



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Анохина Александра Сергеевна

Приложение \mathcal{R} -матричных методов
К ВЫЧИСЛЕНИЮ
ТОПОЛОГИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2015

УДК 530.145

Работа выполнена в ФГБУ “ГНЦ РФ – Институт теоретической и экспериментальной физики” НИЦ Курчатовский институт, г. Москва

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН

Морозов Алексей Юрьевич,

главный научный сотрудник ФГБУ ГНЦ РФ

Институт теоретической и экспериментальной физики,

НИЦ Курчатовский институт, г. Москва

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Казарян Максим Эдуардович,

ведущий научный сотрудник ФГБУН

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

доктор физ.-мат. наук

Малютин Андрей Валерьевич,

ведущий научный сотрудник ФГБУН Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО “Московский Государственный”

Университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Защита состоится 15 декабря 2015 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 201.002.01 ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ по адресу: 117218, г. Москва, ул. Б.Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУ ГНЦ РФ ИТЭФ и на сайте <http://www.iter.ru>.

Автореферат разослан 14 ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

кандидат физ.-мат. наук

В. В. Васильев

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы исследования

Настоящая работа посвящена исследованию структуры, играющей важную роль, с одной стороны, в контексте математической теории узлов, с другой стороны – в контексте квантовой теории поля. Речь идет об \mathcal{R} -матричном представлении для полиномов ХОМ-ФЛИ [1]. С чисто математической точки зрения таковое является чрезвычайно плодотворным средством исследования ряда важных и интересных топологических инвариантов. Но, пожалуй, еще важнее, что это представление позволяет рассматривать те же топологические инварианты как наблюдаемые в различных физических моделях. Хотя все эти модели относятся к очень специальному классу *интегрируемых* систем [2], они привлекают большое внимание исследователей. При этом, возможно даже, не столь важны физические приложения таких теорий [2, 3, 4], сколько перспектива развить на этом пути аппарат, адекватный для непертурбативной формулировки квантовой теории поля [5].

С другой стороны, соответствие между инвариантами узлов и физическими наблюдаемыми открывает возможность для крайне лаконичного и прозрачного описания “пространства всех узлов” – как пространства состояний некоторой квантовой системы. Пожалуй, именно двум последним обстоятельствам и обязаны \mathcal{R} -матричные представления для полиномов узлов столь пристальным вниманием и столь бурным развитием в последние пару десятков лет [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

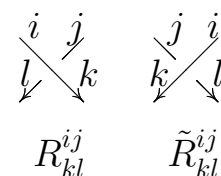


Рис. 1. Прямое и обратное пересечения

1.2. Цель работы

Непосредственно работа состояла в развитии одной из версий \mathcal{R} -матричного подхода, известной как формализм Решетихина – Тураева [1], и включала в себя вычисление ряда необходимых величин из теории представлений квантовых групп, недоступных в математической литературе. В результате нам удалось получить весьма удобное и прозрачное представление для такого (важного с различных точек зрения) инварианта узла как *раскрашенный полином ХОМФЛИ*, а также достаточно эффективное средство для явного вычисления этих полиномов (в подобных средствах наблюдался и до сих пор наблюдается недостаток). Наряду с этим стояла задача пополнить таблицы раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, а также исследовать ряд гипотез о свойствах этих инвариантов узлов.

Более точно, нам предстояло получить эффективный компьютерный алгоритм для вычисления полинома ХОМФЛИ, исходя из следующего положения дел:

- Для полинома ХОМФЛИ было известно представление в виде разложения по характерам неприводимых представлений группы $SU(N)$ в специальной точке [16]

$$S_Q^*(A, q) = S_Q \left\{ t_k = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}} \right\} = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}}, \quad (1.1)$$

а именно [17]:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}}(A, q) = \left(A^{-|T_1| - |T_2| - \dots} q^{-4\kappa_{T_1} - 4\kappa_{T_2} - \dots} \right)^{w_{\mathcal{B}}} \times \sum_{Q \vdash T_1 \otimes T_2 \otimes \dots} h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{B}, Q}(q) S_Q^*(A, q), \quad (1.2)$$

где

$$\kappa_Q = \sum_{(i,j) \in Q} (i - j), \quad (1.3)$$

а $w_{\mathcal{B}}$ – разность числа прямых и обратных пересечений (см. рис. 1) в косе \mathcal{B} .

- Коэффициенты h в формуле (1.2) непосредственно зависят не от узла \mathcal{K} , а от косы \mathcal{B} , в виде замыкания которой представлен узел. Кроме того, каждый h

зависит от представления Q , на характер которого он умножается в (1.2). Этот коэффициент [17] равен упорядоченному вдоль косы произведению \mathcal{R} -матриц, отвечающих всем пересечениям косы α и спроектированных на неприводимое представление Q :

$$h_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}^{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha \in \mathcal{B}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{R}_\alpha \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}. \quad (1.4)$$

- В то время как единичный оператор, действующий на тензорном произведении представлений, можно разложить в сумму

$$\begin{aligned} & \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes (\text{Id}_{T_i} \otimes \text{Id}_{T_{i+1}}) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} = \\ & = \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \left(\sum_j \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j} \right) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} = \\ & = \sum_{j,k} \mathcal{P}_{T_1 \otimes \dots \otimes Q_j \otimes \dots \otimes T_m | Q'_k} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

для матрицы \mathcal{R}_α , соответствующей пересечению α прядей i и $i+1$ косы \mathcal{B} , с которыми связаны представления T_i и T_{i+1} , было известно аналогичное спектральное разложение [18]:

$$\begin{aligned} & \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{R}_{T_i \otimes T_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} = \\ & = \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \left(\text{perm} \sum_j q^{\varkappa_{Q_j} - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j} \right) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} = \\ & = \text{perm} \sum_{j,k} q^{\varkappa_{Q_j} - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes \dots \otimes Q_j \otimes \dots \otimes T_m | Q'_k} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Величины $q^{\varkappa_{Q_j} - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}}$ в (1.6) суть собственные значения \mathcal{R} -матрицы, действующей на тензорном произведении пространств представлений T_1 и T_2 [19].

- Было известно, что с помощью процедуры каблирования [20], которая основана на операции копроизведения для \mathcal{R} -матриц, коэффициенты разложения по характерам раскрашенного полинома ХОМФЛИ выражаются через таковые для простого полинома ХОМФЛИ каблированной косы $\mathcal{B}^{|T_1|+|T_2|+\dots}$ как [21]

$$\begin{aligned} & h_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}^{\mathcal{B}} = \left(A^{-|T_1|-|T_2|-\dots} q^{-2\varkappa_{T_1}-2\varkappa_{T_2}-\dots} \right)^{w_{\mathcal{B}}} \times \\ & \times \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha \in \mathcal{B}^{|T_1|+|T_2|+\dots}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{P}_{\square^{|T_1|} \otimes \square^{|T_2|} \dots | T_1 \otimes T_2 \dots} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{R}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.3. Научная новизна работы

- Были вычислены некоторые величины, входящие в выражение (1.6) и ранее недоступные в литературе. А именно: в явном виде были известны собственные значения матриц \mathcal{R}_α , но *не* матричные элементы проекторов. Этого было недостаточно для вычисления коэффициентов в разложении (1.2) по формуле (1.4), поскольку отвечающие различным пересечениям косы матрицы \mathcal{R}_α , вообще говоря, не коммутируют и, как следствие, не имеют общего базиса из собственных векторов.
- Были уточнены некоторые детали необходимой для вычисления искомым матричных элементов конструкции из теории представлений. Эта конструкция возникает в рассмотренной задаче следующим образом. Если с тремя соседними прядями косы связаны представления T_1 , T_2 и T_3 алгебры Ли \mathfrak{g} , то матрицы перехода между базисами из собственных векторов матриц $\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)}$ и $\mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3}$ суть матрицы $U_{T_1T_2T_3}$ и $U_{T_2T_1T_3}^\dagger$, составленные из коэффициентов Рака для соответствующей квантовой группы $U_q(\mathfrak{g})$ [21]:

$$\begin{array}{ccc}
 (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3}} & (T_2 \otimes T_1) \otimes T_3 \\
 \downarrow U_{T_1T_2T_3} & & \downarrow U_{T_2T_1T_3} \\
 T_3 \otimes (T_2 \otimes T_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)}} & T_3 \otimes (T_1 \otimes T_2)
 \end{array}$$

$$\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)} = U_{T_1T_2T_3} \mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3} U_{T_2T_1T_3}^\dagger. \quad (1.8)$$

На момент начала работы явные формулы для элементов матриц $U_{T_1T_2T_3}$ (коэффициентов Рака) были доступны в литературе лишь для квантовой группы $U_q(\mathfrak{su}_2)$ (хотя и для произвольных ее представлений) – в этом случае выражения для коэффициентов являются прямолинейным обобщением соответствующих формул для простой группы $SU(2)$ [21, 22]: последние получаются из первых путем простой подстановки.

- Был составлен вычислительный алгоритм, достаточно эффективный для преодоления следующей характерной для процедуры каблирования трудности.
А именно: при вычислении раскрашенного полинома методом каблирования необходимо вычислять соответствующий простой полином для косы, содержащей в $\mathcal{B}^{|T_1|+|T_2|+\dots}$ раз больше прядей и в $\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} |T_i| |T_{i+1}|$ раз больше пересечений, чем исходная, что приводит к очень быстрому усложнению формул с ростом числа клеток в диаграмме Юнга представления.
- При этом были также выведены некоторые выражения, которых не доставало для применения процедуры каблирования в большинстве интересных случаев.
Дело в том, что для вычисления раскрашенного полинома также необходимы явные формулы для матричных элементов проекторов $\mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}$, которые к моменту начала работы также не были доступны в литературе – по крайней мере, в достаточно ясном для анализа и удобном для вычислений виде.

1.4. Практическая и научная ценность работы

Проделанная работа имела ряд полезных следствий и приложений:

- Стали доступны в явном виде коэффициенты Рака для квантовой группы [15] $U_q(su_N)$ в случае $T_1 = T_3 = \square$ в (1.8) [24].
- Были вычислены коэффициенты разложения (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ по характерам – величины, ранее недоступные в таблицах. Прделанное вычисление также послужило косвенной проверкой предполагаемого ответа для коэффициентов Рака, поскольку при замене таковых на иные рациональные функции от параметра квантовой группы q ответ для инварианта узла перестает быть полиномом от этой переменной [24].
- Были вычислены элементы самих матриц \mathcal{R}_α , отвечающих различным пересечениям косы, со всеми прядями которой связаны фундаментальные представления квантовой группы $U_q(su_N)$ с произвольным N , и сделано наблюдение, что

эти элементы допускают удобное единообразное описание в терминах путей на графе Юнга [15, 25].

- Было установлено, почему матрицы \mathcal{R}_α имеют обнаруженную структуру, а также вывели выражения для элементов этих матриц, изначально полученные с помощью предполагаемого ответа для коэффициентов Рака и для квантовой группы $U_q(su_N)$. При этом расположение ненулевых элементов в матрицах следует из спектрального разложения (1.6) для \mathcal{R} -матрицы, а явный вид самих элементов – из уравнения Янга-Бакстера [15].
- Было замечено, что наличие проектора в формуле (1.7) для вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ с помощью процедуры каблирования удобно учесть путем замены исходного графа Юнга на его подграф, в вершинах которого на соответствующем уровне стоит желаемое представление [15, 25].
- Была написана компьютерная программа, которая позволила вычислять коэффициенты разложения по характерам полиномов ХОМФЛИ, а также раскрашенные полиномы ХОМФЛИ за пределами известных таблиц [15, 26]. Кроме того, были выяснены некоторые тонкости: как насчет самих полиномов, так и насчет использованных выражений для таковых [15].
- Развитая в ходе исследования техника применения \mathcal{R} -матричного формализма была использована для формулировки ряда гипотез о свойствах полиномов Хованова – Рожанского [27, 28, 29, 30, 31], установленных нами эмпирическим путем [32].

1.5. Личный вклад автора диссертации

Автором диссертации лично построена процедура вычисления полинома ХОМФЛИ как суммы по путям на графе Юнга и процедура вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ как суммы по путям на подграфе графа Юнга каблированного узла, проделаны явные вычисления коэффициентов разложения полиномов ХОМ-

ФЛИ по характеристам и раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в ряде случаев, где эти величины не были известны ранее, а также вычислены размерности пространств в вершинах гиперкуба разрешений диаграммы узла в рамках \mathcal{R} -матричной формулировки модифицированной конструкции Хованова.

1.6. Результаты, выносимые на защиту диссертации

- Представление для коэффициентов разложения по характеристам полинома ХОМФЛИ произвольного узла или зацепления в терминах \mathcal{R} -матриц сведено к кратной сумме по путям на графе Юнга.
- С помощью полученного представления явно вычислены коэффициенты разложения по характеристам неприводимых представлений полиномов ХОМФЛИ для всех узлов с 9 пересечениями, представимых в виде замыканий 5-рядных кос.
- С помощью процедуры каблирования раскрашенный полином ХОМФЛИ представлен в виде кратной суммы по путям на подграфе графа Юнга.
- С помощью полученного представления явно вычислены раскрашенные полиномы ХОМФЛИ
 - для первого симметрического представления – для всех узлов не более чем с 7 пересечениями, представимых в виде замыканий 4-рядных кос;
 - для первого несимметрического представления – для всех узлов не более чем с 8 пересечениями, представимых в виде замыкания 3-рядных кос.
- Предложена гипотеза об \mathcal{R} -матричном представлении для размерностей пространств в вершинах гиперкуба разрешений диаграммы узла в модифицированной конструкции Хованова для вычисления суперполиномов узлов.

1.7. Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации докладывались на теоретических семинарах ИТЭФ, Механико-математического факультета МГУ и Факультета математики ВШЭ, а также на конференциях: “International school on fundamental and string physics” (Гамбург, 2012), “I workshop on aspects of non-associative and non-commutative geometries in string theory” (Стамбул, 2012), “V, VI Workshops on synthesis of integrabilities arising from gauge-string duality” (Москва, 2013, 2015 гг.), I, II Молодежные конференции ИТЭФ (2014, 2015, Москва), “Les Houches summer school. Stochastic processes and random matrices” (Июль 2015, Лез-Уш, Франция).

По материалам диссертации опубликовано 5 научных работ.

1.8. Структура и объем диссертации

Диссертация включает в себя Введение, три главы основного текста и Заключение. Общий объем диссертации составляет 156 страниц, включая 21 рисунок и 7 таблиц. Список литературы содержит 138 ссылок.

2. Содержание диссертации

Диссертация состоит из Введения, основной части, содержащей 4 главы, и Заключения.

Введение содержит краткий литературный обзор по теме диссертационной работы, включающий в себя разъяснение актуальности темы и историю поставленной задачи.

В **разд. 1.1** поясняется, каким образом основная задача топологии – описание классов объектов, эквивалентных с точностью до произвольных непрерывных преобразований, – регулярно возникает в различных физических задачах.

В **разд. 1.2** обсуждается статистическая модель Кауффмана [33], которая стала отправной точкой для подхода к теории инвариантов узлов со стороны кван-

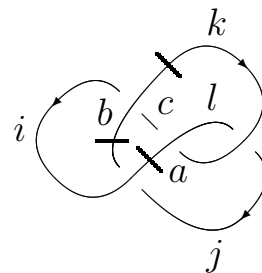


Рис. 2. Одна из возможных диаграмм узла-трилистника, которой в модели Кауффмана соответствует операторная свертка $S_{ab}^{ij} S_{lc}^{ak} S_{mi}^{bc} S_{kj}^{ml}$

товой теории поля. На основе конструкции Кауффмана был впоследствии развит \mathcal{R} -матричный формализм, являющийся основным предметом и средством проделанной работы.

Разд. 1.3 посвящен квантово-полевой интерпретации интересующих нас полиномов узлов. В разделе кратко обсуждаются основные стороны этой интерпретации: неявная конструкция Виттена [34], пертурбативные вычисления вильсоновских средних в теории Черна – Саймонса [10, 11, 12] и сходство структуры интеграла Концевича [12, 35] для инвариантов Васильева [36, 37] со структурой ряда теории возмущений для вильсоновского среднего в гауссовой теории.

Разд. 1.3 содержит конкретную постановку задачи. Затем кратко излагается исходное положение дел и формулируются основные проблемы, с которыми пришлось столкнуться в ходе работы. В конце раздела сделано резюме проделанной нами работы.

В **разд. 1.5** перечислены основные результаты, а в **разд. 1.6** – основные публикации по теме исследования.

В **главе 2** подробно разбирается метод вычисления полинома узлов, который составляет наш основной интерес. Метод основан на частном случае такой конструкции как статистическая модель для полинома узла [33]. Существенная особенность этого метода состоит в использовании в качестве оператора перекрестка такого объекта как *квантовая \mathcal{R} -матрица* [21], а также в соответствующей процедуре усреднения – поэтому метод иногда называется \mathcal{R} -матричным формализмом.

В **разд. 2.1** излагается метод вычисления полиномов узлов, основанный на соответствии между группой кос и группой перестановок.

В **разд. 2.2** подробно разбирается статистическая модель для полинома узла [33], на которой основан использованный нами метод вычисления полинома узлов [1]. Далее обсуждается основная особенность самого метода, которая состоит в использовании в качестве операторов перекрестков такого объекта как *квантовая \mathcal{R} -матрица*.

В **разд. 2.3** описана процедура усреднения в статистической модели для поли-

нома узла – в той версии, в которой она используется при \mathcal{R} -матричном подходе [1, 13, 38].

В **разд. 2.4** обсуждается еще одна существенная особенность обсуждаемых инвариантов узлов, которая требует введения в \mathcal{R} -матричную конструкцию дополнительного элемента: оснащения узла [1, 10, 13, 33].

Разд. 2.5 посвящен не популярной в литературе, но важной для нас ковариантной версии процедуры усреднения в статистической модели для инварианта узла в \mathcal{R} -матричном формализме.

В **разд. 2.6** в качестве иллюстрации изложенного подхода проделано явное вычисление полинома ХОМФЛИ узла трилистника с помощью непосредственного использования \mathcal{R} -матричного формализма с ковариантной процедурой усреднения.

В **разд. 2.7** рассказывается, каким образом метод использования \mathcal{R} -матриц в качестве операторов перекрестков, описанный в разд. 2.2, соотносится с описанным в разд. 2.1 методом, использующим представления группы кос.

В **главе 3** излагается первая часть проделанной работы, которая была посвящена исследованию формулы разложения по характерам (1.2, 1.4), а также вычислению с ее помощью простых (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ в виде разложения по характерам.

В **разд. 3.1** приведен пример явного вычисления полираскрашенного полинома ХОМФЛИ непосредственно с помощью формулы разложения по характерам – в простом случае, когда все величины, входящие в эту формулу, известны.

В **разд. 3.2** ставится задача о явном вычислении элементов \mathcal{R} -матриц. Это основные величины, которые необходимы для вычисления коэффициентов разложения полинома ХОМФЛИ по характерам с помощью формулы (1.4). Искомые матричные элементы, в свою очередь, выражаются через известные в общем случае собственные значения \mathcal{R} -матриц и неизвестные в общем случае коэффициенты Рака [21]. Раздел завершается явными формулами для коэффициентов разложения по характерам (нераскрашенного) полинома ХОМФЛИ, в которые в качестве единственной неизвестной величины входят коэффициенты Рака специального вида.

Разд. 3.3 посвящен решению “в лоб” задачи о коэффициентах Рака, сформулированной в предыдущем разделе. Раздел начинается со сводки необходимых фактов о группе $SU(N)$, алгебре su_N и их представлениях. Далее следует точная формулировка задачи. Затем эта задача решается в частном случае $N = 3$, рассмотрения которого оказывается достаточно, чтобы предположить ответ для произвольного N . Все вычисления сначала излагаются для обыкновенной алгебры su_3 , после чего излагается необходимое для наших целей обобщение этой задачи: случай квантовой группы $U_q(su_3)$ [21].

Разд. 3.4 содержит сводку явных формул для вычисления (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ узлов, представленных в виде замыканий кос, содержащих от 2 до 7 прядей. Соответствующие выражения получаются непосредственно с помощью общих правил, изложенных в разд. 3.2 – если принять сформулированную там гипотезу об общем виде необходимых коэффициентов Рака, в частном случае вычисленных в разд. 3.3.

Наконец, в **разд. 3.5** излагается основной результат этой части работы: формула для вычисления коэффициентов разложения (нераскрашенного) полинома ХОМФЛИ как суммы по путям. Раздел начинается с формулировки и использования соответствующей вычислительной процедуры в частных случаях. Далее следует формулировка процедуры в общем случае, а также ее обоснование – за исключением одной использованной величины, вычисление которой приводится в следующем разделе.

В **главе 4** излагается метод, позволяющий применить изложенные в главе 3 результаты к случаю раскрашенных полиномов ХОМФЛИ – метод каблирования. Метод сводит вычисление раскрашенного инварианта данного узла к вычислению соответствующих простых инвариантов для нескольких узлов-спутников этого узла, а также обсуждается смысл этой процедуры с точки зрения \mathcal{R} -матричного формализма. В разделе рассказывается, каким образом процедуру каблирования, после доработки необходимых ее деталей, можно включить в предложенную нами вычислительную схему: в результате вычисление раскрашенного полинома ХОМ-

ФЛИ сводится к кратной сумме по путям на подграфе графа Юнга для одного из узлов-спутников.

В разд. 4.1 поясняется процедура каблирования с помощью простейшего примера: двойного каблирования тривиального узла. Разобранный пример позволяет также проиллюстрировать проблему, которая возникает при переходе от двойных к высшим (тройным, четверным и т.д.) кабелям. Также обсуждается первое приложение процедуры каблирования: вывод свойства раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в пределе $q \rightarrow 1$ (или $\hbar \equiv \log q \rightarrow 0$) и $A = q^N = const$, известного как свойство факторизации [39].

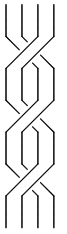


Рис. 3. Двойное каблирование дву-прядной косы

В разд. 4.2 изложен основной результат проделанной работы, касающийся вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ: описание процедуры каблирования в терминах путей на графе Юнга. Как и во всех предыдущих случаях, раздел начинается с конкретного примера. Далее процедура излагается в общем случае. Как обычно, $|Q|$ означает уровень представления Q , т.е. число клеток в его диаграмме Юнга. Обоснованию описанной процедуры посвящены два следующих раздела.

В разд. 4.3 дается формулировка процедуры каблирования в \mathcal{R} -матричном формализме на языке теории представлений: процедура по существу сводится к операции коумножения для \mathcal{R} -матриц (см. рис. 4) [21].

$$m \text{ crossing} = \sum_{Q \vdash m} \text{crossing}_Q$$

Рис. 4. Пересечение с каблированной прядью разлагается в прямую сумму пересечений с раскрашенной прядью

Далее на основе теоретико-групповой интерпретации процедуры каблирования обосновывается описанная в разд. 4.2 процедура, а также вычисляется основная величина, использованная при вычислении суммы по путям в разд. 3. В заключение раздела метод суммы по путям обобщается на случай представлений типа крюков, и с помощью этого обобщения выводятся известные формулы [39, 40] для раскрашенных полиномов Александра.

В разд. 4.4 вычисляются проекторы на неприводимые представления в проце-

дуре каблирования как полиномы от \mathcal{R} -матриц. Из полученных выражений следует ряд свойств проекторов, существенных для формулировки вычислительной процедуры в разд. 4.2.

В **разд. 4.5** подробно описано приложение разработанной процедуры к вычислению (поли)раскрашенных полиномов ХОМФЛИ. В качестве первой иллюстрации таким способом вычисляется простейший полираскрашенный полином для зацепления Кольца Борромео – при этом воспроизводится ответ, вычисленный ранее в разд. 3.1 путем непосредственного приложения \mathcal{R} -матричного формализма. За этим примером следует описание первого практически полезного приложения разработанной вычислительной процедуры: вычисление простейших раскрашенных полиномов ХОМФЛИ узлов – замыканий четырехрядных кос – именно на этом случае останавливались составленные ранее таблицы [7, 40, 41, 42]. Далее рассмотрен первый по-настоящему интересный случай: раскрашенные полиномы ХОМФЛИ неторических узлов в случае первого представления, не являющегося ни полностью симметрическим, ни полностью антисимметрическим. Именно в отношении этого случая к моменту начала работы накопилось множество вопросов и противоречивых предположений, в то время как явный ответ был неизвестен даже для простейшего неторического узла: узла-восьмерки (4_1 в [41]) [26].

В **разд. 4.6** уточняются некоторые тонкости, касающиеся оснащения узла (уже обсуждавшегося в разд. 2.4) при использовании процедуры каблирования.

В заключение главы, в **разд. 4.7**, процедура каблирования рассматривается в приложении к двурядным косам: как проверка на согласованность приведенных ранее формул, а также в связи с проблемой знаков и кратностей собственных значений \mathcal{R} -матриц.

Глава 5 посвящена приложению \mathcal{R} -матричного формализма к эмпирическому исследованию полиномов Хованова – Рожанского. Интерес к этим полиномам обусловлен, в частности, тем, что с их помощью возможно единственное на сегодняшний день последовательное определение *суперполинома* узла [43].

В **разд. 5.1** рассказывается и иллюстрируется простейшими примерами сама

идея использования \mathcal{R} -матричного формализма при вычислении полиномов Хованова – Рожанского.

В **разд. 5.2** дается резюме проведенного исследования, и разбирается простейший репрезентативный пример.

В **Заключении** подводится итог проделанной работы, обсуждаются приложения полученных результатов: как уже имеющиеся, так и потенциально возможные. Кроме того, формулируются наиболее интересные, на наш взгляд, направления для дальнейшей работы.

3. Основные публикации по теме диссертации

- 1) Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // Nucl. Phys. – 2013 – Vol. B868 – P. 271-313.
- 2) Knot polynomials in the first non-symmetric representation / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, // Nucl. Phys. – 2014 – Vol. B882 – P. 171-194.
- 3) Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux/ A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov and And. Morozov // Adv. in high energy phys. – 2013 – Vol. 2013, no. 931830.
- 4) Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для полиномов ХОМ-ФЛИ // 178 (2014) 3-68, ТМФ – 2014 – Т. 178 – С. 1-58
- 5) Anokhina A., Morozov A. Towards R-matrix construction of Khovanov – Rozansky polynomials. I. Primary T-deformation of HOMFLY // JHEP. –2014 Vol. 07, no. 063.

Список литературы

- [1] Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // Commun. Math. Phys. — 1990. — Vol. 127. — P. 1–26.
- [2] Baxter R. J. Exactly solved models in planar mechanics. — London : Academic Press, 1989. — P. 502.
- [3] Dunne G. V. Aspects of Chern-Simons theory. — 1999. — arXiv : hep-th/9902115.
- [4] Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim // Nature. — 2005. — Vol. 438. — P. 201–204.

- [5] Морозов А. Ю. Теория струн – что это такое? // УФН. — 1992. — Т. 162, № 8. — С. 83–175.
- [6] Kaul R. K. Chern-Simons theory, colored-oriented braids and link invariants // Commun. Math. Phys. — 1994. — Vol. 162. — P. 289–320. — arXiv : hep-th/9305032.
- [7] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia. Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory // J. Knot Theory Ramifications. — 2013. — Vol. 22, no. 1350078. — arXiv : hep-th/1302.5144.
- [8] Jie Gu Hans Jockers. A note on colored HOMFLY polynomials for hyperbolic knots from WZW models // Commun. Math. Phys. — 2015. — Vol. 338. — P. 393–456. — arXiv : hep-th/1407.5643.
- [9] Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots / D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov // Nucl. Phys. — 2015. — Vol. B899. — P. 194–228. — arXiv : hep-th/1502.02621.
- [10] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants // Nucl. Phys. — 1990. — Vol. B330. — P. 575–607.
- [11] Alvarez M., Labastida J. M. F. Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory // Nucl. Phys. — 1993. — Vol. B395. — P. 198–238. — arXiv : hep-th/9110069.
- [12] Labastida J. M. F., Pèrez E. Kontsevich integral for Vassiliev invariants in the holomorphic gauge // J. Math. Phys. — 1998. — Vol. 39. — P. 5183–5198. — arXiv : hep-th/9710176.
- [13] Morozov A., Smirnov A. Chern-simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix // Nucl. Phys. — 2010. — Vol. B835. — P. 284–313. — arXiv : hep-th/1001.2003.
- [14] Mironov A., Morozov A., Morozov And. Character expansion for HOMFLY polynomials. I. integrability and difference equations // Strings, gauge fields, and the

- geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer. — Singapore : World Scientific, 2013. — P. 101–118. — arXiv : hep-th/1112.5754.
- [15] Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для полиномов ХОМ-ФЛИ // ТМФ. — 2014. — Т. 178. — С. 3–68. — arXiv : hep-th/1307.2216.
- [16] Macdonald I. G. Schur functions: theme and variations // Séminaire Lotharingien de Combinatoire. — 1992. — Vol. 28.
- [17] Mironov A., Morozov A., Morozov And. Character expansion for HOMFLY polynomials. II. fundamental representation. up to five strands in braid // JHEP. — 2012. — Vol. 03. — arXiv : hep-th/1112.2654.
- [18] P.P.Kulish, N.Yu.Reshetikhin, E.K.Sklyanin. Yang-Baxter equation and representation theory: I // Lett. in Math. Phys. — 1981. — Vol. 5. — P. 343–403.
- [19] Gould M. D., Zhang Y.-Z. Quantum affine Lie Algebras, Casimir invariants and diagonalization of the braid generator // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35. — P. 6757–6773. — arXiv : hep-th/9311041.
- [20] Adams C. C. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. — Providence : AMS, 2004. — P. 307.
- [21] Klimyk A., Schmüdgen K. Quantum groups and their representations. — Berlin Heidelberg : Springer, 2012. — P. 552.
- [22] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1976. — Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — С. 768.
- [23] Colored knot polynomials. HOMFLY in representation [2,1] / A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov. — 2015. — arXiv : hep-th/1508.02870.

- [24] Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // Nucl. Phys. — 2013. — Vol. B868. — P. 271–313. — arXiv : hep-th/1207.0279.
- [25] Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // Adv. in High Energy Phys. — 2013. — Vol. 2013, no. 931830. — arXiv : hep-th/1304.1486.
- [26] Knot polynomials in the first non-symmetric representation / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // Nucl. Phys. — 2014. — Vol. B882. — P. 171–194. — arXiv : hep-th/1211.6375.
- [27] Khovanov M. A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J. — 2000. — Vol. 101. — P. 359–426.
- [28] Bar-Natan D. On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial // Algebr. Geom. Topol. — 2002. — Vol. 2. — P. 337–370. — arXiv : math.QA/0201043.
- [29] Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov homologies. I. Unreduced Jones superpolynomial // JHEP. — 2013. — Vol. 1301, no. 065. — arXiv : hep-th/1208.4994.
- [30] Khovanov M., Rozansky L. Matrix factorizations and link homology // Fund. Math. — 2008. — Vol. 199. — P. 1–91. — arXiv : math.QA/0401268.
- [31] Carqueville N., Murfet D. Computing Khovanov-Rozansky homology and defect fusion // Algebr. Geom. Topol. — 2014. — Vol. 14. — P. 489–537. — arXiv : hep-th/1108.1081.
- [32] Anokhina A., Morozov A. Towards R-matrix construction of Khovanov-Rozansky polynomials. I. Primary T-deformation of HOMFLY // JHEP. — 2014. — Vol. 07, no. 063. — arXiv : hep-th/1403.8087.
- [33] Kauffman L. State models and the Jones polynomial // Topology. — 1987. — Vol. 26. — P. 395–407.

- [34] Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial // *Comm. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 121. — P. 351–399.
- [35] Kontsevich M. Vassiliev’s knot invariants // *Adv. in Soviet Math.* — 1993. — Vol. 16:2. — P. 137–150.
- [36] Vassiliev V. A. Cohomology of the knot spaces // *Adv. Soviet Math.* — 1990. — Vol. 1. — P. 23–69.
- [37] Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev knot invariants // Cambridge University Press. — 2012. — arXiv : math.GT/1103.5628v3.
- [38] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // *Infinite dimensional Lie algebras and groups.* — Singapore : World Scientific, 1989. — P. 285–339. — URL: <https://math.berkeley.edu/~reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>.
- [39] Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov et al. // *JHEP.* — 2013. — Vol. 03, no. 021. — arXiv : hep-th/1106.4305.
- [40] Character expansion for HOMFLY polynomials. III. all 3-strand braids in the first symmetric representation / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Int. J. of Mod. Phys.* — 2012. — Vol. A27, no. 1250099. — arXiv : hep-th/1204.4785.
- [41] Bar-Natan D., Scott M., et al. The Knot Atlas. — URL: <http://katlas.org> (дата обращения: 24.09.15).
- [42] Mironov A., Morozov A., Morozov An. Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials // *AIP Conf. Proc.* — 2013. — Vol. 1562. — arXiv : hep-th/1306.3197.
- [43] Gukov S., Schwarz A., Vafa C. Khovanov-Rozansky homology and topological strings // *Lett. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 74. — P. 53–74. — arXiv : hep-th/0412243.