычислений цветных полиномов ХОМФЛИ неторических многокомпонентных зацеплений для произвольных симметрических представлений. С помощью данных формул в подразделе 2.1.5 получены квантовые спектральные кривые соответствующих зацеплений. Квантовые спектральные кривые для неторических зацеплений в случае произвольного ранга калибровочной группы не вычислялись ранее. В результате сравнения квазиклассического предела квантовых спектральных кривых с вычислениями в топологической теории струн, была впервые проведена нетривиальная проверка обобщённой объёмной гипотезы с помощью явных вычислений.

#### **Личный вклад автора.**

Автором диссертации была предложена процедура скейлингового предела задачи изомонодромных деформаций. В конечномерном случае данная процедура позволила получить тригонометрическую форму линейной задачи для уравнения Пенлеве III (разделы 1.3.1, 1.3.2 диссертации). Далее, автором диссертации был разработан аналогичный метод вырождения для полевых уравнений возникающих в результате гамильтоновой редукции на расслоении бесконечного ранга с плоской связностью. Особенностью предложенной процедуры вырождения является возможность получения пары Лакса для предельных гамильтоновых теорий поля. С помощью данной процедуры были получены полевые модели в размерности  $1+1$  (разделы 1.4.3, 1.4.4 диссертации).

Автором диссертации были получены явные формулы для вильсоновских средних в квантовой теории Черна-Саймонса соответствующим зацеплениям Уайтхэд и кольца Борромео для случая произвольных симметрических представлений (разделы 2.1.3, 2.3.2, 2.3.3 диссертации). На основе данных формул были вычислены соответствующие спектральные кривые (разделы 2.4.3, 2.4.4 диссертации).

Кроме того, все прочие разделы основного текста диссертации основаны на совместных работах автора с Г.А. Аминовым, А.М. Левиным, А.Д. Мироновым, А.А.Морозовым, А.Ю. Морозовым, М.А. Ольшанецким и А.В. Зотовом в работе над которыми автор принимал непосредственное участие.

**Практическая и научная значимость.** Результаты исследования необходимы для изучения непертурбативных эффектов в квантовой теории поля и вычисления наблюдаемых в теории струн. Кроме того, результаты диссертации могут иметь применение в таких областях математики как теория представлений и алгебраическая геометрия.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ИТЭФ, Колумбийского Университета (г. Нью-Йорк), Ратгерского Университета (г. Нью-Брансуик) и следующих международных конференциях: “Классические и квантовые интегрируемые системы - 2012” (г. Дубна, Россия, 2012), “Synthesis of integrabilities arising from gauge-string duality” (г. Осака, Япония, 2012), “Integrable Systems and Quantum Symmetries - 2013” (г. Прага, Чешская Республика, 2013), AMS Sectional Meeting (г. Гринсборо, США, 2014), “Group Theory and Knots” (г. Натал, Бразилия, 2014), “Knot Theory and Its Applications to Physics and Quantum Computing” (г. Даллас, США, 2015).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 12- 01-31385, 12-01-00482 и 12-02-00594, а также НШ–6941.2012.2.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и трёх разделов приложения. Полный объем диссертации составляет 85 страниц с 3 рисунками. Список литературы содержит 71 наименование.

## Содержание диссертации

Во введении к диссертации даны необходимые определения и приведён литературный обзор.

**Первая Глава** посвящена построению полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций и изучению многочисленных пределов полученной иерархии изомонодромных деформаций.

**В разделе 1.1** изложен общий подход к задаче изомонодромных деформаций на торе с отмеченными точками с точки зрения иерархий изомонодромных деформаций. В подразделе 1.1.1 описано пространство модулей голоморфных расслоений над  $T_n$  и группа соответствующих калибровочных преобразований. В подразделе 1.1.2 приведены необходимые определения квазипараболической

структуры в отмеченных точках и описана подгруппа калибровочных преобразований, сохраняющих данную квазипараболическую структуру. Далее, в подразделе 1.1.3 описан подход к деформации комплексных структур на торе с отмеченными точками с точки зрения дифференциалов Бельтрами. Наконец, в подразделе 1.1.4 описана процедура симплектической редукции на расслоении бесконечного ранга с плоской связностью, позволяющая получить полевые обобщения задачи изомонодромных деформаций.

**В разделе 1.2** выполнены явные построения симплектической редукции для случая расслоений, связанных с алгеброй некоммутативного тора — некоммутативного обобщения алгебры гладких функций на торе, над тором с одной отмеченной точкой. В терминах генераторов и соотношений данная алгебра определяется следующим образом: рассмотрим алгебру порождённую генераторами  $U_1, U_2$  удовлетворяющими соотношению

$$U_1 U_2 = e^{-2\pi i \hbar} U_2 U_1. \quad (1)$$

Данную алгебру также называют *алгеброй квантовой группы* с двумя генераторами.

Из соотношения (1) следует, что некоммутативный тор  $\mathcal{T}_{\hbar}^2$  является плоской деформацией коммутативной алгебры гладких функций на торе. Действительно, сопоставим

$$U_1 \rightarrow \mathbf{e}(x_1), U_2 \rightarrow \mathbf{e}(x_2), \mathbf{e}(x_1) * \mathbf{e}(x_2) = e^{-2\pi i \hbar} \mathbf{e}(x_2) * \mathbf{e}(x_1).$$

Ассоциативное умножение  $*$  называется умножением Мoyalа. В первом нетривиальном порядке по  $\hbar$  данная ассоциативная алгебра порождает скобку Пуассона на гладких функциях на торе. Таким образом, алгебра некоммутативного тора является квантованием алгебры Ли скобок Пуассона гладких функций на торе.

Нормально упорядоченное произведение генераторов алгебры некоммутативного тора определяет аналог базиса Фурье гладких функций на торе

$$\mathbf{S}(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} S_a T_a(x), \quad T^a = T^a(x) = \frac{i}{2\pi \hbar} \mathbf{e}\left(\frac{a_1 a_2}{2} \hbar\right) \mathbf{e}(a_1 x_1) \mathbf{e}(a_2 x_2).$$

С помощью процедуры симплектической редукции для расслоений бесконечного ранга связанных с группой гладких автоморфизмов алгебры некоммутативного тора получены полевые уравнения нелокальной неавтономной теории поля в размерности  $2+1$ . В подразделе 1.2.1 показано, что уравнения движения

данной теории являются гамильтоновыми

$$\kappa \partial_\tau \mathbf{S}(x) = [\mathbf{S}(x), \wp(\partial_{\bar{z}}) \mathbf{S}(x)]_\theta$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_\hbar^2} \mathbf{S}(x) \wp_\hbar(\partial_{\bar{z}}) \mathbf{S}(x).$$

Далее, в подразделе 1.2.2 показано, что данные уравнения допускают запись в форме обобщённого уравнения Захарова-Шабата

$$\kappa \partial_\tau L - \kappa \partial_w M + [M, L] = 0, \quad (2)$$

и приведены соответствующие пары Лакса данной полевой теории

Полученные в разделе теории поля в размерности 2+1 являются нелокальными и неавтономными. В связи с этим, представляет особый интерес изучение их всевозможных вырождений, в частности, пределов в интегрируемые теории поля и пределов соответствующих вырождению эллиптической кривой. Данным вопросам посвящена оставшаяся часть главы 1.

**В разделе 1.3** изложен метод вырождения линейных задач для уравнения изомонодромных деформаций для расслоений конечного ранга над комплексным тором с отмеченными точками. Изучен тригонометрический предел, соответствующий устремлению одного из периодов тора к бесконечности, и т.н. скейлинговый предел, являющийся аналогом предела Иноземцева. Показано, что вырождение уравнения Пенлеве VI в уравнения Пенлеве III и Пенлеве V может быть сформулировано явно не только в терминах самого уравнения и гамильтониана, но и в терминах соответствующей линейной задачи.

Основной составляющей обоих пределов является бесконечный сдвиг параметра  $\tau$  эллиптической кривой соответствующий пределу Иноземцева:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2,$$

здесь  $\tau_1$  играет роль времени предельной системы, тогда как  $\tau_2$  является параметром сдвига с помощью которого мы определяем тригонометрический предел  $Im \tau_2 \rightarrow +\infty$ . Различие между тригонометрическим и скейлинговым пределами заключается в различном выборе бесконечного сдвига, координаты  $u$  и спектрального параметра  $z$ , а также различном скейлинге постоянных параметров уравнения Пенлеве VI. В подразделе 1.3.1 построена тригонометрическая пара

Лакса для уравнения Пенлеве V с помощью предельного перехода от эллиптической пары Лакса для уравнения Пенлеве VI, тогда как в подразделе 1.3.2 построена тригонометрическая пара Лакса для уравнения Пенлеве III.

**В разделе 1.4** изучены вырождения построенной нелокальной неавтономной теории поля в размерности 2+1. В частности, в подразделах 1.4.1 и 1.4.2 изучены тригонометрический и рациональный пределы. В обоих случаях выполнены явные вычисления предельного гамильтониана и пары Лакса предельных уравнений. В подразделе 1.4.3 методы скейлингового предела, описанного в разделе 1.3, применены для случая расслоений бесконечного ранга. Для данной полевой модели скейлинговый предел осуществляется следующим образом: рассмотрим сдвиг спектрального параметра и координаты на  $S^1$

$$w = \tilde{w} + \frac{\tau}{2}, \quad x = \tilde{x} + \frac{\bar{k}}{2} \quad (3)$$

одновременно со скейлингом координат на фазовом пространстве системы

$$S_n^{\alpha_1, \alpha_2} = \tilde{S}_n^{\alpha_1, \alpha_2} q_2^{-g(\alpha_2)}, \quad q_2 \equiv \mathbf{e}(\tau_2), \quad g(\alpha_2) = \frac{1 - \delta_{\alpha_2, 0}}{2N}. \quad (4)$$

после чего перейдём к тригонометрическому пределу  $\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty$ . Такой скейлинг переменных (4) в пределе  $\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty$  приводит к контракции алгебры Ли скобок Пуассона

$$\left\{ \tilde{S}_n^{\alpha_1, \alpha_2}, \tilde{S}_m^{\beta_1, \beta_2} \right\} = \frac{N}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{N} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \right) \tilde{S}_{n+m}^{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2} q_2^{g(\alpha_2) + g(\beta_2) - g(\alpha_2 + \beta_2)}, \quad (5)$$

где  $\tilde{S}_\alpha \equiv \tilde{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_N^{(2)}$ . Новые координаты  $\tilde{S}_\alpha$  образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона в пределе  $\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty$  при условии, что

$$\forall \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z} : \quad g(\alpha_2) + g(\beta_2) - g(\alpha_2 + \beta_2) \geq 0. \quad (6)$$

Для  $g(\alpha_2) = (1 - \delta_{\alpha_2, 0}) / (2N)$  неравенство (6) является тривиально выполненным, таким образом, мы получаем все ненулевые скобки соответствующие знаку равенства в (6)

$$\left\{ \tilde{S}_n^{\alpha_1, 0}, \tilde{S}_m^{\beta_1, \beta_2} \right\} = \frac{N}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{N} \alpha_1 \beta_2 \right) \tilde{S}_{n+m}^{\alpha_1 + \beta_1, \beta_2}. \quad (7)$$

Уравнения движения для переменных предельной теории являются гамильтоновыми

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}_\alpha = \left\{ H, \tilde{S}_\alpha \right\}$$

относительно данной скобки с гамильтонианом

$$H = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\tilde{S}_{\alpha_1,0} \tilde{S}_{-\alpha_1,0}}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} + 4\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_1 \alpha_1) \tilde{S}_{\alpha_1,1} \tilde{S}_{-\alpha_1,-1}, \quad (8)$$

где  $q_1 \equiv \mathbf{e}(\tau_1)$ . Отметим, что координаты входящие в гамильтониан образуют подалгебру предельной алгебры Пуассона. Таким образом, гамильтоновы уравнения движения для координат входящих в гамильтониан не зависят от остальных координат.

Уравнения движения системы могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны

$$\partial_\tau L - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\tilde{w}} (M + \pi i L) = [L, M],$$

где  $L = L(\mathbf{S}, \tilde{w} + \tau/2, \tau)$ ,  $M = M(\mathbf{S}, \tilde{w} + \tau/2, \tau)$ . Таким образом, пара Лакса получается в результате следующего предела

$$\tilde{L} = \lim_{\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty} L, \quad \tilde{M} = \lim_{\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty} (M + \pi i L),$$

соответствующие операторы Лакса приобретают вид

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L} - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\tilde{w}} \tilde{M} = [\tilde{L}, \tilde{M}], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \pi \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 / 2)}{\sin(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1,0} T^{\alpha_1,0} - 2\pi i q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1,1} T^{\alpha_1,1} + \\ + 2\pi i q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 - \hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1,-1} T^{\alpha_1,-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 + \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1)}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1,0} T^{\alpha_1,0} + 2\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1,1} T^{\alpha_1,1} + \\ + 2\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 - \hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1,-1} T^{\alpha_1,-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку гамильтониан (8) и операторы Лакса (10), (11) зависят только от координат вида  $\tilde{S}_\alpha$ ,  $|\alpha_2| \leq 1$ , мы можем выразить их через следующие три полевых

переменных

$$h = h(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1, 0} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1),$$

$$f = f(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{\alpha_1, 1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1), \quad g = g(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{\alpha_1, -1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1).$$

В терминах данных обозначений гамильтониан (8) приобретает вид

$$H = \pi^2 \int_{S^1} \left( \frac{1}{2} h(x_1) \sinh^2 \left( \frac{\hbar \epsilon_1 \partial_{x_1}}{2} \right) h(x_1) + 4q_1^{\hbar \epsilon_2} g(x_1) \mathbf{e}^{-\hbar \epsilon_1 \partial_{x_1}} f(x_1) \right) dx_1.$$

Уравнения движения в терминах переменных  $f$ ,  $g$ , и  $h$

$$\sinh^2 \left( \frac{\hbar \epsilon_1 \partial_{x_1}}{2} \right) \partial_{\tau_1} h = -\frac{4\pi\iota}{\hbar} q_1^{\hbar \epsilon_2} \sinh \left( \frac{\hbar \partial_{x_1}}{2} \right) (f \mathbf{e}^{-\epsilon_1 \partial_{x_1}} g - g \mathbf{e}^{\epsilon_1 \partial_{x_1}} f), \quad (12)$$

$$\partial_{\tau_1} f = -\frac{\pi\iota}{\hbar} f \sinh \left( \frac{\hbar \partial_{x_1}}{2} \right) h, \quad (13)$$

$$\partial_{\tau_1} g = \frac{\pi\iota}{\hbar} g \sinh \left( \frac{\hbar \partial_{x_1}}{2} \right) h. \quad (14)$$

Операторы Лакса в полевых переменных могут быть записаны с помощью операторов сдвига  $\mathbf{e}^{\pm \hbar \partial_{x_1}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \frac{1}{4\hbar} (h(x_1) - h(x_1 - \hbar \epsilon_1)) + \frac{\iota}{\hbar} q_1^{\hbar \epsilon_2/2} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) f(x_1 + \frac{\hbar}{2}) \mathbf{e}^{\hbar \partial_{x_1}} - \\ - \frac{\iota}{\hbar} q_1^{\hbar \epsilon_2/2} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) g(x_1 - \hbar \epsilon_1 - \frac{\hbar}{2}) \mathbf{e}^{-\hbar \partial_{x_1}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\frac{\pi\iota}{4\hbar} (h(x_1) + h(x_1 - \hbar \epsilon_1)) - \frac{\pi}{\hbar} q_1^{\hbar \epsilon_2/2} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) f(x_1 + \frac{\hbar}{2}) \mathbf{e}^{\hbar \partial_{x_1}} - \\ - \frac{\pi}{\hbar} q_1^{\hbar \epsilon_2/2} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) g(x_1 - \hbar \epsilon_1 - \frac{\hbar}{2}) \mathbf{e}^{-\hbar \partial_{x_1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В подразделе 1.4.4 изучен так называемый бездисперсионный предел, в данном пределе алгебра некоммутативного тора переходит в коммутативную алгебру гладких функций на торе, наделённую симплектической структурой. Соответствующие уравнения движения теории поля становятся локальными в результате последовательного применения бездисперсионного и тригонометрического пределов. Показано, что предельная полевая теория имеет гамильтоновы уравнения движения, более того, данные уравнения могут быть представлены в обобщённой форме уравнения Захарова-Шабата.

**Глава 2** посвящена вычислению наблюдаемых в топологической квантовой теории Черна-Саймонса и получению рекуррентных соотношений на данные наблюдаемые, т.н. квантовых спектральных кривых зацеплений. В частности, результатом данных вычислений является непосредственная проверка гипотезы М.Аганаджич, Т.Экхольм, Л.Нг и К.Вафы для квазиклассического предела спектральных кривых зацеплений из топологической теории струн.

**В разделе 2.1** описаны линейные рекуррентные соотношения на полиномы зацеплений, связывающие между собой цветные полиномы ХОМФЛИ, для различных симметрических представлений. Данные линейные рекуррентные соотношения могут быть параметризованы набором полиномов Лорана от некоммутативных переменных. Минимальный набор полиномов порождающих данное семейство в случае многокомпонентных зацеплений не является единственным. Будем называть два таких набора эквивалентными если каждый из наборов порождается другим. Класс эквивалентности таких наборов полиномов (иначе правый идеал в квантовой алгебре) называется квантовой спектральной кривой.

Кратко напомним определение квантовых спектральных кривых в терминах рекуррентных соотношений. Обозначим неприведённый полином ХОМФЛИ  $n$ -компонентного зацепления  $\mathcal{L}$  за  $H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}$  где  $r_1, \dots, r_n$  — номера симметрических представлений (значения спинов) соответствующие каждой из компонент. Рассмотрим следующие формальные операторы  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n$  и  $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n$  действующие на пространстве цветных полиномов ХОМФЛИ зацепления  $\mathcal{L}$ :

$$\hat{P}_i \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_i-1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}, \quad \hat{Q}_i \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = q^{r_i} \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}. \quad (17)$$

Данные операторы в общем случае некоммутативные и удовлетворяют соотношениям “квантовой группы”:

$$\hat{P}_i \hat{Q}_i = q \hat{Q}_i \hat{P}_i, \quad \hat{P}_j \hat{Q}_k = \hat{Q}_k \hat{P}_j, \quad j \neq k. \quad (18)$$

Полиномы  $H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям по  $r_1, \dots, r_n$ . Однако, в случае многокомпонентных зацеплений существует несколько независимых рекуррентных соотношений. Таким образом, уравнение квантовой спектральной кривой приобретает вид системы уравнений

$$\hat{\mathcal{A}}_k^{\mathcal{L}}(\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n, \hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n, A, q) H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = 0, \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad (19)$$

где  $\hat{\mathcal{A}}_k^{\mathcal{L}}(\hat{P}, \hat{Q}, A, q)$  — семейство полиномов от некоммутативных переменных. В подразделах 2.2.1 и 2.2.2 даются необходимые определения квантовых спектральных кривых для случая узлов и зацеплений соответственно, формулиру-

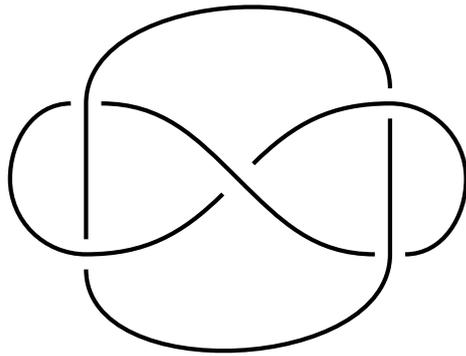


Рис. 1 — Зацепление Уайтхэда

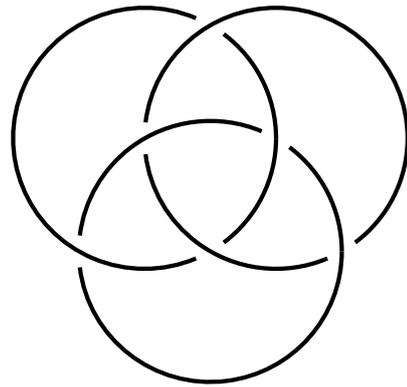


Рис. 2 — кольца Борромео

ется обобщённая объёмная гипотеза и показывается её связь с классической объёмной гипотезой.

На момент написания автором диссертации совместной работы с А.Д.Мироновым, А.Ю.Морозовым и А.А.Морозовым [1] квантовые спектральные кривые были неизвестны в случае произвольных  $A$  и  $q$  даже для самых простых зацеплений за исключением зацепления Хопфа. В разделе 2.1.3, автором диссертации были получены общие формулы для  $H_{[r],[s]}^W$  и  $H_{[r],[s],[t]}^B$  — цветных полиномов ХОМФЛИ зацепления Уайтхэда и колец Борромео для случая произвольных симметрических представлений. С помощью данных формул были вычислены квантовые спектральные кривые соответствующих зацеплений.

В подразделе 2.1.3 описан метод вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ использованный для получения общих формул цветных полиномов ХОМФЛИ бесконечных серий трёхкомпонентных зацеплений для случая симметрических представлений. На основе улучшенной версии метода каблирования, автором диссертации был разработан программный пакет для вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ. С помощью данного пакета на персональном компьютере возможно производить вычисления для числа стрендов в толстой косе не превышающего 12. Таким образом, для случая колец Борромео, прямыми вычислениями были получены цветные полиномы ХОМФЛИ для симметрических представлений  $r + s + t \leq 12$ . Кроме того, частный случай данных вычислений  $r = s = t$  был проверен независимыми методами.

Используя дифференциальное разложение [2] по известным полиномам ХОМФЛИ для конечного числа симметрических представлений, возможно восстановить общий ответ для случая произвольных симметрических представлений. Более того, в случае рассматриваемых зацеплений дифференциальное разложение приобретает особенно простой вид, а именно, оно может быть представлено в форме обрывающегося  $q$ -гипергеометрического ряда. Для зацепления

Уайтхэда соответствующий ряд имеет вид

$$H_{r,s}^W(A,q) = 1 + \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \frac{1}{A^k q^{k(k-1)/2}} \frac{D_{-1}}{D_{k-1}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{D_{r+j} D_{s+j}}{D_{k+j}} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\}. \quad (20)$$

Для колец Борромео:

$$H_{r,s,t}^B(A,q) = 1 + D_{-1} \sum_{k=1}^{\min(r,s,t)} (-)^k \{q\}^k [k]! \frac{D_{k-2}!}{(D_{2k-1}!)^2} \times \\ \times \prod_{j=0}^{k-1} D_{r+j} D_{s+j} D_{t+j} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\} \{q^{t-j}\}. \quad (21)$$

Здесь  $\{x\} = x - 1/x$  и  $D_k = \{Aq^k\}$ . Данные выражения в явном виде симметричны относительно замены  $r$  на  $s$  и перестановок  $r, s$  и  $t$  соответственно. Впервые общие выражения были получены в работе автора диссертации [1]. Во всех специальных частных случаях формулы (20), (21) согласуются с известными ранее результатами.

Получение общих формул в виде  $q$ -гипергеометрического ряда позволяет вычислять линейные рекуррентные соотношения, связывающие между собой цветные полиномы ХОМФЛИ, соответствующие разным симметрическим представлениям каждой из компонент.

**В разделе 2.2** проведено прямое явное вычисление простейших спектральных кривых в терминах рекуррентных соотношений с дилатацией на производящую функцию полиномов ХОМФЛИ. Показано, что полученные таким образом квантовые спектральные кривые согласуются с классическим пределом.

**В разделе 2.3** проведено явное вычисление квантовых спектральных кривых различных зацеплений методом Д.Зейльбергера. В подразделе 2.3.1 показано, что данный метод согласуется с прямыми вычислениями. В подразделах 2.3.2 и 2.3.3 **сформулирован основной результат главы 2** — *явное вычисление квантовых спектральных кривых для зацеплений Уайтхэда и кольца Борромео*.

Квантовая спектральная кривая зацепления Уайтхэда имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \hat{A}_1^U \hat{A}_{1,2}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0, \\ \hat{A}_2^U \hat{A}_{2,1}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0, \\ \hat{A}_{1,2}^L \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0, \end{cases}$$

где  $\hat{A}_1^U$  и  $\hat{A}_2^U$  являются операторами задающими квантовую спектральную кривую неузла

$$\hat{A}_{1,2}^U = \left( A \left( \hat{Q}_{1,2}^2 - 1 \right) - q \left( A^2 \hat{Q}_{1,2}^2 - 1 \right) \hat{P}_{1,2} \right),$$

$\hat{A}_{1,2}^L$  определяется как

$$\left( (1 - \hat{P}_1 \hat{P}_2)(\hat{Q}_1^2 - \hat{Q}_2^2) - (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \left( \frac{A}{q} \hat{Q}_1^2 \hat{Q}_2^2 - \frac{q}{A} \right) \right) \mathcal{H}_{[r],[s]}^W \equiv \hat{A}_{1,2}^L \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0.$$

Нетривиальные операторы  $\hat{A}_{1,2}^W$  и  $\hat{A}_{2,1}^W$  вычислены в подразделе 2.3.2. Аналогичные формулы для случая зацепления кольца Борромео вычислены в подразделе 2.3.3. Таким образом, впервые были получены явные формулы для квантовых спектральных кривых неторических зацеплений в случае произвольного ранга калибровочной группы.

**В разделе 2.4** произведено вычисление квазиклассического предела квантовых спектральных кривых зацеплений Уайтхеда и кольца Борромео. Данный классический предел согласуется с предсказаниями М.Аганаджич, Т.Экхольма, Л.Нг и К.Вафы и, таким образом, представляет собой нетривиальную проверку гипотезы зеркальной симметрии.

В подразделе 2.4.3 получены уравнения классической спектральной кривой зацепления Уайтхеда. Нетривиальная ветвь данной спектральной кривой определяется следующей системой алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mu_1 - \mu_2)(1 - z_1 z_2) - (A^2 \mu_1 \mu_2 - 1)(z_1 - z_2) = 0, \\ \mu_2^2 \mu_1 A^4 + \left( -\mu_1^2 \mu_2^2 A^4 + (\mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1 - \mu_2) \mu_2 A^2 + (\mu_2 - \mu_1) \right) A z_2 + \\ + \left( (\mu_1 \mu_2 + \mu_2 - 2\mu_1) \mu_1 \mu_2 A^4 + (\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 + \mu_1 - 2\mu_2) A^2 + 1 \right) z_2^2 + \\ + \left( (\mu_1 \mu_2 - \mu_2^2 + 2\mu_2 - \mu_1) \mu_1 A^2 + (\mu_2 - \mu_1 - 1) \right) A z_2^3 + A^2 \mu_1 z_2^4 = 0, \\ \mu_1^2 \mu_2 A^4 + \left( -\mu_2^2 \mu_1^2 A^4 + (\mu_2^2 - \mu_2 \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_1) \mu_1 A^2 + (\mu_1 - \mu_2) \right) A z_1 + \\ + \left( (\mu_2 \mu_1 + \mu_1 - 2\mu_2) \mu_2 \mu_1 A^4 + (\mu_2^2 - 4\mu_2 \mu_1 + \mu_1^2 + \mu_2 - 2\mu_1) A^2 + 1 \right) z_1^2 + \\ + \left( (\mu_2 \mu_1 - \mu_1^2 + 2\mu_1 - \mu_2) \mu_2 A^2 + (\mu_1 - \mu_2 - 1) \right) A z_1^3 + A^2 \mu_2 z_1^4 = 0. \end{array} \right.$$

Аналогичные формулы для зацепления кольца Борромея приведены в разделе 2.4.4. Замена, необходимая для сравнения полученных результатов с вычислениями в топологической теории струн, выписана явно.

**В заключении** приведены основные результаты работы.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Link polynomial calculus and the AENV conjecture / S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Vol. 2014, no. 4.
2. Артамонов С. Б., Миронов А. Д., Морозов А.Ю. Иерархия дифференциалов и дополнительная градуировка полиномов узлов // *ТМФ*. — 2014. — Vol. 179, no. 2. — Pp. 147–188.
3. Aminov G., Arthamonov S. New  $2 \times 2$ -Matrix Linear Problems for the Painlevé Equations III, V // *Constructive Approximation*. — 2015. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 357–383. <http://dx.doi.org/10.1007/s00365-015-9281-7>.
4. Aminov G., Arthamonov S. Reduction of the elliptic  $SL(N, C)$  top // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, no. 7. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/7/075201>.