



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Артамонов Семён Борисович

**Изучение пространства плоских связностей в теории поля**

Специальность 01.04.02—  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
в.н.с., д.ф-м.н.  
Ольшанецкий М.А.

Москва — 2015

## Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
0.1 Расслоения с плоской связностью, задача изомонодромных деформаций . . . . .	8
0.2 Гамильтонов подход к уравнениям Пенлеве . . . . .	10
0.3 Топологические квантовые теории поля . . . . .	12
0.4 Статистическая сумма Оогури-Вафы и квантовые спектральные кривые зацеплений	14
<b>1 Полевые обобщения иерархии изомонодромных деформаций</b> . . . . .	<b>15</b>
1.1 Общая конструкция полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций . .	15
1.1.1 Пространство модулей плоских связностей . . . . .	15
1.1.2 Квазипараболическая структура и калибровочная группа . . . . .	16
1.1.3 Деформация комплексных структур . . . . .	17
1.1.4 Симплектическая редукция . . . . .	18
1.2 Уравнение изомонодромных деформаций для алгебры некоммутативного тора . . .	20
1.2.1 Неавтономный волчок для алгебры некоммутативного тора . . . . .	20
1.2.2 Представление Лакса . . . . .	22
1.3 Вырождение линейных задач для уравнения Пенлеве VI . . . . .	24
1.3.1 Тригонометрический предел, линейная задача для уравнения Пенлеве V . .	24
1.3.2 Предел Иноземцева, линейная задача для уравнения Пенлеве III . . . . .	29
1.4 Вырождение линейных задач для полевых уравнений в алгебре некоммутативного тора . . . . .	33
1.4.1 Тригонометрический предел . . . . .	33
1.4.2 Рациональный предел . . . . .	34
1.4.3 Скейлинговый предел . . . . .	35
1.4.4 Бездисперсионный предел . . . . .	38
<b>2 Вычисление статистической суммы в топологической теории струн</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1 Квантовые спектральные кривые и A-полиномы . . . . .	45
2.1.1 Квантовые A-полиномы узлов . . . . .	45
2.1.2 Квантовые спектральные кривые зацеплений . . . . .	47
2.1.3 Вычисление полиномов ХОМФЛИ . . . . .	48
2.2 Простейшие рекуррентные соотношения и спектральные кривые . . . . .	50
2.2.1 Неузел . . . . .	50
2.2.2 Зацепление Хопфа . . . . .	52
2.3 Квантовые спектральные кривые и q-гипергеометрические функции . . . . .	54
2.3.1 Зацепление Хопфа . . . . .	54
2.3.2 Зацепление Уайтхеда . . . . .	58
2.3.3 Зацепление кольца Борромео . . . . .	62

2.4	Спектральные кривые и проверка гипотезы AENV. . . . .	63
2.4.1	Неузел . . . . .	64
2.4.2	Зацепление Хопфа . . . . .	65
2.4.3	Зацепление Уайтхеда . . . . .	66
2.4.4	Зацепления кольца Борромео . . . . .	66
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>70</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>71</b>
<b>Приложение А Уравнения Пенлеве . . . . .</b>		<b>77</b>
<b>Приложение Б Алгебра некоммутативного тора . . . . .</b>		<b>79</b>
Б.1	Определение в терминах генераторов и соотношений . . . . .	79
Б.2	Алгебра бесконечных матриц . . . . .	79
Б.3	Умножение Мойла . . . . .	80
Б.4	Инфинитезимальные операторы, Синус-алгебра . . . . .	80
Б.5	Базис синус-алгебры в конечномерном случае . . . . .	81
<b>Приложение В Эллиптические функции . . . . .</b>		<b>82</b>
В.1	Основные определения . . . . .	82
В.2	Вырождения эллиптических функций . . . . .	84

## Введение

Теории поля возникающие на пространстве плоских связностей являются одним из наиболее динамически развивающихся разделов математической физики. Связность называется плоской, если оператор параллельного переноса (голономия данной связности) сохраняется при гладких деформациях контура. В диссертации будут изучены примеры полевых теорий, возникающих на пространстве плоских связностей.

В разделе 1 будет построено полевое обобщение задачи изомонодромных деформаций на расслоении бесконечного ранга, связанного с алгеброй некоммутативного тора. Будут изучены всевозможные вырождения полученных полевых уравнений и показана связь с интегрируемыми теориями поля. Раздел 2 будет посвящён явному вычислению наблюдаемых в квантовой теории Черна-Саймонса и проверке гипотезы об их связи с наблюдаемыми в топологической теории струн.

### Полевые обобщения задачи изомонодромных деформаций

В классической теории поля пространство плоских связностей возникает при изучении инстантонных решений уравнения самодуальности в калибровочно инвариантной теории Янга-Миллса [1]. Метод обратной задачи рассеяния [2–4] позволяет получать законы сохранения для классических полевых уравнений, которые могут быть представлены в форме уравнения нулевой кривизны. Важный класс таких уравнений может быть получен с помощью полевых обобщений интегрируемых систем Хитчина [5]. Системы Хитчина возникают в результате гамильтоновой редукции на расслоениях Хиггса. Для получения соответствующих полевых обобщений необходимо координатам на фазовом пространстве интегрируемой системы придать смысл полевых переменных. Иными словами, перейти к случаю расслоений бесконечного ранга. Первым примером такого обобщения стала теория поля Тоды [6], позднее полевые обобщения были предложены для систем Калоджеро-Мозера (в качестве подробного современного обзора см. [7]).

С другой стороны, интегрируемые иерархии также возникают в контексте задачи изомонодромных деформаций [8, 9]. В работах [10, 11] было предложено неавтономное обобщение конструкции Хитчина для расслоений конечного ранга. А именно, был предложен общий подход к построению гамильтоновых потоков, соответствующих деформациям модулей комплексных структур на римановых поверхностях. Соответствующие гамильтоновы потоки называются иерархиями изомонодромных деформаций. В данной конструкции интегрируемые иерархии типа Хитчина возникают как специальный предел более общих иерархий изомонодромных деформаций. Неавтономные гамильтоновы потоки возникают в результате гамильтоновой редукции на расслоении с плоской связностью относительно действия калибровочной группы. Основной целью Главы 1 является изучение неавтономных обобщений систем Хитчина для расслоений бесконечного ранга и их предельных вырождений.

### Топологические теории поля

Пространство плоских связностей тесно связано с топологическими теориями поля. Предположим, что классические уравнения некоторой калибровочной теории поля гарантируют, что калибровочная связность является плоской. Как следствие, классическая калибровочно инва-

риантная петля Вильсона (голономия связности вдоль замкнутого контура) более не зависит от точной формы контура, а определяется лишь его гомотопическим классом. То есть в таких калибровочных теориях поля отсутствует плотность классической петли Вильсона (тензор кривизны). Оказывается, в целом классе калибровочных теорий инвариантность петли Вильсона относительно гладких деформаций сохраняется и при переходе к квантовому случаю. Точнее, инвариантным относительно гладких деформаций является среднее от калибровочной петли Вильсона [12–14]. Описанные калибровочные квантовые теории поля называются топологическими теориями поля и являются существенно непертурбативными. Большой интерес к топологическим теориям поля обусловлен тем, что они являются примером *квантовой теории поля с общей ковариантностью*. В разделе 0.3 мы определим наиболее известный пример такой теории - квантовую теорию Черна-Саймонса на  $S^3$ .

Главу 2 мы посвятим явному вычислению наблюдаемых в квантовой теории Черна-Саймонса и проверке гипотезы об их связи с наблюдаемыми в топологической теории струн.

Следующие работы автора имеют наиболее близкое отношение к диссертации: [15–19]. Из них 4 опубликованы в журналах входящих в перечень ВАК.

### Структура диссертации

Во введении будут даны необходимые определения и приведён литературный обзор. В частности, в разделе 0.1 мы определим расслоение с плоской связностью и сформулируем задачу изомонодромных деформаций. В разделе 0.2 мы рассмотрим гамильтонов подход к простейшей задаче изомонодромных деформаций и продемонстрируем связь с уравнениями Пенлеве. В разделе 0.3 мы определим топологическую квантовую теорию поля на  $S^3$  — теорию Черна-Саймонса и опишем пространство наблюдаемых. В разделе 0.4 мы опишем дуальность между теорией Черна-Саймонса в пределе большого числа цветов и топологической теорией струн, определим статистическую сумму Оогури-Вафы.

Глава 1 посвящена построению полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций и изучению многочисленных пределов полученной иерархии изомонодромных деформаций.

В частности, в разделе 1.1, следуя совместной работе автора диссертации с Г.А.Аминовым, А.М.Левиным, М.А.Ольшанецким и А.В.Зотовым [17], будет изложен общий подход к задаче изомонодромных деформаций на торе с отмеченными точками с точки зрения иерархий изомонодромных деформаций.

Далее, в разделе 1.2 будут выполнены явные построения для случая расслоений, связанных с алгеброй некоммутативного тора — некоммутативного обобщения алгебры гладких функций на торе над тором с одной отмеченной точкой. Будут предъявлены явные формулы для гамильтониана и пары Лакса данной задачи. Полученные таким образом теории поля в размерности 2+1 являются нелокальными и неавтономными. В связи с этим, представляет особый интерес изучение их всевозможных вырождений. В частности, пределов в интегрируемые теории поля и пределов соответствующих вырождению эллиптической кривой. Данным вопросам будет посвящена оставшаяся часть главы 1.

В разделе 1.3, следуя совместным работам автора диссертации с Г.А.Аминовым [16, 19], будет изложен метод вырождения линейных задач для уравнения изомонодромных деформаций для расслоений конечного ранга над комплексным тором с отмеченными точками. Будет изучен тригонометрический предел, соответствующий устремлению одного из периодов тора к бесконечности, и т.н. скейлинговый предел, являющийся аналогом предела Иноземцева [20]. Будет показано, что вырождение уравнения Пенлеве VI в уравнения Пенлеве III и Пенлеве V может быть сформулировано явно не только в терминах самого уравнения и гамильтониана, но и в терминах соответствующей линейной задачи.

Далее, в разделе 1.4 будут изучены вырождения построенной нелокальной неавтономной теории поля в размерности  $2+1$ . Будут изучены тригонометрический и рациональный пределы, а также скейлинговый предел. Особое внимание будет уделено так называемому бездисперсионному пределу, в данном пределе алгебра некоммутативного тора переходит в коммутативную алгебру гладких функций на торе, наделённую симплектической структурой. Соответствующие уравнения движения становятся локальными в результате последовательного применения бездисперсионного и тригонометрического пределов.

Глава 2 посвящена вычислению наблюдаемых в топологической квантовой теории Черна-Саймонса и получению рекуррентных соотношений на данные наблюдаемые, т.н. квантовых спектральных кривых зацеплений. В частности, результатом данных вычислений является непосредственная проверка гипотезы М.Аганаджич, Т.Экхольм, Л.Нг и К.Вафы для квазиклассического предела спектральных кривых зацеплений из топологической теории струн.

В разделе 2.1 мы определим квантовые спектральные кривые зацеплений, их связь с рекуррентными соотношениями на наблюдаемые в квантовой теории Черна-Саймонса — т.н. цветные полиномы ХОМФЛИ. Кроме того, мы опишем гипотезу о связи наблюдаемых в топологической теории струн — статистических сумм Оогури-Вафы с наблюдаемыми в теории Черна-Саймонса.

В разделе 2.1.3 мы опишем метод вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ на основе процедуры каблирования [21–24], использованный для получения явных формул цветных полиномов ХОМФЛИ числа нитей в толстой косе не превышающего 12. С помощью методов, предложенных в совместной работе автора с А.Д.Мироновым и А.Ю.Морозовым [18], на основе данных ответов будет получена общая формула для цветных полиномов ХОМФЛИ зацеплений Уайтхэда и кольца Борромео для произвольных симметрических представлений соответствующих каждой из компонент. Данные формулы будут представлены в форме обрывающегося  $q$ -гипергеометрического ряда.

Получение общих формул в виде  $q$ -гипергеометрического ряда позволяет вычислять линейные рекуррентные соотношения, связывающие между собой цветные полиномы ХОМФЛИ соответствующие разным симметрическим представлениям каждой из компонент. В разделе 2.3 мы покажем способ вычисления полного набора данных рекуррентных соотношений и произведём явные вычисления. В подразделах 2.3.2 и 2.3.3 сформулирован основной результат главы 2 — *явное вычисление квантовых спектральных кривых для зацеплений Уайтхэда и кольца Борромео.*

В разделе 2.4 произведено вычисление квазиклассического предела квантовых спектральных кривых зацеплений Уайтхеда и кольца Борромео. Данный классический предел согласуется с предсказаниями [25] и, таким образом, представляет собой нетривиальную проверку обобщённой объёмной гипотезы.

## 0.1 Расслоения с плоской связностью, задача изомонодромных деформаций

Кратко изложим основные определения, необходимые нам в дальнейшем. В качестве подробного обзора см. [26]. Пусть  $M$  — многообразие. Рассмотрим  $n$ -мерное векторное расслоение  $X \rightarrow M$ . Обозначим за  $\Gamma$  пространство гладких сечений. Связностью на расслоении  $X$  называется отображение

$$\nabla : \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(T^*M),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$\forall s \in \Gamma(X), f \in C^\infty(M) : \quad \nabla(sf) = (\nabla s)f + s \otimes df.$$

При выборе базиса локальных сечений  $s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)}$  на карте  $U_i \subset M$  связность приобретает вид матричнозначной 1-формы

$$\nabla \left( s_j^{(i)} \right) = - \sum_{k,m} (A_m^{(i)})_j^k s_k^{(i)} \otimes dx^m.$$

Здесь мы обозначили за  $(i)$  индекс соответствующий карте  $U_i$ , далее мы будем опускать данный индекс вместе с индексами  $j, k$ , соответствующими компонентам матрицы.

Связность на  $X$  позволяет определить оператор параллельного переноса (голономию данной связности). Пусть  $\gamma : [0,1] \rightarrow M$  — некоторый контур, обозначим его за  $\gamma(\lambda), 0 < \lambda \leq 1$  соответствующую часть данного контура  $\gamma(\lambda) : [0,1] \rightarrow M, \gamma(\lambda)(t) = \gamma(t/\lambda)$ . Тогда под оператором параллельного переноса  $W(\gamma) : X_{\gamma(0)} \rightarrow X_{\gamma(1)}$  вдоль некоторого контура  $\gamma$  мы будем понимать решение следующего уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\gamma(\lambda))}{\partial \lambda} &= A W(\gamma(\lambda)), \\ W(pt) &= \text{Id}, \\ W(\gamma)W(\gamma^{-1}) &= \text{Id}, \\ \forall \gamma, \gamma' \quad W(\gamma \star \gamma') &= W(\gamma')W(\gamma). \end{aligned}$$

где под  $\star$  мы подразумеваем композицию контуров,  $\gamma^{-1}(t) \equiv \gamma(1-t)$  — контур пройденный в обратном направлении.

Калибровочными преобразованиями таких расслоений являются расслоения гомоморфизмов  $\text{Hom}(X, X)$ . Действительно, пусть  $g \in \text{Hom}(X, X)$ , тогда для любого контура  $\gamma$  имеет место следующее преобразование операторов переноса:

$$W(\gamma) \rightarrow g(\gamma(1)) W(\gamma) (g(\gamma(0)))^{-1}. \quad (1)$$

Специальный тип связности определяет оператор переноса, инвариантный относительно гладких деформаций контура  $\gamma$ . В терминах матричнозначной 1-формы данное условие эквивалентно требованию

$$F = dA - A \wedge A = 0. \quad (2)$$

Левая часть уравнения (2) называется *2-формой кривизны* связности  $A$ , соответственно само уравнение (2) называется уравнением нулевой кривизны. Связность, удовлетворяющая уравнению нулевой кривизны, называется *плоской*.

Пространство модулей плоских связностей имеет наглядную геометрическую интерпретацию, а именно, оно совпадает с пространством модулей  $n$ -мерных представлений фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  многообразия  $M$ . Действительно, выберем отмеченную точку  $p \in M$ , пусть фундаментальная группа  $M$  генерируется замкнутыми контурами  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ , начинающимися и заканчивающимися в  $p$ . Далее рассмотрим  $W_A(\gamma_1), \dots, W_A(\gamma_l) \in \text{End } X_p$  — голономии плоской связности  $A$ . Данные операторы удовлетворяют всем соотношениям фундаментальной группы, таким образом,  $W_A$  задаёт представление  $\pi_1$ . С другой стороны, пусть  $A'$  задаёт эквивалентное представление, несложно показать, что для  $g(x \equiv \gamma(1)) = W_{A'}(\gamma) (W_A(\gamma))^{-1} \in \text{Hom}(X, X)$  не зависит от выбора  $\gamma$  (при условии  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = x$ ) и задаёт калибровочное преобразование между  $A$  и  $A'$  в виде (1).

Операторы  $M_1 \equiv W_A(\gamma_1), \dots, M_l \equiv W_A(\gamma_l) \in \text{End } X_p$  называются *монодромией* плоской связности  $A$ . Из предыдущих рассуждений следует, что их допустимые классы сопряжённости (т.е. удовлетворяющие соотношениям в  $\pi_1(M)$ ) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности плоских связностей на  $X$ . *Задачей изомодромных деформаций* называется одновременная гладкая деформация  $X$  и связности  $A$  сохраняющая  $M_1, \dots, M_n$ .

Первый явный пример такой системы был предложен Л.Шлезингером, в работе [27] было рассмотрено комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  с конечным числом проколов. На данном пространстве была определена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi(z)}{dz} = \sum_i \frac{S^i(\mathbf{x})}{z - x_i} \Psi(z), \quad (3)$$

где  $S^i(\mathbf{x})$  — некоторые постоянные по  $z$  матрицы. Условие сохранения монодромии линейной системы (3) при изменении положения проколов эквивалентно следующей системе уравнений в частных производных на матрицы  $S^i(\mathbf{x})$ :

$$\frac{\partial S^i}{\partial x_j} = \frac{[S^i, S^j]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial S^i}{\partial x_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{[S^i, S^j]}{x_i - x_j}. \quad (4)$$

## 0.2 Гамильтонов подход к уравнениям Пенлеве

В случае четырёх проколов и матриц  $2 \times 2$ , система (4) эквивалентна т.н. уравнению Пенлеве VI [28] (см. также Приложение А). Роль независимой переменной в данном подходе играет координата на пространстве модулей комплексных структур на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . В данном разделе мы разберём подход к задаче изомонодромных деформаций с точки зрения неавтономных гамильтоновых систем.

Гамильтонов подход к уравнениям Пенлеве изучался в работах К.Окамото [29–32], построенные гамильтонианы имели нетривиальную зависимость от импульса. В работе [33] уравнение Пенлеве VI было представлено в эллиптической форме (см. также [34, 35])

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = -2 \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 E_2'(u + \omega_\alpha, \tau), \quad (5)$$

где  $\omega_\alpha = \{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\}$  — соответствующие полупериоды эллиптической кривой, а  $E_2(z)$  — вторая функция Эйзенштейна (В.3) (см. Приложение В). В данной форме уравнение Пенлеве VI является уравнением движения частицы в нестационарном потенциале, соответствующий неавтономный гамильтониан и скобка Пуассона имеют вид

$$H^{\text{VI}} = v^2 - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 E_2(u + \omega_\alpha) \quad (6)$$

$$\{v, u\} = 1.$$

Для вычисления предела Иноземцева нам так-же понадобится следующая эквивалентная форма гамильтониана:

$$H^{\text{VI}} \cong H^{\text{VI}} - F(z) = v^2 - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 (E_2(u + \omega_\alpha) - E_2(z + \omega_\alpha)). \quad (7)$$

Различия между гамильтонианами (6) и (7) заключаются в сдвиге на функцию, не зависящую от динамических переменных.

В работе [9] М.А.Ольшанецкий и А.М.Левин показали, что пара Лакса интегрируемой эллиптической системы Калоджеро порождает линейную задачу изомонодромных деформаций на торе. В том числе было доказано, что частный случай уравнения Пенлеве VI (соответствующий специальному выбору постоянных параметров уравнения) может быть получен данным образом. Обобщение на случай произвольных параметров уравнения Пенлеве VI было построено А.В.Зотовым в работе [36]. Рассмотрим эллиптическую кривую с четырьмя отмеченными точками в полупериодах, варьируя параметр эллиптической кривой с одновременным перемещением двух отмеченных точек так, что они остаются в полупериодах (см. Рис. 1).

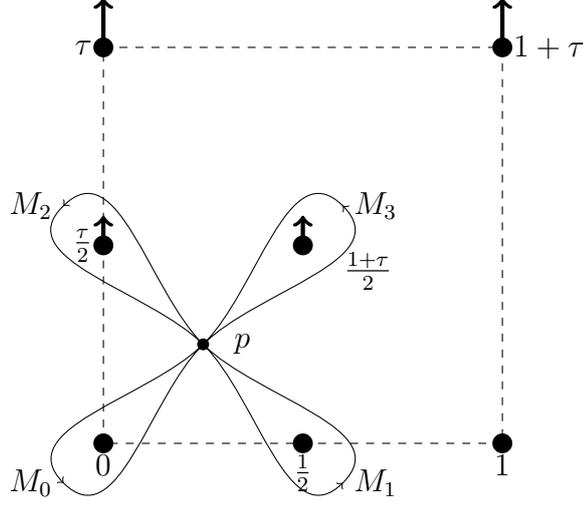


Рисунок 1 — Задача изомонодромных деформаций на эллиптической кривой с четырьмя проколами и одной отмеченной точкой.

Тогда уравнение Пенлеве VI может быть представлено в форме уравнения нулевой кривизны

$$\partial_\tau L^{\text{VI}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{VI}} = [L^{\text{VI}}, M^{\text{VI}}]. \quad (8)$$

для матриц

$$L^{\text{VI}} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 L_\alpha^{\text{VI}}, \quad L_\alpha^{\text{VI}} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_\alpha \varphi_\alpha(u + \omega_\alpha, z) \\ \nu_\alpha \varphi_\alpha(-u + \omega_\alpha, z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (9a)$$

$$M^{\text{VI}} = \sum_{\alpha=0}^3 M_\alpha^{\text{VI}}, \quad M_\alpha^{\text{VI}} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_\alpha f_\alpha(u + \omega_\alpha, z) \\ \nu_\alpha f_\alpha(-u + \omega_\alpha, z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (9b)$$

где функции  $\varphi_\alpha$ ,  $f_\alpha$  [37] определяются как (см. Приложение B):

$$\varphi_\alpha(u + \omega_\beta, z) = \mathbf{e}(z \partial_\tau \omega_\alpha) \phi(u + \omega_\beta, z),$$

$$f_\alpha(u + \omega_\beta, z) = \mathbf{e}(z \partial_\tau \omega_\alpha) \partial_w \phi(w, z) |_{w=u+\omega_\beta},$$

$$\phi(u, z) = \frac{\theta_{11}(u+z) \theta'_{11}(0)}{\theta_{11}(u) \theta_{11}(z)}.$$

В таком подходе неавтономное гамильтоново уравнение (5) является обобщением автономной гамильтоновой системы Калоджеро-Иноземцева

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -2 \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 E_2'(u + \omega_\alpha, \tau). \quad (10)$$

Аналог теоремы Лиувилля для неавтономных гамильтоновых систем требует рассмотрения расширенного фазового пространства с симплектической формой Пуанкаре-Картана

$$\delta v \wedge \delta u - \frac{1}{\kappa} \delta H \wedge \delta t.$$

где мы ввели параметр  $\kappa$  в определение  $H$  таким образом, что  $\kappa \rightarrow 0$  соответствует переходу в автономные системы.

### 0.3 Топологические квантовые теории поля

Квантовая теория поля на многообразии  $M$  называется топологической, если наблюдаемые данной теории не зависят от гладких диффеоморфизмов данного многообразия. Иными словами, группа симметрий данной теории включает в себя группу общековариантных преобразований.

Первый пример топологической квантовой теории поля был предложен А.С.Шварцем, который в классической работе [12] рассмотрел функционал действия

$$S_{abelian} = \exp(i\mathcal{L}_{abelian}), \quad \mathcal{L}_{abelian} = \int_M A \wedge dA, \quad (11)$$

где интегрирование производится по компактному трёхмерному многообразию  $M$ , а роль полевой переменной играет 1-форма на  $M$ . Метрика на многообразии  $M$  не входит в (11), таким образом, следовало бы ожидать инвариантность наблюдаемых данной теории относительно гладких деформаций многообразия  $M$ .

Поле 1-формы  $A$  в (11) можно интерпретировать как 1-форму связности на  $U(1)$ -расслоении над  $M$ . Обобщение (11) на случай связности на  $SU(N)$ -расслоении называется функционалом Черна-Саймонса:

$$S = \exp(i\mathcal{L}), \quad \mathcal{L} = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (12)$$

Данный функционал инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$A_i \rightarrow A_i - D_i \epsilon, \quad D_i \epsilon = \partial_i \epsilon + [A_i, \epsilon].$$

Классические уравнения движения теории Черна-Саймонса имеют вид уравнения нулевой кривизны

$$F_{i,j} = [D_i, D_j] = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j] = 0. \quad (13)$$

Соответственно, калибровочно инвариантная петля Вильсона  $W_R(\gamma)$  (голономия связности в комплексном представлении  $R$  группы  $SU(N)$  вдоль замкнутого контура  $\gamma$ )

$$W_R(\gamma) = \text{Tr}_R \text{Pexp} \int_{\gamma} A_i dx^i$$

на классических уравнениях движения (13) является инвариантной относительно гладких деформаций контура  $\gamma$ .

Следуя [14], определим пространство наблюдаемых в квантовой теории поля с действием (12). Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  — замкнутые контуры на  $M$  которые являются попарно непересекающимися. Далее выберем  $R_1, \dots, R_r$  — набор диаграмм Юнга, параметризующих комплексные представления  $SU(N)$ . Определим

$$\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r} = \int \mathcal{D}A \exp(i\mathcal{L}) \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\gamma_i). \quad (14)$$

Обобщение утверждения об общей ковариантности классической теории на общую ковариантность наблюдаемых (14) в соответствующей квантовой теории на первый взгляд выглядит наивным, действительно выбор калибровки явно нарушает топологическую инвариантность. Отсутствие квантовых аномалий в абелевом случае (11) является основным результатом работ [12, 13]. В работе [14] было показано, что в неабелевом случае для  $M = \mathbb{R}^3$  в разложении в пределе слабой связи  $k \rightarrow \infty$  наблюдаемые (14) действительно являются топологическими инвариантами (после надлежащего выбора фрейминга).

Более того, зависимость наблюдаемых от константы связи теории Черна-Саймонса обладает следующим свойством:  $\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}$  являются полиномами в терминах переменной

$$q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}}.$$

Поскольку наблюдаемые в квантовой теории Черна-Саймонса являются топологическими инвариантами, данный подход позволяет строить инварианты зацеплений с помощью квантовой теории поля. Одним из результатов фундаментальных работ [13, 14] является доказательство того факта, что при  $N = 2$  и  $R_1 = \dots = R_r = \square$  наблюдаемые  $\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}$  переходят в полиномы Джонса зацеплений. Данное наблюдение предложило эффективный метод явного вычисления наблюдаемых в квантовой теории Черна-Саймонса.

Зависимость от ранга  $N$  калибровочной группы  $SU(N)$  тоже может быть параметризована с использованием переменной  $a = q^N$ . Оказывается, что  $\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}$  является рациональной функцией от переменных  $a$  и  $q$ . Рассмотрим пример простейшего нетривиального узла.

**Пример 0.1** (Трефойл  $\mathcal{K} = 3_1$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ранг} \\ N = 2 \\ N = 3 \\ N = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{H}_{\square}^{3_1} \\ (q + q^{-1})(q^2 + q^6 - q^8) \\ (q^2 + 1 + q^{-2})(q^4 + q^8 - q^{12}) \\ (q^{-3} + q^{-1} + q + q^2)(q^6 + q^{10} - q^{16}) \end{array} \quad \mathcal{H}_{\square}^{3_1} = \frac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}}(a^2 q^{-2} + a^2 q^2 - a^4)$$

Для случая однокомпонентных зацеплений наблюдаемые  $\mathcal{H}_R^\gamma$  в терминах переменных  $a$  и  $q$  становятся полиномами Лорана при делении на соответствующую величину для неузла  $\mathcal{H}_R^\circ$ . Отношение  $\mathcal{H}_R^\gamma/\mathcal{H}_R^\circ$  называется *приведённым цветным полиномом Хомфли узла*. Пусть, для произвольного зацепления

$$H_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r} = \frac{\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}}{\prod_{i=1}^r \mathcal{H}_{R_i}^\circ}. \quad (15)$$

В соответствии с устоявшейся терминологией, мы называем величину  $H_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}$  *приведённым цветным полиномом Хомфли зацепления*, тогда как  $\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_r}^{\gamma_1, \dots, \gamma_r}$  — *неприведённым* цветным полиномом Хомфли зацепления, несмотря на то, что в общем случае данные величины являются рациональными функциями от  $a$  и  $q$ , а не полиномами Лорана.

#### 0.4 Статистическая сумма Оогури-Вафы и квантовые спектральные кривые зацеплений

Впервые идея о связи калибровочных теорий в пределе большого числа цветов  $N \rightarrow \infty$ <sup>1</sup> с теорией струн была предложена 'т Хофтом в классической работе [38]. Явный пример такого соответствия был построен М.Концевичем [39] связавшим предел  $N \rightarrow \infty$  матричного интеграла с кубическим взаимодействием с топологической теорией струн. Позднее, в работах [40–42] было показано, что определённые калибровочные теории в пределе 'т Хофта дуальны теории струн на антидэситтеровом фоне.

В главе 2 мы изучим пример дуальности построенный в работе [43]. Данная дуальность связывает между собой предел большого числа цветов калибровочной теории Черна-Саймонса на  $S^3$  и топологическую теорию струн на некомпактном трёхмерном многообразии Калаби-Яу (полученным с помощью раздутия  $O(-1) \times O(-1)$  расслоения над  $\mathbb{P}^1$ ). В работе [44] Х.Оогури и К.Вафа предложили подход к проверке данной гипотезы с помощью явных вычислений наблюдаемых в обеих теориях.

<sup>1</sup>Под пределом большого числа цветов мы всюду подразумеваем предел  $N \rightarrow \infty$  с одновременным скейлингом константы связи калибровочной теории  $g \rightarrow 0$  таким образом, что  $g^2 N = \text{const}$ . Данную константу также называют константой связи 'т Хофта.

# 1 Полевые обобщения иерархии изомонодромных деформаций

## 1.1 Общая конструкция полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций

Обозначим за  $\mathbf{T}_n = \mathbf{T} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  тор с  $n$  отмеченными точками. В данном разделе мы опишем получение полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций с помощью симплектической редукции пространства модулей связности на расслоении над  $\mathbf{T}_n$  с параболической структурой.

В подразделе 1.1.1 мы опишем пространство модулей голоморфных расслоений над  $\mathbf{T}_n$  и группу соответствующих калибровочных преобразований. Для конструкции полевых обобщений задачи изомонодромных деформаций нам понадобится ограничить группу калибровочных преобразований, а именно, мы рассмотрим калибровочные преобразования сохраняющие т.н. квазипараболическую структуру в отмеченных точках. В подразделе 1.1.2 мы приведём необходимые определения квазипараболической структуры в отмеченных точках, после чего в подразделе 1.1.4 мы опишем процедуру симплектической редукции позволяющую получить полевые обобщения задачи изомонодромных деформаций.

### 1.1.1 Пространство модулей плоских связностей

Рассмотрим гладкое векторное расслоение со связностью над  $\mathbf{T}_n$  со структурной группой Ли  $G$ , соответствующую алгебру Ли будем обозначать за  $\mathfrak{g}$ . Пусть на торе задана комплексная структура<sup>1</sup>, для наших целей будет удобно использовать локальные координаты  $z$  и  $\bar{z}$ . Тогда связность на данном расслоении имеет две компоненты:

$$\nabla = (\partial_z + A_z) \otimes dz + (\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}}) \otimes d\bar{z}.$$

Здесь  $A_z$  и  $A_{\bar{z}}$  являются компонентами 1-формы  $\mathcal{A} = (A_z, A_{\bar{z}})$  со значениями в линейных операторах на слое.

Группой калибровочных преобразований  $\mathcal{G}$  связности являются гладкие отображения  $f : \mathbf{T}_n \rightarrow G$ , их действие на 1-форму  $\mathcal{A}$  имеет следующий вид

$$A_z \rightarrow f^{-1} \partial_z f + f^{-1} A_z f, \quad A_{\bar{z}} \rightarrow f^{-1} \partial_{\bar{z}} f + f^{-1} A_{\bar{z}} f. \quad (1.1)$$

Сечение расслоения называется голоморфным, если оно аннигилируется антиголоморфной компонентой связности  $\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}}$ . Таким образом, пространство модулей  $Bun(\mathbf{T}_n, G)$  голоморфных расслоений на  $\mathbf{T}_n$  изоморфно следующему фактор-пространству

$$Bun(\mathbf{T}_n, G) = \{\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}}\} / \mathcal{G}. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>При этом, на данном этапе мы не предполагаем связность голоморфной.

На пространстве плоских связностей можно ввести следующую симплектическую структуру

$$\omega = \frac{1}{2} \int \delta \mathcal{A} \wedge \delta \mathcal{A} = \int \delta A_z \wedge \delta A_{\bar{z}}. \quad (1.3)$$

Данная симплектическая структура инварианта относительно калибровочных преобразований (1.1), таким образом она индуцирует симплектическую структуру на пространстве модулей гладких связностей  $Conn_{\mathbf{T}_n, G}$ .

### 1.1.2 Квазипараболическая структура и калибровочная группа

Зафиксируем разложение алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  на следующие подалгебры

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^\pm] = \mathfrak{n}^\pm.$$

Для простых алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  данное разложение эквивалентно разложению на подалгебру Картана, положительную и отрицательную нильпотентные подалгебры. Подалгебра  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{b}$  называется подалгеброй Бореля. Пусть  $B$  — соответствующая подгруппа Бореля. Классы сопряжённости  $G/B$  называются многообразием  $G$ -флагов  $Fl(G)$ .

Зафиксируем  $G$ -флаги  $Fl_a$ ,  $a \in \{1, \dots, n\}$  соответствующие отмеченным точкам на  $\mathbf{T}_n$  и рассмотрим только калибровочные преобразования  $f \in \mathcal{G}$ , которые продолжаются до гладкого отображения  $f' : \mathbf{T} \rightarrow G$ , причём  $f'(x_a)$ ,  $a \in \{1, \dots, n\}$  — преобразования слоя в отмеченных точках, сохраняют соответствующие флаги  $Fl_a$ . Иными словами,  $f'(x_a)$  в отмеченных точках могут принимать значения только в подгруппе Бореля  $B \subset G$ , т.е.  $f \in \mathcal{G}$  и  $t_a = z - x_a$ ,  $f'(t_a, \bar{t}_a)|_{t_a=0} \in B$ .  $\mathcal{G}_B$ . Мы обозначим соответствующую подгруппу калибровочных преобразований связности  $\mathcal{G}$  за  $\mathcal{G}_B \subset \mathcal{G}$ . По аналогии с (1.2), факторпространство  $\{\partial_{\bar{z}} + A_{\bar{z}}\}/\mathcal{G}_B$  является пространством модулей  $Bun(\mathbf{T}_n, G)$  голоморфных расслоений с квазипараболической структурой в отмеченных точках.

Рассмотрим орбиты коприсоединённого действия группы  $G$  на копиях коалгебры Ли  $\mathfrak{g}^*$  соответствующих отмеченным точкам

$$\mathcal{O}_a = \{S_a = Ad_g S_a^0, g \in G, S_a^0 \in \mathfrak{g}^*\}, \quad (a = 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

$\mathcal{O}_a$  можно наделять структурой симплектического многообразия с помощью симплектической формы Кириллова-Костанта  $\omega^{KK} = \delta \langle S^0, \delta g g^{-1} \rangle = \langle S, g^{-1} \delta g \wedge g^{-1} \delta g \rangle$ . Как следствие, можно снабдить пространство связностей  $Conn(\mathbf{T}_n, G)$  следующей симплектической формой

$$\omega + \sum_{a=1}^n \omega_a^{KK}, \quad \omega_a^{KK} = (S_a g^{-1} \delta g \wedge g^{-1} \delta g), \quad (1.5)$$

где  $\omega$  определена ранее в (1.3).

Напомним, связность  $\mathcal{A}$  называется плоской, если голономия данной связности не меняется при гладких деформациях контура. Локально, данное условие эквивалентно уравнению нулевой кривизны (2)

$$d\mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, уравнение (1.6) должно быть выполнено во всех внутренних точках  $\mathbf{T}_n$ . Наложим дополнительное ограничение на плоскую связность, а именно, потребуем чтобы плоская связность на расслоении с квазипараболической структурой имела сингулярности только логарифмического типа в отмеченных точках. Данное требование может быть записано следующим образом

$$FConn_{\mathbf{T}_n, G} = \{d + \mathcal{A} \mid d\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \sum_{a=1}^n S_a \delta(x_a)\}. \quad (1.7)$$

Алгебра Ли калибровочной группы  $Lie(\mathcal{G}_B) = \{\epsilon\}$  действует на пространстве связностей  $Conn_{(\mathbf{T}_n, G)}$  как  $\delta_\epsilon A_z = \partial_z \epsilon + [A_z, \epsilon]$ ,  $\delta_\epsilon A_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \epsilon + [A_{\bar{z}}, \epsilon]$ . Где  $\delta_\epsilon = di_\epsilon + i_\epsilon d$  может быть представлена как производная Ли. Соответствующее отображение моментов  $F : Conn(\mathbf{T}_n, G) \rightarrow Lie^*(\mathcal{G}_B)$  имеет вид  $i_\epsilon \omega = \int(\epsilon, \delta F)$ . Гамильтониан, задающий поток соответствующий инфинитезимальному калибровочному преобразованию  $\delta_\epsilon$ , приобретает вид

$$h^{gauge} = \int(\epsilon, F), \quad F = \bar{\partial}A - \partial\bar{A}' + [\bar{A}', A]. \quad (1.8)$$

### 1.1.3 Деформация комплексных структур

В работах [10, 11] был предложен подход к построению иерархий изомонодромных деформаций пространства модулей эллиптических кривых в случае расслоений конечного ранга. В данном подразделе мы повторим вывод работы [10] для расслоений бесконечного ранга.

Деформация комплексной структуры на  $\mathbf{T}_n$  описывается дифференциалами Бельтрами  $\mu$ . Для наших целей будет удобно воспользоваться подходом к дифференциалам Бельтрами изложенным в работе [10]. Рассмотрим инфинитезимальную гладкую деформацию  $\mathbf{T}_n$  заданную киральной заменой координат

$$w = z - \epsilon(z, \bar{z}), \quad \tilde{w} = \bar{z}.$$

С точностью до конформного множителя  $1 - \partial\epsilon(z, \bar{z})$  дифференциал  $dw$  имеет вид

$$dw = dz - \mu d\bar{z}, \quad \mu = \frac{\partial_z \epsilon(z, \bar{z})}{1 - \partial_z \epsilon(z, \bar{z})}. \quad (1.9)$$

В терминах  $\mu$  замена соответствующих частных производных при переходе к переменным  $(w, \tilde{w})$  имеет вид

$$\partial_{\tilde{w}} = \partial_{\bar{z}} + \mu \partial_z, \quad \partial_w = \partial_z.$$

Мы рассматриваем только такие деформации  $\epsilon$ , что соответствующий дифференциал Бельтрами зануляется на отмеченных точках

$$\mu \Big|_{x_a} = 0.$$

Для инфинитезимальных деформаций  $\epsilon$  определение (1.9) эквивалентно

$$\mu = \partial_{\bar{z}} \epsilon(z, \bar{z}). \quad (1.10)$$

. Определим 1-формы связности в терминах  $(w, \tilde{w})$

$$A_z = A, \quad A_{\bar{z}} = \bar{A} - \frac{1}{\kappa} \mu A_z.$$

Здесь мы ввели множитель  $\kappa$  в оба члена компоненты связности  $\kappa \partial_w + A$  для удобства изучения предела в интегрируемы теории поля.

#### 1.1.4 Симплектическая редукция

В данном подразделе мы опишем процедуру симплектической редукции на пространстве плоских связностей с ограничением (1.7). Симплектическая форма (1.5) инвариантна относительно калибровочных преобразований  $\mathcal{G}_B$

$$A \rightarrow f^{-1} \kappa \partial_w f + f^{-1} A f, \quad \bar{A} \rightarrow f^{-1} \partial_{\tilde{w}} f + f^{-1} \bar{A} f.$$

Зафиксируем  $\bar{A}$ , пусть  $\bar{L}$  параметризует орбиты действия группы  $\mathcal{G}_B$

$$\bar{A} = f \partial_{\tilde{w}} f^{-1} + f \bar{L} f^{-1}. \quad (1.11)$$

Дуальное поле получается из  $A$  с помощью того же самого элемента калибровочной группы  $f$

$$L = f^{-1} \kappa \partial_w f + f^{-1} A f, \quad (1.12)$$

Таким образом, в терминах локальных координат уравнение (1.7) приобретает вид

$$\partial_{\tilde{w}} L - \kappa \partial_w \bar{L} + [\bar{L}, L] = 2\pi i \sum_{a=1}^n S_a \delta(x_a). \quad (1.13)$$

Выберем набор непересекающихся открытых окрестностей  $U_a$  отмеченных точек  $x_a$ .<sup>2</sup> Зафиксируем калибровку таким образом, что  $\bar{L} = 0$  на  $U_a$ . Тогда гамильтониан задающий поток инфинитезимальных калибровочных преобразований  $h^{gauge}$  (1.8) принимает вид

$$h^{gauge} = \int_{U_a} (\epsilon, \partial_{\bar{w}} L).$$

Соответствующий нулевой уровень отображения моментов для действия  $\mathcal{G}_B$  принимает вид

$$\partial_{\bar{w}} L|_{U_a} = \sum_{a=1}^n S_a \delta^{(2)}(t_a, \bar{t}_a), \quad S_a \in \mathcal{O}_a, \quad \text{Res}_{x_a} L = S_a. \quad (1.14)$$

здесь и далее  $t_a = z - x_a$ . Аналогично конечномерному случаю [10] мы приходим к следующей ограниченной форме и гамильтонианам соответствующим деформациям комплексных структур

$$\omega_0 = \int \langle dL, d\bar{L} \rangle + \sum_{a=1}^n \omega_a^{KK}, \quad H_s(L) = \frac{1}{2} \int \langle L^2 \rangle \mu_s^0. \quad (1.15)$$

В следствии условия фиксации калибровки (1.13) данная система более не является свободной, поскольку  $L$  приобретает зависимость от  $\bar{L}$  и  $\mathbf{S}$ . Более того,  $L$  (а следовательно и гамильтонианы) приобретают явную зависимость от локальных координат  $\mathbf{t}$  на пространстве модулей комплексных структур, таким образом система (1.15) становится неавтономной. Введём обозначение  $M_s = \partial_s f f^{-1}$ . Используя (1.11) и (1.12) получаем уравнения движения

$$\begin{cases} 1. & \kappa \partial_s L - \kappa \partial M_s + [M_s, L] = 0, \quad s = 1, \dots, l, \\ 2. & \kappa \partial_s \bar{L} - (\bar{\partial} + \partial \mu) M_s + [M_s, \bar{L}] = L \mu_s^0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Уравнения (1.16) называются уравнениями Лакса для задачи изомонодромных деформаций. Отличие от уравнений Лакса для интегрируемых систем заключается в наличии дифференцирования  $\partial_w$  по спектральному параметру. Данные уравнения являются уравнениями совместности для следующей линейной системы

$$\begin{cases} 1. & (\kappa \partial + L) \psi = 0, \\ 2. & (\bar{\partial} + \sum_s t_s \mu_s^0 \partial + \bar{L}) \psi = 0, \\ 3. & (\kappa \partial_s + M_s) \psi = 0, \quad (s = 1, \dots, l_2). \end{cases} \quad (1.17)$$

Аналогичные уравнения для расслоений конечного ранга в работе [10] были названы Иерархией Изомонодромных Деформаций.

<sup>2</sup>Напомним, что мы рассматриваем только калибровочные преобразования сохраняющие квазипараболическую структуру, т.е.  $f(x_a, \bar{x}_a) \in B$ .

## 1.2 Уравнение изомонодромных деформаций для алгебры некоммутативного тора

Алгебра некоммутативного тора была введена в работах [45,46] как некоммутативное обобщение алгебры гладких функций на торе. В терминах генераторов и соотношений она определяется следующим образом, рассмотрим алгебру порождённую генераторами  $U_1, U_2$  удовлетворяющими соотношению

$$U_1 U_2 = e_{\hbar}^{-1} U_2 U_1, \quad e_{\hbar} = e^{2\pi i \hbar}. \quad (1.18)$$

Данную алгебру также называют *алгеброй квантовой группы* с двумя генераторами.

Из соотношения (1.18) следует, что некоммутативный тор  $\mathcal{T}_{\hbar}^2$  является плоской деформацией коммутативной алгебры гладких функций на торе. Действительно, сопоставим

$$U_1 \rightarrow e(x_1), \quad U_2 \rightarrow e(x_2), \quad e(x_1) * e(x_2) = e^{-2\pi i \hbar} e(x_2) * e(x_1).$$

Ассоциативное умножение  $*$  называется умножением Моеля. (см. Приложение Б). В первом нетривиальном порядке по  $\hbar$  данная ассоциативная алгебра порождает скобку Пуассона на гладких функциях на торе. Таким образом, алгебра некоммутативного тора является квантованием алгебры Ли скобок Пуассона гладких функций на торе (см. также [47]).

В данном разделе мы построим пример нелокальной неавтономной теории поля в размерности 2+1 с помощью изучения задачи изомонодромных деформаций для расслоений бесконечного ранга связанных с группой гладких автоморфизмов алгебры некоммутативного тора. В подразделе 1.2.1 мы определим неавтономное полевое обобщение волчка Эйлера-Арнольда для алгебры некоммутативного тора и покажем что уравнения движения данной теории поля являются гамильтоновыми. Далее, в подразделе 1.2.2 мы покажем, что гамильтоновы уравнения движения данной теории могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны. Наконец, в разделе 1.4 мы изучим целый ряд различных вырождений данной теории поля.

### 1.2.1 Неавтономный волчок для алгебры некоммутативного тора

Пусть  $\mathfrak{g} = \sin_{\hbar}$  — синус алгебра, тогда как  $\mathfrak{g}^* = \sin_{\hbar}^*$  соответствующая ей коалгебра Ли. Рассмотрим базис  $\{T^{\beta}\}$  (Б.3), (Б.15) на  $\sin_{\hbar}$ . Соответствующий базис на  $\sin_{\hbar}^*$  обозначим за  $S^{\alpha}$ . Скобка Пуассона на  $\sin_{\hbar}^*$  имеет следующий вид

$$\{S_{\alpha}, S_{\beta}\} = C_{\hbar}(\alpha, \beta) S_{\alpha+\beta}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}. \quad (1.19)$$

Функция

$$C_2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_{\alpha} S_{-\alpha} \quad (1.20)$$

является элементом Казимира для скобки (1.19). Рассмотрим представление (Б.11)

$$\mathbf{S}(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\gamma T^\gamma(x) \quad (1.21)$$

в терминах функций на некоммутативном торе. Тогда  $C_2$  может быть представлена в форме интеграла (Б.13)

$$C_2 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{T}_\theta^2} \mathbf{S}^2(x). \quad (1.22)$$

Пусть  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — вещественные числа, такие что  $0 < \hbar\epsilon_j < 1$  причём  $\hbar\epsilon_j$  является иррациональным числом. Определим функцию Вейерштасса на  $\Sigma_\tau$  (Б.6)

$$\wp_{\hbar}(\alpha) = \wp(\hbar(\epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2\tau|\tau)). \quad (1.23)$$

Определим оператор обратный моменту инерции волчка как диагональный оператор в базисе синус-алгебры со следующими собственными значениями

$$\mathbf{J} : \sin_\theta^* \rightarrow \sin_\theta, S_\alpha \rightarrow J_\alpha S_\alpha, J_\alpha = \wp_\theta(\alpha). \quad (1.24)$$

Можно переписать данный оператор в терминах полевых переменных  $\mathbf{S}(x)$ . Для этого введём комплексную структуру на  $\mathcal{T}_\hbar^2$  определив оператор  $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$  через действие на базисные элементы (Б.2)

$$\partial_{\bar{z}}(U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2}) = \theta(\epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\epsilon_2\alpha_2\tau)(U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2}). \quad (1.25)$$

Тогда оператор обратный моменту инерции становится псевдодифференциальным оператором следующего вида

$$J(\mathbf{S}(x)) = \wp(\partial_{\bar{z}})\mathbf{S}(x).$$

Определим гамильтониан как

$$H = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_\hbar^2} \mathbf{S}(x) \wp_{\hbar}(\partial_{\bar{z}})\mathbf{S}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\gamma \wp_{\hbar}(\gamma) S_{-\gamma}. \quad (1.26)$$

Фазовое пространство данной системы определяется как

$$\mathcal{R}^* = \{\mathbf{S} \mid C_2(\mathbf{S}) < \infty, H(\mathbf{S}) < \infty\}. \quad (1.27)$$

Уравнения движения неавтономного волчка Эйлера-Арнольда  $\kappa\partial_\tau\mathbf{S} = ad_{J(\mathbf{S})}^*\mathbf{S}$  для  $SIN_\theta$  с оператором обратным моменту инерции (1.24) принимают вид

$$\kappa\partial_\tau S_\alpha = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma \wp_\theta(\gamma) \mathbf{C}_\theta(\gamma, \alpha) \quad (1.28)$$

или, в терминах некоммутативных полей

$$\kappa \partial_\tau \mathbf{S}(x) = [\mathbf{S}(x), \wp(\partial_{\bar{z}}) \mathbf{S}(x)]_\theta \quad (1.29)$$

### 1.2.2 Представление Лакса

Теперь покажем, что уравнение (1.29) может быть представлено в форме уравнений нулевой кривизны. Далее мы предъявим явный вид соответствующих матриц Лакса. Рассмотрим расслоение бесконечного ранга  $\mathcal{P}$  со структурной группой  $SIN_{\hbar}$  (см. Б.19) над  $\mathbf{T}_1$  — комплексным тором с одной отмеченной точкой. Обозначим ассоциированное векторное расслоение за  $E_{\hbar} = \mathcal{P} \otimes_{SIN_{\hbar}} V$ . Определим следующие операции переклейки для сечений  $s \in \Gamma(E_{\hbar})$

$$\begin{cases} s(w+1) = Ad_{U_1^{-\epsilon_2}} s(w) \\ s(w+\tau) = Ad_{-e_\theta(-w-\frac{\tau}{2})U_2^{-\epsilon_1}} s(w) \end{cases}, \quad U_j \in SIN_{\hbar}. \quad (1.30)$$

Обратные операторы  $U_1^{-\epsilon_2}$ ,  $U_2^{-\epsilon_1}$  хорошо определены (Б.8) в терминах умножения Мояла (Б.11).

Определим связность на  $E_{\hbar}$

$$\begin{cases} \kappa \partial_w + L(w, \tilde{w}, \tau), \\ \partial_{\tilde{w}} + \tilde{L}(w, \tilde{w}, \tau). \end{cases}$$

Здесь  $L$  играет роль оператора Лакса. Для расслоений (1.30)  $\tilde{L}$  может быть устранена надлежащим выбором калибровки  $f^{-1} \partial_{\tilde{w}} f + f^{-1} \tilde{L} f = 0$ . В результате симплектической редукции мы приходим к уравнению нулевой кривизны 1.31.

Как и в случае конечномерных алгебр [10] оператор Лакса однозначно определяется следующими условиями:

1. Уравнение нулевой кривизны

$$\partial_{\tilde{w}} L = 0. \quad (1.31)$$

2. Условия квазипериодичности:

$$\begin{cases} L(w+1) = U_1^{-\epsilon_2} L^{(1)}(w) U_1^{\epsilon_2}, \\ L(w+\tau) = \tilde{\Lambda} L(w) \tilde{\Lambda}^{-1} + 2\pi i \theta, \end{cases} \quad \tilde{\Lambda}(w, \tau) = -e_\theta(-w - \frac{\tau}{2}) U_2^{-\epsilon_1}. \quad (1.32)$$

3. Согласованность с квазипараболической структурой:  $L$  имеет простой полюс в  $w = 0$  причём

$$Res|_{w=0} L(w) = \mathbf{S} - \kappa \theta \cdot Id, \quad (1.33)$$

где  $\mathbf{S}$  определены в (1.27).

**Лемма 1.1.** *Оператор Лакса имеет вид*

$$L(w) = -\kappa\theta E_1(w|\tau)Id + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha \varphi_{\theta\epsilon\alpha}(w) T^\alpha, \quad (1.34)$$

где  $E_1(w|\tau)$  (B.2) и  $\varphi_{\theta\epsilon\alpha}(z)$  (B.24).

*Доказательство*

Из (B.4) следует что

$$U_1^{-1} T^\alpha U_1 = \mathbf{e}_\theta(-1) T^\alpha, \quad U_2^{-1} T^\alpha U_2 = \mathbf{e}_\theta(1) T^\alpha, \quad \mathbf{e}_\theta(1) = \exp 2\pi i \theta.$$

Тогда (1.32) получается из (B.26), тогда как (1.33) из (B.2) и (B.8). ■

**Предложение 1.2.** *Уравнения движения неавтономного волчка (1.28) эквивалентны условию сохранения монодромии следующей системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} (\kappa \partial_w + L(w, \tilde{w}, \tau)) \psi = 0, \\ \partial_{\tilde{w}} \psi = 0. \end{cases}$$

Данные уравнения движения могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны

$$\kappa \partial_\tau L - \kappa \partial_w M + [M, L] = 0, \quad (1.35)$$

где  $L$  определяется (1.34),

$$M = -\frac{\kappa}{N} \partial_\tau \ln \vartheta(w; \tau) Id + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\gamma f_{\theta\epsilon\gamma}(w) T^\gamma, \quad (1.36)$$

а  $f_{\theta\epsilon\gamma}(w)$  определена в (B.25).

*Доказательство.*

Доказательство эквивалентности уравнений (1.28) и (1.35) основано на использовании формулы сложения для данной комбинации тета-функций (B.10) и уравнении теплопроводности (B.13). Подставим  $L$  (1.34) и  $M$  в (1.35). Тогда, в терминах базиса  $T^\alpha$  мы приходим к следующему уравнению

$$\kappa \partial_\tau (S_\alpha \varphi_{\theta\epsilon\alpha}(w)) - \kappa \partial_w (S_\alpha f_{\theta\epsilon\alpha}(w)) = \sum_{\gamma} S_{\alpha-\gamma} S_\gamma \mathbf{C}_\theta(\gamma, \alpha) \varphi_{\theta\epsilon(\alpha-\gamma)}(w) f_{\theta\epsilon\gamma}(w). \quad (1.37)$$

Левая часть данного уравнения

$$\kappa \partial_\tau (S_\alpha) \varphi_{\theta\epsilon\alpha}(w) + S_\alpha \left( \kappa \partial_\tau \varphi_{\theta\epsilon\alpha}(w) - \frac{1}{2\pi i} \kappa \partial_w f_{\theta\epsilon\alpha}(w) \right). \quad (1.38)$$

Выражение в скобках  $\kappa \partial_\tau \varphi_{\theta \epsilon \alpha}(w) - \frac{1}{2\pi i} \kappa \partial_w f_{\theta \epsilon \alpha}(w)$  зануляется в силу уравнения теплопроводности (B.13). С другой стороны, правая часть уравнения (1.37)

$$\sum_{\gamma} S_{\alpha-\gamma} S_{\gamma} C_{\theta}(\gamma, \alpha) f_{\alpha-\gamma}(w) \varphi_{\gamma}(w) = \sum_{\gamma} S_{\alpha-\gamma} S_{\gamma} C_{\theta}(\gamma, \alpha) \wp_{\theta}(\gamma) - \wp_{\theta}(\alpha - \gamma) \varphi_{\theta \epsilon \alpha}(w) \quad (1.39)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (B.10) из Приложения B. Сравнивая (1.38) с (1.39) мы приходим к уравнению движения системы. ■

### 1.3 Вырождение линейных задач для уравнения Пенлеве VI

#### 1.3.1 Тригонометрический предел, линейная задача для уравнения Пенлеве

##### V

В совместной работе автора диссертации с Г.А.Аминовым [16] был предложен способ получения новых линейных задач для уравнений Пенлеве III и Пенлеве V предельным переходом от эллиптической линейной задачи (8). Рассмотрим следующие два уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = C_0^2 \frac{\cos u}{\sin^3 u} + C_1^2 \frac{\sin u}{\cos^3 u} + C_2^2 e^{2t} \sin(4u) + C_2 C_3 e^t \sin(2u), \quad (1.40)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = C_0^2 \frac{\cos u}{\sin^3 u} + C_1^2 \frac{\sin u}{\cos^3 u} + C_4^2 e^t \sin(2u). \quad (1.41)$$

Уравнение (1.40) эквивалентно уравнению Пенлеве V в случае постоянных параметров в точке общего положения. Исключительный особый случай представлен уравнением (1.41). Вместе (1.40) и (1.41) описывают уравнение Пенлеве V для произвольного значения постоянных параметров. Несмотря на то, что уравнение (1.41) получается из уравнения (1.40) в следующем пределе

$$C_2 \rightarrow 0, \quad C_3 \rightarrow \infty, \quad C_2 C_3 \rightarrow \text{const} = C_4^2, \quad (1.42)$$

нам необходимо выделить частный случай, т.к. пара Лакса для уравнения (1.40) (см. раздел 1.3.1) расходится в пределе (1.42). Как следствие мы рассматриваем предельные переходы от уравнения Пенлеве VI к (1.40) и (1.41) по отдельности.

Основной составляющей обоих пределов является бесконечный сдвиг параметра  $\tau$  эллиптической кривой соответствующий пределу Иноземцева:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (1.43)$$

здесь  $\tau_1$  играет роль времени предельной системы, тогда как  $\tau_2$  является параметром сдвига с помощью которого мы определяем тригонометрический предел  $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$ . Различие между пределами в (1.40) и (1.41) заключается в различном выборе бесконечного сдвига координаты  $u$  и спектрального параметра  $z$  и различном скейлинге постоянных параметров уравнения Пенлеве VI.

Мы начнём с получения линейной задачи для уравнения (1.40).

### Линейная задача для уравнения (1.40)

Рассмотрим сдвиг параметра  $\tau$  эллиптической кривой описанный ранее,  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , как следствие

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau_1}.$$

Скейлинг постоянных параметров определяется главным членом разложения (9a), (9b) в тригонометрическом пределе  $Im \tau_2 \rightarrow +\infty$ :

$$\nu_0 = \frac{\tilde{\nu}_0}{\pi}, \quad \nu_1 = \frac{\tilde{\nu}_1}{\pi}, \quad \nu_2 = \frac{-\tilde{\nu}_2 q_2^{-\frac{1}{2}} + \tilde{\nu}_3}{2\pi}, \quad \nu_3 = \frac{\tilde{\nu}_2 q_2^{-\frac{1}{2}} + \tilde{\nu}_3}{2\pi},$$

где  $q_2 \equiv e(\tau_2)$ . Таким образом, предельный гамильтониан и пара Лакса имеют следующий вид:

$$H^V = v^2 - \frac{\tilde{\nu}_0^2}{\sin^2(\pi u)} - \frac{\tilde{\nu}_1^2}{\cos^2(\pi u)} - 8q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 \cos(2\pi u) + 8q_1 \tilde{\nu}_2^2 \cos(4\pi u), \quad (1.44)$$

$$\partial_{\tau_1} L^V - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^V = [L^V, M^V] = \{H^V, L^V\}, \quad (1.45)$$

где

$$H^V = \lim_{Im \tau_2 \rightarrow +\infty} H^{VI}, \quad q_1 \equiv e(\tau_1),$$

$$L^V = \lim_{Im \tau_2 \rightarrow +\infty} L^{VI} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha L_\alpha^V, \quad (1.46a)$$

$$L_0^V = \begin{pmatrix} 0 & \text{ctg}(\pi u) + \text{ctg}(\pi z) \\ -\text{ctg}(\pi u) + \text{ctg}(\pi z) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1^V = \begin{pmatrix} 0 & \text{ctg}(\pi z) - \text{tg}(\pi u) \\ \text{ctg}(\pi z) + \text{tg}(\pi u) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^V = 4q_1^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\pi(2u+z)) \\ \sin(\pi(2u-z)) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3^V = \frac{1}{\sin(\pi z)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^V = \lim_{Im \tau_2 \rightarrow +\infty} M^{VI} = \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha M_\alpha^V, \quad (1.46b)$$

$$M_0^V = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi u)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1^V = -\frac{\pi}{\cos^2(\pi u)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2^V = -8\pi q_1^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\pi(2u+z)) \\ \cos(\pi(2u-z)) & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^V = 0.$$

Предельный гамильтониан (1.44) совпадает с известным результатом полученным К.Такасаки [48]. Соответствующие гамильтоновы уравнения движения

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau_1} = 2v, \\ \frac{dv}{d\tau_1} = -2\pi\tilde{\nu}_0^2 \frac{\cos(\pi u)}{\sin^3(\pi u)} + 2\pi\tilde{\nu}_1^2 \frac{\sin(\pi u)}{\cos^3(\pi u)} - 16\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 \sin(2\pi u) + 32\pi q_1 \tilde{\nu}_2^2 \sin(4\pi u), \end{cases}$$

или, эквивалентно

$$\frac{d^2u}{d\tau_1^2} = -4\pi\tilde{\nu}_0^2 \frac{\cos(\pi u)}{\sin^3(\pi u)} + 4\pi\tilde{\nu}_1^2 \frac{\sin(\pi u)}{\cos^3(\pi u)} - 32\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 \sin(2\pi u) + 64\pi q_1 \tilde{\nu}_2^2 \sin(4\pi u).$$

представляются в форме уравнений нулевой кривизны (1.45).

### Линейная задача для уравнения (1.41)

В данном пределе мы рассмотрим сдвиг (1.43) параметра  $\tau$  эллиптической кривой, и аналогичные сдвиги координаты и спектрального параметра:

$$u = \tilde{u} - \frac{\tau}{2}, \quad z = \tilde{z} - \frac{\tau}{2}. \quad (1.47)$$

Скейлинг постоянных параметров уравнения определяется предельным поведением гамильтониана (6). В результате:

$$\nu_0 = \frac{i\tilde{\nu}_2 q_2^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \nu_1 = \frac{\tilde{\nu}_3 q_2^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \nu_2 = \frac{\tilde{\nu}_0}{\pi}, \quad \nu_3 = \frac{\tilde{\nu}_1}{\pi}.$$

Поскольку  $\tau_1$  соответствует переменной времени предельной системы, сдвиги (1.47) являются зависящими от времени, как следствие,

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau_1} = \frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} - \frac{1}{2}. \quad (1.48)$$

Гамильтониан предельной системы отличается на линейную добавку от предела исходного гамильтониана

$$H^V = \lim_{Im \tau_2 \rightarrow +\infty} H^{VI} + \frac{1}{2}v + \frac{1}{16}.$$

Подставляя в данное выражение гамильтониан уравнения Пенелеве VI (6) мы получаем

$$H^V = \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{\tilde{\nu}_0^2}{\sin^2(\pi\tilde{u})} - \frac{\tilde{\nu}_1^2}{\cos^2(\pi\tilde{u})} - 4(\tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2) q_1^{1/2} \cos(2\pi\tilde{u}). \quad (1.49)$$

Для получения сходящихся матриц Лакса необходимо произвести калибровочное преобразование (сингулярное в тригонометрическом пределе)

$$L^{VI} \rightarrow gL^{VI}g^{-1}, \quad M^{VI} \rightarrow gM^{VI}g^{-1},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_2^{-1/4} \end{pmatrix}.$$

Поскольку сдвиг спектрального параметра в рассматриваемой предельной процедуре зависит от времени, уравнение (8) приобретает вид

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{VI}} - \partial_{\tilde{z}} \left( \frac{1}{2\pi i} M^{\text{VI}} - \frac{1}{2} L^{\text{VI}} \right) = [L^{\text{VI}}, M^{\text{VI}}],$$

где  $L^{\text{VI}} = L^{\text{VI}}(\tilde{u} - \tau/2, v, \tilde{z} - \tau/2, \tau)$ ,  $M^{\text{VI}} = M^{\text{VI}}(\tilde{u} - \tau/2, \tilde{z} - \tau/2, \tau)$ . Таким образом, линейная задача уравнения (1.41) получается с помощью следующей предельной процедуры

$$L^{\text{V}} = 2\pi i \lim_{\text{Im}\tau_2 \rightarrow +\infty} g L^{\text{VI}} g^{-1}, \quad M^{\text{V}} = \lim_{\text{Im}\tau_2 \rightarrow +\infty} g (M^{\text{VI}} - \pi i L^{\text{VI}}) g^{-1}.$$

Соответствующее уравнения нулевой кривизны (8) приобретает вид

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{V}} - \partial_{\tilde{z}} M^{\text{V}} = [L^{\text{V}}, M^{\text{V}}], \quad (1.50)$$

где

$$L^{\text{V}} = 2\pi i \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha L_\alpha^{\text{V}}, \quad (1.51)$$

$$L_0^{\text{V}} = \frac{2\pi i}{\sin(\pi \tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{-1/4} \\ -e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{1/4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1^{\text{V}} = \frac{2\pi i}{\cos(\pi \tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & i e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{-1/4} \\ i e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{1/4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^{\text{V}} = 2\sqrt{2}\pi i \begin{pmatrix} 0 & e^{2\pi i(\tilde{u}+\tilde{z})} - 1 \\ -2i e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{1/2} \sin(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3^{\text{V}} = -2\sqrt{2}\pi \begin{pmatrix} 0 & e^{2\pi i(\tilde{u}+\tilde{z})} + 1 \\ 2e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} q_1^{1/2} \cos(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{\text{V}} = i\pi \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha M_\alpha^{\text{V}}, \quad (1.52)$$

$$M_0^{\text{V}} = -\pi \frac{\cos(\pi \tilde{u})}{\sin^2(\pi \tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & q_1^{-1/4} e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} \\ q_1^{1/4} e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1^{\text{V}} = i\pi \frac{\sin(\pi \tilde{u})}{\cos^2(\pi \tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & q_1^{-1/4} e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} \\ -q_1^{1/4} e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2^{\text{V}} = \sqrt{2}\pi i \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{2i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} \\ q_1^{1/2} (e^{-2i\pi\tilde{z}} + e^{-2i\pi\tilde{u}}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3^V = \sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{2i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})} \\ q_1^{1/2} (e^{-2i\pi\tilde{z}} - e^{-2i\pi\tilde{u}}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Пара Лакса (1.51), (1.52) упрощается с помощью следующего калибровочного преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^V &= \tilde{g}L^V\tilde{g}^{-1} - (\partial_{\tilde{z}}\tilde{g})\tilde{g}^{-1}, & \tilde{M}^V &= \tilde{g}M^V\tilde{g}^{-1} - (\partial_{\tau_1}\tilde{g})\tilde{g}^{-1}, \\ \tilde{g} &= \begin{pmatrix} q_1^{1/8} e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})/2} & 0 \\ 0 & q_1^{-1/8} e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

После данного выбора калибровки, переменная  $v$  входит в матрицу Лакса  $\tilde{L}^V$  со сдвигом  $v + \frac{1}{4}$ , аналогичным сдвигу в формуле (1.49) для гамильтониана, т.е.,

$$\tilde{L}^V = 2\pi i \begin{pmatrix} v + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -v - \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha \tilde{L}_\alpha^V, \quad (1.54a)$$

$$\tilde{L}_0^V = \frac{2\pi i}{\sin(\pi\tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_1^V = -\frac{2\pi}{\cos(\pi\tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_2^V = 4\sqrt{2}\pi q_1^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\pi(\tilde{u}+\tilde{z})) \\ \sin(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_3^V = -4\sqrt{2}\pi q_1^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\pi(\tilde{u}+\tilde{z})) \\ \cos(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя гамильтоновы уравнения движения для переменной  $\tilde{u}$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} = \{H^V, \tilde{u}\} = 2v + \frac{1}{2},$$

можно убедиться в том, что преобразование (1.53) исключает  $v$  из второй матрицы Лакса (1.52), а именно,

$$\tilde{M}^V = \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha \tilde{M}_\alpha^V, \quad (1.54b)$$

$$\tilde{M}_0^V = -\pi \frac{\cos(\pi\tilde{u})}{\sin^2(\pi\tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1^V = i\pi \frac{\sin(\pi\tilde{u})}{\cos^2(\pi\tilde{u})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_2^V = 2\sqrt{2}\pi i q_1^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\pi(\tilde{u}+\tilde{z})) \\ \cos(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_3^V = 2\sqrt{2}\pi i q_1^{1/4} \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\pi(\tilde{u}+\tilde{z})) \\ \sin(\pi(\tilde{u}-\tilde{z})) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы показать, что уравнения (1.50) и (1.41) являются эквивалентными, представим (1.50) в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} = 2v + \frac{1}{2}, \\ \frac{dv}{d\tau_1} = -2\pi\tilde{\nu}_0^2 \frac{\cos(\pi\tilde{u})}{\sin^3(\pi\tilde{u})} + 2\pi\tilde{\nu}_1^2 \frac{\sin(\pi\tilde{u})}{\cos^3(\pi\tilde{u})} - 8\pi q_1^{\frac{1}{2}} (\tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2) \sin(2\pi\tilde{u}). \end{cases}$$

Исключая  $v$  мы получаем

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tau_1^2} = -4\pi\tilde{\nu}_0^2 \frac{\cos(\pi\tilde{u})}{\sin^3(\pi\tilde{u})} + 4\pi\tilde{\nu}_1^2 \frac{\sin(\pi\tilde{u})}{\cos^3(\pi\tilde{u})} - 16\pi q_1^{\frac{1}{2}} (\tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2) \sin(2\pi\tilde{u}).$$

### 1.3.2 Предел Иноземцева, линейная задача для уравнения Пенлеве III

В данном разделе мы предложим предельную процедуру которая переводит эллиптическую линейную задачу (9) для уравнения Пенлеве VI в линейные задачи соответствующие следующим двум уравнениям:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = C_0^2 e^{2t+2u} + C_2^2 e^{2t-2u} + C_0 C_1 e^{t+u} + C_2 C_3 e^{t-u}, \quad (1.55)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = C_2^2 e^{2t-2u} + C_0^2 e^{t+u} + C_2 C_3 e^{t-u}. \quad (1.56)$$

Уравнение (1.55) эквивалентно уравнению Пенлеве III для значения постоянных в точке общего положения, тогда как уравнение (1.56) соответствует исключительному частному случаю. Вместе данные уравнения описывают уравнение Пенлеве III (A.2) для произвольных значений параметров. В разделах 1.3.2 и 1.3.2 будут построены линейные задачи для уравнений (1.55) и (1.56) соответственно.

Рассмотренные процедуры вырождения линейной задачи для уравнения Пенлеве VI основаны на т.н. пределе Иноземцева и различаются сдвигами координат, спектрального параметра и скейлингом констант связи. Следуя описанному ранее методу рассмотрим сдвиг параметра эллиптической кривой  $\tau$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (1.57)$$

где  $\tau_1$  играет роль времени в предельной системе, а  $\tau_2$  — параметра тригонометрического предела. Для получения линейной задачи уравнения Пенлеве III мы воспользуемся следующим сдвигом координат

$$u = \tilde{u} + \frac{\tau}{4}, \quad (1.58)$$

после чего возьмём тригонометрический предел  $Im \tau_2 \rightarrow +\infty$ .

#### Линейная задача для уравнения (1.55)

Для получения линейной задачи для уравнения (1.55) уравнения Пенлеве III для случая констант в точке общего положения мы воспользуемся подстановкой (1.57) и сдвигом координаты  $u$  (1.58) после чего перейдём к тригонометрическому пределу  $Im \tau_2 \rightarrow +\infty$ . Из разложения

матриц Лакса (9a), (9b) в ряд по переменной  $q$  можно определить надлежащий скейлинг констант связи

$$\nu_0 = \frac{\tilde{\nu}_0 q_2^{-\frac{1}{4}} + \tilde{\nu}_1}{2\pi}, \quad \nu_1 = \frac{-\tilde{\nu}_0 q_2^{-\frac{1}{4}} + \tilde{\nu}_1}{2\pi}, \quad \nu_2 = \frac{\tilde{\nu}_2 q_2^{-\frac{1}{4}} + \tilde{\nu}_3}{2\pi}, \quad \nu_3 = \frac{-\tilde{\nu}_2 q_2^{-\frac{1}{4}} + \tilde{\nu}_3}{2\pi}. \quad (1.59)$$

Поскольку  $\tau_1$  играет роль времени системы, сдвиг (1.58) координаты  $u$  является зависящим от времени, таким образом

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\tau_1} = \frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} + \frac{1}{4}. \quad (1.60)$$

Следовательно, гамильтониан предельной системы получается в результате следующего предела

$$H^{\text{III}} = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} H^{\text{VI}} - \frac{1}{4}v + \frac{1}{64}.$$

Подставляя гамильтониан для уравнения Пенлеве VI (6), мы получаем

$$H^{\text{III}} = \left(v - \frac{1}{8}\right)^2 + 4q_1^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_0^2 e^{4\pi i\tilde{u}} + 4q_1^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_2^2 e^{-4\pi i\tilde{u}} + 4q_1^{\frac{1}{4}}\tilde{\nu}_0\tilde{\nu}_1 e^{2\pi i\tilde{u}} + 4q_1^{\frac{1}{4}}\tilde{\nu}_2\tilde{\nu}_3 e^{-2\pi i\tilde{u}}. \quad (1.61)$$

Уравнение Пенлеве VI в форме уравнения нулевой кривизны (8) сохраняет свою форму в данном пределе

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{III}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{III}} = [L^{\text{III}}, M^{\text{III}}], \quad (1.62)$$

где

$$L^{\text{III}} = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} L^{\text{VI}} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha L_\alpha^{\text{III}}, \quad (1.63a)$$

$$L_0^{\text{III}} = 2iq_1^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i\tilde{u}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1^{\text{III}} = \begin{pmatrix} 0 & -i + \text{ctg}(\pi z) \\ i + \text{ctg}(\pi z) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^{\text{III}} = 2iq_1^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi(2\tilde{u}+z)} \\ -e^{-i\pi(2\tilde{u}-z)} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3^{\text{III}} = \frac{1}{\sin(\pi z)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{\text{III}} = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} M^{\text{VI}} = \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha M_\alpha^{\text{III}}, \quad (1.63b)$$

$$M_0^{\text{III}} = 4\pi q_1^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i\tilde{u}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^{\text{III}} = 0,$$

$$M_2^{\text{III}} = 4\pi q_1^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi(2\tilde{u}+z)} \\ e^{-i\pi(2\tilde{u}-z)} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^{\text{III}} = 0.$$

Уравнение (1.62) эквивалентно следующей системе гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} = \{H^{\text{III}}, \tilde{u}\} = 2v - \frac{1}{4}, \\ \frac{dv}{d\tau_1} = \{H^{\text{III}}, v\} = -16i\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_0^2 e^{4\pi i \tilde{u}} + 16i\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_2^2 e^{-4\pi i \tilde{u}} - 8i\pi q_1^{\frac{1}{4}} \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1 e^{2\pi i \tilde{u}} + 8i\pi q_1^{\frac{1}{4}} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 e^{-2\pi i \tilde{u}}. \end{cases}$$

Или, исключая переменную  $v$

$$\frac{d^2 u}{d\tau_1^2} = -32i\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_0^2 e^{4\pi i \tilde{u}} + 32i\pi q_1^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_2^2 e^{-4\pi i \tilde{u}} - 16i\pi q_1^{\frac{1}{4}} \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_1 e^{2\pi i \tilde{u}} + 16i\pi q_1^{\frac{1}{4}} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 e^{-2\pi i \tilde{u}}, \quad (1.64)$$

получаем уравнение (1.55) с точностью до замены постоянных.

### Линейная задача для уравнения (1.56)

Теперь воспользуемся подстановкой (1.57) параметра  $\tau$  эллиптической кривой, сдвигом координаты (1.58) и сдвигом спектрального параметра

$$z = \tilde{z} + \frac{\tau}{4}.$$

Рассмотрев разложение гамильтониана уравнения Пенлеве VI (6) в ряд по степеням  $q$  мы получаем следующие скейлинги констант связи:

$$\nu_0 = \frac{\tilde{\nu}_0 q_2^{-1/8}}{2\pi}, \quad \nu_1 = \frac{i\tilde{\nu}_1 q_2^{-1/8}}{2\pi}, \quad \nu_2 = \frac{\tilde{\nu}_2 q_2^{-1/4} + \tilde{\nu}_3}{2\pi}, \quad \nu_3 = \frac{-\tilde{\nu}_2 q_2^{-1/4} + \tilde{\nu}_3}{2\pi}.$$

Как было упомянуто в разделе 1.3.2, сдвиг координаты (1.58) является зависящим от времени. Таким образом, гамильтониан предельной системы связан с пределом гамильтониана уравнения Пенлеве VI следующим образом

$$H^{\text{III}} = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} H^{\text{VI}} - \frac{1}{4}v + \frac{1}{64}.$$

Подставляя (6) мы получаем

$$H^{\text{III}} = \left(v - \frac{1}{8}\right)^2 + (\tilde{\nu}_0^2 + \tilde{\nu}_1^2) q_1^{1/4} e^{2i\pi \tilde{u}} + 4\tilde{\nu}_2^2 q_1^{1/2} e^{-4i\pi \tilde{u}} + 4\tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 q_1^{1/4} e^{-2i\pi \tilde{u}}. \quad (1.65)$$

Для того, чтобы получить сходящиеся матрицы Лакса, необходимо рассмотреть следующее калибровочное преобразование, сингулярное в тригонометрическом пределе

$$L^{\text{VI}} \rightarrow gL^{\text{VI}}g^{-1}, \quad M^{\text{VI}} \rightarrow gM^{\text{VI}}g^{-1},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_2^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

В результате сдвига спектрального параметра, уравнение нулевой кривизны (8) принимает следующий вид

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{VI}} - \partial_{\tilde{z}} \left( \frac{1}{2\pi i} M^{\text{VI}} + \frac{1}{4} L^{\text{VI}} \right) = [L^{\text{VI}}, M^{\text{VI}}],$$

где  $L^{\text{VI}} = L^{\text{VI}}(\tilde{u} + \tau/4, v, \tilde{z} + \tau/4, \tau)$ ,  $M^{\text{VI}} = M^{\text{VI}}(\tilde{u} + \tau/4, \tilde{z} + \tau/4, \tau)$ . Таким образом, для предельных матриц Лакса мы имеем

$$L^{\text{III}} = 2\pi i \lim_{\text{Im}\tau_2 \rightarrow +\infty} g L^{\text{VI}} g^{-1}, \quad M^{\text{III}} = \lim_{\text{Im}\tau_2 \rightarrow +\infty} g \left( M^{\text{VI}} + \frac{\pi i}{2} L^{\text{VI}} \right) g^{-1}.$$

В терминах  $L^{\text{III}}$  и  $M^{\text{III}}$  уравнение движения вновь приобретает форму уравнения нулевой кривизны

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{III}} - \partial_{\tilde{z}} M^{\text{III}} = [L^{\text{III}}, M^{\text{III}}], \quad (1.66)$$

где

$$L^{\text{III}} = 2\pi i \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha L_\alpha^{\text{III}}, \quad (1.67a)$$

$$L_0^{\text{III}} = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1^{1/4} (e^{2i\pi\tilde{z}} - e^{2i\pi\tilde{u}}) & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1^{\text{III}} = 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1^{1/4} (e^{2i\pi\tilde{u}} + e^{2i\pi\tilde{z}}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2^{\text{III}} = -4\pi q_1^{1/8} e^{-2i\pi\tilde{u}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi\tilde{z}} \\ -q_1^{1/4} e^{i\pi\tilde{z}} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3^{\text{III}} = 4\pi q_1^{1/8} e^{i\pi\tilde{z}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{\text{III}} = \frac{i\pi}{2} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\nu}_\alpha M_\alpha^{\text{III}}, \quad (1.67b)$$

$$M_0^{\text{III}} = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1^{1/4} (3e^{2i\pi\tilde{u}} + e^{2i\pi\tilde{z}}) & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^{\text{III}} = \frac{i\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{2i\pi\tilde{z}} - 3e^{2i\pi\tilde{u}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2^{\text{III}} = \pi q_1^{1/8} \begin{pmatrix} 0 & 3e^{-i\pi(2\tilde{u}+\tilde{z})} \\ 5q_1^{1/4} e^{-i\pi(2\tilde{u}-\tilde{z})} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^{\text{III}} = \pi q_1^{1/8} e^{i\pi\tilde{z}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично разделу 1.3.1 можно исключить переменную  $v$  из второй матрицы Лакса  $M^{\text{III}}$  (1.67b) с помощью следующего калибровочного преобразования

$$L^{\text{III}} \rightarrow \tilde{g} L^{\text{III}} \tilde{g}^{-1} - (\partial_{\tilde{z}} \tilde{g}) \tilde{g}^{-1}, \quad M^{\text{III}} \rightarrow \tilde{g} M^{\text{III}} \tilde{g}^{-1} - (\partial_{\tau_1} \tilde{g}) \tilde{g}^{-1},$$

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} q_1^{1/32} e^{i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})/4} & 0 \\ 0 & q_1^{-1/32} e^{-i\pi(\tilde{u}+\tilde{z})/4} \end{pmatrix}.$$

В результате мы получаем матрицу Лакса  $L^{\text{III}}$  (1.67a) в которую  $v$  входит с тем же сдвигом  $v - \frac{1}{8}$  что и в гамильтониан (1.65).

Уравнение нулевой кривизны (1.66) эквивалентно гамильтоновым уравнениям движения

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau_1} = \{H^{\text{III}}, \tilde{u}\} = 2v - \frac{1}{4}, \\ \frac{dv}{d\tau_1} = -2i\pi q_1^{1/4} (\tilde{\nu}_0^2 + \tilde{\nu}_1^2) e^{2i\pi\tilde{u}} + 16i\pi q_1^{1/2} \tilde{\nu}_2^2 e^{-4i\pi\tilde{u}} + 8i\pi q_1^{1/4} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 e^{-2i\pi\tilde{u}}. \end{cases}$$

Исключая переменную  $v$  из данной системы получаем уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tau_1^2} = -4i\pi q_1^{1/4} (\tilde{\nu}_0^2 + \tilde{\nu}_1^2) e^{2i\pi\tilde{u}} + 32i\pi q_1^{1/2} \tilde{\nu}_2^2 e^{-4i\pi\tilde{u}} + 16i\pi q_1^{1/4} \tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_3 e^{-2i\pi\tilde{u}},$$

совпадающее с (1.56) с точностью до замены произвольных постоянных.

## 1.4 Вырождение линейных задач для полевых уравнений в алгебре некоммутативного тора

### 1.4.1 Тригонометрический предел

Тригонометрический предел соответствует пределу  $Im(\tau) \rightarrow +\infty$ , где  $\tau$  — параметр эллиптической кривой  $\tau = \omega_2/\omega_1$ . В данном пределе эллиптическая кривая переходит в пережатый тор. Для наших целей будет удобно рассматривать пережатый тор как бесконечный комплексный цилиндр с одной дополнительной точкой на бесконечности. В рассмотренных нами неавтономных системах  $\tau$  также является переменной времени, поэтому мы более не можем его рассматривать как самостоятельный параметр. Геометрически данный предел неавтономных уравнений соответствует асимптотическому разложению при больших значениях мнимой части  $\tau$ , что эквивалентно представлению  $\tau$  в виде следующей комбинации

$$\tau = \tau^{tr} \tau_2,$$

где  $\tau^{tr}$  играет роль времени, тогда как  $\tau_2$  является свободным масштабным параметром. С помощью данной подстановки уравнения движения (1.28) преобразуются тривиальным образом. Параметр эллиптической кривой  $\tau$  в исходной системе имеет следующее ограничение  $Im(\tau) > 0$ . Далее мы подразумеваем  $\tau^{tr}$  вещественным и  $\tau^{tr} > c > 0$  для некоторого заданного  $c$ , тогда как  $Im(\tau_2) > 0$ . Далее, мы рассматриваем предел  $Im(\tau_2) \rightarrow +\infty$  одновременно с  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$  таким образом, что величины

$$\hbar\epsilon_2\tau_2 = \tilde{\epsilon}_2, \quad \frac{\kappa}{\tau_2} = \tilde{\kappa}, \quad \frac{w}{\tau_2} = \tilde{w}$$

сохраняются постоянными. Данная подстановка в терминах уравнения Лакса (1.35) соответствует замене  $\kappa$  и  $w$  на  $\tilde{\kappa}$  и  $\tilde{w}$  соответственно. Используя разложение (B.36) мы получаем предельный гамильтониан

$$H^{tr} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha S_{-\alpha} \sin^{-2}(\pi(\tilde{\epsilon}_1\alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tau^{tr})), \quad (1.68)$$

где  $\tilde{\epsilon}_1 = \hbar\epsilon_1$ . Соответствующие гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\tilde{\kappa}\partial_{\tau^{tr}}S_\alpha = \pi^2 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} \frac{\mathbf{C}_\hbar(\gamma, \alpha) S_{\alpha+\gamma} S_{-\gamma}}{\sin^2(\pi(\tilde{\epsilon}_1\gamma_1 + \tilde{\epsilon}_2\gamma_2\tau^{tr}))}. \quad (1.69)$$

Данные уравнения являются неавтономным аналогом уравнений движения волчка Эйлера-Арнольда для следующего оператора обратного моменту инерции

$$J = \{\pi^2 \sin^{-2}(\tilde{\epsilon}_1\alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tau^{tr})\}.$$

Ограничимся областью  $0 < \text{Re}(\tilde{w}) < 1$ , тогда гамильтоновы уравнения движения могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны

$$\tilde{\kappa}\partial_{\tau^{tr}}L^{tr} - \tilde{\kappa}\partial_{\tilde{w}}M^{tr} + [M^{tr}, L^{tr}] = 0, \quad (1.70)$$

тригонометрические операторы Лакса  $L^{tr}, M^{tr}$  получаются с помощью предела из соответствующих эллиптических операторов

$$L^{tr} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} L, \quad M^{tr} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} M,$$

где  $q_2 \equiv \mathbf{e}(\tau_2)$ . Используя (B.40) и (B.41) получаем следующий предел пары Лакса

$$L^{tr}(w) = \pi \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha \mathbf{e}(\tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tilde{w}) (\cot(\pi(\tilde{\epsilon}_1\alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tau^{tr})) + \iota) T^\alpha, \quad (1.71)$$

$$M^{tr}(w) = \frac{\pi}{2\iota} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha \frac{\mathbf{e}(\tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tilde{w})}{\sin^2(\pi(\tilde{\epsilon}_1\alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2\alpha_2\tau^{tr}))} T^\alpha, \quad (1.72)$$

### 1.4.2 Рациональный предел

Здесь мы продолжим вырождение тригонометрической системы полученной в предыдущем разделе с целью получения т.н. рационального предела полевых уравнений. Конструкция данного предельного перехода мотивирована рациональным пределом конечномерной задачи изомонодромных деформаций.

Произведём следующую подстановку

$$\tau^{tr} = \tau^r a^2, \quad \tilde{w} = w^r a, \quad \tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1^r a, \quad \tilde{\epsilon}_2 = \frac{\epsilon_2^r}{a},$$

где параметр  $a$  в конечномерном случае соответствовал обратной величине одного из двух периодов тора  $a \propto 1/\omega_1$ . После данной подстановки для  $\tau^r$  и  $w^r$  необходимо произвести скейлинг матриц Лакса и гамильтониана таким образом, чтобы сохранить вид уравнения нулевой кривиз-

ны в пределе  $a \rightarrow 0$

$$H^r = \lim_{a \rightarrow 0} a^2 H^{tr}, \quad L^r = \lim_{a \rightarrow 0} a L^{tr}, \quad M^r = \lim_{a \rightarrow 0} a^2 M^{tr}.$$

Таким образом, для гамильтониана получаем

$$H^r = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} \frac{S_\alpha S_{-\alpha}}{(\epsilon_1^r \alpha_1 + \epsilon_2^r \alpha_2 \tau^r)^2}. \quad (1.73)$$

Соответствующие гамильтоновы уравнения движения имеют вид (1.29)

$$\kappa^r \partial_{\tau^r} \mathbf{S}(x) = [\mathbf{S}(x), (\partial_{\bar{z}})^{-2} \mathbf{S}(x)]_{\hbar}. \quad (1.74)$$

Уравнение (1.74) может быть представлено в форме уравнения нулевой кривизны с помощью матриц  $L^r$  и  $M^r$  которые имеют следующий вид

$$L^r(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha \frac{\mathbf{e}(\epsilon_2^r \alpha_2 w^r)}{\epsilon_1^r \alpha_1 + \epsilon_2^r \alpha_2 \tau^r} T^\alpha, \quad (1.75)$$

$$M^r(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S_\alpha \frac{\mathbf{e}(\epsilon_2^r \alpha_2 w^r)}{(\epsilon_1^r \alpha_1 + \epsilon_2^r \alpha_2 \tau^r)^2} T^\alpha, \quad (1.76)$$

### 1.4.3 Скейлинговый предел

В данном разделе мы рассмотрим предел полевых уравнений основанный на обобщении [16, 19] предела Иноземцева [20]. Рассмотрим сдвиг параметра эллиптической кривой  $\tau$  играющего роль времени неавтономной системы

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (1.77)$$

где  $\tau_1$  соответствует времени в предельной системе, тогда как  $\tau_2$  является параметром предела. Рассматриваемая предельная процедура состоит в сдвиге спектрального параметра

$$w = \tilde{w} + \tau/2, \quad (1.78)$$

с одновременным скейлингом координат

$$S_\alpha = \tilde{S}_\alpha q_2^{-g(\alpha_2)}, \quad \text{где } q_2 \equiv \mathbf{e}(\tau_2), \quad g(\alpha_2) = \hbar \epsilon_2 \frac{1 - \delta_{\alpha_2, 0}}{2}, \quad (1.79)$$

и взятии тригонометрического предела  $\mathfrak{S}m\tau_2 \rightarrow +\infty$ . В результате скейлинга (1.79), в пределе  $\mathfrak{S}m\tau_2 \rightarrow +\infty$  мы получаем контракцию алгебры Ли скобок Пуассона (1.19)

$$\left\{ \tilde{S}_\alpha, \tilde{S}_\beta \right\} = \mathbf{C}_{\hbar}(\alpha, \beta) \tilde{S}_{\alpha+\beta} q_2^{g(\alpha_2)+g(\beta_2)-g(\alpha_2+\beta_2)},$$

где  $\tilde{S}_\alpha \equiv \tilde{S}_{\alpha_1, \alpha_2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}$ . Структурные константы алгебры Ли скобок Пуассона являются сходящимися в пределе  $\mathfrak{S}m\tau_2 \rightarrow +\infty$   $\tilde{S}_\alpha$  при условии

$$\forall \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z} : \quad g(\alpha_2) + g(\beta_2) - g(\alpha_2 + \beta_2) \geq 0. \quad (1.80)$$

Для  $g(\alpha_2) = \theta \epsilon_2 (1 - \delta_{\alpha_2 0}) / 2$  неравенство (1.80) выполнено тривиальным образом, следовательно все ненулевые скобки, соответствующие знаку равенства в (1.80), имеют вид.

$$\left\{ \tilde{S}_{\alpha_1, 0}, \tilde{S}_{\beta_1, \beta_2} \right\} = \frac{1}{\pi \hbar} \sin(\pi \hbar \alpha_1 \beta_2) \tilde{S}_{\alpha_1 + \beta_1, \beta_2}. \quad (1.81)$$

Важной составляющей данной процедуры является то, что мы рассматриваем систему с произвольно большим, но конечным числом отличных от нуля гармоник  $S_\alpha$ . Для вычисления предела гамильтониана (1.26) и операторов Лакса (1.34), (1.36) мы рассмотрим такие значения  $\hbar$  и  $\epsilon_2$  что для всех отличных от нуля переменных  $S_\alpha$  выполнено следующее условие

$$|\hbar \epsilon_2 \alpha_2| < 1.$$

Тогда для гамильтониана предельной системы получаем

$$H = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\tilde{S}_{\alpha_1, 0} \tilde{S}_{-\alpha_1, 0}}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} + 4\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_1 \alpha_1) \tilde{S}_{\alpha_1, 1} \tilde{S}_{-\alpha_1, -1}, \quad (1.82)$$

где  $q_1 \equiv \mathbf{e}(\tau_1)$ . Отметим, что координаты входящие в гамильтониан образуют подалгебру предельной алгебры Пуассона (1.81). Таким образом, гамильтоновы уравнения движения для координат входящих в гамильтониан не зависят от остальных координат.

Уравнения движения (1.81)

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}_\alpha = \left\{ H, \tilde{S}_\alpha \right\}$$

могут быть получены пределом из (1.28). Для координат входящих в гамильтониан данные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_1} \tilde{S}_{\gamma_1, 0} &= -\frac{4\pi}{\theta} q_1^{\theta \epsilon_2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\theta \epsilon_1 \alpha_1) \sin(\pi \theta \gamma_1) \left( \tilde{S}_{\gamma_1 + \alpha_1, 1} \tilde{S}_{-\alpha_1, -1} - \tilde{S}_{\gamma_1 - \alpha_1, -1} \tilde{S}_{\alpha_1, 1} \right), \\ \partial_{\tau_1} \tilde{S}_{\gamma_1, 1} &= -\frac{\pi}{\theta} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{S}_{\alpha_1 + \gamma_1, 1} \frac{\sin(\pi \theta \alpha_1)}{\sin^2(\pi \theta \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{-\alpha_1, 0}, \\ \partial_{\tau_1} \tilde{S}_{\gamma_1, -1} &= \frac{\pi}{\theta} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{S}_{\alpha_1 + \gamma_1, -1} \frac{\sin(\pi \theta \alpha_1)}{\sin^2(\pi \theta \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{-\alpha_1, 0}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Для получения представления Лакса уравнений (1.83) рассмотрим предел операторов (1.34), (1.36) и соответствующего уравнения нулевой кривизны (1.35). Поскольку сдвиг спектрального параметра (1.78) является зависящим от времени, уравнение (1.35) приобретает вид

$$\partial_\tau L - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\tilde{w}} (M + \pi i L) = [L, M],$$

где  $L = L(\mathbf{S}, \tilde{w} + \tau/2, \tau)$ ,  $M = M(\mathbf{S}, \tilde{w} + \tau/2, \tau)$ . Таким образом, пара Лакса получается в результате следующего предела

$$\tilde{L} = \lim_{\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty} L, \quad \tilde{M} = \lim_{\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty} (M + \pi i L),$$

соответствующие операторы Лакса приобретают вид

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L} - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\tilde{w}} \tilde{M} = [\tilde{L}, \tilde{M}], \quad (1.84)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \pi \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 / 2)}{\sin(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1, 0} T^{\alpha_1, 0} - 2\pi i q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1, 1} T^{\alpha_1, 1} + \\ + 2\pi i q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 - \hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1, -1} T^{\alpha_1, -1}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 + \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1)}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1, 0} T^{\alpha_1, 0} + 2\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1, 1} T^{\alpha_1, 1} + \\ + 2\pi^2 q_1^{\hbar \epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(-\hbar \epsilon_1 \alpha_1 - \hbar \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}_{\alpha_1, -1} T^{\alpha_1, -1}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Следует отметить, что координаты  $\tilde{S}_\alpha$ ,  $|\alpha_2| > 1$  не входят в выражения для операторов Лакса. В результате, мы получаем уравнение представление Лакса (1.84) для уравнений движения (1.83). Поскольку гамильтониан (1.82) и операторы Лакса (1.85), (1.86) зависят только от координат вида  $\tilde{S}_\alpha$ ,  $|\alpha_2| \leq 1$ , мы можем выразить их через следующие три полевых переменных

$$h = h(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\sin^2(\pi \hbar \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}_{\alpha_1, 0} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1),$$

$$f = f(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{\alpha_1, 1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1), \quad g = g(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{\alpha_1, -1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1).$$

В терминах данных обозначений гамильтониан (1.82) приобретает вид

$$H = \pi^2 \int_{S^1} \left( \frac{1}{2} h(x_1) \sinh^2 \left( \frac{\hbar \epsilon_1 \partial_{x_1}}{2} \right) h(x_1) + 4q_1^{\hbar \epsilon_2} g(x_1) \mathbf{e}^{-\hbar \epsilon_1 \partial_{x_1}} f(x_1) \right) dx_1.$$

Уравнения движения в терминах переменных  $f$ ,  $g$ , и  $h$

$$\sinh^2\left(\frac{\hbar\epsilon_1\partial_{x_1}}{2}\right)\partial_{\tau_1}h = -\frac{4\pi\iota}{\hbar}q_1^{\hbar\epsilon_2}\sinh\left(\frac{\hbar\partial_{x_1}}{2}\right)(fe^{-\epsilon_1\partial_{x_1}}g - ge^{\epsilon_1\partial_{x_1}}f), \quad (1.87)$$

$$\partial_{\tau_1}f = -\frac{\pi\iota}{\hbar}f\sinh\left(\frac{\hbar\partial_{x_1}}{2}\right)h, \quad (1.88)$$

$$\partial_{\tau_1}g = \frac{\pi\iota}{\hbar}g\sinh\left(\frac{\hbar\partial_{x_1}}{2}\right)h. \quad (1.89)$$

Операторы Лакса в полевых переменных могут быть записаны с помощью операторов сдвига  $e^{\pm\hbar\partial_{x_1}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \frac{1}{4\hbar}(h(x_1) - h(x_1 - \hbar\epsilon_1)) + \frac{\iota}{\hbar}q_1^{\hbar\epsilon_2/2}e^{\hbar\epsilon_2\tilde{w}}f(x_1 + \frac{\hbar}{2})e^{\hbar\partial_{x_1}} - \\ - \frac{\iota}{\hbar}q_1^{\hbar\epsilon_2/2}e^{-\hbar\epsilon_2\tilde{w}}g(x_1 - \hbar\epsilon_1 - \frac{\hbar}{2})e^{-\hbar\partial_{x_1}}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\frac{\pi\iota}{4\hbar}(h(x_1) + h(x_1 - \hbar\epsilon_1)) - \frac{\pi}{\hbar}q_1^{\hbar\epsilon_2/2}e^{\hbar\epsilon_2\tilde{w}}f(x_1 + \frac{\hbar}{2})e^{\hbar\partial_{x_1}} - \\ - \frac{\pi}{\hbar}q_1^{\hbar\epsilon_2/2}e^{-\hbar\epsilon_2\tilde{w}}g(x_1 - \hbar\epsilon_1 - \frac{\hbar}{2})e^{-\hbar\partial_{x_1}}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

#### 1.4.4 Бездисперсионный предел

##### Общий случай

В бездисперсионном пределе ( $\hbar \rightarrow 0$ ) алгебра некоммутативного тора  $sin_{\hbar}$  переходит коммутативную алгебру гладких функций на торе снабжённую структурой алгебры Ли относительно скобки Пуассона  $Ham(T^2)$  (см. Приложение (Б)). Соответствующие гамильтоновы потоки образуют представление данной алгебры Ли в векторных полях на торе  $SVect(T^2)$ . Определим неавтономный волчок соответствующий группе диффеоморфизмов тора  $SDiff(T^2)$  с помощью следующего предела  $\hbar \rightarrow 0$  уравнения изомонодромных деформаций для алгебры некоммутативного тора. Пусть

$$\hbar \rightarrow 0, \epsilon_{1,2} \rightarrow \infty, \text{ такие что } \lim_{\hbar \rightarrow 0}(\hbar\epsilon_{1,2}) = \epsilon'_{1,2} < 1, \epsilon'_{1,2} \text{ являются иррациональным.} \quad (1.92)$$

В дальнейшем мы будем опускать  $'$ . Пусть  $\mathbf{S} = \sum_{\alpha} S^{\alpha} \mathbf{e}(\alpha \cdot x) \in Ham^*(T^2)$ , где  $\mathbf{e}(\alpha \cdot x)$  элементы базиса Фурье (Б.11) на  $Ham^*(T^2)$ . В терминах базиса Фурье линейная скобка Пуассона приобретает вид

$$\{S^{\alpha}, S^{\beta}\}_1 = (\alpha \times \beta) S^{\alpha+\beta}, \alpha \times \beta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \quad (1.93)$$

Оператор обратный моменту инерции  $\mathbf{J} : Ham^*(T^2) \rightarrow Ham(T^2)$  становится

$$\mathbf{J} : S^{\alpha} \rightarrow \wp(\epsilon \cdot \alpha) S^{\alpha}, \wp(\epsilon \cdot \alpha) = \wp(\epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2; \tau),$$

где  $\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}$ . Данный оператор является хорошо определённым, т.к.  $\epsilon_j$  принимает иррациональные значения. В терминах полевых переменных

$$\mathbf{J} : \mathbf{S}(x) \rightarrow \wp(\bar{\partial}_Z)\mathbf{S}(x) \quad (1.94)$$

где

$$\bar{\partial}_Z = \frac{1}{2\pi i(\bar{\tau} - \tau)}(\epsilon_1\partial_1 + \epsilon_2\tau\partial_2)$$

— оператор задающий комплексную структуру на коммутативном торе  $T^2$ . Более подробно, комплексная структура на торе задаётся следующим отношением  $\tau\epsilon_2/\epsilon_1$ . Квадратичный гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma} S^{\gamma} \wp(\epsilon \cdot \gamma) S^{-\gamma} = 2\pi^2 \int_{T^2} \mathbf{S}(\wp(\bar{\partial}_Z)\mathbf{S}), \quad (1.95)$$

соответствующие уравнения движения

$$\partial_{\tau}\mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \wp(\bar{\partial}_Z)\mathbf{S}\}. \quad (1.96)$$

Или, в терминах угловых скоростей

$$\partial_{\tau}(\wp^{-1}(\bar{\partial}_Z)\mathbf{F}) = \{\wp^{-1}(\bar{\partial}_Z)\mathbf{F}, \mathbf{F}\}. \quad (1.97)$$

Определим оператор Лакса

$$L(x; w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S^{\alpha} \varphi(\epsilon \cdot \alpha, w) \mathbf{e}(\alpha \cdot x). \quad (1.98)$$

Следует отметить, что

$$\int_{T^2} L(x, w) = 0.$$

Таким образом оператор  $L$  задаёт бездивергентное векторное поле  $\partial_1 L \partial_2 - \partial_2 L \partial_1$ .

**Предложение 1.3.** Уравнения движения (1.96) по-прежнему могут быть представлены в форме Лакса в бездисперсионном пределе

$$\partial_{\tau}L - \partial_w M = \{L, M\}$$

где  $L$  задаётся с помощью (1.98), а

$$M(x; w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S^{\alpha} f(\epsilon \cdot \alpha, w) \mathbf{e}(\alpha \cdot x), \quad (1.99)$$

где

$$f(\epsilon \cdot \alpha, w) = \mathbf{e}(\epsilon_2 \alpha_2 w) \partial_u \phi(u, w) \Big|_{u=\epsilon_1 \alpha_1 + \tau \epsilon_2 \alpha_2}.$$

Доказательство Предложения 1.3 эквивалентно доказательству Предложения 1.2. Следует отметить, что в бездисперсионном пределе операторы  $L$  и  $M$  удовлетворяют следующим свойствам квазипериодичности

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2; w) &= L(x_1 + \epsilon_2, x_2; w + 1), & L(x_1, x_2; w) &= L(x_1, x_2 - \epsilon_1; w + \tau), \\ M(x_1, x_2; w) &= M(x_1 + \epsilon_2, x_2; w + 1), & M(x_1, x_2; w) - M(x_1, x_2 - \epsilon_1; w + \tau) &= 2\pi i L(x_1, x_2, w). \end{aligned}$$

### Тригонометрический предел

В тригонометрическом пределе уравнения (1.29) приобретают вид

$$\partial_\tau \mathbf{S}(x) = \{ \mathbf{S}(x), (\pi^2 / \tilde{\kappa}^2) \sin^{-2}(\pi \bar{\partial}_Z) \mathbf{S}(x) \} \quad \bar{\partial}_Z = \frac{1}{2\pi i} (\tilde{\epsilon}_1 \partial_1 + \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr} \partial_2). \quad (1.100)$$

В терминах угловых скоростей  $\mathbf{F}(x)$

$$\mathbf{F}(x) = (\mathbf{J}^{tr})^{-1} \mathbf{S}(x), \quad \mathbf{J}^{tr} = (\tilde{\kappa}^2 / \pi^2) \sin^2(\pi \bar{\partial}_Z)$$

$$((\mathbf{J}^{tr})^{-1} \mathbf{F})(x) = \mathbf{F}(x_1 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) + \mathbf{F}(x_1 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) - 2\mathbf{F}(x)$$

эквивалентно

$$\sin^2(\pi \bar{\partial}_Z) \partial_\tau \mathbf{F}(x) = \{ \sin^2(\pi \bar{\partial}_Z) \mathbf{F}(x), \mathbf{F}(x) \} - \pi \epsilon_2 \sin(\pi \bar{\partial}_Z) \cos(\pi \bar{\partial}_Z) \partial_2 \mathbf{F}(x) \quad (1.101)$$

или

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \mathbf{F}(x_1 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) + \mathbf{F}(x_1 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) - 2\mathbf{F}(x) \right) &= \\ &= \left\{ \left( \mathbf{F}(x_1 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) + \mathbf{F}(x_1 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) \right), \mathbf{F}(x) \right\} - \\ &- \pi \tilde{\epsilon}_2 \partial_2 \left( \mathbf{F}(x_1 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 + 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) - \mathbf{F}(x_1 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_1, x_2 - 2\pi i \tilde{\epsilon}_2 \tau^{tr}) \right). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Данное уравнение может быть представлено в форме уравнения нулевой кривизны с операторами Лакса из (1.71) и (1.72). В бездисперсионном пределе разложение по базису  $T^\alpha$  переходит в разложение по базису Фурье

$$L^{tr}(x_1, x_2, \tilde{w}) = \pi \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_f^{(2)}} S^\alpha \mathbf{e}(\tilde{\epsilon}_2 \alpha_2 \tilde{w}) \left( \cot \left( \pi (\tilde{\epsilon}_1 \alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2 \alpha_2 \tau^{tr}) \right) + i \right) \mathbf{e}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad (1.103)$$

$$M^{tr}(x_1, x_2, \tilde{w}) = \frac{\pi}{2i} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_f^{(2)}} S^\alpha \frac{\mathbf{e}(\tilde{\epsilon}_2 \alpha_2 \tilde{w})}{\sin^2(\pi(\tilde{\epsilon}_1 \alpha_1 + \tilde{\epsilon}_2 \alpha_2 \tau^{tr}))} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad (1.104)$$

Более того, уравнение (1.101) (или (1.102)) представляет из себя условие сохранения монодромии для следующей системы линейных дифференциальных уравнений

$$\partial_{\tilde{w}} \Psi(x_1, x_2, \tilde{w}) + \{L(x_1, x_2, \tilde{w}), \Psi(x_1, x_2, \tilde{w})\} = 0. \quad (1.105)$$

### Рациональный предел

Здесь мы применим бездисперсионный предел к рациональной системе рассмотренной в разделе 1.4.2. В результате получаем следующие уравнения движения в терминах гармоник Фурье

$$\partial_{\tau^r} S^\alpha = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{(2)}} S^\gamma \frac{1}{(\epsilon^r \cdot \gamma)^2} S^{\alpha - \gamma}. \quad (\epsilon^r \cdot \gamma = \epsilon_1^r \gamma_1 + \epsilon_2^r \gamma_2 \tau^{tr}), \quad (1.106)$$

где для сравнения с (1.74) мы опустили  $\kappa^r$ . Параметр  $\kappa^r$  в рациональном пределе всегда может быть поглещён с помощью надлежащего скейлинга свободных параметров  $\epsilon_1^r$  и  $\epsilon_2^r$ . В терминах полевых переменных  $\mathbf{S}(x) \in Ham(T^2)$  уравнение движения (1.106) имеет вид

$$\partial_{\tau^r} \mathbf{S} = \{\mathbf{S}, \bar{\partial}_Z^{-2} \mathbf{S}\}. \quad (1.107)$$

Данное уравнение является гамильтоновым уравнением движения для следующего гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} \int_{T^2} \mathbf{S} \bar{\partial}_Z^{-2} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} \frac{1}{(\epsilon^r \cdot \alpha)^2} S^\alpha S^{-\alpha}. \quad (1.108)$$

и скобки Пуассона на  $Ham(T^2)$ . Следует отметить, что уравнение (1.107) может быть представлено в форме уравнения в частных производных. Для того, чтобы показать это мы перепишем его в терминах угловых скоростей  $\mathbf{F}(x)$

$$\partial_{\tau^r} \bar{\partial}_Z^2 \mathbf{F}(x, \tau^r) - \{\bar{\partial}_Z^2 \mathbf{F}(x, \tau^r), \mathbf{F}(x, \tau^r)\} + \epsilon_2^r \partial_2 \bar{\partial}_Z \mathbf{F}(x, \tau^r) \quad (1.109)$$

где  $\bar{\partial}_Z = \frac{\epsilon_1^r \partial_1 - \epsilon_2^r \tau^r \partial_2}{2\pi i}$ . Данное уравнение может быть представлено в форме уравнения нулевой кривизны. Используя (1.75) и (1.76) мы получаем

$$L^r(x_1, x_2, w^r) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S^\alpha \frac{\mathbf{e}(\epsilon_2^r \alpha_2 w^r)}{\epsilon_1^r \alpha_1 + \epsilon_2^r \alpha_2 \tau^r} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\bar{\partial}_Z)^{-1} \mathbf{S}(x_1, x_2 + \epsilon_2^r w^r), \quad (1.110)$$

$$M^r(x_1, x_2, w^r) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}} S^\alpha \frac{\mathbf{e}(\epsilon_2^r \alpha_2 w^r)}{(\epsilon_1^r \alpha_1 + \epsilon_2^r \alpha_2 \tau^r)^2} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \quad (1.111)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (\bar{\partial}_Z)^{-2} \mathbf{S}(x_1, x_2 + \epsilon_2^r w^r).$$

Уравнение (1.109) эквивалентно условию сохранения монодромии следующей системы линейных уравнений в частных производных

$$\partial_{w^r} \Psi(x_1, x_2, \tau^r, w^r) + \{L^r(x_1, x_2, \tau^r, w^r), \Psi(x_1, x_2, \tau^r, w^r)\} = 0, \quad (1.112)$$

поскольку функция Бейкера-Ахиезера удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\tau^r} \Psi(x_1, x_2, \tau^r, w^r) + \{M^r(x_1, x_2, \tau^r, w^r), \Psi(x_1, x_2, \tau^r, w^r)\} = 0.$$

### Скейлинговый предел

В данном разделе мы воспользуемся процедурой аналогичной рассмотренной ранее в разделе 1.4.3 для случая бездисперсионного предела. Используем сдвиг (1.77) параметра  $\tau$  эллиптической кривой

$$\tau = \tau_1 + \tau_2,$$

Предельная процедура заключается в сдвиге спектрального параметра

$$w = \tilde{w} + \tau/2, \quad (1.113)$$

надлежащем скейлинге координат

$$S^\alpha = \tilde{S}^\alpha q_2^{-g(\alpha_2)}, \quad q_2 \equiv \mathbf{e}(\tau_2), \quad g(\alpha_2) = \epsilon_2 \frac{1 - \delta_{\alpha_2, 0}}{2}, \quad (1.114)$$

и тригонометрическом пределе  $\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty$ . В результате скейлинга (1.79), мы получаем контракцию скобок Пуассона (1.93) в пределе  $\Im m \tau_2 \rightarrow +\infty$ . Все ненулевые скобки для координат предельной системы  $\tilde{S}^\alpha$  имеют вид

$$\{\tilde{S}^{\alpha_1, 0}, \tilde{S}^{\beta_1, \beta_2}\} = \alpha_1 \beta_2 \tilde{S}^{\alpha_1 + \beta_1, \beta_2}, \quad (1.115)$$

где  $\tilde{S}^{\alpha_1, \alpha_2} \equiv \tilde{S}^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^{(2)}$ . Опять, следует отметить, что мы подразумеваем что число координат  $S^\alpha$  отличных от нуля является конечным. Для вычисления пределов гамильтониана (1.95) и операторов Лакса (1.98), (1.99) мы рассматриваем иррациональные значения  $\epsilon_2$  такие, что для всех отличных от нуля координат  $S^\alpha$  выполнено неравенство

$$|\epsilon_2 \alpha_2| < 1.$$

Для гамильтониана предельной системы мы получаем

$$H = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\tilde{S}^{\alpha_1, 0} \tilde{S}^{-\alpha_1, 0}}{\sin^2(\pi \epsilon_1 \alpha_1)} + 4\pi^2 q_1^{\epsilon_2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}(\epsilon_1 \alpha_1) \tilde{S}^{\alpha_1, 1} \tilde{S}^{-\alpha_1, -1}, \quad (1.116)$$

где  $q_1 \equiv e(\tau_1)$ . Следует отметить, что координаты входящие в гамильтониан предельной системы образуют подалгебру относительно скобки Пуассона (1.115). Таким образом, гамильтоновы уравнения движения для данных координат

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}^\alpha = \{H, \tilde{S}^\alpha\}.$$

не зависят от координат не входящих в гамильтониан

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}^{\gamma_1, 0} = -4\pi^2 q_1^{\epsilon_2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \gamma_1 \left( \tilde{S}^{\alpha_1 + \gamma_1, 1} e(\epsilon_1 \alpha_1) \tilde{S}^{-\alpha_1, -1} - \tilde{S}^{\alpha_1 + \gamma_1, -1} e(-\epsilon_1 \alpha_1) \tilde{S}^{-\alpha_1, 1} \right), \quad (1.117)$$

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}^{\gamma_1, 1} = -\pi^2 \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{S}^{\alpha_1 + \gamma_1, 1} \frac{\alpha_1}{\sin^2(\pi \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}^{-\alpha_1, 0}, \quad (1.118)$$

$$\partial_{\tau_1} \tilde{S}^{\gamma_1, -1} = \pi^2 \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{S}^{\alpha_1 + \gamma_1, -1} \frac{\alpha_1}{\sin^2(\pi \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}^{-\alpha_1, 0}. \quad (1.119)$$

Данные уравнения движения также могут быть получены переходом к бездисперсионному пределу в уравнениях (1.92). Определим пару Лакса предельной системы с помощью предельного перехода в (1.98) и (1.99):

$$\tilde{L} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} L, \quad \tilde{M} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} (M + \pi i L). \quad (1.120)$$

Уравнение нулевой кривизны сохраняет свою форму в данном пределе

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L} - \frac{1}{2\pi i} \partial_{\tilde{w}} \tilde{M} = [\tilde{L}, \tilde{M}], \quad (1.121)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \pi \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e(-\epsilon_1 \alpha_1 / 2)}{\sin(\pi \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}^{\alpha_1, 0} e(\alpha_1 x_1) - 2\pi i q_1^{\epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} e(\epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}^{\alpha_1, 1} e(\alpha_1 x_1 + x_2) + \\ + 2\pi i q_1^{\epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} e(-\epsilon_1 \alpha_1 - \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}^{\alpha_1, -1} e(\alpha_1 x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1.122)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 + e(-\epsilon_1 \alpha_1)}{\sin^2(\pi \epsilon_1 \alpha_1)} \tilde{S}^{\alpha_1, 0} e(\alpha_1 x_1) + 2\pi^2 q_1^{\epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} e(\epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}^{\alpha_1, 1} e(\alpha_1 x_1 + x_2) + \\ + 2\pi^2 q_1^{\epsilon_2 / 2} \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} e(-\epsilon_1 \alpha_1 - \epsilon_2 \tilde{w}) \tilde{S}^{\alpha_1, -1} e(\alpha_1 x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Уравнение (1.121) эквивалентно уравнениям движения (1.117)–(1.119). Таким образом, в предельной системе представление Лакса описывает только динамику переменных входящих в гамильтониан (1.116). Поскольку гамильтониан (1.116) зависит только от координат вида  $\tilde{S}^\alpha$ ,

$|\alpha_2| \leq 1$ , мы можем перейти к следующим трём полевым координатам:

$$h = h(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \tilde{S}^{\alpha_1, 0} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1),$$

$$f = f(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}^{\alpha_1, 1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1), \quad g = g(x_1) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{S}^{\alpha_1, -1} \mathbf{e}(\alpha_1 x_1).$$

В терминах  $g, f, h$  гамильтониан (1.116) принимает следующий вид

$$H = \pi^2 \int_{S^1} \left( 2h(x_1) \sinh^{-2} \left( \frac{\epsilon_1 \partial_{x_1}}{2} \right) h(x_1) + 4q_1^{\epsilon_2} g(x_1) \mathbf{e}^{-\epsilon_1 \partial_{x_1}} f(x_1) \right) dx_1.$$

Уравнения движения (1.117)–(1.119) в полевых переменных  $f, g$ , и  $h$

$$\partial_{\tau_1} h = 2\pi i q_1^{\epsilon_2} \partial_{x_1} (f \mathbf{e}^{-\epsilon_1 \partial_{x_1}} g - g \mathbf{e}^{\epsilon_1 \partial_{x_1}} f), \quad (1.124)$$

$$\partial_{\tau_1} f = f \frac{\pi i}{2 \sinh^2(\epsilon_1 \partial_{x_1}/2)} \partial_{x_1} h, \quad (1.125)$$

$$\partial_{\tau_1} g = -g \frac{\pi i}{2 \sinh^2(\epsilon_1 \partial_{x_1}/2)} \partial_{x_1} h. \quad (1.126)$$

Данные уравнения являются гамильтоновыми

$$\partial_{\tau_1} h = \{H, h\}, \quad \partial_{\tau_1} f = \{H, f\}, \quad \partial_{\tau_1} g = \{H, g\}$$

по отношению к следующей скобке Пуассона

$$\begin{aligned} \{h(x), f(y)\} &= \frac{f(y)}{2\pi i} \delta'(x-y), & \{h(x), g(y)\} &= -\frac{g(y)}{2\pi i} \delta'(x-y), \\ \{f(x), g(y)\} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta'(x-y)$  — первая производная дельта-функции Дирака. Отметим, что (1.125) и (1.126) подразумевают

$$\partial_{\tau_1} (f(x_1, \tau_1) g(x_1, \tau_1)) = 0.$$

## 2 Вычисление статистической суммы в топологической теории струн

### 2.1 Квантовые спектральные кривые и $A$ -полиномы

В данном разделе будут описаны линейные рекуррентные соотношения на полиномы зацеплений связывающие между собой цветные полиномы ХОМФЛИ для различных симметрических представлений. Данные линейные рекуррентные соотношения могут быть параметризованы набором из  $n$  полиномов Лорана от некоммутативных переменных [49–52], где  $n$  — число компонент зацепления. Описанный набор полиномов задаёт уравнение квантовой спектральной кривой зацепления.

В следующем подразделе мы дадим необходимые определения для случая однокомпонентного зацепления (узла), после чего перейдём к общему случаю зацеплений с произвольным числом компонент.

#### 2.1.1 Квантовые $A$ -полиномы узлов

В случае однокомпонентного зацепления набор полиномов задающий квантовую спектральную кривую состоит из единственного полинома называемого *квантовым  $A$ -полиномом узла*. Впервые идея использования полинома от некоммутативных переменных для параметризации линейных рекуррентных соотношений на цветные полиномы узлов была предложена в работе [49]. Данная гипотеза была доказана С.Гаруфалидисом для случая цветных полиномов Джонса [50, 51] и недавно обобщена на случай цветных полиномов ХОМФЛИ [52].

Обозначим за  $\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}$  неприведённый полином ХОМФЛИ узла  $\mathcal{K}$  соответствующий симметрическому представлению с номером  $r$ . Согласно [52] полином  $\mathcal{H}_{[r+1]}^{\mathcal{K}}$  может быть получен линейной комбинацией  $k$  полиномов соответствующих младшим представлениям

$$\mathcal{H}_{[r+1]}^{\mathcal{K}} = \sum_{s=r-k+1}^r C_{r-s}^{\mathcal{K}}(A, q^r, q) \mathcal{H}_{[s]}^{\mathcal{K}}, \quad (2.1)$$

где  $C_1^{\mathcal{K}}, \dots, C_k^{\mathcal{K}}$  — заданные рациональные функции, которые определяют рекуррентное соотношение. Минимальное значение  $k$  — называется порядком данного рекуррентного соотношения.

Следует отметить, что содержание доказанной С.Гаруфалидисом гипотезы заключается в том, что  $C^{\mathcal{K}}$  зависят от  $r$  весьма специальным образом — они являются рациональными функциями от  $q^r$ . Данный тип зависимости накладывает существенные ограничения на  $H_{[r]}^{\mathcal{K}}$  как функцию от  $[r]$ . Такой тип функций был описан И.Н.Беренштейном в работах [53, 54]. В частности, наиболее важным свойством  $H_{[r]}^{\mathcal{K}}$  для нас является то, что зависимость от  $r$  восстанавливается по конечному (и небольшому) числу значений.

Введём следующие формальные операторы

$$\hat{P} \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \mathcal{H}_{[r-1]}^{\mathcal{K}}, \quad \hat{Q} \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = q^r \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}. \quad (2.2)$$

Для  $q \neq 1$  операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  некоммутативные и удовлетворяют соотношениям квантовой группы

$$\hat{P}\hat{Q} = q\hat{Q}\hat{P}.$$

Напомним, что в теории Черна-Саймонса  $q = e^{\hbar}$ . Данным операторам можно придать смысл экспонент квантовых операторов импульса и координаты

$$\hat{P} = \exp(i\hat{p}), \quad \hat{Q} = \exp(\hat{q}) \quad [\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar. \quad ^1$$

С использованием (2.2) линейное рекуррентное соотношение на  $\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}$  может быть представлено в виде следующего уравнения

$$\hat{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}(\hat{P}, \hat{Q}, A, q) \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\mathcal{A}$  — некоторый полином от некоммутативных переменных с коэффициентами в рациональных функциях от  $A$  и  $q$ . Несложно показать, что для рекуррентного соотношения минимального порядка  $k$  данный полином единственен с точностью до домножения справа<sup>2</sup> на произвольные степени  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  (и рациональные функции от  $A$  и  $q$ ). Такой полином называется квантовым  $A$ -полиномом узла. В свою очередь, соответствующее данному  $A$ -полиному уравнение (2.3) называется квантовым уравнением спектральной кривой узла.

В терминах производящей функции цветных полиномов ХОМФЛИ в симметрических представлениях (ограниченной статистической суммы Оогури-Вафы данного узла)

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} z^r$$

Индукцированное действие  $\hat{P}^*$  и  $\hat{Q}^*$  на производящей функции эквивалентно

$$\begin{aligned} \hat{P}^* &\equiv z : \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(z) \rightarrow z \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(z), \\ \hat{Q}^* &\equiv T_z : \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(z) \rightarrow \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(zq). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соответственно,  $z$  и  $T_z$  удовлетворяют противоположным соотношениям

$$T_z z = q z T_z.$$

Уравнение (2.3) приобретает эквивалентную форму

$$\hat{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}, op}(z, T_z, A, q) \bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{K}}(z) = 0, \quad (2.5)$$

<sup>2</sup>Операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  действуют на аргументы  $\mathcal{H}$ , таким образом уравнение 2.3 остаётся инвариантным при домножении  $\hat{\mathcal{A}}$  на произвольный полином справа.

где под  $op$  мы подразумеваем противоположный некоммутативный полином.

В пределе  $q \rightarrow 1$  квантовый  $A$ -полином  $\hat{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}(\hat{P}, \hat{Q}, A, q)$  переходит в полином от трёх коммутативных переменных  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(P, Q, a)$  называемый классическим  $A$ -полиномом узла. Классические  $A$ -полиномы имеют независимое определение [55]. Связь классических  $A$ -полиномов с гиперболическим объёмом трёхмерного многообразия полученного удалением узла является предметом классической объёмной гипотезы [56]. Соответствие классического предела квантовых  $A$ -полиномов независимому определению [55] является предметом обобщённой объёмной гипотезы [57].

Явное вычисление  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\hat{P}, \hat{Q}, a, q)$  для заданного узла, как правило, представляет собой нетривиальную задачу. Сами квантовые  $A$ -полиномы известны для небольшого числа примеров. Общие формулы в случае произвольных  $A$  и  $q$  для случая твистованных узлов можно найти в работе [58]. Для частного случая  $A = q^2$ , соответствующие  $A$ -полиномы известны для класса т.н. двухмостовых узлов [59] включающего в себя торические и твистованные узлы.

### 2.1.2 Квантовые спектральные кривые зацеплений

Теперь перейдём к случаю зацеплений с несколькими компонентами. Обозначим неприведённый полином ХОМФЛИ  $n$ -компонентного зацепления  $\mathcal{L}$  за  $H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}$  где  $r_1, \dots, r_n$  — номера симметрических представлений (значения спинов) соответствующие каждой из компонент. Рассмотрим следующие формальные операторы  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n$  и  $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n$  действующие на пространстве цветных полиномов ХОМФЛИ зацепления  $\mathcal{L}$ :

$$\hat{P}_i \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_i-1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}, \quad \hat{Q}_i \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = q^{r_i} \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}. \quad (2.6)$$

Данные операторы в общем случае некоммутативные и удовлетворяют соотношениям “квантовой группы”:

$$\hat{P}_i \hat{Q}_i = q \hat{Q}_i \hat{P}_i, \quad \hat{P}_j \hat{Q}_k = \hat{Q}_k \hat{P}_j, \quad j \neq k. \quad (2.7)$$

По аналогии с (2.1)  $H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям по  $r_1, \dots, r_n$ . Однако, в случае многокомпонентных зацеплений существует несколько независимых рекуррентных соотношений. Таким образом, уравнение квантовой спектральной кривой (2.3) приобретает вид системы уравнений

$$\hat{\mathcal{A}}_k^{\mathcal{L}}(\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n, \hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n, A, q) H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = 0, \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.8)$$

где  $\hat{\mathcal{A}}_k^{\mathcal{L}}(\hat{P}, \hat{Q}, A, q)$  — семейство полиномов от некоммутативных переменных. Минимальный набор полиномов порождающих данное семейство в случае многокомпонентных зацеплений не является единственным. Будем называть два таких набора эквивалентными если каждый из наборов порождается другим. Класс эквивалентности таких наборов полиномов (иначе правый идеал в квантовой алгебре) называется квантовой спектральной кривой.

Аналогично (2.5), в терминах производящей функции цветных полиномов ХОМФЛИ в симметрических представлениях (или, иначе, ограниченной статистической суммы Оогури-Вафы данного зацепления)

$$\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{L}}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{r_1, \dots, r_n} \mathcal{H}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n}$$

можно записать эквивалентную форму уравнения квантовой спектральной кривой зацепления

$$\hat{A}_k^{\mathcal{L}, op}(z_1, \dots, z_n, T_{z_1}, \dots, T_{z_n}, a, q) \bar{\mathcal{Z}}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (2.9)$$

где  $T_{z_i}$  отвечает оператору дилатации переменной  $z_i$  в

$$\begin{aligned} T_{z_i} : \quad \bar{\mathcal{Z}}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}(z_1, \dots, z_n) &\rightarrow \bar{\mathcal{Z}}_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}(z_1, \dots, q z_i, \dots, z_n), \\ T_{z_j} z_k &= q^{\delta_{kj}} z_k T_{z_j}. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (2.5) под  $op$  мы подразумеваем противоположный некоммутативный полином.

На момент написания автором диссертации совместной работы с А.Д.Мироновым, А.Ю.Морозовым и А.А.Морозовым [15] квантовые спектральные кривые были неизвестны в случае произвольных  $A$  и  $q$  даже для самых простых зацеплений за исключением зацепления Хопфа. В разделе 2.1.3, следуя [15] мы предъявим общие формулы для  $H_{[r],[s]}^W$  и  $H_{[r],[s],[t]}^B$  — цветных полиномов ХОМФЛИ зацепления Уайтхеда и колец Борромео для случая произвольных симметрических представлений. С помощью данных формул будут получены квантовые спектральные кривые соответствующих зацеплений. Таким образом будут обобщены предсказания [25] для классических спектральных кривых вышеупомянутых зацеплений.

### 2.1.3 Вычисление полиномов ХОМФЛИ

В данном разделе, будет изучено применение предложенных методов вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ узлов и зацеплений для проверки обобщённой объёмной гипотезы. В частности, будут получены явные формулы цветных полиномов ХОМФЛИ бесконечного семейства зацеплений, включающего зацепление Уайтхеда и кольца Борромео, для случая симметрических представлений. Для зацепления Уайтхеда и колец Борромео данные формулы будут представлены в форме  $q$ -гипергеометрического ряда. Далее, с помощью алгоритма Д.Зейльбергера будут получены линейные рекуррентные соотношения, связывающие между собой полиномы ХОМФЛИ заданных зацеплений в различных симметрических представлениях. В пределе больших симметрических представлений данные линейные рекуррентные соотношения позволяют получить квантовые спектральные кривые (т.н. квантовые  $A$ -полиномы) соответствующие данным зацеплениям. Будет показано, что классический предел данных квантовых спектральных кривых совпадает с предсказаниями работ [25].

С помощью метода кейблинга можно свести вычисление цветных полиномов ХОМФЛИ для случая произвольных представлений к вычислению полиномов ХОМФЛИ соответствующих

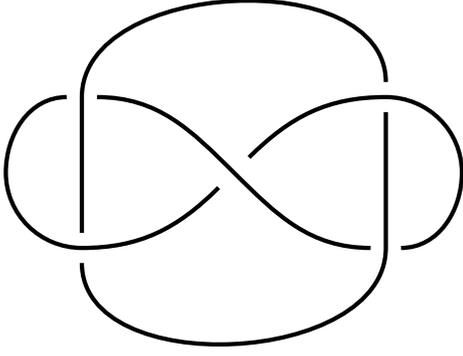


Рисунок 2.1 — Зацепление Уайтхэда

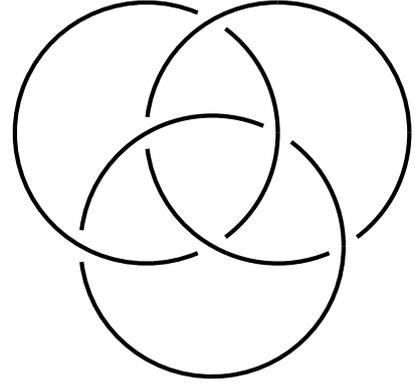


Рисунок 2.2 — кольца Борромео

фундаментальному представлению [21–24]. Мы рассмотрим следующие два зацепления: зацепление Уайтхэда (Рис. 2.1) и кольца Борромео (Рис. 2.2).

Для сравнения классического предела наших результатов с [25] нам достаточно ограничиться полиномами ХОМФЛИ для случая симметрических представлений. Номера симметрических представлений различных компонент зацеплений мы обозначим за  $r$ ,  $s$  и  $t$ . Рассматриваемые зацепления могут быть представлены в виде замыкания косы из трёх стрендов. Таким образом, в соответствующей толстой косе будет  $2r + s$  и  $r + s + t$  стрендов соответственно.

На основе улучшенной версии метода кейблинга [23, 24] автором диссертации был разработан программный пакет для вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ. С помощью данного пакета на персональном компьютере возможно производить вычисления для числа стрендов в толстой косе не превышающего 12. Таким образом, для случая колец Борромео, прямыми вычислениями были получены цветные полиномы ХОМФЛИ для симметрических представлений  $r + s + t \leq 12$ . Кроме того, частный случай данных вычислений  $r = s = t$  был проверен независимыми методами [60].

Используя дифференциальное разложение [18] по известным полиномам ХОМФЛИ для конечного числа симметрических представлений возможно восстановить общий ответ для случая произвольных симметрических представлений. Более того, в случае рассматриваемых зацеплений дифференциальное разложение приобретает особенно простой вид, а именно оно может быть представлено в форме обрывающегося  $q$ -гипергеометрического ряда. Для зацепления Уайтхэда соответствующий ряд имеет вид

$$H_{r,s}^W(A,q) = 1 + \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \frac{1}{A^k q^{k(k-1)/2}} \frac{D_{-1}}{D_{k-1}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{D_{r+j} D_{s+j}}{D_{k+j}} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\}. \quad (2.10)$$

Для колец Борромео:

$$H_{r,s,t}^B(A,q) = 1 + D_{-1} \sum_{k=1}^{\min(r,s,t)} (-)^k \{q\}^k [k]! \frac{D_{k-2}!}{(D_{2k-1}!)^2} \prod_{j=0}^{k-1} D_{r+j} D_{s+j} D_{t+j} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\} \{q^{t-j}\}. \quad (2.11)$$

Здесь  $\{x\} = x - 1/x$  и  $D_k = \{Aq^k\}$ . Данные выражения в явном виде симметричны относительно замены  $r$  на  $s$  и перестановок  $r, s$  и  $t$  соответственно. Впервые общие выражения были получены в работе автора диссертации [15]. В известных частных случаях формулы (2.10), (2.11) согласуются с результатами [60].

Выражения (2.10) и (2.11) соответствуют приведённым полиномам ХОМФЛИ, неприведённые полиномы могут быть получены домножением на произведение характеров соответствующих симметрических представлений

$$\mathcal{H}_{r,s}^W = S_r^* S_s^* H_{r,s}^W, \quad \mathcal{H}_{r,s,t}^B = S_r^* S_s^* S_t^* H_{r,s,t}^B,$$

где

$$S_r^* = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{D_i}{\{q^{r-i}\}}.$$

Здесь и далее, под калиграфическими  $\mathcal{H}$  мы подразумеваем неприведённые полиномы ХОМФЛИ, тогда как под  $H, Z$  — приведённые.

Следует отметить, что для случая зацеплений состоящих из нескольких компонент, в отличие от узлов, приведённые ХОМФЛИ в общем случае не являются полиномами от  $A$  и  $q$ , можно лишь утверждать что они являются рациональной функцией от данных переменных. В дальнейшем мы будем использовать термин “приведённый полином ХОМФЛИ” для зацеплений в соответствии с устоявшейся терминологией.

В разделе 2.2 мы выведем квантовую спектральную кривую узла и зацепления Хопфа, чтобы на простом примере пояснить обозначения. После чего, в разделе 2.3 мы перейдём к выводу рекуррентных соотношений с помощью  $q$ -гипергеометрического ряда и получим квантовые спектральные кривые для зацеплений Уайтхеда и кольца Борромео.

## 2.2 Простейшие рекуррентные соотношения и спектральные кривые

### 2.2.1 Узел

#### Рекуррентные соотношения и квантовая спектральная кривая

Приведённый полином ХОМФЛИ узла по определению равен единице, таким образом рекуррентное соотношение вырождается в

$$H_r^U = H_{r-1}^U = 1.$$

Однако, для неприведённого полинома ХОМФЛИ узла  $\mathcal{H}_r^U = S_r^*$  тоже самое рекуррентное соотношение принимает несколько менее тривиальный вид:

$$\{q^r\} \mathcal{H}_r^U = D_{r-1} \mathcal{H}_{r-1}^U. \quad (2.12)$$

В терминах операторов  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  (2.2) соотношение (2.12) имеет вид

$$\left( (\hat{Q} - \hat{Q}^{-1}) - (A\hat{Q} - A^{-1}\hat{Q}^{-1}) \hat{P} \right) \mathcal{H}_r^U = 0. \quad (2.13)$$

Как было отмечено в разделе 2.1 уравнение 2.13 инвариантно относительно домножения справа на произвольный моном. В результате домножения на  $A\hat{Q}$  мы избавляемся от отрицательных степеней. Таким образом, квантовый А-полином узла

$$\hat{A}^U = \left( A \left( \hat{Q}^2 - 1 \right) - q \left( A^2 \hat{Q}^2 - 1 \right) \hat{P} \right). \quad (2.14)$$

### Статистическая сумма Оогури-Вафы и квантовая спектральная кривая

Для наших целей достаточно рассмотреть “ограниченную” статистическую сумму Оогури-Вафы  $\bar{\mathcal{Z}}(z)$ , а именно, вклад в полную статистическую сумму Оогури-Вафы  $\mathcal{Z}(z)$  соответствующий симметрическим представлениям. Далее в в тексте, мы всегда будем обозначать данное ограничение с помощью верхней черты.

Полная статистическая сумма Оогури-Вафы

$$\mathcal{Z}\{p_k\} = \sum_R \mathcal{H}_R S_R\{p_k\},$$

где сумма берётся по всем диаграммам Юнга  $R$ , является функцией вспомогательных переменных  $p_k$ . Данные переменные являются симметрическими степенями переменных полиномов Шура  $p_k = \sum_i z_i^k$ . Переход к ограниченной статистической сумме соответствует оставлению одной нетривиальной переменной  $z = z_i$ . Или, иначе, подстановке  $p_k = z^k$ . Таким образом,

$$\bar{\mathcal{Z}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{H}_{[r]} z^r$$

Для случая узла полная статистическая сумма Оогури-Вафы и её ограничения могут быть легко вычислены. Полная статистическая сумма полиномов имеет вид:

$$\mathcal{Z}^U\{p_k\} = \sum_R \mathcal{H}_R^U S_R\{p_k\} = \sum_R S_R^* S_R\{p_k\} = \exp \left( \sum_k \frac{p_k^* p_k}{k} \right), \quad (2.15)$$

Тогда как в результате ограничения на случай одной переменной Шура:

$$\bar{\mathcal{Z}}^U(z) = \sum_r \mathcal{H}_r^U z^r = \sum_r S_r^* z^r = \exp \left( \sum_k \frac{p_k^* z^k}{k} \right), \quad (2.16)$$

В данных формулах  $p_k^*$  являются следующими комбинациями  $A$  и  $q$ :

$$p_k^* = \frac{\{A^k\}}{\{q^k\}} = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}} \stackrel{A=q^N}{=} \frac{[Nk]}{[k]} \quad (2.17)$$

Значения вспомогательных переменных (2.17) называются топологическим локусом. Полиномы Шура при данных значениях вспомогательных переменных переходят в квантовые размерности представлений  $S_R\{p_k^*\} = S_R^*$ .

Формулы для полной статистической суммы неузла (2.15) являются следствием известной формулы Коши для полиномов Шура, тогда как формулы (2.16) для ограниченной статистической суммы следуют напрямую из определения полиномов Шура

$$\sum_r S_r\{p_k\} z^k = \exp\left(\sum_k \frac{p_k z^k}{k}\right). \quad (2.18)$$

Здесь следует отметить, что в литературе также широко распространена иная нормировка вспомогательных переменных  $t_k = \frac{1}{k} p_k$ . В терминах  $t_k$  определение (2.18) выглядит ещё проще.

Ограниченная статистическая сумма (2.16) после подстановки  $p_k^*$  приобретает следующий вид

$$\bar{Z}(z) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k^* z^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_k \frac{(A^k - A^{-k}) z^k}{k(q^k - q^{-k})}\right).$$

Поскольку данная статистическая сумма является производящей функцией полиномов ХОМФЛИ неузла рекуррентное соотношение (2.12) порождает разностное уравнение на  $\bar{Z}(z)$ . Действительно, подставляя (2.12) в (2.16) мы получаем

$$\sum_{r=0} z^{r+1} (Aq^r - A^{-1}q^{-r}) S_{[r]}^* = \sum_{r=0} (q^{r+1} - q^{-r-1}) S_{[r+1]}^* z^{r+1}$$

В результате суммирования каждой из частей по-отдельности мы приходим к следующему функциональному уравнению на статистическую сумму

$$z(AT_z^+ - A^{-1}T_z^-) \bar{Z}(z) = (T_z^+ - T_z^-) \bar{Z}(z)$$

где  $\hat{T}_z^\pm$  обозначают операторы дилатации  $\hat{T}_z^\pm f(z) = f(q^\pm z)$ . Или же, избавляясь от  $\hat{T}_z^-$ , получаем

$$\boxed{(A(1 - Aqz) T_z^2 - (A - qz)) \bar{Z}(z) = 0} \quad (2.19)$$

или, сравнивая с (2.14)

$$\mathcal{A}^{U,op}(z, T_z, A, q) \bar{Z}(z) = 0.$$

### 2.2.2 Зацепление Хопфа

Теперь рассмотрим простейший пример зацепления - двухкомпонентное зацепление Хопфа. Для цветных полиномов ХОМФЛИ данного зацепления существует много эквивалент-

ных формул. Например, знаменитая формула Россо-Джонса [61–64] для торических узлов и зацеплений

$$H_{R,S}^H\{p_k\} = H_{R,S}^H S_R\{p_k\} S_S\{p_k\} \sim q^{2\hat{W}\{p\}} \left( S_R\{p_k\} S_S\{p_k\} \right), \quad (2.20)$$

здесь  $\hat{W}$  — оператор склейки и разрезания  $\hat{W} = \hat{W}_{[2]} \sum_{a,b} \left( (a+b)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right)$ .

Для вывода рекуррентных соотношения для случая неприведённого полинома ХОМФЛИ нам будет удобнее воспользоваться альтернативной формулой [25, 65]

$$\mathcal{H}_{r,s}^H = \frac{S_r\{p_k^{(s)}\}}{S_s\{p_k^*\}} = \frac{S_s\{p_k^{(r)}\}}{S_r\{p_k^*\}} \quad (2.21)$$

где  $p_k^{(r)}$  — обозначает т.н. сдвинутый топологический локус

$$p_k^{(r)} = p_k^* - \frac{\{q^{kr}\}}{q^{k(r-1)} A^k} = p_k^* - \frac{q^{kr} - q^{-kr}}{q^{k(r-1)} A^k} \quad (2.22)$$

В работе [25] на основе данных формул было получено следующее рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}^H(x,y) &= \sum_{r,s} H_{rs}^H \cdot S_{[r]}^* S_{[s]}^* \cdot x^r y^s \stackrel{(2.21)}{=} \sum_{r,s} S_{[r]}\{p_k^*\} S_{[s]}\{p_k^{(r)}\} x^r y^s = \\ &\stackrel{(2.22)}{=} \sum_r S_{[r]}^* x^r \exp\left(-\sum_k A^{-k} q^{-k(r-1)} (q^{kr} - q^{-kr}) \frac{\partial}{\partial p_k}\right) \sum_s S_{[s]}^* y^s = \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \sum_r S_{[r]}^* x^r \exp\left(-\sum_k A^{-k} (q^k - q^{-k(2r-1)}) \frac{\partial}{\partial p_k}\right) \exp\left(\sum_k \frac{p_k y^k}{k}\right) \Big|_{p_k=p_k^*} = \\ &= \sum_r S_{[r]}^* x^r \exp\left(-\sum_k \frac{(q^k - q^{-k(2r-1)}) y^k}{k A^k}\right) \exp\left(\sum_k \frac{p_k^* y^k}{k}\right) = \\ &= \bar{\mathcal{Z}}^U(y) \sum_r \frac{1 - qy A^{-1}}{1 - yq^{-2r+1} A^{-1}} S_{[r]}^* x^r \stackrel{(2.18)}{=} \frac{1 - qy A^{-1}}{1 - qy A^{-1} \hat{T}_x^{-2}} \bar{\mathcal{Z}}^U(x) \bar{\mathcal{Z}}^U(y) \end{aligned}$$

Как следствие

$$\boxed{\bar{\mathcal{Z}}^H(x,y) - \frac{qy}{A} \bar{\mathcal{Z}}^H(q^{-2}x,y) = \left(1 - \frac{qy}{A}\right) \bar{\mathcal{Z}}^U(x) \bar{\mathcal{Z}}^U(y)} \quad (2.23)$$

Данное рекуррентное соотношение связывает между собой статистические суммы зацепления Хопфа и тривиального двухкомпонентного зацепления. Для вычисления квантовой спектральной кривой зацепления нам понадобится исключить тривиальное зацепление из уравнения. В терминах неприведённых полиномов ХОМФЛИ из (2.23) следует

$$\mathcal{H}_{r,s}^H - \frac{q^{1-2r}}{A} \mathcal{H}_{r,s-1}^H = S_r^* \left( S_s^* - \frac{q}{A} S_{s-1}^* \right) \quad (2.24)$$

Соответственно, для приведённых полиномов ХОМФЛИ

$$\boxed{H_{r,s}^H - 1 = \frac{q\{q^s\}}{AD_{s-1}} \left( q^{-2r} H_{r,s-1}^H - 1 \right)} \quad (2.25)$$

В дополнение к описанным рекуррентным соотношениям существует рекурсия по обеим спицам  $r$  и  $s$

$$\mathcal{H}_{r,s}^H - q^2 \mathcal{H}_{r-1,s-1}^H = \frac{q}{A} \cdot \frac{A^2 q^{2r+2s-2} - 1}{q^{2r} - q^{2s}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s}^H - \mathcal{H}_{r,s-1}^H \right) = \frac{D_{r+s-1}}{\{q^{r-s}\}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s}^H - \mathcal{H}_{r,s-1}^H \right) \quad (2.26)$$

Здесь следует отметить, что данное рекуррентное соотношение выглядит аналогично и для более сложных зацеплений.

## 2.3 Квантовые спектральные кривые и $q$ -гипергеометрические функции

### 2.3.1 Зацепление Хопфа

Вывод рекурсивных соотношений (2.25) и (2.26) для зацепления Хопфа из формулы (2.21) невозможно напрямую обобщить на случай более сложных зацеплений. Теперь мы продемонстрируем подход к выводу данных рекуррентных соотношений с помощью  $q$ -гипергеометрических рядов. Полином ХОМФЛИ зацепления Хопфа для случая симметрических представлений может быть представлен в следующей форме:

$$H_{r,s}^H = 1 + \sum_{k=1}^{\min(r,s)} (-1)^k A^{-k} q^{-k(r+s)+k(k+3)/2} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\{q^{r-j}\}\{q^{s-j}\}}{D_j}. \quad (2.27)$$

#### Рекуррентное соотношение с дилатацией $A$

Заменяя переменную суммирования  $k$  на  $k - 1$  из 2.27 мы получаем:

$$H_{r,s}^H(A|q) = 1 - \frac{\{q^r\}\{q^s\}}{Aq^{r+s-2}D_0} \cdot H_{r-1,s-1}^H(Aq|q). \quad (2.28)$$

Далее, сдвигая  $r$  с помощью соотношения (2.25)

$$H_{r,s}^H(A) - 1 = q^s \{q^s\} \left( 1 - \frac{D(r)}{q^r D_0} H_{r,s-1}^H(Aq) \right),$$

далее, также сдвигая  $s$

$$H_{r,s}^H(A) + \frac{Aq^{r+s} D_r D_s}{D_0} \cdot H_{r,s}^H(Aq) = A^2 q^{2(r+s)}.$$

Поскольку зацепление Хопфа симметрично относительно перемены компонент местами, без ограничения общности можно считать, что  $r \geq s$ . Тогда, с помощью соотношения (2.28) вычисление  $H_{r,s}^H$  сводится к начальному условию  $H_{r-s,0}^H = 1$ .

Как следствие, для статистической суммы Оогури-Вафы (производящей функции цветных полиномов Хомфли)

$$\bar{Z}^H(A|x,y) = \sum_{r,s} H_{r,s}^H S_{[r]}^* S_{[s]}^* x^r y^s$$

соотношение (2.28) эквивалентно следующему уравнению<sup>3</sup>

$$\bar{Z}^H(A|x,y) = -\frac{xyD_0}{A} \bar{Z}^H\left(qA \left| \begin{matrix} x & y \\ q & q \end{matrix} \right. \right) + \bar{Z}^U(A|x) \bar{Z}^U(A|y). \quad (2.29)$$

Статистическая сумма  $\bar{Z}^H(A|x,y)$  является рядом по неотрицательным степеням  $x$  и  $y$ . Таким образом, соотношение (2.29) позволяет рекуррентно определять коэффициенты при старших степенях. В роли начальных условий данной рекурсии выступает статистическая сумма соответствующая нулю.

### Линейные рекуррентные соотношения

Вывод соотношения (2.25) с помощью формулы (2.27) требует использования алгоритма Д.Зейльбергера [66–68] для  $q$ -гипергеометрических функций. Действительно, в терминах  $q$ -факториалов  $(n)! = \prod_{i=1}^n (1 - q^{2i})$  формула (2.27) приобретает вид

$$H_{r,s}^H(A = q^N) = \sum_{k=0} h_{r,s}(k) = \sum_{k=0} q^{2k(k-r-s)} \frac{(r)!(s)!(N-1)!}{(r-k)!(s-k)!(N+k-1)!}. \quad (2.30)$$

Таким образом  $H_{r,s}^H(A = q^N)$  является  $q$ -гипергеометрической функцией типа  ${}_3F_1$ . Более того, поскольку  $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  данный ряд имеет лишь конечное число членов отличных от нуля. Такой специальный вид  $q$ -гипергеометрической функции называется  $q$ -гипергеометрическим полиномом. Тот факт, что верхний предел суммирования можно положить бесконечностью существенно упростит вывод рекуррентных соотношений.

Используя программный пакет [66] реализующий алгоритм Д.Зейльбергера мы получаем следующие рекуррентные соотношения минимального порядка на члены ряда (2.30):<sup>4</sup>

$$h_{r,s}(k) - \frac{A}{q} q^{2r} \frac{\{Aq^s\}}{\{q^{s+1}\}} h_{r,s+1}(k) = G_{r,s}(k+1) - G_{r,s}(k), \quad (2.31)$$

где

$$G_{r,s}(k) \equiv \frac{\{Aq^{k-1}\}}{\{q^{s-k+1}\}} Aq^{2r+s-2k} h_{r,s}(k).$$

<sup>3</sup>При выводе данного уравнения мы воспользовались следующим тождеством  $\{q^r\} S_{[r]}^*(A|q) = D_0 S_{[r-1]}^*(Aq|q)$ .

<sup>4</sup>Следует отметить, что данные рекуррентные соотношения для случая зацепления Хопфа можно получить и вручную, однако вывод рекуррентного соотношения минимального порядка для случая более сложных зацеплений потребует использования алгоритма Д.Зейльбергера. В этом разделе мы на простом примере демонстрируем метод вычисления, который будет использован для получения квантовых спектральных кривых зацепления Уайтхеда и колец Борромео.

Далее, просуммировав по  $k$  от 0 до  $\infty$  обе стороны (2.31) с учётом граничного условия

$$-G_{r,s}(0) = q^{2r} - Aq^{2r-1} \frac{\{Aq^s\}}{\{q^{s+1}\}}$$

мы получаем формулу (2.25). Аналогично, для неприведённых полиномов ХОМФЛИ

$$\mathcal{H}_{r,s}^H(A = q^N) = \sum_{k=0} \mathfrak{h}_{r,s}(k) = \sum_{k=0} q^{2k(k-r-s)-(N-1)(s+r)} \frac{(N+r-1)!(N+s-1)!}{(r-k)!(s-k)!(N+k-1)!(N-1)!}. \quad (2.32)$$

Соответственно, для членов ряда (2.32)

$$q^{-2r} \frac{q}{A} \mathfrak{h}_{r,s}(k) - \mathfrak{h}_{r,s+1}(k) = \mathcal{G}_{r,s}(k+1) - \mathcal{G}_{r,s}(k),$$

где

$$\mathcal{G}_{r,s}(k) \equiv q^{s-2k+1} \frac{\{Aq^{k-1}\}}{\{q^{s-k+1}\}} \mathfrak{h}_{r,s}(k).$$

Наконец, используя граничное условие

$$-\mathcal{G}_{r,s}(0) = S_r^* \left( S_s^* - \frac{q}{A} S_{s-1}^* \right)$$

мы получаем в точности соотношение (2.24).

Для получения квантовой спектральной кривой зацепления нам необходимо получить линейные рекуррентные соотношения. Таким образом, необходимо избавиться от правой части (2.24). Сдвигая  $s$  на единицу мы получаем следующее равенство

$$\{q^s\} \left( \mathcal{H}_{r,s}^H - \frac{q^{1-2r}}{A} \mathcal{H}_{r,s-1}^H \right) = qD_{s-2} \left( \mathcal{H}_{r,s-1}^H - \frac{q^{1-2r}}{A} \mathcal{H}_{r,s-2}^H \right)$$

Как следствие, вычитая левые части (2.24) для соседних значений  $s$  мы получаем следующее рекуррентное соотношение второго порядка

$$\left( q^{2s} - \frac{q^4}{A^2} \right) \mathcal{H}_{r,s-2}^H - \frac{q}{A} \left( q^{2s} - 1 \right) \mathcal{H}_{r,s-1}^H - \frac{A}{q} \left( q^{2s} - \frac{q^4}{A^2} \right) q^{2r} \mathcal{H}_{r,s-1}^H + \left( q^{2s} - 1 \right) q^{2r} \mathcal{H}_{r,s}^H = 0 \quad (2.33)$$

Здесь следует отметить, что соотношение (2.33) следует из неоднородного линейного соотношения (2.24). Действительно, пусть

$$\hat{\mathcal{A}}_{1,2}^H = 1 - \frac{q}{A} \hat{Q}_1^{-2} \hat{P}_2$$

тогда (2.33) имеет вид

$$\hat{\mathcal{A}}_{1,2}^H \mathcal{H}_{r,s}^H = S_r^* \left( S_s^* - \frac{q}{A} S_{s-1}^* \right). \quad (2.34)$$

### Квантовая спектральная кривая

Правая часть данного неоднородного соотношения зависит от  $r$  только через  $S_r^*$  — полином ХОМФЛИ неузла (иначе, полином Шура соответствующий симметрическому представлению  $r$ ). Применим к обеим частям (2.34) следующий оператор (2.14)

$$\hat{\mathcal{A}}_1^U = \left( A \left( \hat{Q}_1^2 - 1 \right) - q \left( A^2 \hat{Q}_1^2 - 1 \right) \hat{P}_1 \right). \quad (2.35)$$

Данный оператор определяет квантовую спектральную кривую неузла в переменных  $\hat{P}_1$  и  $\hat{Q}_1$  соответствующих первой компоненте нашего зацепления, как следствие, он зануляет правую часть (2.34), после чего мы получаем однородное линейное рекуррентное соотношение второго порядка эквивалентное (2.33)

$$\hat{\mathcal{A}}_1^U \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^H \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0$$

Мы воспользуемся данным методом для получения однородных линейных рекуррентных соотношений из неоднородных и в дальнейшем для случаев зацепления Уайтхеда и зацепления кольца Борромео.

Из симметрии относительно перемены компонент зацепления Хопфа местами мы получаем второе рекуррентное соотношение

$$\hat{\mathcal{A}}_2^U \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^H \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0$$

Наконец, из (2.26) получаем

$$\left( (1 - q^2 \hat{P}_1 \hat{P}_2) (\hat{Q}_1^2 - \hat{Q}_2^2) - (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \left( \frac{A}{q} \hat{Q}_1^2 \hat{Q}_2^2 - \frac{q}{A} \right) \right) \mathcal{H}_{[r],[s]}^H \equiv \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{L'} \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0 \quad (2.36)$$

Таким образом

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_1^U \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^H \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_2^U \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^H \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{L'} \mathcal{H}_{[r],[s]}^H = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Три некоммутативных полинома  $\hat{\mathcal{A}}_1^U \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^H, \hat{\mathcal{A}}_2^U \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^H, \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{L'}$  задают правый идеал в  $q$ -алгебре называемый *квантовой спектральной кривой зацепления Хопфа*.

В терминах статистической суммы Оогури-Вафы уравнение (2.37) принимает вид

$$\begin{cases} \hat{A}_{1,2}^{H,op} \hat{A}_1^{U,op} \bar{Z}(x,y) = 0, \\ \hat{A}_{2,1}^{H,op} \hat{A}_2^{U,op} \bar{Z}(x,y) = 0, \\ \hat{A}_{1,2}^{L',op} \bar{Z}(x,y) = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.3.2 Зацепление Уайтхэда

В данном разделе будет получена квантовая спектральная кривая зацепления Уайтхэда. С этой целью мы воспользуемся общей формулой для цветных полиномов ХОМФЛИ данного зацепления соответствующих произвольным симметрическим представлениям  $[r]$  и  $[s]$  (2.10):

$$\begin{aligned} H_{r,s}^W(A,q) &= 1 + \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \frac{1}{A^k q^{k(k-1)/2}} \frac{D_{-1}}{D_{k-1}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{D_{r+j} D_{s+j}}{D_{k+j}} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\} = \\ &= 1 + D_{-1} \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \frac{1}{A^k q^{k(k-1)/2}} \frac{D_{k-2}!}{D_{2k-1}!} \prod_{j=0}^{k-1} D_{r+j} D_{s+j} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

#### Рекуррентное соотношение с дилатацией $A$

Теперь выведем аналог (2.28). Заменяя переменную суммирования в (2.39) мы получаем семейство рекуррентное соотношение связывающее между собой элементы иерархии  $H_{r,s}^{(m)}$  параметризованной неотрицательным целым числом  $m$ :

$$H_{r,s}^{(m)}(A|q) = 1 + \frac{D_{m-1} D_{r+m} D_{s+m}}{q^m A D_{2m} D_{2m+1}} \{q^{r-m}\} \{q^{s-m}\} \cdot H_{r,s}^{(m+1)}(A|q) \quad (2.40)$$

в которой полином ХОМФЛИ зацепления Уайтхэда является первым из элементов  $H_{r,s}^W(A|q) = H_{r,s}^{(0)}(A|q)$ . Из-за наличия множителя  $\{q^{r-m}\} \{q^{s-m}\}$  в правой части соотношения (2.40) следует  $H_{r,s}^{(m)} = 1$  для  $r = m$  или  $s = m$ . Таким образом, применяя (2.40) конечно число раз мы приходим к одному из граничных условий  $H_{m,s}^{(m)} = 1$  или  $H_{r,m}^{(m)} = 1$ .

Ограниченная статистическая сумма Оогури-Вафы зацепления Уайтхэда

$$\bar{Z}^W(A|x,y) = \sum_{r,s} H_{r,s}^W S_{[r]}^* S_{[s]}^* x^r y^s = \bar{Z}^{(0)}(A|x,y)$$

в таком подходе является одним из представителей иерархии производящих функций для полиномов

$$\tilde{\mathcal{H}}_{r,s}^{(m)} \equiv H_{r,s}^{(m)}(A|q) S_{[r-m]}^*(q^{2m} A) S_{[s-m]}^*(q^{2m} A).$$

Первый член данной иерархии  $\tilde{\mathcal{H}}_{r,s}^{(m=0)}$  соответствует неприведённому полиному ХОМФЛИ зацепления Уайтхэда. Для  $m > 0$  выражения  $\tilde{\mathcal{H}}_{r,s}^{(m)}$  более не соответствуют неприведённым полиномам ХОМФЛИ зацеплений, однако полезны при записи уравнения на производящую функцию.

Действительно, определим

$$\bar{\mathcal{Z}}^{(m)}(A|x,y) \equiv \sum_{r,s} \tilde{\mathcal{H}}_{r,s}^{(m)} x^{r-m} y^{s-m}$$

тогда, с помощью

$$D_{r+m}\{q^{r-m}\}S_{[r-m]}^*(q^{2m}A) = D_{2m}D_{2m+1}S_{[r-m-1]}^*(q^{2(m+1)}A)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}}^{(m)}(A|x,y) &= \sum_{r,s} S_{[r-m]}^*(q^{2m}A)S_{[s-m]}^*(q^{2m}A)x^{r-m}y^{s-m} + \frac{D_{m-1}D_{2m}D_{2m+1}}{q^m A} \times \\ &\times \sum_{r,s} H_{r,s}^{(m+1)}(A|q)S_{[r-m-1]}^*(q^{2(m+1)}A)S_{[s-m-1]}^*(q^{2(m+1)}A)x^{r-m}y^{s-m} \end{aligned}$$

т.е.

$$\boxed{\bar{\mathcal{Z}}^{(m)}(A|x,y) - \frac{xyD_{m-1}D_{2m}D_{2m+1}}{q^m A} \bar{\mathcal{Z}}^{(m+1)}(A|x,y) = \bar{\mathcal{Z}}^U(Aq^{2m}|x) \bar{\mathcal{Z}}^U(Aq^{2m}|y)}$$

### Линейные рекуррентные соотношения

Соотношение (2.26) для зацепления Хопфа, практически без изменений выполняется для зацепления Уайтхеда<sup>5</sup>. В чём можно убедиться непосредственно из общей формулы (2.39)

$$\mathcal{H}_{r,s}^W - \mathcal{H}_{r-1,s-1}^W = \frac{q}{A} \cdot \frac{A^2 q^{2r+2s-2} - 1}{q^{2r} - q^{2s}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s}^W - \mathcal{H}_{r,s-1}^W \right) = \frac{D_{r+s-1}}{\{q^{r-s}\}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s}^W - \mathcal{W}_{r,s-1}^H \right) \quad (2.41)$$

Соответствующее рекуррентное соотношение порождает функциональное уравнение на ограниченную статистическую сумму Оогури-Вафы (производящую функцию данных полиномов)

$$\boxed{(1 - xyq^2) \left( \bar{\mathcal{Z}}^W(q^2x,y) - \bar{\mathcal{Z}}^W(x,q^2y) \right) = \frac{q}{A} (x - y) \left( A^2 \bar{\mathcal{Z}}^W(q^2x,q^2y) - \bar{\mathcal{Z}}^W(x,y) \right)}$$

Наконец, наименее тривиальным образом можно вычислить линейное рекуррентное соотношение, которое связывает между собой полиномы ХОМФЛИ при различных значениях  $s$  и фиксированном значении  $r$ . Прежде всего, выразим (2.39) в терминах  $q$ -факториалов:

$$\begin{aligned} H_{r,s}^W(A = q^N) &= \sum_{k=0} (-)^{k+1} q^{k^2+k-2k(r+s+N)+N-1} D_{-1} \times \\ &\times \frac{(r)!(s)!(r+N+k-1)!(s+N+k-1)!(N+k-2)!}{(r-k)!(s-k)!(r+N-1)!(s+N-1)!(N+2k-1)!} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Единственное отличие от (2.26) заключается в отсутствии множителя  $q^2$  перед  $\mathcal{H}_{r-1,s-1}^W$ . Данный множитель можно устранить с помощью надлежащего выбора нормировки.

Аналогично, для неприведённых полиномов мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{r,s}^W(A = q^N) &= \sum_{k=0} (-)^{k+1} q^{k^2+k-2k(r+s+N)+(1-s-r)(N-1)} D_{-1} \times \\ &\quad \times \frac{((r+N+k-1)!(s+N+k-1)!(N+k-2)!}{(r-k)!(s-k)!(N+2k-1)!(N-1)!(N-1)!} \\ &\equiv \sum_k \mathfrak{h}_{r,s}^W(k) \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся алгоритмом Д.Зейльбергера. Члены  $\mathfrak{h}_{r,s}^W$  ряда удовлетворяют следующему неоднородному линейному рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} &\frac{D_{2s+5}}{A^2 q^{2s}} \mathfrak{h}_{r,s}^W(k) + \\ &+ \left( (q^{r-s+2} + q^{-r-s} - q^{s-r+4}) \frac{D_{r+s+1} D_{2s+5}}{A^2} + \frac{D_{s+5} D_{2s+5}}{A^2 q^s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^{r-2s-3}}{A^2} D_{r+2} D_{2s+5} - q^{2s+8} \{q^2\} \right) \mathfrak{h}_{r,s+1}^W(k) + \\ &+ D_{2s+4} \left( \frac{q^3}{A^2} D_{s+r+2}^2 + \frac{q^{1-r}}{A^2} D_{s+r+2} (D_{s+2} + q^3 D_{s+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^{2-r}}{A^2} D_{2s+5} D_r - \frac{q^{1-s}}{A^2} D_{2r-1} D_{s+1} - \frac{q^{3-2r}}{A^2} (A^2 q^{4r} + 1) \right) \mathfrak{h}_{r,s+2}^W(k) - \\ &\quad - \left( \frac{q^{r+2}}{A} D_{2s+3} D_{s+2} D_{s+r+3} + \frac{q^{s-r+6}}{A^2} D_{2s+3} D_{s+r+3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^{2s-2r+7}}{A} D_{2s+3} - \frac{q^3}{A} D_{2s+5} \right) \mathfrak{h}_{r,s+3}^W(k) + \\ &\quad + q^{8+2s} D_{2s+3} \mathfrak{h}_{r,s+4}^W(k) = \mathcal{G}_{r,s}(k+1) - \mathcal{G}_{r,s}(k) \end{aligned} \tag{2.42}$$

где

$$\mathcal{G}_{r,s}(k) = q^{2k} D_{2k-1} D_{2k-2} D_{2s+5} D_{2s+4} D_{2s+3} \{q^{2-k}\} \{q^{3-k}\} \{q^{4-k}\} \{q^{5-k}\} \prod_{i=0}^{s-2} \frac{\{q^{k-2-i}\}}{\{q^{k-6-i}\}} \mathfrak{h}_{r,s}^W(k).$$

соответственно

$$-\mathcal{G}_{r,s}(0) = \frac{S_r^* D_{2s+3} D_{2s+4} D_{2s+5}}{\{q^{s+3}\} \{q^{s+4}\}} \prod_{i=1}^{s+2} \frac{D_{i-3}}{\{q^i\}}.$$

Суммируя (2.42) по  $k$  получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{2s+5}}{A^2 q^{2s}} \mathcal{H}_{r,s}^W + \\
& + \left( \left( \left( q^{r-s+2} + q^{-r-s} - q^{s-r+4} \right) D_{r+s+1} + q^{-s} D_{s+5} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - q^{r-2s-3} D_{r+2} \right) \frac{D_{2s+5}}{A^2} - q^{2s+8} \{q^2\} \right) \mathcal{H}_{r,s+1}^W + \\
& + \left( q^3 D_{s+r+2}^2 + q^{1-r} D_{s+r+2} (D_{s+2} + q^3 D_{s+1}) - q^{2-r} D_{2s+5} D_r - \right. \\
& \quad \left. - q^{1-s} D_{2r-1} D_{s+1} - q^{3-2r} (A^2 q^{4r} + 1) \right) \frac{D_{2s+4}}{A^2} \mathcal{H}_{r,s+2}^W - \\
& - \left( \frac{q^{r+2}}{A} D_{2s+3} D_{s+2} D_{s+r+3} + \frac{q^{s-r+6}}{A^2} D_{2s+3} D_{s+r+3} + \right. \\
& \quad \left. \frac{q^{2s-2r+7}}{A} D_{2s+3} - \frac{q^3}{A} D_{2s+5} \right) \mathcal{H}_{r,s+3}^W + \\
& \quad + q^{8+2s} D_{2s+3} \mathcal{H}_{r,s+4}^W = \\
& = \frac{S_r^* D_{2s+3} D_{2s+4} D_{2s+5}}{\{q^{s+3}\} \{q^{s+4}\}} \prod_{i=1}^{s+2} \frac{D_{i-3}}{\{q^i\}} \tag{2.43}
\end{aligned}$$

### Квантовая спектральная кривая

Левая часть уравнения (2.43) может быть представлена как результат действия некоммутативного полинома Лорана от  $\hat{P}_1, \hat{P}_2, Q_1, Q_2, A, q$ , который мы обозначим за  $\hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{WH}(\hat{P}_1, \hat{P}_2, Q_1, Q_2, A, q)$ , тогда

$$\hat{\mathcal{A}}_{1,2}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = \frac{S_r^* D_{2s+3} D_{2s+4} D_{2s+5}}{\{q^{s+3}\} \{q^{s+4}\}} \prod_{i=1}^{s+2} \frac{D_{i-3}}{\{q^i\}} \tag{2.44}$$

Заметим, что правая часть соотношения (2.44) зависит от  $r$  только через  $S_r^*$ . Таким образом, как и в случае зацепления Хопфа, применяя оператор соответствующий квантовой спектральной кривой неузла (2.14) мы избавляемся от правой части, получая линейное однородное рекуррентное соотношение пятого порядка

$$\hat{\mathcal{A}}_1^U \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0$$

Из симметрии относительно перемены компонент зацепления Уайтхэда

$$\hat{\mathcal{A}}_2^U \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0.$$

Наконец, соотношение (2.41) порождает

$$\left( (1 - \hat{P}_1 \hat{P}_2) (\hat{Q}_1^2 - \hat{Q}_2^2) - (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \left( \frac{A}{q} \hat{Q}_1^2 \hat{Q}_2^2 - \frac{q}{A} \right) \right) \mathcal{H}_{[r],[s]}^W \equiv \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^L \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0 \tag{2.45}$$

<sup>6</sup> Таким образом, квантовая спектральная кривая зацепления Уайтхеда имеет следующий вид

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_1^U \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_2^U \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^W \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^L \mathcal{H}_{[r],[s]}^W = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Аналогично в терминах индуцированного действия на производящую функцию полиномов ХОМФЛИ (ограниченную статистическую сумму Оогури-Вафы)

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{W,op} \hat{\mathcal{A}}_1^{U,op} \bar{\mathcal{Z}}^W(x,y) = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^{W,op} \hat{\mathcal{A}}_2^{U,op} \bar{\mathcal{Z}}^W(x,y) = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{L,op} \bar{\mathcal{Z}}^W(x,y) = 0. \end{cases}$$

### 2.3.3 Зацепление кольца Борромео

Для вывода рекуррентных соотношений воспользуемся общей формулой (2.11) полученной автором диссертации

$$H_{r,s,t}^B(A,q) = 1 + D_{-1} \sum_{k=1}^{\min(r,s,t)} (-)^k \{q\}^k [k]! \frac{D_{k-2}!}{(D_{2k-1}!)^2} \prod_{j=0}^{k-1} D_{r+j} D_{s+j} D_{t+j} \{q^{r-j}\} \{q^{s-j}\} \{q^{t-j}\} \quad (2.47)$$

Данное выражение в явном виде симметрично относительно перестановок  $r$ ,  $s$  и  $t$ . Более того, если положить  $r = 0$  что соответствует тривиальному представлению одной из компонент, то ответ становится равен 1, поскольку зацепление сводится к несвязной сумме двух узлов. Здесь также следует отметить, что точные вычисления квантовой спектральной кривой данного зацепления представляют особый интерес с точки зрения проверки обобщённой (квантовой) объёмной гипотезы, поскольку квантовые поправки к (2.47) возникают в четвёртом порядке  $\{q\}^4 \equiv (q - 1/q)^4$ .

#### Линейные рекуррентные соотношения

Непосредственной проверкой можно убедиться, что соотношение (2.41) выполнено и для случая зацепления кольца Борромео

$$\boxed{\mathcal{H}_{r,s,t}^B - \mathcal{H}_{r-1,s-1,t}^B = \frac{q}{A} \cdot \frac{A^2 q^{2r+2s-2} - 1}{q^{2r} - q^{2s}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s,t}^B - \mathcal{H}_{r,s-1,t}^B \right) = \frac{D_{r+s-1}}{\{q^{r-s}\}} \left( \mathcal{H}_{r-1,s}^B - \mathcal{H}_{r,s-1}^B \right)} \quad (2.48)$$

Из симметрии относительно перестановок, следует два дополнительных соотношения вида (2.48) для пар  $r,t$  и  $s,t$ . Для получения нетривиального линейного рекуррентного соотношения

<sup>6</sup> Единственное различие (2.45) с аналогичной формулой для зацепления Хопфа (2.36) в отсутствии множителя  $q^2$  перед  $\hat{P}_1 \hat{P}_2$ . Одно уравнение переводится в другое скейлингом  $\hat{P}_{1,2}$ , или, иначе, выбором нормировки  $\mathcal{H}_{[r],[s]}$ .

необходимо переписать (2.47) через квантовые факториалы:

$$H_{r,s,t}^B(A = q^N) - 1 = \sum_k (-)^k q^{3k^2 - k - 2k(r+s+t) + \frac{N(N+1)}{2} - 1} \times \\ \times \frac{(r)!(s)!(r+N+k-1)!(s+N+k-1)!(t+N+k-1)!(N+k-2)!k!}{(r-k)!(s-k)!(t-k)!(r+N-1)!(s+N-1)!(t+N-1)!((N+2k-1)!)^2}$$

Соответственно, для неприводимых полиномов имеем

$$\mathcal{H}_{r,s,t}^B(A = q^N) = \sum_k (-)^k q^{3k^2 - k - 2k(r+s+t) + (1-N)(s+r+t) + \frac{N(N+1)}{2} - 1} \times \\ \times \frac{(r+N+k-1)!(s+N+k-1)!(t+N+k-1)!(N+k-2)!k!}{(r-k)!(s-k)!(t-k)!((N+2k-1)!)^2}. \quad (2.49)$$

Используя программный пакет [66] можно вывести неоднородные линейные рекуррентные соотношения на члены ряда (2.49). Данные соотношения занимают несколько страниц, однако легко генерируются в Mathematica или Maple с помощью обычного персонального компьютера. Мы не будем приводить их полный вид в тексте, ограничившись первым и последним членом

$$D_{2s+3}D_{2s+4}D_{2s+5}D_{2s+10}D_{2s+11} \mathcal{H}_{r,s,t}^B + \dots + D_{2s+1}D_{2s+2}D_{2s+7}D_{2s+8}D_{2s+9} \mathcal{H}_{r,s+6,t}^B = \dots$$

В следующем разделе мы выпишем полную форму классического предела данных уравнений и соответствующую классическую спектральную кривую

## 2.4 Спектральные кривые и проверка гипотезы AENV.

В разделе 2.1 мы определили квантовые спектральные кривые зацеплений. Основным ингредиентом данного определения были некоммутативные операторы  $\hat{P}_i$  и  $\hat{Q}_i$  (2.6)

$$\hat{P}_i H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = H_{[r+1]}^{\mathcal{L}}, \quad \hat{Q}_i H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}} = q^{r_i} H_{[r_1], \dots, [r_n]}^{\mathcal{L}}. \quad (2.50)$$

$$\hat{P}_i \hat{Q}_i = q \hat{Q}_i \hat{P}_i, \quad \hat{P}_j \hat{Q}_k = \hat{Q}_k \hat{P}_j, \quad j \neq k. \quad (2.51)$$

Напомним, в пределе  $q = e^{\hbar} \rightarrow 1$  данные операторы переходят в коммутативные. А соответствующие квантовые спектральные кривые (2.8) переходят в системы алгебраических уравнений — классические спектральные кривые зацеплений. В недавней работе М.Аганаджич, Т.Экхольм, Л.Нг, К.Вафа [25] были вычислены классические спектральные кривые некоторых зацеплений с помощью метода контактных гомологий. Кроме торических и композитных зацеплений в [25] были рассмотрены зацепление Уайтхеда и кольца Борромео, именно в этих двух случаях сравнение классического предела квантовых спектральных кривых с предсказанием [25] представляет нетривиальную проверку обобщённой объёмной гипотезы. В данном разделе мы проведём вычисления спектральных кривых для случая узла, зацепления Хопфа, зацепления Уайтхеда и зацепления кольца Борромео.

### 2.4.1 Неузел

Рассмотрим квазиклассическое разложение статистической суммы Оогури-Вафы при малых значениях  $\hbar = \log q$ :

$$\bar{\mathcal{Z}}^U = \exp\left(\sum_k \frac{p_k^* z^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_k \frac{(A^k - A^{-k})z^k}{k(q^k - q^{-k})}\right) = \exp\left(\frac{1}{\hbar}W^U(A|z) + O(1)\right)$$

где

$$W^U(A|z) = \sum_k \left(\frac{A^k z^k}{2k^2} - \frac{A^{-k} z^k}{2k^2}\right). \quad (2.52)$$

Аналогом спектральной кривой Зайберга-Виттена является алгебраическое уравнение связывающее  $\mu = \exp\left(z \frac{\partial W(A|z)}{\partial z}\right)$  и  $z$ . Из (2.52) получаем

$$2 \log \mu = \sum_k \left(\frac{A^k z^k}{k} - \frac{A^{-k} z^k}{k}\right) = \log(1 - z/A) - \log(1 - zA)$$

Или, эквивалентно

$$\boxed{\Sigma^U : \quad \mu^2 (1 - zA) = 1 - z/A.} \quad (2.53)$$

Соответствующий дифференциал Зайберга-Виттена в терминах данных переменных имеет вид  $\frac{dz}{z} \log \mu$ .<sup>7</sup>

Спектральная кривая (2.53) совпадает с классическим пределом квантовой спектральной кривой неузла (2.19). Действительно, обозначим коммутативный аналог оператора дилатации  $\hat{T}_z$  в пределе  $q \rightarrow 1$  за  $\mu$

$$\left(A(1 - Aqz)T_z^2 + (A - qz)\right) \bar{\mathcal{Z}}^U(A|z) = 0 \xrightarrow{q \rightarrow 1} (1 - zA)\mu^2 = 1 - z/A$$

<sup>7</sup>Для сравнения с [25] необходимо сделать следующую замену переменных

$$x = \frac{1}{\mu^2}, \quad y = \frac{A}{z}$$

тогда (2.53) приобретает вид :

$$(A/z) + \mu^{-2} - (A/z)\mu^{-2} = A^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x + y - xy = A^2}$$

### 2.4.2 Зацепление Хопфа

Квантовая спектральная кривая зацепления Хопфа имеет вид (2.37)

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{H,op} \hat{\mathcal{A}}_1^{U,op} \bar{\mathcal{Z}}(x,y) = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{2,1}^{H,op} \hat{\mathcal{A}}_2^{U,op} \bar{\mathcal{Z}}(x,y) = 0, \\ \hat{\mathcal{A}}_{1,2}^{L',op} \bar{\mathcal{Z}}(x,y) = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_i^{U,op} &= \left( A \left( \hat{T}_{z_i}^2 - 1 \right) - q z_i \left( A^2 \hat{T}_{z_i}^2 - 1 \right) \right), \\ \hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{H,op} &= 1 - \frac{q}{A} \hat{T}_{z_i}^{-2} \hat{z}_j, \\ \hat{\mathcal{A}}_{i,j}^{L',op} &= \left( (\hat{T}_{z_i}^2 - \hat{T}_{z_j}^2) (1 - q^2 z_i z_j) - \left( \frac{A}{q} \hat{T}_{z_i}^2 \hat{T}_{z_j}^2 - \frac{q}{A} \right) (z_i - z_j) \right). \end{aligned}$$

В классическом пределе  $q \rightarrow 1$  операторы  $z_i$  и  $T_{z_j}$  становятся коммутативными, а система (2.54) переходит в систему алгебраических уравнений. Обозначим собственные значения операторов дилатации за

$$\hat{T}_{z_1} \rightarrow \mu_1, \quad \hat{T}_{z_2} \rightarrow \mu_2.$$

Тогда в квазиклассическом пределе

$$\begin{cases} (A\mu_1^2(1 - z_1 A) - (A - z_1))(A\mu_1^2 - z_2) = 0, \\ (A\mu_2^2(1 - z_2 A) - (A - z_2))(A\mu_2^2 - z_1) = 0, \\ A(1 - z_1 z_2)(\mu_1^2 - \mu_2^2) - (z_1 - z_2)(A^2 \mu_1^2 \mu_2^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Данное уравнение имеет две нетривиальных ветви решений.

1. Случай  $[1] \otimes [1]$ . Действительно, предположим один из факторов соответствующих узлу равен нулю. Без ограничения общности можно выбрать первый, тогда подставляя

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{A - z_1}{A(1 - z_1 A)}}$$

в последнее уравнение получаем

$$(z_1^2 - 1) (A^2 \mu_2^2 z_2 - A \mu_2^2 + A - z_2) = 0.$$

Легко убедиться, что  $z_1 = \pm 1$  будет соответствовать нульмерному решению, тогда как нетривиальная часть

$$A^2 \mu_2^2 z_2 - A \mu_2^2 + A - z_2$$

есть не что иное, как классическая спектральная кривая неузла. Таким образом, в данном случае мы получаем произведение двух кривых неузла:

$$V_{[1] \otimes [1]}^H = \begin{cases} A\mu_1^2(1 - z_1 A) - (A - z_1) = 0, \\ A\mu_2^2(1 - z_2 A) - (A - z_2) = 0. \end{cases}$$

2. Случай [2]. На другой ветви решений системы (2.55), оба уравнения неузла являются невыполненными, таким образом

$$V_{[2]}^H = \begin{cases} A\mu_1^2 = z_2, \\ A\mu_2^2 = z_1. \end{cases}$$

### 2.4.3 Зацепление Уайтхэда

Квантовая спектральная кривая зацепления Уайтхэда (2.46) в квазиклассическом пределе для малых значений  $\hbar$  переходит в систему алгебраических уравнений. За счёт факторизации, аналогично случаю зацепления Хопфа, данная система имеет две ветви решений. Первая ветвь соответствует произведению двух неузлов. Вторая, нетривиальная ветвь, получается пределом из квантовых уравнений (2.41) и (2.43). Ниже мы приведём только систему алгебраических уравнений определяющую только нетривиальную ветвь решений

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mu_1 - \mu_2)(1 - z_1 z_2) - (A^2 \mu_1 \mu_2 - 1)(z_1 - z_2) = 0, \\ \mu_2^2 \mu_1 A^4 + \left( -\mu_1^2 \mu_2^2 A^4 + (\mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1 - \mu_2) \mu_2 A^2 + (\mu_2 - \mu_1) \right) A z_2 + \\ + \left( (\mu_1 \mu_2 + \mu_2 - 2\mu_1) \mu_1 \mu_2 A^4 + (\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 + \mu_1 - 2\mu_2) A^2 + 1 \right) z_2^2 + \\ + \left( (\mu_1 \mu_2 - \mu_2^2 + 2\mu_2 - \mu_1) \mu_1 A^2 + (\mu_2 - \mu_1 - 1) \right) A z_2^3 + A^2 \mu_1 z_2^4 = 0, \\ \mu_1^2 \mu_2 A^4 + \left( -\mu_2^2 \mu_1^2 A^4 + (\mu_2^2 - \mu_2 \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_1) \mu_1 A^2 + (\mu_1 - \mu_2) \right) A z_1 + \\ + \left( (\mu_2 \mu_1 + \mu_1 - 2\mu_2) \mu_2 \mu_1 A^4 + (\mu_2^2 - 4\mu_2 \mu_1 + \mu_1^2 + \mu_2 - 2\mu_1) A^2 + 1 \right) z_1^2 + \\ + \left( (\mu_2 \mu_1 - \mu_1^2 + 2\mu_1 - \mu_2) \mu_2 A^2 + (\mu_1 - \mu_2 - 1) \right) A z_1^3 + A^2 \mu_2 z_1^4 = 0. \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Последние два уравнения системы (2.56) отличаются заменой индексов.

Данное уравнение совпадает с предсказанием в разделе 7.3 работы [25] после следующей замены переменных

$$Q = \frac{1}{A^2}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{z_1 A}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{z_2 A}. \quad (2.57)$$

### 2.4.4 Зацепления кольца Борромео

Теперь приведём алгебраическую систему уравнений соответствующую классической спектральной кривой зацепления кольца Борромео. Тривиальная ветвь соответствует произве-

дению трёх узлов, тогда как нетривиальная ветвь определяется следующим уравнением

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mu_r - \mu_s)(1 - z_r z_s) - (A^2 \mu_r \mu_s - 1)(z_r - z_s) = 0, \\ \mu^3 \{A\mu\}^3 \left( \nu \lambda \{A\mu\}^2 (A\mu)^2 (1 + z^6) + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-3}^2 \xi_{ij}^B \cdot z^i A^{i+2j} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.58)$$

для  $(\lambda, \mu, \nu)$  — всех перестановок  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ .

где коэффициенты  $\xi_{ij}^B$  имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{1,-1}^B &= -\nu - \lambda + \mu - \nu\lambda + \mu\lambda + \nu\mu - \mu^2 \\ \xi_{1,0}^B &= \mu^3\lambda + \mu^3 + \mu^3\nu - 2\nu\lambda\mu^2 - 2\mu^2\lambda - 2\nu\mu^2 - \mu^2 - \mu^2\lambda^2 - \nu^2\mu^2 + \nu\mu + \\ &\quad + 4\lambda\nu\mu + \nu^2\lambda\mu + \lambda^2\mu + \mu\lambda + \nu\lambda^2\mu + \nu^2\mu - \lambda^2\nu - \nu\lambda - \nu^2\lambda \\ \xi_{1,1}^B &= \mu(-\mu^3\nu\lambda - \mu^3\nu - \mu^3\lambda + \nu\mu^2 + 4\nu\lambda\mu^2 + \nu^2\mu^2\lambda + \mu^2\lambda^2 + \mu^2\lambda + \nu\mu^2\lambda^2 + \nu^2\mu^2 - \lambda^2\mu - \\ &\quad - 2\nu\lambda^2\mu - \nu^2\mu - 2\lambda\nu\mu - \nu^2\lambda^2\mu - 2\nu^2\lambda\mu + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\nu + \nu^2\lambda) \\ \xi_{1,2}^B &= -\lambda\nu\mu^2(\mu^2\lambda + \mu^2 + \nu\mu^2 - \lambda\nu\mu - \nu\mu - \mu\lambda + \nu\lambda) \\ \\ \xi_{2,-2}^B &= 1 + \lambda - 2\mu + \nu \\ \xi_{2,-1}^B &= \nu^2\lambda + 6\nu\mu^2 - 2\mu + \nu^2 + \lambda + \lambda^2\nu + \nu - 2\lambda^2\mu - 2\nu^2\mu + 6\mu^2 + 3\nu\lambda - \\ &\quad - 8\mu\lambda - 2\mu^3 + 6\mu^2\lambda + \lambda^2 - 8\lambda\nu\mu - 8\nu\mu \\ \xi_{2,0}^B &= -2\lambda^2\mu + 6\mu^2\lambda^2 - 2\nu^2\mu + \lambda^2\nu + \nu^2\lambda + 6\nu^2\mu^2\lambda - 2\nu^2\lambda^2\mu + 6\nu\mu^2\lambda^2 - \\ &\quad - 8\lambda\nu\mu + 26\nu\lambda\mu^2 - 8\nu\lambda^2\mu - 8\nu^2\lambda\mu - \\ &\quad - 8\mu^3\nu\lambda + 6\nu^2\mu^2 + 6\nu\mu^2 + 6\mu^2\lambda + \mu^4\lambda + \mu^4\nu + \nu^2\lambda^2 - \\ &\quad - 8\mu^3\nu - 2\mu^3\lambda^2 - 8\mu^3\lambda - 2\mu^3\nu^2 - 2\mu^3 + \mu^4 \\ \xi_{2,1}^B &= \mu(\mu^3\nu^2\lambda - 2\nu^2\mu^2 + 3\mu^3\nu\lambda - 8\nu\lambda\mu^2 - 8\nu\mu^2\lambda^2 + 6\nu^2\lambda\mu + 6\nu\lambda^2\mu - 8\nu^2\mu^2\lambda + \\ &\quad + 6\nu^2\lambda^2\mu - 2\nu^2\lambda^2 + \mu^3\lambda^2 + \mu^3\lambda + \mu^3\nu^2 + \mu^3\lambda^2\nu - 2\nu^2\mu^2\lambda^2 + \mu^3\nu - 2\mu^2\lambda^2) \\ \xi_{2,2}^B &= \mu^3\nu\lambda(\mu\lambda - 2\nu\lambda + \lambda\nu\mu + \nu\mu) \end{aligned}$$

$$\xi_{3,-3}^B = -1$$

$$\xi_{3,-2}^B = 6\nu\mu + 6\mu - 4\mu^2 - 1 + 6\mu\lambda - 2\lambda - 2\nu\lambda - 2\nu - \lambda^2 - \nu^2$$

$$\xi_{3,-1}^B = -\nu^2\lambda^2 + 6\nu^2\lambda\mu + 6\mu^3 + 6\mu\lambda -$$

$$-20\nu\mu^2 + 6\lambda^2\mu - \mu^4 - \lambda^2 + 6\nu\mu - 4\mu^2\lambda^2 - 4\nu^2\mu^2 - 20\nu\lambda\mu^2 - 2\nu\lambda -$$

$$-2\nu^2\lambda + 6\mu^3\lambda - 20\mu^2\lambda - 4\mu^2 + 6\mu^3\nu + 6\nu\lambda^2\mu + 24\lambda\nu\mu - 2\lambda^2\nu - \nu^2 + 6\nu^2\mu$$

$$\xi_{3,0}^B = 6\mu^3\lambda^2 - 20\nu\mu^2\lambda^2 + 6\mu^3\nu^2 - 4\mu^2\lambda^2 + 6\nu^2\lambda\mu - \mu^4\nu^2 + 6\mu^3\lambda - 4\nu^2\mu^2 - 20\nu^2\mu^2\lambda -$$

$$-\nu^2\lambda^2 - 4\nu^2\mu^2\lambda^2 + 6\nu^2\lambda^2\mu - 2\mu^4\nu - \mu^4 + 6\mu^3\nu - 2\nu\mu^4\lambda + 6\mu^3\lambda^2\nu -$$

$$-20\nu\lambda\mu^2 + 24\mu^3\nu\lambda + 6\mu^3\nu^2\lambda - \mu^4\lambda^2 + 6\nu\lambda^2\mu - 2\mu^4\lambda$$

$$\xi_{3,1}^B = -\mu^2(-6\nu^2\lambda^2\mu - 6\nu\lambda^2\mu + 4\nu^2\lambda^2 + \nu^2\mu^2 + 2\nu\mu^2\lambda^2 + \nu^2\mu^2\lambda^2 + 2\nu\lambda\mu^2 +$$

$$+ 2\nu^2\mu^2\lambda + \mu^2\lambda^2 - 6\nu^2\lambda\mu)$$

$$\xi_{3,2}^B = -\mu^4\nu^2\lambda^2$$

$$\xi_{4,-3}^B = 1 + \lambda - 2\mu + \nu$$

$$\xi_{4,-2}^B = \nu^2\lambda + 6\nu\mu^2 - 2\mu + \nu^2 + \lambda + \lambda^2\nu + \nu - 2\lambda^2\mu - 2\nu^2\mu + 6\mu^2 + 3\nu\lambda - 8\mu\lambda - 2\mu^3 +$$

$$+ 6\mu^2\lambda + \lambda^2 - 8\lambda\nu\mu - 8\nu\mu$$

$$\xi_{4,-1}^B = -2\lambda^2\mu + 6\mu^2\lambda^2 - 2\nu^2\mu + \lambda^2\nu + \nu^2\lambda +$$

$$+ 6\nu^2\mu^2\lambda - 2\nu^2\lambda^2\mu - 8\nu^2\lambda\mu + 6\nu\mu^2\lambda^2 - 8\lambda\nu\mu + 26\nu\lambda\mu^2 - 8\nu\lambda^2\mu -$$

$$- 8\mu^3\nu\lambda + 6\nu^2\mu^2 + 6\nu\mu^2 + 6\mu^2\lambda + \mu^4\lambda + \mu^4\nu + \nu^2\lambda^2 - 8\mu^3\nu - 2\mu^3\lambda^2 - 8\mu^3\lambda -$$

$$- 2\mu^3\nu^2 - 2\mu^3 + \mu^4$$

$$\xi_{4,0}^B = \mu(\mu^3\nu^2\lambda - 2\nu^2\mu^2 + 3\mu^3\nu\lambda - 8\nu\lambda\mu^2 - 8\nu\mu^2\lambda^2 + 6\nu^2\lambda\mu + 6\nu\lambda^2\mu - 8\nu^2\mu^2\lambda + 6\nu^2\lambda^2\mu -$$

$$- 2\nu^2\lambda^2 + \mu^3\lambda^2 + \mu^3\lambda + \mu^3\nu^2 + \mu^3\lambda^2\nu - 2\nu^2\mu^2\lambda^2 + \mu^3\nu - 2\mu^2\lambda^2)$$

$$\xi_{4,1}^B = \mu^3\nu\lambda(\mu\lambda - 2\nu\lambda + \lambda\nu\mu + \nu\mu)$$

$$\xi_{5,-3}^B = -\nu - \lambda + \mu - \nu\lambda + \mu\lambda + \nu\mu - \mu^2$$

$$\xi_{5,-2}^B = \mu^3\lambda + \mu^3 + \mu^3\nu - 2\nu\lambda\mu^2 - 2\mu^2\lambda - 2\nu\mu^2 - \mu^2 - \mu^2\lambda^2 - \nu^2\mu^2 + \nu\mu +$$

$$+ 4\lambda\nu\mu + \nu^2\lambda\mu + \lambda^2\mu + \mu\lambda + \nu\lambda^2\mu + \nu^2\mu - \lambda^2\nu - \nu\lambda - \nu^2\lambda$$

$$\xi_{5,-1}^B = \mu(-\mu^3\nu\lambda - \mu^3\nu - \mu^3\lambda + \nu\mu^2 + 4\nu\lambda\mu^2 + \nu^2\mu^2\lambda + \mu^2\lambda^2 + \mu^2\lambda + \nu\mu^2\lambda^2 +$$

$$+ \nu^2\mu^2 - \lambda^2\mu - 2\nu\lambda^2\mu - \nu^2\mu - 2\lambda\nu\mu - \nu^2\lambda^2\mu - 2\nu^2\lambda\mu + \nu^2\lambda^2 + \lambda^2\nu + \nu^2\lambda)$$

$$\xi_{5,0}^B = -\lambda\nu\mu^2(\mu^2\lambda + \mu^2 + \nu\mu^2 - \lambda\nu\mu - \nu\mu - \mu\lambda + \nu\lambda)$$

Производя замену переменных (2.57):

$$Q = \frac{1}{A^2}, \quad \mu_1 = \nu, \quad \mu_2 = \lambda, \quad \mu_3 = \mu, \quad \lambda_1 = \frac{1}{z_1 A}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{z_2 A}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{z_3 A},$$

мы получаем из (2.58) соответствующее уравнение в разделе 7.4 работы [25].

## Заключение

### Тезисы выносимые на защиту

- Предложено конструкция полевого обобщения задачи изомонодромных деформаций для расслоений бесконечного ранга
- Построена иерархия изомонодромных деформаций для расслоений, связанных с алгеброй некоммутативного тора.
- Изучен бездисперсионный предел полученных полевых уравнений, показано что гамильтоновы уравнения движения предельных полевых уравнений могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны. Кроме того, изучены тригонометрический и рациональный пределы, а также скейлинговый предел.
- Получены явные формулы для цветных полиномов ХОМФЛИ зацеплений Уайтхеда и Кольца Борромео для случая произвольных симметрических представлений.
- Произведено вычисление квантовых спектральных кривых вышеупомянутых зацеплений. Данные вычисления являются первым явным вычислением квантовой спектральной кривой для неторических зацеплений в случае произвольного ранга калибровочной группы.
- В результате вычисления квазиклассического предела квантовых спектральных кривых и сравнения с предсказаниями теории струн произведена первая нетривиальная проверка обобщённой объёмной гипотезы.

### Благодарности

В заключение, я хотел бы поблагодарить своих коллег и соавторов Г. А. Аминова, А. М. Левина, А. Д. Миронова, А. Ю. Морозова, А. А. Морозова, А. В. Смирнова, А. В. Зотова, Ш. Р. Шакирова за плодотворную совместную работу. Мне хотелось бы выразить искреннюю признательность своему научному руководителю М. А. Ольшанецкому, помогавшему мне сделать первые шаги в исследованиях интегрируемых систем, за предложенные задачи и особое внимание к работе.

Кроме того, мне хотелось бы поблагодарить постоянных участников и организаторов теоретических семинаров ИТЭФ, А.Анохину, К.Бульчёву, Д.Галахова, Д.Горского, С.Гуца, И.Даниленко, П.Дунина-Барковского, Е.Зенкевича, В.Кирилина, А.Маршакова, А.Милёхина, И.Полюбина, А.Садофьева, А.Слепцова за многократные обсуждения и Е.С.Сулову за помощь на протяжении моей работы. Наконец, мне хотелось бы поблагодарить мою жену Свету за моральную поддержку в ходе работы над текстом.

### Список литературы

1. *А. Белавин А., Е. Захаров В.* Многомерный метод обратной задачи рассеяния и уравнения дуальности для поля Янга-Миллса II Письма в ЖЭТФ. 1977 // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 1977. — Vol. 25. — P. 603.
2. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — 1986.
3. *Mikhailov Alexander Vasil'evich, Shabat Alexey Borisovich, Yamilov Ravil Islamovich.* The symmetry approach to the classification of non-linear equations. Complete lists of integrable systems // *Russian Mathematical Surveys.* — 1987. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 1–63.
4. *Mikhailov AV, Shabat AB, Sokolov VV.* The symmetry approach to classification of integrable equations // *What is integrability?* — Springer, 1991. — Pp. 115–184.
5. *Hitchin Nigel.* Stable bundles and integrable systems // *Duke Math. J.* — 1987. — Vol. 54, no. 1. — Pp. 91–114. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05408-1>.
6. Affine Toda field theory and exact S-matrices / HW Braden, E Corrigan, PE Dorey, R Sasaki // *Nuclear Physics B.* — 1990. — Vol. 338, no. 3. — Pp. 689–746.
7. *Зотов А. В.* Классические интегрируемые системы и их теоретико-полевые обобщения: Ph.D. thesis / ИТЭФ. — Москва, 2004.
8. *Dubrovin Boris.* Integrable systems in topological field theory // *Nuclear Physics B.* — 1992. — Vol. 379, no. 3. — Pp. 627–689.
9. *Levin A. M., A. Olshanetsky M.* Painlevé - Calogero correspondence // *CRM Ser. Math. Phys.* — 1997. — March. — Pp. 313–332.
10. *Levin A., Olshanetsky M.* Hierarchies of isomonodromic deformations and Hitchin systems. — Amer Mathematical Society, 1999. — Vol. 1. — P. 191.
11. *Levin A. M., Olshanetsky M. A., Zotov A.* Hitchin Systems - Symplectic Hecke Correspondence and Two-Dimensional Version // *Communications in Mathematical Physics.* — 2003. — Vol. 236, no. 1. — Pp. 93–133. <http://arxiv.org/abs/nlin/0110045>.
12. *Schwarz Albert S.* The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer invariants // *Letters in Mathematical Physics.* — 1978. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 247–252.
13. *Polyakov A.M.* FERMION-BOSE TRANSMUTATIONS INDUCED BY GAUGE FIELDS // *Modern Physics Letters A.* — 1988. — Vol. 03, no. 03. — Pp. 325–328. <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732388000398>.
14. *Witten Edward.* Quantum field theory and the Jones polynomial // *Communications in Mathematical Physics.* — 1989. — Vol. 121, no. 3. — Pp. 351–399.

15. Link polynomial calculus and the AENV conjecture / S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Journal of High Energy Physics*. — 2014. — Vol. 2014, no. 4.
16. Aminov G., Arthamonov S. New  $2 \times 2$ -Matrix Linear Problems for the Painlevé Equations III, V // *Constructive Approximation*. — 2015. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 357–383. <http://dx.doi.org/10.1007/s00365-015-9281-7>.
17. Painlevé field theory / G Aminov, S Arthamonov, A Levin et al. // *arXiv preprint arXiv:1306.3265*. — 2013.
18. Артамонов С. Б., Миронов А. Д., Морозов А.Ю. Иерархия дифференциалов и дополнительная градуировка полиномов узлов // *ТМФ*. — 2014. — Vol. 179, no. 2. — Pp. 147–188.
19. Aminov G., Arthamonov S. Reduction of the elliptic  $SL(N, C)$  top // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, no. 7. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/7/075201>.
20. Inozemtsev V. I. Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems // *Letters in Mathematical Physics*. — 1989. — Vol. 17. — Pp. 11–17. — 10.1007/BF00420008. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00420008>.
21. Reshetikhin N., Turaev V. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // *Communications in Mathematical Physics*. — 1990. — Vol. 127, no. 1. — Pp. 1–26.
22. Mironov A., Morozov A. Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — Pp. 1–34.
23. Anokhina A., Mironov A., Morozov A. Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6-and 7-strand braids // *Nuclear Physics B*. — 2013. — Vol. 868, no. 1. — Pp. 271–313.
24. Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ // *ТМФ*. — 2014. — Vol. 178, no. 1. — Pp. 3–68.
25. Topological Strings, D-Model, and Knot Contact Homology / Mina Aganagic, Tobias Ekholm, Lenhard Ng, Cumrun Vafa // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. — 2014. — Vol. 18, no. 4. — Pp. 827–956.
26. Боби́рх А.А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. — 2000.
27. Schlesinger L. Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1912. — Vol. 141. — Pp. 96–145.
28. Fuchs R. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre // *C. R. Acad. Sci*. — 1905. — Vol. 141. — Pp. 555–558.

29. *Okamoto K.* Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I // *Proc. Japan Acad. Ser.* — 1980. — Vol. A 56. — Pp. 264–268.
30. *Okamoto K.* On the  $\tau$ -function of the Painlevé equations // *Physica.* — 1981. — Vol. D 2. — Pp. 525–535. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278981900269>.
31. *Okamoto K.* Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier systems // *J. Fac. Sci. Univ.* — 1986. — Vol. IA 33. — Pp. 575–618.
32. *Malmquist J.* Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixés // *Ark. Mat. Astr. Fys.* — 1922. — Vol. 17. — Pp. 1–89.
33. *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé Equation, Universal Elliptic Curve, and Mirror of  $\mathbf{P}^2$  // *Amer. Math. Soc. Transl.* 2. — 1998. — Vol. 186. — Pp. 131–151.
34. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes // *C. R. Acad. Sci.* — 1906. — Vol. 143. — Pp. 1111–1117.
35. *Babich M.V., Bordag L.A.* Projective Differential Geometrical Structure of the Painlevé Equations // *Journal of Differential Equations.* — 1999. — Vol. 157, no. 2. — Pp. 452 – 485. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039699936288>.
36. *Zotov A.* Elliptic Linear Problem for Calogero-Inozemtsev Model and Painleve VI Equation // *Letters in Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 67. — Pp. 153–165.
37. *Krichever I. M.* Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles // *Functional Analysis and Its Applications.* — 1980. — Vol. 14. — Pp. 282–290. — 10.1007/BF01078304. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01078304>.
38. *t Hooft Gerardus.* A planar diagram theory for strong interactions // *Nucl. Phys. B.* — 1973. — Vol. 72, no. CERN-TH-1786. — Pp. 461–473.
39. *Kontsevich Maxim.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // *Communications in Mathematical Physics.* — 1992. — Vol. 147, no. 1. — Pp. 1–23.
40. *Gubser Steven S, Klebanov Igor R, Polyakov Alexander M.* Gauge theory correlators from non-critical string theory // *Physics Letters B.* — 1998. — Vol. 428, no. 1. — Pp. 105–114.
41. *Witten Edward.* Anti-de Sitter Space And Holography // *Adv. Theor. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 2, no. hep-th/9802150. — Pp. 253–291.
42. *Maldacena Juan.* The large-N limit of superconformal field theories and supergravity // *International journal of theoretical physics.* — 1999. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 1113–1133.

43. Gopakumar R, Vafa C. On the Gauge Theory/Geometry Correspondence // *Adv. Theor. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 3, no. hep-th/9811131. — Pp. 1415–1443.
44. Ooguri Hiroshi, Vafa Cumrun. Knot invariants and topological strings // *Nuclear Physics B.* — 2000. — Vol. 577, no. 3. — Pp. 419–438.
45. Fairlie David B, Fletcher P, Zachos Cosmas K. Infinite-dimensional algebras and a trigonometric basis for the classical Lie algebras // *Journal of Mathematical Physics.* — 1990. — Vol. 31, no. 5. — Pp. 1088–1094.
46. Rieffel Marc A. Non-commutative tori—a case study of non-commutative differentiable manifolds // *Contemp. Math.* — 1990. — Vol. 105. — Pp. 191–211.
47. Kontsevich Maxim. Deformation quantization of Poisson manifolds // *Letters in Mathematical Physics.* — 2003. — Vol. 66, no. 3. — Pp. 157–216.
48. Takasaki K. Painleve-Calogero correspondence revisited // *Journal of Mathematical Physics.* — 2001. — Vol. 42, no. 3. — Pp. 1443–1473. <http://link.aip.org/link/doi/10.1063/1.1348025>.
49. Frohman Charles, Gelca Răzvan, Lofaro Walter. The A-polynomial from the noncommutative viewpoint // *Transactions of the American Mathematical Society.* — 2002. — Vol. 354, no. 2. — Pp. 735–747.
50. Garoufalidis Stavros. On the characteristic and deformation varieties of a knot // *Geometry & Topology Monographs.* — 2004. — Vol. 7. — Pp. 291–309.
51. Garoufalidis Stavros, Lê Thang TQ. The colored Jones function is q-holonomic // *Geometry & Topology.* — 2005. — Vol. 9, no. 3. — Pp. 1253–1293.
52. Garoufalidis Stavros. The colored HOMFLY polynomial is q-holonomic // *arXiv preprint arXiv:1211.6388.* — 2012.
53. Бернштейн Иосиф Н. Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1971. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 1–16.
54. Бернштейн Иосиф Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1972. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 26–40.
55. Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds / Daryl Cooper, Marc Culler, Henri Gillet et al. // *Inventiones mathematicae.* — 1994. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 47–84.
56. Murakami Hitoshi, Murakami Jun. The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot // *Acta Mathematica.* — 2001. — Vol. 186, no. 1. — Pp. 85–104.

57. Hikami Kazuhiro. Volume conjecture and asymptotic expansion of q-series // *Experimental Mathematics*. — 2003. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 319–337.
58. Nawata Satoshi, Ramadevi P, Sun Xinyu. Super-A-polynomials for twist knots // *Journal of High Energy Physics*. — 2012. — Vol. 2012, no. 11. — Pp. 1–39.
59. Hoste Jim, Shanahan Patrick D. A formula for the A-polynomial of twist knots // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 2004. — Vol. 13, no. 02. — Pp. 193–209. <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216504003081>.
60. Character Expansion for Homfly Polynomials Iii: all 3-STRAND Braids in the First Symmetric Representation / H Itoyama, A Mironov, A Morozov, And Morozov // *International Journal of Modern Physics A*. — 2012. — Vol. 27, no. 19. — P. 1250099.
61. Rosso Marc, Jones Vaughan. On the invariants of torus knots derived from quantum groups // *Journal of Knot Theory and its Ramifications*. — 1993. — Vol. 2, no. 01. — Pp. 97–112.
62. Lin Xiao-Song, Zheng Hao. On the Hecke algebras and the colored HOMFLY polynomial // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 2010. — Vol. 362, no. 1. — Pp. 1–18.
63. Stevan Sébastien. Chern–Simons invariants of torus links // *Annales Henri Poincaré / Springer*. — Vol. 11. — 2010. — Pp. 1201–1224.
64. Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P Dunin-Barkowski, A Mironov, A Morozov et al. // *Journal of High Energy Physics*. — 2013. — Vol. 2013, no. 3. — Pp. 1–87.
65. Aganagic Mina, Shakirov Shamil. Refined Chern–Simons theory and knot homology // *String-Math 2011*. — 2012. — Vol. 85. — Pp. 3–31.
66. Tech. Rep.: <http://www.math.rutgers.edu/zeilberg/tokhniot/qZEILBERGER>.
67. Koornwinder Tom H. On Zeilberger’s algorithm and its q-analogue // *Journal of computational and applied mathematics*. — 1993. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 91–111.
68. Mohammed Mohamud, Zeilberger Doron. Sharp upper bounds for the orders of the recurrences output by the Zeilberger and q-Zeilberger algorithms // *Journal of Symbolic Computation*. — 2005. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 201–207.
69. Painlevé P. Memoire sur les équations différentielles dont l’intégrale générale est uniforme // *Bull. Soc. Math. Phys*. — 1900. — Vol. 28. — Pp. 201–261.
70. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme // *Acta Math. Ann*. — 1902. — Vol. 21. — Pp. 1–85.

71. *Gambier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critique fixés // *C. R. Acad. Sci.* — 1906. — Vol. 142. — Pp. 166–269.

## Приложение А

### Уравнения Пенлеве

Уравнениями Пенлеве называют нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка открытые П.Пенлеве, Р.Фуксом и Б.Гамбье [28, 69–71] в ходе классификации ОДУ второго порядка решения которых имеют только один тип сингулярностей зависящих от начальных условий — простые полюса. Всего в классификации Пенлеве 50 уравнений, только 6 из которых не интегрируются в квадратурах (при значении параметров в общем положении)

$$\text{PVI: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left[ \alpha - \beta \frac{t}{\lambda^2} + \gamma \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \left( \frac{1}{2} - \delta \right) \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right],$$

$$\text{PV: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2} \left( \alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda} \right) + \gamma \frac{\lambda}{t} + \delta \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)},$$

$$\text{PIV: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda},$$

$$\text{PIII: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{t} (\alpha\lambda^2 + \beta) + \gamma\lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda},$$

$$\text{PII: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha,$$

$$\text{PI: } \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 6\lambda^2 + t,$$

здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — произвольные комплексные постоянные.

Уравнения Пенлеве I-V могут быть получены из уравнения Пенлеве VI с помощью вырождения. Общая схема вырождения имеет следующий вид (Рис. А.1)

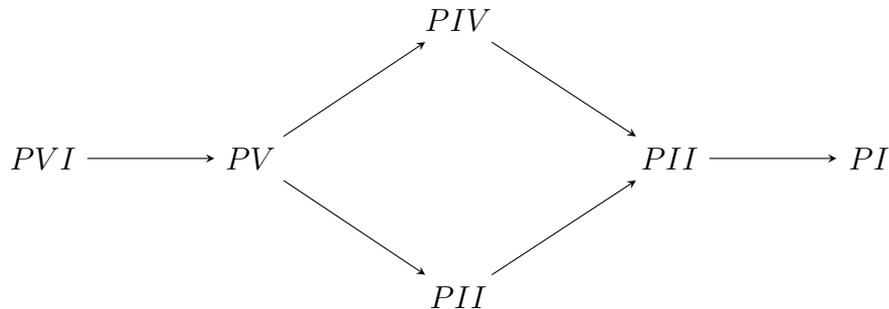


Рисунок А.1 — Предельные соотношения между уравнениями Пенлеве.

### Тригонометрическая форма уравнения Пенлеве V

Уравнение Пенлеве V содержит квадрат первой производной  $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$ . Его можно устранить заменой переменных. Действительно, решая соответствующее ОДУ на функцию замены пере-

менных, мы получаем

$$\lambda(t) = \lambda(u(t)) = -\operatorname{tg}^2(\pi u(t)).$$

В результате коэффициент при  $(d\lambda/dt)^2$  зануляется. Далее, с помощью замены  $t(\tau) = e^\tau$  можно также занулить коэффициент при первой производной  $d\lambda/dt$ , таким образом

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\alpha \sin(\pi u)}{2\pi \cos^3(\pi u)} + \frac{\beta \cos(\pi u)}{2\pi \sin^3(\pi u)} + 2\gamma e^\tau \sin(2\pi u) + \delta e^{2\tau} \sin(4\pi u). \quad (\text{A.1})$$

Мы воспользуемся данной формой уравнения Пенлеве V в разделе 1.3.1.

### Тригонометрическая форма уравнения Пенлеве III

Уравнение Пенлеве III в рациональной форме содержит член при квадрате первой производной. Воспользуемся следующей заменой переменных

$$\lambda(t) = e^{u(t)}.$$

чтобы устранить квадрат производной. Далее, с помощью замены независимой переменной  $t = e^\tau$  можно избавиться от линейного члена по первой производной, таким образом получаем:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha e^{\tau+u} + \beta e^{\tau-u} + \gamma e^{2(\tau+u)} + \delta e^{2(\tau-u)}. \quad (\text{A.2})$$

Мы воспользуемся данной формой уравнения Пенлеве III в разделе 1.3.2.

## Приложение Б

### Алгебра некоммутативного тора

Следуя работам [45,46] определение и основные свойства алгебры некоммутативного тора.

#### Б.1 Определение в терминах генераторов и соотношений

Некоммутативным тором  $\mathcal{T}_\hbar^2$  мы называем унитарную ассоциативную алгебру с двумя генераторами  $(U_1, U_2)$  которые удовлетворяют

$$U_1 U_2 = e_\hbar^{-1} U_2 U_1, \quad e_\hbar = e^{2\pi i \hbar}, \quad \hbar \in [0, 1). \quad (\text{Б.1})$$

Из соотношения (Б.1) следует, что некоммутативный тор  $\mathcal{T}_\hbar^2$  является плоской деформацией коммутативной алгебры. Таким образом, произвольный элемент данной алгебры может быть представлен в виде линейной комбинации следующих базисных элементов

$$\mathcal{T}_\hbar^2 = \left\{ X = \sum_{a_1, a_2 \in \mathbb{Z}} c_{a_1, a_2} U_1^{a_1} U_2^{a_2} \mid c_{a_1, a_2} \in \mathbb{C} \right\}. \quad (\text{Б.2})$$

Введём следующие обозначения для базиса на  $\mathcal{T}_\hbar^2$

$$T^a = \frac{i}{2\pi\hbar} e\left(-\frac{a_1 a_2}{2} \hbar\right) U_1^{a_1} U_2^{a_2} \quad a \in \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (\text{Б.3})$$

Из (Б.1) получаем

$$T^a T^b = -2\pi i \hbar e_\hbar\left(\frac{a \times b}{2}\right) T^{a+b}, \quad (a \times b = a_2 b_1 - a_1 b_2). \quad (\text{Б.4})$$

Следовательно,

$$T^a T^b = e_\hbar(a \times b) T^b T^a. \quad (\text{Б.5})$$

#### Б.2 Алгебра бесконечных матриц

Элементам  $U_1, U_2$  можно придать смысл матриц в  $\text{GL}(\infty)$ . Определим  $\text{GL}(\infty)$  как ассоциативную алгебру бесконечных матриц  $c_{jk} E_{jk}$ , где  $E_{jk} = \|\delta_{jk}\|$ , таких что

$$\sup_{j, k \in \mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 |j - k|^n < \infty \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим следующие элементы  $\text{GL}(\infty)$ :

$$Q = \text{diag}(e(j\hbar)) \quad \text{и} \quad \Lambda = \|\delta_{j, j+1}\|, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Б.6})$$

Таким образом

$$U_1 \rightarrow Q, \quad U_2 \rightarrow \Lambda. \quad (\text{Б.7})$$

### Б.3 Умножение Мoyalа

Кроме того,  $\mathcal{T}_\hbar^2$  имеет эквивалентное определение в терминах операторов на пространстве Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$U_1 f(x) = f(x - \hbar), \quad U_2 f(x) = \exp(2\pi i x) f(x). \quad (\text{Б.8})$$

Аналогом следа на  $\mathcal{T}_\hbar^2$  является следующий функционал

$$\langle X \rangle = \text{tr}(X) = c_{00}. \quad (\text{Б.9})$$

Легко убедиться в том, что данный функционал является инвариантным относительно циклических перестановок мономов в аргументе и отображает единицу в алгебре в единицу поля

$$\langle 1 \rangle = 1, \quad \langle XY \rangle = \langle YX \rangle. \quad (\text{Б.10})$$

Некоммутативный тор  $\mathcal{T}_\hbar^2$  является плоской деформацией коммутативной алгебры гладких функций на торе  $T^2 = \{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \sim \{0 < x_1 \leq 1, 0 < x_2 \leq 1\}$ . При этом генераторам алгебры соответствуют экспоненциальные функции, тогда как деформация коммутативного умножения имеет следующий вид

$$U_1 \rightarrow \mathbf{e}(x_1), \quad U_2 \rightarrow \mathbf{e}(x_2), \quad \mathbf{e}(x_1) * \mathbf{e}(x_2) = e^{-2\pi i \hbar} \mathbf{e}(x_2) * \mathbf{e}(x_1),$$

$$f(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} f_a T_a(x), \quad T^a = T^a(x) = \frac{i}{2\pi \hbar} \mathbf{e}\left(\frac{a_1 a_2}{2} \hbar\right) \mathbf{e}(a_1 x_1) \mathbf{e}(a_2 x_2). \quad (\text{Б.11})$$

Ассоциативное умножение  $T^2$  также называется умножением Мoyalа:

$$(f * g)(x) := fg + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi \hbar)^n}{n!} \varepsilon_{r_1 S^1} \dots \varepsilon_{r_n S^n} (\tilde{\partial}_{r_1 \dots r_n}^n f)(\tilde{\partial}_{S^1 \dots S^n}^n g), \quad \tilde{\partial}_j = \frac{1}{2\pi i} \partial_j. \quad (\text{Б.12})$$

В данных терминах некоммутативный след (Б.9) может быть представлен в форме интеграла

$$\text{tr} f = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{T}_\hbar^2} f dx_1 dx_2 = f_{00}. \quad (\text{Б.13})$$

### Б.4 Инфинитезимальные операторы, Синус-алгебра

Обозначим за  $\mathfrak{g} = \text{sin}_\hbar$  алгебру Ли, порождённую генераторами  $T^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ ) над кольцом  $\mathfrak{S}$

$$\text{sin}_\hbar = \left\{ \psi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \psi_\alpha T^\alpha, \quad \psi_\alpha \in \mathfrak{S} \right\}, \quad \mathfrak{S} = \{ \psi_\alpha = 0 \text{ кроме конечного числа элементов } \alpha \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (\text{Б.14})$$

Иными словами,  $\sin_{\hbar}$  является некоммутативным аналогом алгебры тригонометрических полиномов. Из (Б.4) следует, что коммутатор имеет вид

$$[T^\alpha, T^\beta] = \mathbf{C}_{\hbar}(\alpha, \beta) T^{\alpha+\beta}, \quad (\text{Б.15})$$

где

$$\mathbf{C}_{\hbar}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi\hbar} \sin \pi\hbar(\alpha \times \beta), \quad \alpha \times \beta = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2. \quad (\text{Б.16})$$

В терминах представления Мойла (Б.12) коммутатор в  $\sin_{\hbar}$  имеет вид

$$[f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)]_{\hbar} := \frac{1}{\hbar} (f * g - g * f) \quad (\text{Б.17})$$

Наличие следа (Б.9) позволяет определить соответствующую коалгебру  $\mathfrak{g}^* = \sin_{\hbar}^*$  как следующее подпространство гладких распределений

$$\sin_{\hbar}^* = \left\{ \mathbf{S} \mid \int_{\mathcal{T}_{\hbar}^2} \mathbf{S} \cdot \psi < \infty, \text{ для } \psi \in \sin_{\hbar} \right\} \quad (\text{Б.18})$$

Назовём  $SIN_{\hbar}$  — группу обратимых элементов из  $\mathcal{T}_{\hbar}^2$ .

$$SIN_{\hbar} = \left\{ \Psi = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} \Psi_a T^a \right\}. \quad (\text{Б.19})$$

В данной группе  $\frac{i}{2\pi\hbar} T^0$  играет роль единичного элемента, более того  $(T^a)^{-1} = T^{-a}$ .

### Б.5 Базис синус-алгебры в конечномерном случае

Данный базис является конечномерной версией базиса (Б.3). Пусть

$$\mathbb{Z}_N^{(2)} = (\mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_N) \setminus (0, 0). \quad (\text{Б.20})$$

Тогда

$$T^\alpha = e^{\frac{2\pi i}{N} a_1 a_2} Q^{\alpha_1} \Lambda^{\alpha_2}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_N^{(2)}, \quad (\text{Б.21})$$

где  $Q$  и  $\Lambda$  являются матрицами г'Хофта

$$Q = \text{diag}(\mathbf{e}_N(1), \mathbf{e}_N(2), \dots, 1), \quad \mathbf{e}_N(x) = \exp \frac{2\pi i}{N}(x),$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.22})$$

$$[T^\alpha, T^\beta] = \mathbf{C}(\alpha, \beta) T^{\alpha+\beta}, \quad \mathbf{C}_N(\alpha, \beta) = \frac{N}{\pi} \sin \frac{\pi}{N}(\alpha \times \beta) \quad (\text{Б.23})$$

## Приложение В

### Эллиптические функции

#### В.1 Основные определения

В данном разделе мы приведём необходимые определения основных эллиптических функций используемых в тексте. Введём следующие полезные обозначения

$$e(x) = \exp(2\pi i x), \quad q = e(\tau),$$

$$\omega_1, \omega_2 - \text{полу периоды тора}, \quad \tau = \omega_2/\omega_1.$$

Тета-функция с характеристиками определяется как

$$\begin{aligned} \vartheta(z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= -2q^{\frac{1}{8}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \sin(2n+1)\pi z. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Кроме того, нам понадобятся функции Эйзенштейна

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \log \vartheta(z|\tau), \quad E_1(z|\tau)|_{z \rightarrow 0} \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1(\tau)z, \quad (\text{B.2})$$

$$E_2(z|\tau) = -\partial_z E_1(z|\tau) = -\partial_z^2 \log \vartheta(z|\tau), \quad E_2(z|\tau)|_{z \rightarrow 0} \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1(\tau). \quad (\text{B.3})$$

здесь

$$\eta_1(\tau) = -\frac{1}{6} \frac{\vartheta'''(0|\tau)}{\vartheta'(0|\tau)} = -\frac{2\pi i}{3} \partial_\tau \log \vartheta'(0|\tau). \quad (\text{B.4})$$

Функции Эйзенштейна связаны с функциями Вейерштрасса следующим образом

$$\zeta(z, \tau) = E_1(z, \tau) + 2\eta_1(\tau)z, \quad (\text{B.5})$$

$$\wp(z, \tau) = E_2(z, \tau) - 2\eta_1(\tau). \quad (\text{B.6})$$

В определении матриц Лакса мы используем следующую комбинацию тета-функций

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}. \quad (\text{B.7})$$

Данное отношение имеет полюс первого порядка  $z = 0$  и удовлетворяет следующим соотношениям

$$\phi(u, z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots \quad (\text{B.8})$$

Пусть

$$f(u, z) = \partial_u \phi(u, z) = \phi(u, z)(E_1(u + z) - E_1(u)). \quad (\text{B.9})$$

Для вывода гамильтоновых уравнений движения нам понадобятся следующие тождества:

$$\phi(u, z)f(v, z) - \phi(v, z)f(u, z) = (E_2(v) - E_2(z))\phi(u + v, z). \quad (\text{B.10})$$

$$\phi(u, z)\phi(-u, z) = (E_2(z) - E_2(u)). \quad (\text{B.11})$$

$$\phi(u, z)\phi(-u, w) = \phi(u, z - w)[E_1(u + z - w) - E_1(u) + E_1(w) - E_1(z)]. \quad (\text{B.12})$$

Уравнение теплопроводности

$$\partial_\tau \phi(u, w) - \frac{1}{2\pi i} \partial_u \partial_w \phi(u, w) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Свойства чётности

$$\phi(u, z) = \phi(z, u), \quad \phi(-u, -z) = -\phi(u, z). \quad (\text{B.14})$$

$$E_1(-z) = -E_1(z), \quad E_2(-z) = E_2(z). \quad (\text{B.15})$$

$$f(-u, -z) = f(u, z). \quad (\text{B.16})$$

Свойства квазипериодичности

$$\vartheta(z + 1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(z + \tau) = -q^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i z} \vartheta(z), \quad (\text{B.17})$$

$$E_1(z + 1) = E_1(z), \quad E_1(z + \tau) = E_1(z) - 2\pi i, \quad (\text{B.18})$$

$$E_2(z + 1) = E_2(z), \quad E_2(z + \tau) = E_2(z), \quad (\text{B.19})$$

$$\phi(u, z + 1) = \phi(u, z), \quad \phi(u, z + \tau) = e^{-2\pi i u} \phi(u, z). \quad (\text{B.20})$$

$$f(u, z + 1) = f(u, z), \quad f(u, z + \tau) = e^{-2\pi i u} f(u, z) - 2\pi i \phi(u, z). \quad (\text{B.21})$$

Для записи операторов Лакса в разделе 1.2.2 нам будет удобно ввести следующие определения: Пусть  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$  пара вещественных параметров, таких что  $\epsilon_a \theta < 1$  и  $\epsilon_a \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Рассмотрим всюду плотное подмножество  $\mathbb{Z}_{\theta, \epsilon}(\tau)$  эллиптической кривой  $E_\tau$ :

$$\mathbb{Z}_{\theta, \epsilon}(\tau) = \{(\epsilon_1 \gamma_1 + \tau \epsilon_2 \gamma_2) \theta = \theta \epsilon \cdot \gamma \in E_\tau \mid (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^{(2)}\}. \quad (\text{B.22})$$

Определим соответствующие эллиптические функции с аргументами из  $\mathbb{Z}_{\theta, \epsilon}(\tau)$  как

$$\vartheta(\theta \epsilon \cdot \gamma), \quad \zeta(\theta \epsilon \cdot \gamma), \quad \wp(\theta \epsilon \cdot \gamma), \quad E_1(\theta \epsilon \cdot \gamma), \quad E_2(\theta \epsilon \cdot \gamma), \quad (\text{B.23})$$

$$\varphi_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z) = \mathbf{e}_\theta(\epsilon_2\gamma_2 z)\phi(\theta\epsilon\cdot\gamma, z). \quad (\text{B.24})$$

$$f_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z) = \mathbf{e}_\theta(\epsilon_2\gamma_2 z)\partial_u\phi(u, z)|_{u=\theta\epsilon\cdot\gamma}. \quad (\text{B.25})$$

Из (B.20) следует

$$\varphi_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z+1) = \mathbf{e}_\theta(\epsilon_2\gamma_2)\varphi_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z), \quad \varphi_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z+\tau) = \mathbf{e}_\theta(-\epsilon_1\gamma_1)\varphi_{\theta\epsilon\cdot\gamma}(z). \quad (\text{B.26})$$

## В.2 Вырождения эллиптических функций

Пусть  $\Im m\tau \rightarrow +\infty$ . тогда

$$\vartheta(z|\tau) \sim \sin(\pi z), \quad (\text{B.27})$$

$$E_1^r(z) = \pi \cot(\pi z), \quad (\text{B.28})$$

$$\phi^{tr}(u, z) = \pi(\cot \pi u + \cot \pi z), \quad (\text{B.29})$$

$$f(u, z)^{tr} = -\pi^2 \sin^{-2} \pi u, \quad (\text{B.30})$$

$$E_2^{tr}(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}. \quad (\text{B.31})$$

В рациональном пределе данные функции приобретают следующий вид

$$E_1^r(z) = \frac{1}{z}, \quad (\text{B.32})$$

$$\phi^r(u, z) = \frac{1}{u} + \frac{1}{z}, \quad (\text{B.33})$$

$$f^r(u, z) = -\frac{1}{u^2}, \quad (\text{B.34})$$

$$E_2^r(z) = \frac{1}{z^2}. \quad (\text{B.35})$$

В данном пределе формулы сложения (B.10), (B.11) сохраняют вид.

Для вычисления пределов гамильтонианов нам понадобятся разложения функций Эйзенштейна со сдвинутым аргументом в тригонометрическом пределе  $\Im m(\tau) \rightarrow +\infty$ , или, иначе  $q = e^{2\pi i\tau} \rightarrow 0$ . Из определения следует

$$E_2(u - g\tau) = \begin{cases} -4\pi^2 \frac{\mathbf{e}(u)}{(1 - \mathbf{e}(u))^2}, & \{g\} = 0, \\ -4\pi^2 \mathbf{e}(-u) q^g, & 0 < \{g\} < \frac{1}{2}, \\ -4\pi^2 q^{1/2} (\mathbf{e}(-u) + \mathbf{e}(u)), & \{g\} = \frac{1}{2}, \\ -4\pi^2 \mathbf{e}(u) q^{1-\{g\}}, & \frac{1}{2} < \{g\} < 1. \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

Для вычисления разложения матриц Лакса нам потребуется разложение  $\phi$  со сдвинутыми аргументами в тригонометрическом пределе. Используя определение (B.7) мы можем свести задачу

для  $\phi(u - \sigma\tau, z - \varsigma\tau)$  к разложению тета-функций со сдвинутым аргументом:

$$\phi(u - \sigma\tau, z - \varsigma\tau) = \frac{\vartheta(u + z - (\sigma + \varsigma)\tau)\vartheta'(0)}{\vartheta(u - \sigma\tau)\vartheta(z - \varsigma\tau)}, \quad (\text{B.37})$$

далее

$$\vartheta(z + \sigma\tau) = [1 + \mathbf{o}(1)] q^{(-[\sigma]^2/2 + \frac{1}{8} - [\sigma]\{\sigma\} - \{\sigma\}/2)} e\left(-[\sigma]z - \frac{[\sigma]}{2}\right) \times \quad (\text{B.38})$$

$$\times \begin{cases} -2 \sin(\pi z), & \{\sigma\} = 0, \\ -i e\left(-\frac{z}{2}\right), & \{\sigma\} > 0, \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

где  $[\sigma]$  — целая часть  $\sigma$ , а  $\{\sigma\}$  — дробная часть  $\sigma$ . В результате мы получаем:

$$\phi(u + \sigma_u\tau, z + \sigma_z\tau) = (1 + \mathbf{o}(1)) \times \begin{cases} -2\pi i q^{-\sigma_u\sigma_z + \{\sigma_u\}\{\sigma_z\}} e(-[\sigma_z]u - [\sigma_u]z), & \{\sigma_u\} > 0, \quad \{\sigma_z\} > 0, \quad \{\sigma_u\} + \{\sigma_z\} < 1, \\ 4\pi q^{-\sigma_u\sigma_z + \{\sigma_u\}\{\sigma_z\}} \sin(\pi(u+z)) \times \\ \times e\left(-\left(\frac{1}{2} + [\sigma_z]\right)u - \left(\frac{1}{2} + [\sigma_u]\right)z\right), & \{\sigma_u\} > 0, \quad \{\sigma_z\} > 0, \quad \{\sigma_u\} + \{\sigma_z\} = 1, \\ 2\pi i q^{-\sigma_u\sigma_z + \{\sigma_u\}\{\sigma_z\} - \{\sigma_u + \sigma_z\}} \times \\ \times e\left(-(1 + [\sigma_z])u - (1 + [\sigma_u])z\right), & \{\sigma_u\} > 0, \quad \{\sigma_z\} > 0, \quad \{\sigma_u\} + \{\sigma_z\} > 1, \\ \pi q^{-\sigma_u\sigma_z} e(-[\sigma_z]u - \sigma_u z) \frac{e\left(-\frac{u}{2}\right)}{\sin(\pi u)}, & \{\sigma_u\} = 0, \quad \{\sigma_z\} > 0, \\ \pi q^{-\sigma_u\sigma_z} e(-\sigma_z u - [\sigma_u]z) \frac{e\left(-\frac{z}{2}\right)}{\sin(\pi z)}, & \{\sigma_u\} > 0, \quad \{\sigma_z\} = 0, \\ \pi q^{-\sigma_u\sigma_z} e(-\sigma_z u - \sigma_u z) \frac{\sin(\pi(u+z))}{\sin(\pi z)\sin(\pi u)}, & \{\sigma_u\} = 0, \quad \{\sigma_z\} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

Аналогично, для вычисления разложения  $f_\alpha(u + \omega_\beta, z)$  мы воспользуемся тождеством (B.9) и разложением  $E_1(u - \sigma\tau)$ :

$$E_1(u - \sigma\tau) = 2\pi i [\sigma] + \begin{cases} \pi \cot(\pi u) + \mathbf{o}(1), & \{\sigma\} = 0, \\ \pi i + 2\pi i q^{\{\sigma\}} e(-u) + \mathbf{o}(q^{\{\sigma\}}), & 0 < \{\sigma\} < \frac{1}{2}, \\ \pi i + 2\pi i q^{\frac{1}{2}} (e(-u) - e(u)) + \mathbf{o}(q^{\frac{1}{2}}), & \{\sigma\} = \frac{1}{2}, \\ \pi i - 2\pi i q^{1-\{\sigma\}} e(u) + \mathbf{o}(q^{1-\{\sigma\}}), & \frac{1}{2} < \{\sigma\} < 1. \end{cases} \quad (\text{B.41})$$