



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Анохина Александра Сергеевна

Приложение \mathcal{R} -матричных методов к вычислению
топологически инвариантных наблюдаемых
в квантовой теории поля

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН
Морозов Алексей Юрьевич

МОСКВА, 2015

Содержание

1. Введение	5
1.1. Топологические квантовые модели их физические приложения	5
1.1.1. Теория адиабатических преобразований	6
1.1.2. Метод аналитического продолжения.	7
1.1.3. Тожества Уорда топологической квантовой теории поля	9
1.2. Полином узла как среднее в модели Кауффмана	9
1.2.1. Узлы и полиномы узлов	10
1.2.2. Модель Кауффмана	12
1.2.3. Операторные тождества	13
1.2.4. Вычисление полинома Джонса для узла-трилистника с помощью конструкции Кауффмана	13
1.3. К квантово-полевому представлению инвариантов узлов	21
1.3.1. Инварианты узлов как наблюдаемые в теории Весса — Зумино — Виттена — Новикова и как аксиоматически определенные вильсоновские средние	21
1.3.2. Конформные блоки Весса — Зумино — Виттена — Новикова и классические поля в теории Черна — Саймонса	24
1.3.3. Полином ХОМФЛИ как пертурбативное вильсоновское среднее в лагранжевой теории Черна — Саймонса: постановка задачи.	24
1.3.4. Вильсоновские средние в теории Черна — Саймонса.	25
1.3.5. Гауссово число зацеплений как вклад второго порядка в вильсоновское среднее в абелевой теории Черна — Саймонса.	26
1.3.6. Инварианты узлов как инварианты зацеплений: оснащение с точки зрения теории Черна — Саймонса	27
1.3.7. Интеграл Концевича как ряд теории возмущений для черн — саймонсовского вильсоновского среднего в голоморфной калибровке.	27
1.4. Постановка задачи	29
1.4.1. Цель работы	29
1.4.2. Исходное положение дел	30
1.4.3. Проблемы	31
1.4.4. Основное содержание проделанной работы	32
1.5. Основные результаты	32
1.6. Основные публикации	33
2. Представление полинома узла в терминах \mathcal{R}-матриц	33
2.1. Полином узла как взвешенный след элемента группы кос	33
2.1.1. Двупрядные косы	36
2.1.2. Трехпрядные косы	37
2.2. Использование \mathcal{R} -матриц в качестве операторов перекрестков в модели Кауффмана	39
2.2.1. Понятие квантовой \mathcal{R} -матрицы	39
2.2.2. Свертка \mathcal{R} -матриц как инвариант разрезанной диаграммы узла	40
2.3. Вставка оборотных операторов в качестве процедуры усреднения	42
2.4. Процедура оснащения в \mathcal{R} -матричном формализме	43
2.5. Циклы на диаграмме узла и оборотные операторы	44
2.6. Явное вычисление полинома ХОМФЛИ для узла-трилистника	45
2.6.1. Зеркальная симметрия	46
2.7. Сведение \mathcal{R} -матричного представления к представлению через группу кос и разложение полиномов ХОМФЛИ по характеристам	46
2.7.1. Оборотные операторы и нулевое движение Рейдемейстера	47

2.7.2.	От свертки \mathcal{R} -матриц к разложению полинома ХОМФЛИ по характерам: двупрядные косы	47
2.7.3.	От свертки \mathcal{R} -матриц к разложению полинома ХОМФЛИ по характерам: двупрядные косы	49
2.7.4.	Теоретико-групповой смысл общих собственных подпространств операторов пересечений и замыкания	51
3.	Полином ХОМФЛИ как сумма по путям на графе Юнга	52
3.1.	Пример вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ с помощью \mathcal{R} -матриц, связанных с генераторами группы кос.	52
3.2.	Задача о явном вычислении элементов \mathcal{R} -матриц	55
3.2.1.	Выражения для \mathcal{R} -матриц через перебрасывающие матрицы	55
3.2.2.	Элементы перебрасывающих матриц как коэффициенты Рака	56
3.2.3.	Размеры элементарных блоков в перебрасывающих матрицах	57
3.2.4.	Явная формула для элементов перебрасывающих матриц	58
3.3.	Задача о коэффициентах Рака для квантовой группы $U_q(sl_3)$	60
3.3.1.	Сводка необходимых фактов о группе $SU(N)$, алгебре su_N и их представлениях	60
3.3.2.	Явное вычисление коэффициентов Рака для группы $SU(3)$ в частном случае	69
3.3.3.	Обобщение решения классической задачи о коэффициентах Рака на случай квантовой группы	74
3.4.	Явное вычисление (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ с помощью диагональных \mathcal{R} -матриц и коэффициентов Рака	75
3.4.1.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для двупрядных кос	75
3.4.2.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для трехрядных кос	76
3.4.3.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для четырехрядных кос	76
3.4.4.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для пятирядных кос	76
3.4.5.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для шестипрядных кос	78
3.4.6.	Расширенные полиномы ХОМФЛИ для семипрядных кос	79
3.5.	Полином ХОМФЛИ как сумма по путям на графе Юнга	79
3.5.1.	Сумма по путям для двупрядных кос	80
3.5.2.	Сумма по путям для трехрядных кос	80
3.5.3.	Сумма по путям для четырехрядных кос	80
3.5.4.	Общий алгоритм вычисления коэффициентов разложения полиномов ХОМФЛИ по характерам как кратной суммы по путям на графе Юнга	82
4.	Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ	84
4.1.	Каблирование тривиального узла и выражения для проекторов на симметрическое и антисимметрическое представления	84
4.1.1.	Проблема высших кабелей	85
4.1.2.	Процедура каблирования и теорема о факторизации раскрашенного полинома ХОМФЛИ в двойном скейлинговом пределе	86
4.2.	Раскрашенный полином ХОМФЛИ как сумма по путям на подграфе Юнга	87
4.2.1.	Простейший раскрашенный полином ХОМФЛИ узла-трилистника	87
4.2.2.	Описание проекции в терминах путей на графе Юнга	89
4.3.	Процедура каблирования как операция копроизведения	90
4.3.1.	Вычисление параметров смешивающих блоков с помощью процедуры каблирования	91
4.3.2.	Обобщение формулы суммы по путям на случай представлений типа крюков и формулы для раскрашенных полиномов Александра	92
4.4.	Проекторы не неприводимые представления как полиномы от \mathcal{R} -матриц	94

4.4.1.	Вывод \mathcal{R} -матричных выражений для проекторов с помощью матриц проекторов в специальном базисе.	94
4.4.2.	Вычисление проекторов с помощью характеристических уравнений	98
4.5.	Примеры вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ методом каблирования	99
4.5.1.	Вычисление полираскрашенного полиномом ХОМФЛИ для зацепления кольца Борромео методом каблирования	100
4.5.2.	Раскрашенные полиномы ХОМФЛИ четырехрядных узлов в первом симметрическом представлении	100
4.5.3.	Раскрашенные полиномы ХОМФЛИ трехрядных узлов в первом несимметрическом представлении	101
4.6.	Оснащение в процедуре каблирования.	101
4.7.	Раскрашенные двурядные косы и проблема знаков и кратностей собственных значений \mathcal{R} -матриц	102
4.7.1.	Двурядные зацепления	103
4.7.2.	Двурядные узлы.	104
5.	Приложение \mathcal{R}-матричного формализма к эмпирическому исследованию полиномов Хованова — Рожанского	104
5.1.	Метод	105
5.1.1.	Простейшие примеры	106
5.2.	Результаты	107
5.2.1.	Эмпирический алгоритм вычисления полинома Хованова — Рожанского	107
5.2.2.	Нетривиальный пример: зацепление $6_1^3(v_2)$	108
6.	Заключение	110
7.	Благодарности	111
A.	Явные формулы для перебрасывающих матриц	120
A.1.	Диагональные \mathcal{R} -матрицы и перебрасывающих матриц для шестирядной косы	120
A.2.	Перебрасывающие матрицы для семипрядной косы	126
B.	Разложение по характерам для полиномов ХОМФЛИ	142
B.1.	Все 5-рядные узлы с 9 пересечениями	142
B.2.	Разложение по характерам полиномов ХОМФЛИ для 6-рядных узлов с 10 пересечениями	143
B.3.	Пример разложения по характерам для 7-рядного узла с 12 пересечениями	144
В.	(Поли)раскрашенные полиномы ХОМФЛИ, вычисленные методом каблирования	145
V.1.	Полиномы ХОМФЛИ 4-рядных узлов в представлении [2]	145
V.2.	Полиномы ХОМФЛИ 3-рядных узлов в представлении [21]	147
V.3.	Полиномы ХОМФЛИ для узла 4_1 и зацепления 5_1^2 в различных представлениях	154
V.3.1.	Раскрашенные полиномы для узла-восьмерки (4_1)	154
V.3.2.	Полираскрашенные полиномы для зацепления Уайтхеда (5_1^2)	155
Г.	Знаки и кратности собственных значений \mathcal{R}-матрицы	156
G.1.	Перечень нетривиальных кратностей	156
G.2.	Отступления от правила чередования знаков собственных значений \mathcal{R} -матриц при наличии кратных собственных значений	156

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию структуры, играющей важную роль, с одной стороны, в контексте математической теории узлов, с другой стороны — в контексте квантовой теории поля. Речь идет об \mathcal{R} -матричном представлении для полиномов ХОМФЛИ [1]. С чисто математической точки зрения таковое является чрезвычайно плодотворным средством исследования ряда важных и интересных топологических инвариантов. Но пожалуй еще важнее, что это представление позволяет рассматривать те же топологические инварианты как наблюдаемые в различных физических моделях. Хотя все эти модели относятся к очень специальному классу *интегрируемых* систем [2], они привлекают большое внимание исследователей. При этом, возможно даже, что не столь важны физические приложения таких теорий [2, 3, 4], сколько перспектива развить на этом пути аппарат, адекватный для непертурбативной формулировки квантовой теории поля [5]. С другой стороны, соответствие между инвариантами узлов и физическими наблюдаемыми открывает возможность для крайне лаконичного и прозрачного описания “пространства всех узлов”: как пространства состояний некоторой квантовой системы. Пожалуй, именно двум последним обстоятельствам и обязаны \mathcal{R} -матричные представления для полиномов узлов столь пристальным вниманием и столь бурным развитием в последние пару десятков лет [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

Непосредственно наша работа состояла в развитии одной из версий \mathcal{R} -матричного подхода, известной как формализм Решетихина — Тураева [1], и включала в себя вычисление ряда необходимых величин из теории представлений квантовых групп, недоступных в математической литературе. В результате нам удалось получить весьма удобное и прозрачное представление для такого (важного с различных точек зрения) инварианта узла как *раскрашенный полином ХОМФЛИ*, а также достаточно эффективное средство для явного вычисления этих полиномов (в подобных средствах наблюдался и до сих пор наблюдается недостаток). В качестве приложения мы пополнили таблицы раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, а также исследовать ряд гипотез о свойствах этих инвариантов узлов.

Мы начнем с подробного изложения в разд. 1.1 — 1.3 истории вопроса о квантово-полевой интерпретации полиномов узлов, которая является основной мотивацией для нашего интереса к теме исследования. Остаток введения (разд. 1.4 — 1.5) представляет из себя анонс основной части работы. Далее, в разд. 2, мы сформулируем идею и обсудим основные особенности, а также некоторые тонкости \mathcal{R} -матричного представления для полиномов узлов. После этого мы перейдем к основному содержанию работы в разд. 3 — 5: сформулируем конкретные задачи и способы их решения, приведем полученные результаты, а также обсудим различные их следствия и приложения.

1.1. Топологические квантовые модели их физические приложения

Методы теории узлов, которые мы будем обсуждать во введении и на которые опирается наша работа, относятся к классу так называемых “физических” методов теории узлов. Ниже мы приведем краткий обзор основных идей, объединенных этим названием. Для начала мы, однако, уделим некоторое внимание самой постановке *топологической* задачи: рассмотреть объект с точностью до всевозможных непрерывных преобразований — которая в физическом контексте на первый взгляд кажется весьма экзотической.

В качестве примеров физических явлений, при описании которых очевидным образом возникают топологические задачи, можно привести несколько ярких физических явлений, известных как *топологические* эффекты. Их перечень открывает эффект Ааронова — Бома [35], за которым следует монопольное решение в модели Вайнберга — Салама [36] и инстантонными решениями уравнений Янга — Миллса [37] (в связи с которыми стоит упомянуть гипотезу Полякова о том, что такие решения ответственны за конфайнмент в КХД [38]), а также включает в себя наблюдаемые в реальных экспериментах квазичастицы в (эффективно) двумерных системах: абрикосовские вихри, играющие ключевую роль в структуре промежуточного состояния в сверхпровод-

никах второго рода [39, 40], и анионы в графене [4], к которым апеллирует большинство моделей дробного квантового эффекта Холла [41] и которые открывают принципиальную возможность для создания квантового компьютера [42]. Открытие этих эффектов дало начало целому разделу теории поля [40]. Мы, тем не менее, сознательно сосредоточимся на примерах совсем другого рода, в которых топологические задачи естественным образом возникают при рассмотрении самых обычных физических явлений.

1.1.1. Теория адиабатических преобразований

Итак, в топологии в качестве основного понятия выступает *класс эквивалентности* объектов: кривых, поверхностей, и т.п., которые могут быть получены друг из друга непрерывными преобразованиями. В физике аналогичная постановка задачи возникает в теории *Адиабатических преобразований* [35, 43]. Последняя изучает общие свойства всевозможных физических систем, которых могут быть получены друг из друга путем *адиабатического*, то есть бесконечно медленного изменения своих параметров. Если говорить более точно, то изменение параметров системы должно происходить достаточно медленно для того, чтобы в каждый момент времени движение системы можно было приближенно рассматривать как движение системы с соответствующими неизменными значениями параметров — последнее верно далеко не всегда, поскольку уравнения движения суть дифференциальные уравнения. При этом оказывается, что теория адиабатических преобразований одновременно изучает вопрос, при каких условиях одно из двух данных физических состояний может рассматриваться как возмущение над другим (см. пример далее).

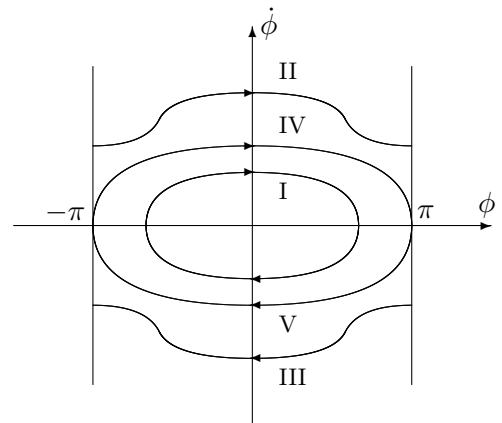


Рис. 1. Траектории физического маятника различных типов: движение одного типа невозможно за *конечное время* перевести в движение другого типа путем *адиабатического* изменения параметров системы

Адиабатические преобразования квантовых систем. Особенно важную роль теория адиабатических возмущений играет в квантовой механике. Самый простой и известный пример ее применения возникает в задаче о двух дельта-ямах [44]. А именно: волновые функции частицы, находящейся в связанном состоянии в потенциале $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2mb}\delta(x)$ ($b > 0$), не могут быть получены из таковых в потенциале $V(x) = \frac{\hbar^2}{2mb}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$ путем *адиабатического* устремления расстояния между ямами a к бесконечности¹² К такому выводу можно прийти, например, заметив, что первая система имеет один дискретный уровень $E_0 = -\frac{\hbar^2}{2mb^2}$, а вторая — два: $E_s = E_0 + \frac{\Delta}{2}$ и $E_a = E_0 - \frac{\Delta}{2}$, где $\Delta = \frac{e^{-\frac{a}{b}}}{mb^2}$ (при $\frac{a}{b} \gg 1$). В последнем случае состояния частицы на двух дискретных уровнях описываются симметричной и антисимметричной волновыми функциями

$$\psi_{s,a}(x) = const \cdot \begin{cases} e^{\kappa x}, & x < -a, \\ \frac{e^{\kappa(x-a)} \pm e^{-\kappa(x+a)}}{e^{\kappa a} \pm e^{-\kappa a}}, & -a < x < a, \\ \pm e^{-\kappa x}, & x > a \end{cases}, \quad \kappa = \sqrt{-2mE}, \quad (1.1)$$

¹Расстояние следует устремлять именно к бесконечности, а не к нулю, поскольку в последнем случае мы получим дельта-яму двойной мощности.

²Как указал автору И. В. Тютин, состояние, описывающее переход между ямами сохраняется при $a \rightarrow \infty$, однако вероятности перехода между этим состоянием и всяким другим состоянием системы в этом пределе стремятся к нулю.

в то время как суперпозиция этих состояний

$$\psi(t) = \text{const} \cdot e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \left(e^{-i\frac{\Delta}{\hbar}t}\psi_s + e^{i\frac{\Delta}{\hbar}t}\psi_a \right) \quad (1.2)$$

описывает переход частицы из одной ямы в другую, поскольку

$$\psi(0) = \text{const} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{\kappa x}, \quad x < -a, \\ e^{\kappa(x-2a)}, \quad -a < x < a \\ 0, \quad x > a \end{array} \right\} \approx \text{const} \cdot e^{-\kappa|x+a|}, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2\Delta}\right) \approx \text{const} \cdot e^{-\kappa|x-a|}. \quad (1.3)$$

В дополнение к сказанному, этот пример иллюстрирует связь теории адиабатических преобразований с теорией возмущений. А именно: ни расщепление энергетических уровней, ни туннельные переходы частицы между ямами не могут быть получены в рамках теории возмущений в задаче о частице в одной дельта-яме в качестве нулевого приближения. Одно из проявлений этого факта — обращение в нуль всех членов в разложении расщепления уровней $2\Delta \sim e^{-\kappa a}$ в формальный ряд по обратному расстоянию между ямами $\frac{1}{a}$.

Адиабатические преобразования в статистической физике.

Огромную роль понятие адиабатического преобразования, или адиабатического процесса, играет в статистической физике [45]. Такие процессы связаны с достаточно медленным воздействием на систему: так что при этом изменяются *энергии*, но не *числа заполнения* дискретных уровней. С точки зрения термодинамики такие процессы отвечают изменению энергии системы без подвода или отвода тепла. Условие адиабатичности процесса при этом сводится к пренебрежимой малости обратного характерного времени процесса по сравнению с минимальным расстоянием между энергетическими уровнями.

1.1.2. Метод аналитического продолжения.

Еще один путь, которым при исследовании физических явлений возникает характерная для топологии постановка задачи — *метод аналитического продолжения* [46, 47], в физике более известный как *метод аналитического продолжения* и широко применяемый во многих областях: от радиотехники до квантовой хромодинамики [35, 45, 44, 48, 49, 36, 50]. Чаще всего метод используется, чтобы связать значение некоторой наблюдаемой величины в области значений ее аргумента (например, энергии частицы или частоты падающей волны), где верно то или иное физическое приближение, со значениями этой величины в интересующей области значений. Метод также используется для вычисления средних и Фурье-образов, заданных в виде интегралов от соответствующих величин по действительной оси.

Метод состоит в том, чтобы аналитически продолжить функцию $f(x)$, при вещественных значениях аргумента описывающую некоторую физическую величину, до произвольных комплексных значений аргумента. Полученная при этом функция $f(z)$ по определению удовлетворяет условию Коши-Римана $\partial_{\bar{z}}f(z) = 0$ всюду, кроме особых точек. Поскольку во многих случаях функция $f(z)$ имеет предел при $z \rightarrow \infty$, к области определения функции обычно добавляют точку $z = \infty$ (при отсутствии конечного предела эта точка входит в число особых). Однако, если исходная функция не была рациональной — например, содержала квадратные корни из многочленов, ее аналитическое продолжение будет однозначно определено лишь на комплексной плоскости с *разрезами* — дополнительно введенными кривыми, попарно соединяющими особые точки, среди которых, возможно, есть точка $z = \infty$. Оказывается однако [46, 47], что функцию $f(z)$ можно рассматривать как однозначно определенную функцию на некоторой поверхности, которая называется римановой поверхностью данной функции — комплексный аргумент $z = x + iy$ при

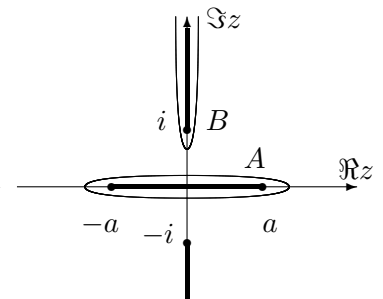


Рис. 2. Независимые контура интегрирования для волновой функции квазиклассического приближения (1.5), наматывающиеся на A и B циклы римановой поверхности — тора. Здесь $a = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$

этом соответствует паре координат (x, y) на поверхности. В частности, римановой поверхностью рациональной функции вида $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы степеней n и m , соответственно) является сфера $S_2/\{\zeta_k\}$ с выколотыми точками — корнями многочлена $Q(\zeta_k) = 0$, а также точкой $\zeta_0 = \infty$ в случае $n > m$. То же верно для функций, содержащей квадратные корни из квадратных трехчлена: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\sqrt{az^2 + bz + c}$ — но в этом случае к множеству особых точек функции $f(z)$ добавятся нули подкорневого выражения. Если же под корнем стоял кубический многочлен, т.е. $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\sqrt{az^3 + bz^2 + cz + d}$, римановой поверхностью функции будет уже тор, а в более общем случае функции вида $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\sqrt{G(z)}$, где $G(z)$ — многочлен степени $2g - 1$ или $2g$ риманова поверхность будет иметь род $g - 1$. Таким образом всевозможные функции разбиваются на классы в зависимости от чисто топологических свойств соответствующей римановой поверхности [46, 47].

Род римановой поверхности, в свою очередь, оказывается важен при вычислении контурных интегралов $\oint f(z)dz$ от голоморфных функций, к вычислению которых сводится вычисление интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ по действительной оси. Такие интегралы, как известно [46, 47] не зависят от формы контура, но определяются только *числом намоток* контура на особые точки функции, а также на “ручки” римановой поверхности — если таковая отлична от сферы. В результате оказывается, что число независимых контурных интегралов от аналитического продолжения данной функции определяется родом соответствующей римановой поверхности.

Всевозможные физические системы при использовании метода аналитического продолжения (дисперсионных соотношений) естественным образом разбиваются на *классы эквивалентности* в зависимости от рода римановой поверхности рассматриваемой наблюдаемой величины. В частности, в при изучении спектра частицы в квазиклассическом приближении на такие классы разбиваются всевозможные потенциалы (см. рис. 2).

Пример. Волновые функции квазиклассического приближения для частицы в потенциале

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \cos^2\left(\frac{x}{b}\right) \quad (1.4)$$

выражаются в виде

$$\psi_{sc}(a) = \psi(0) \exp\left(\int_0^a p(x)dx\right), \quad p = \sqrt{2m(E - V(x))}. \quad (1.5)$$

Показатель экспоненты можно представить как

$$-i \log \phi_{cs} = \frac{b\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) J(\lambda), \quad \lambda = \frac{\hbar^2}{2mEb^2}, \quad (1.6)$$

где интеграл

$$J(\lambda) \equiv \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \lambda \cos^2 \xi}}, \quad (1.7)$$

сводится к интегралу от алгебраической функций путем замены переменных:

$$J(\lambda) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)((1+\lambda)z^2 - (1-\lambda))}}, \quad z = \tan \frac{\xi}{2}. \quad (1.8)$$

Подынтегральную функцию можно аналитически продолжить на два листа комплексной плоскости, переклеенных вдоль разрезов, проведенных как на рисунке ($\lambda > 1$), либо, эквивалентным образом, рассматривать ее как однозначную функцию комплексной координаты z на торе. Два независимых контура интегрирования (2) при этом наматываются на A - и B -циклы тора ($a = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$). В первом случае имеем интеграл по классически запрещенной области, который дает волновую функцию частицы, туннелирующей из ямы в яму.

1.1.3. Тождества Уорда топологической квантовой теории поля

Наконец, самая распространенная задача, в которой рассматривают именно классы эквивалентности физических объектов — задача о квантовании системы при наличии симметрий. Корреляционные функции соответствующих квантовых систем удовлетворяют определенным соотношениям — *тождествам Уорда*. Для описания всевозможных корреляционных функций в квантовой теории поля часто используют *диаграммы Фейнмана*, и тождества Уорда при этом можно понимать как соотношения эквивалентности между диаграммами Фейнмана, отвечающими связанным этими тождествами корреляционным функциям.

Аналогичный подход весьма распространен в самой топологии [51]. А именно: для описания класса эквивалентности непрерывных объектов (кривых, поверхностей, и т.д.) со всяким таким объектом для начала связывают определенный граф, причем уже по построению этот граф остается неизменным при многих непрерывных преобразованиях исходного объекта. Этого, однако, в большинстве случаев оказывается недостаточно: приходится также вводить соотношения эквивалентности между различными графами, отвечающими объектам, связанным непрерывным преобразованием. Если при этом также ставится задача вычисления *топологического инварианта* — величины, принимающий одно и то же значение для всех объектов, связанных непрерывным преобразованием, и тем самым для всех графов, связанных соотношениями эквивалентности, то постановка задачи полностью аналогична таковой при квантовании теории с симметриями.

Более того, в особом классе квантовых теорий диаграммы Фейнмана естественным образом соответствуют графам определенных кривых, поверхностей либо более сложных непрерывных объектов, а тождества Уорда при этом в точности оказываются соотношениями эквивалентности между графами непрерывно преобразуемых друг в друга объектов. Теории такого рода известны как *топологические квантовые теории поля* (ТКТП) [52].

Удивительно это или нет, но тождества Уорда ТКТП во многих случаях имеют простой физический смысл. В частности, в интересующем нас случае ТКТП, в которой корреляционные функции воспроизводят полиномы узлов, основное соотношение (известное как *соотношение Янга — Бакстера*) совпадает с одним из соотношений между элементами группы перестановок (см. стр. 1 таб. 3) [51].

С другой стороны, операторы, удовлетворяющие уравнению Янга — Бакстера возникают во многих интересных физических задачах: начиная с обратной задачи рассеяния в квантовой механике [53] и включая вычисление корреляционных функций интегрируемых спиновых цепочек и моделей типа льда [2], а также двумерной конформной теории поля [54].

В следующем разделе мы обсудим и проиллюстрируем примерами простейшую формулировку ТКТП, в которой наблюдаемые оказываются инвариантами узлов. Соответствующая конструкция известна как *модель Кауффмана* [55].

1.2. Полином узла как среднее в модели Кауффмана

Модель Кауффмана представляет собой пример упомянутой выше диаграммной техники в топологии: гладкой кривой соответствует диаграмма, а диаграмме — операторная свертка. Чтобы эта свертка представляла собой топологический инвариант, операторы должны удовлетворять набору соотношений, которые как система операторных уравнений оказываются несовместными. Для решения этой проблемы вводится операция усреднения: предполагается, что каждый из операторов имеет также дополнительный индекс, бегущий во вспомогательном пространстве — так что даже полная свертка операторов по остальным индексам является оператором на этом пространстве. Процедура усреднения сводится к тому, чтобы всякому такому оператору поставить в соответствие скаляр (число или функцию формальных переменных), который и будет топологическим инвариантом.

Модель Кауффмана можно рассматривать как определение ТКТП с диаграммами узлов в качестве диаграмм Фейнмана, условиями топологической инвариантности в качестве тождеств

Таблица 1. Примеры полиномов узлов

Название	Группа	Представ- ление	Формальные переменные	Пример полинома	
				Узел	Полином
полином Джонса	$SU(2)$	\square	q	3_1 “трилистник” рис.11	$-q^{-8} + q^{-6} + q^{-2}$
				4_1 “восьмерка”	$q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4}$
полином ХОМФЛИ	$SU(N)$	\square	A, q	3_1	$-A^{-4} + A^{-2} (q^2 + q^{-2})$
				4_1	$1 + q^2 (A + A^{-1}) - (q^2 + q^{-2})$
полином Алекса- ндера	$SU(0)$	\square	q	3_1	$q^2 - 1 + q^{-2}$
				4_1	$q^2 + 1 - q^{-2}$
полином Кауфф- мана	$SO(N)$	\square	a, q	3_1	$a^2 (q^2 + q^{-2}) - a^4 (q^2 - 1 + q^{-2})$ $+ (-a^3 + a^5) (q - q^{-1})$
раскра- шенный полином Джонса	$SU(2)$	$\square\square$	q	3_1	$q^{-4} + q^{-10} - q^{-14} + q^{-16} -$ $-q^{-18} - q^{-20} + q^{-22}$

Уорда и средними от операторных сверток в качестве наблюдаемых.

Перед тем как перейти к описанию модели Кауффмана, скажем несколько слов об инвариантах узлов, допускающих вычисление в ее терминах. Большинство этих инвариантов были введены ранее независимым образом — ценность новой конструкции в единообразном описании различных инвариантах, а также в возможности сразу нескольких различных обобщений. Кроме того, модель Кауффмана — первый шаг на пути к отождествлению полиномов узлов с корреляционными функциями в ТКТП.

1.2.1. Узлы и полиномы узлов

Инвариант узла — это, по определению, величина, которая ставится в соответствие всякой замкнутой кривой в трехмерном пространстве и одинакова для всякой пары кривых, переводимых друг в друга путем непрерывных преобразований. Инварианты узлов, о которых пойдет речь, перечислены в таблице 1. Все эти инварианты являются *полиномами узлов*: они представляют из себя (с точностью до нормировочного множителя, который во всех приведенных примерах выбран равным единице) полиномы Лорана от одной или нескольких формальных переменных, вместо которых можно подставить произвольные вещественные или комплексные числа, получив при этом числовые инварианты узлов. Коэффициенты полиномов также являются числовыми инвариантами и известны как *инварианты Васильева* [56, 57]. В таблице также приведен явный вид перечисленных полиномов в простейших случаях. В настоящий момент все эти полиномы вычислены для огромного количества узлов и доступны в различных электронных каталогах [58, 59, 60, 61].

Как видно из второго и третьего столбцов таблицы, с каждым из полиномов связаны еще два

объекта: группа Ли и ее представление. Мы отложим обсуждение этого соответствия до разд. 2.2, а здесь упомянем лишь, что оно естественным образом возникает в рамках \mathcal{R} -матричного подхода (составляющего наш основной интерес) и существенно для отождествления этих полиномов с наблюдаемыми в *калибровочной* теории поля.

Первым из полиномов узлов был открыт *полином Александра* [62] — он был известен уже в 1928 г. Сегодня этот инвариант считается очень грубым; тем не менее, полиномы Александра различны для всех *простых* (т.е., тех, которые не могут быть составлены из “более простых” — см. определение в [51]) узлов с числом пересечений (т.е., с наименьшим числом самопересечений кривой на плоской проекции) 8 — всего 36 узлов, включая *тривиальный узел* (т.е., кривую, переводимую непрерывным преобразованием в окружность) [57] — иными словами, полином Александра, вычисленный для произвольной замкнутой кривой не более чем с восемью самопересечениями на некоторой плоской проекции, однозначно определяет ее принадлежность к одному из 36 классов эквивалентности относительно произвольных непрерывных преобразований.

Следующий полиномиальный инвариант узла — *полином Джонса* — был открыт только в 1984 г. [63]. Этот инвариант существенно точнее, чем полином Александра — он позволяет разбить все замкнутые кривые не более чем с 9 самопересечениями на (хотя бы одной) плоской проекции на 85 классов эквивалентности относительно произвольных непрерывных преобразований [64]. В частности, полином Джонса простого узла 6_1 в таблице Рольфсена (6 пересечений) отличен от полинома Джонса узла 9_{146} (9 пересечений), имеющего такой же полином Александра. Однако, узел 10_{132} с 10 пересечениями имеет точно такой же полином Джонса как и узел 5_1 с 5 пересечениями.

Спустя небольшое время после открытия полинома Джонса, в 1985 году, несколько научных групп, а именно: П. Фрейд и Д. Хост, В. Б. Р. Ликориш и К. Милле, А. Окнеану [65], а также Й. Пштитцкий и П. Тракчук [66] независимо друг от друга открыли новый полином узла — *полином ХОМФЛИ*, который одновременно является обобщением полиномов Александра и Джонса (полное название полинома, ХОМФЛИ — РТ, составлено из первых букв фамилий девяти первооткрывателей). Хотя полиномы ХОМФЛИ и “различают” некоторые узлы, “неразличимые” для полиномов Джонса и Александра — например, простой узел 8_9 и составной узел $4_1 \# 4_1$ (см. определение в [51]) [67] — полином ХОМФЛИ как индикатор топологического класса не многим точнее, чем полином Джонса: в частности, первая пара простых узлов с совпадающими полиномами Джонса, 5_1 и 10_{132} , имеет также одинаковые полиномы ХОМФЛИ. Настоящий же интерес к новому инварианту вызван совсем иными причинами — данную главу в некоторой мере можно рассматривать как обзор таковых.

Наконец, инвариант узла, впоследствии названный *полиномом Кауффмана* был впервые упомянут в 1987 г. [55] — и в той же работе было замечено, что все перечисленные инварианты узлов допускают единообразное определение — то самое “статистическое” определение, о котором пойдет речь ниже.

Следующим поворотом сюжета стало открытие так называемых *раскрашенных полиномов*: сначала Джонса, а затем ХОМФЛИ и Кауффмана. В первых работах (см., например, [68]), раскрашенные полиномы данного узла вводились с помощью *узлов-спутников*, полученных путем замены исходной кривой на несколько вообще говоря переплетающихся между собой ее копий (см. определение в [64]). Полиномы всевозможных узлов-спутников данного узла образуют линейное пространство, которое, если ограничиться небольшим заданным числом копий, имеет конечную небольшую размерность, например, в случае полиномов ХОМФЛИ: 2 для 2 копий, 3 для 3, 5 для 4, 7 для 5 — далее, однако, размерность пространства начинает стремительно возрастать. Раскрашенные полиномы узлов изначально были введены как некоторый выделенный базис в таком линейном пространстве [69]. Вероятно, самый яркий пример использования таким образом определенных раскрашенных полиномов принадлежит Мортону [68], который показал, что простейшая пара *узлов-мутантов*: так называемые узлы *Киношиты* — *Терасаки* (узел $11n42$ в таблице Хоста — *Систлевэйта* [58]) и Конвея ($11n34$), неразличимые для простых полиномов ХОМФЛИ и Джонса, *неразличимы* также для произвольных раскрашенных полиномов Джонса, а также для

раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, полученных с помощью двойных узлов-спутников, зато *различимы* для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, полученных с помощью тройных узлов-спутников. Явного вычисления соответствующих полиномов работа Мортон, правда, не содержит: таковое было проделано лишь недавно [70] с помощью R -матричного подхода к раскрашенным полиномам узлов [1]. Более того, при всей мощи метода узлов-спутников, глубокий смысл раскрашенных полиномов, как и многие их свойства, проясняются только в рамках метода R -матриц, которому и посвящен настоящий текст.

Являясь мощным средством классификации замкнутых кривых по модулю произвольных непрерывных преобразований, полином узла остается лишь номером класса эквивалентности до тех пор, пока не изучаются какие-то более глубокие стоящие за ним структуры — только в этом случае есть надежда на ясное и лаконичное описание “пространства всех узлов”. И такие структуры нашлись: удивительным образом в 80-е и 90-г. ряд ранее известных полиномов узлов получил альтернативное описание на языке понятий, развитых к тому моменту в рамках теории рассеяния, статистической физики и квантовой теории поля [51, 69]. Этот чрезвычайно любопытный сюжет начинается с конструкции Кауффмана [55], обсуждению которой мы и посвятим следующий раздел.

1.2.2. Модель Кауффмана

Как мы уже упоминали, все перечисленные в таблице 1 полиномы узлов допускают единообразное описание в рамках конструкции, которая в общих чертах сводится к следующему:

- Узлу или зацеплению, на каждой компоненте которого выбрано направление, ставится в соответствие направленный четырехвалентный граф с вершинами двух типов (см. рис. 8), получаемый в результате проекции исходной кривой (в случае зацепления — набора кривых) на плоскость на некоторую плоскость с сохранением выбранного направления, а также взаимного расположения отрезков кривой относительно плоскости проекции в каждой точке самопересечения. Такой граф называется *диаграммой узла или зацепления* (см. пример на рис. 3), а его вершины — прямыми и обратными *перекрестками*, в зависимости от типа вершины.
- Исходной кривой (каждой из кривых в случае зацепления) ставится в соответствие некоторое векторное пространство, а каждому перекрестку на диаграмме узла — один из двух четырехиндексных операторов: в зависимости от того, прямой перекресток или обратный.
- После этого диаграмма узла в целом соответствует некоторой свертке операторов (см. рис. 3).
- В заключение предполагается, что операторы зависят от некоторых дополнительных параметров (вообще говоря, принимающих различные значения в каждом перекрестке), после чего соответствующая диаграмме операторная свертка усредняется этим параметрам с определенными весами.

В результате описанной выше процедуры и получится полином узла — по модулю одной тонкости, обсуждение которой мы отложим до разд. 2.4.

Существует несколько версий конструкции Кауффмана, в которых как сами операторы, так и процедура усреднения вводятся несколькими различным образом. Общими для всех этих версий является ряд формальных свойств операторов и среднего от их свертки. Более того, эти свойства оказываются определяющими: они позволяют получить явные выражения для операторов и весов в процедуре усреднения, а также непосредственно вычислять средние, не используя таких выражений. Мы начнем с перечисления этих общих свойств и поясним их происхождение.

Таблица 2. Определяющие свойства среднего в модели Кауффмана

$\langle \hat{O}_1(\lambda\hat{O}_2 + \mu\hat{O}_3)\hat{O}_4 \rangle = \lambda\langle \hat{O}_1\hat{O}_2\hat{O}_4 \rangle + \mu\langle \hat{O}_1\hat{O}_3\hat{O}_4 \rangle$	Полилинейность
$\langle \hat{O} \rangle = -\langle \hat{O} \rangle \langle \text{Id} \rangle$	Вынесение единицы

(1.9)

Свойства среднего По определению,

- *Среднее* есть скалярная величина, соответствующая свертке операторов так, что выполнены свойства в таб. 2.

Если в первой строке таблицы содержится общее свойство среднего от операторного произведения, условие во второй строке специфично именно для данной конструкции: оно отражает существенное свойство инвариантов узлов, с которыми предполагается отождествить средние от операторов.

1.2.3. Операторные тождества

В свою очередь,

- На операторы в модели Кауффмана должны быть выполнены тождества в строках 1-3 таб. 3; эти тождества гарантируют инвариантность операторной свертки относительно преобразований диаграммы узла, перечисленных в правом столбце таблицы.

Здесь имеется в виду, что всякий фрагмент диаграммы, выглядящий как в левая часть одного из равенств, можно заменить на фрагмент в правой части соответствующего равенства: такие преобразования проекции кривой на плоскость, как нетрудно видеть, отвечают непрерывным преобразованиям самой кривой — иными словами, перечисленные равенства представляют собой соотношения эквивалентности между диаграммами узлов. Согласно *теореме Рейдемейстера* [51] верно и обратное: всякие две диаграммы, отвечающие двум переводимым друг в друга непрерывным преобразованием кривым, переводятся друг в друга некоторой комбинацией трех движений Рейдемейстера. Таким образом, операторные тождества, перечисленные в первых трех строках таблицы, необходимы и достаточны, чтобы обеспечить топологическую инвариантность построенной по диаграмме узла операторной свертки.

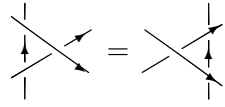
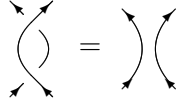
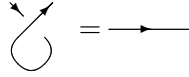
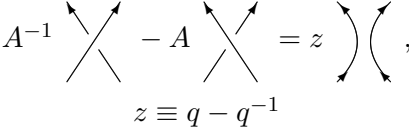
Обратим внимание, что третье тождество выполнено *только* под знаком среднего: как операторное уравнение оно оказывается не совместным с первыми двумя — именно этот факт не позволяет представить инвариант узла просто как операторную свертку и заставляет ввести в конструкцию дополнительную операцию усреднения [51, 55].

На этом мы остановимся в изложении общей конструкции: дальнейшие построения мы проиллюстрируем — для нескольких различных версий конструкции — с помощью простых примеров, важных для дальнейшего изложения.

1.2.4. Вычисление полинома Джонса для узла-трилистника с помощью конструкции Кауффмана

Как мы уже говорили, свойства в таблице 2 и строках 1-3 таблицы 3 общие свойства достаточны для определения инварианта узла: таковой получится для всякого набора операторов и всякого соответствующий их свертке скаляра, как только для этих величин выполнены все перечисленные свойства. Эти свойства как система уравнений на элементы операторов и веса в

Таблица 3. Тождества Уорда в модели Кауффмана

$S_{\alpha\beta}^{ij} S_{l\gamma}^{\alpha k} S_{mn}^{\beta\gamma} = S_{\gamma\alpha}^{jk} S_{n\beta}^{\alpha i} S_{lm}^{\gamma\alpha}$		RII
$\tilde{S}_{\alpha\beta}^{ij} S_{kl}^{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{ij} \tilde{S}_{kl}^{\alpha\beta} = \delta_k^i \delta_l^j$		RIII
$\langle S_{\alpha j}^{i\alpha} \mathcal{O}_i \rangle = \langle \delta_\alpha^\alpha \rangle \langle \mathcal{O}_i \rangle$		RI
$\begin{aligned} (S_{\alpha\beta}^{ij} - Aq\delta_\alpha^i \delta_\beta^j)(S_{kl}^{\alpha\beta} - Aq^{-1}\delta_k^\alpha \delta_l^\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow A^{-1}S_{kl}^{ij} - A\tilde{S}_{kl}^{ij} &= (q - q^{-1})\delta_k^i \delta_l^j \end{aligned}$		Запутывающие соотношения.

(1.10)

процедуре усреднение допускают бесконечное множество решений — что делает возможным ввести в решение зависимость от формального параметра (или даже от нескольких параметров) и получить не просто числовой инвариант, а полином узла, а также позволяет получить различные инварианты узлов в рамках данной конструкции. Существует способ единообразно описать целый класс решений: таким способом как раз является интересующий нас \mathcal{R} -матричный формализм [1] (см. разд. 2.2). Мы, однако, начнем с рассмотрения простейших частных решений, для которых приведем явное вычисление соответствующих полиномов узлов несколькими различными способами.

Метод тождеств Уорда Если ограничить рассмотрение модели Кауффмана простейшим классом решений уравнений в таб. 2 с стр. 1-3 таб. 3, то, как мы уже упоминали, для вычисления средних не обязательно выводить явные выражения для операторов и весов в процедуре усреднения: перечисленных соотношений вместе с дополнительным условием, выделяющим решения этого класса, достаточно, чтобы явно вычислить среднее от произвольной свертки [55].

- Дополнительное условие, которое в данном случае налагается на операторы, приведено в последней строке таб. 3.

Если рассматривать операторы S как линейные операторы на пространстве $V \otimes V$ (напомним, что с исходной кривой, и тем самым с каждым ребром на диаграмме узла связано некоторое векторное пространство V), то наложенное условие ограничивает число различных собственных значений этих операторов: их должно быть не более двух — но сами значения при этом никак не фиксируются, для них лишь вводится стандартная параметризация $\lambda_1 = A^{-1}q$, $\lambda_2 = -Aq^{-1}$, где q и

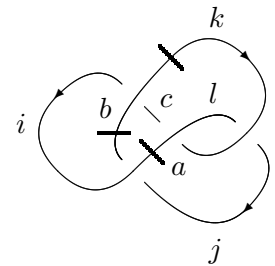


Рис. 3. одна из возможных диаграмм узла-трилистника, которой соответствует операторная свертка $S_{ab}^{ij} S_{lc}^{\alpha k} S_{mi}^{\beta c} S_{kj}^{\alpha m l}$

A — формальные переменные, от которых будет зависеть полином узла (можно считать, что вместо них подставляются произвольные комплексные числа). С учетом соотношения в стр. 2 таб. 3 это же условие можно переписать как условие связи между операторами в прямом и обратном перекрестках. Следующие из этой формы равенства соотношения между средними известны как *переплетающиеся соотношения* для полиномов узлов [51].

Если понимать диаграммы узлов в модели Кауффмана как диаграммы Фейнмана топологической квантовой теории поля, то условия из таб. 2 и 3 можно рассматривать как *тождества Уорда* [48], которые в данном простейшем случае определяют теорию однозначно: в том смысле, что позволяют вычислить средние от произвольной скалярной величины — каковые можно рассматривать как наблюдаемые в теории.

Чтобы продемонстрировать, как работает данный метод, приведем явное вычисление среднего для диаграммы на рис. 3 — она отвечает узлу-трилистнику, хотя и не является его простейшим представлением:

$$\begin{aligned}
& \left\langle S_{ab}^{\boxed{ij}} S_{lc}^{\boxed{a|k}} S_{mi}^{\boxed{bc}} S_{kj}^{\boxed{ml}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.3}}{\text{стр. 1}} \left\langle S_{bc}^{\boxed{jk}} S_{ia}^{\boxed{c|i}} S_{lm}^{\boxed{ab}} S_{kj}^{\boxed{ml}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.3}}{\text{стр. 4}} Az \left\langle S_{bc}^{\boxed{jk}} S_{ia}^{\boxed{ci}} S_{kj}^{\boxed{ab}} \right\rangle + A^2 \left\langle S_{kc}^{\boxed{jk}} S_{ij}^{\boxed{ci}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.3}}{\text{стр. 4}} \\
& = A^2 z^2 \left\langle S_{ia}^{\boxed{ci}} S_{bc}^{\boxed{ab}} \right\rangle + A^3 z \left\langle \delta_b^{\boxed{a|c}} S_{ia}^{\boxed{ab}} \right\rangle + A^2 \left\langle S_{kc}^{\boxed{jk}} S_{ij}^{\boxed{ci}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.3}}{\text{стр. 3}} A^2 z^2 \left\langle S_{ba}^{\boxed{ab}} \right\rangle + A^3 z \left\langle \delta_b^{\boxed{a|c}} \delta_a^{\boxed{ab}} \right\rangle + A^2 \left\langle S_{kj}^{\boxed{jk}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.3}}{\text{стр. 3}} \\
& = A^2 z^2 \langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \rangle + A^3 z \langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \delta_b^{\boxed{ab}} \rangle + A^2 \langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \rangle \quad (1.11)
\end{aligned}$$

где также несколько раз использовано свойство из стр. 1 таб. 2, а также введено обозначение $z = q - q^{-1}$. Таким образом исходное среднее выражается с помощью соотношений из таб. 2 и 3 через средние от произведений следов единичных операторов. Для получения окончательного ответа необходимо воспользоваться равенством нужно воспользоваться свойством из стр. 2 таб. 2, которое в данном случае дает $\langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \delta_b^{\boxed{ab}} \rangle = -\langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \rangle^2$, а также равенством

$$\langle \delta_a^{\boxed{a|c}} \rangle = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (1.12)$$

Последнее соотношение не является *новым* условием: оно есть следствие соотношений из таб. 2 и 3:

$$(A^{-1} - A) \left\langle \delta_k^{\boxed{a|c}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.2,}}{\text{стр. 1,}} \stackrel{\text{таб. 3}}{\text{стр. 3}} \left\langle A^{-1} S_{jk}^{\boxed{ij}} - A \tilde{S}_{jk}^{\boxed{ij}} \right\rangle \stackrel{\text{таб.2}}{\text{стр.2}} \stackrel{\text{таб.3,}}{\text{стр.4}} - (q - q^{-1}) \langle \delta_k^{\boxed{a|c}} \rangle \langle \delta_j^{\boxed{a|c}} \rangle. \quad (1.13)$$

Формальное равенство (1.12) можно при этом понимать как замену на последнем шаге вычисления единичного оператора на другой оператор, зависящий от дополнительных параметров, усреднение следа оператора по которым дает выражение в правой части (1.12).

Подставляя (1.12) в (1.11), приходим к окончательному ответу

$$\begin{aligned}
& \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \left(A^2 (q - q^{-1})^2 - A^3 (q - q^{-1}) \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} + A^2 \right) = \\
& = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} (A^2 q^2 - 2A^2 + A^2 q^{-2} - A^4 + A^2 + A^2). \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Множитель перед скобками равен значению полинома ХОМФЛИ для тривиального узла, а в скобках стоит нормированный (на это значение) полином ХОМФЛИ узла-трилистника [58]:

$$\mathcal{H}_{un}^{01}(A, q) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad \mathcal{H}^{31}(A, q) = A^2 (q^2 + q^{-2}) - A^4. \quad (1.15)$$

Приведенная выкладка по существу совпадает с вычислением полинома ХОМФЛИ с помощью условий Рейдемейстера и переплетающих соотношений [51] — однако, в контексте дальнейшего изложения важно, что ту же процедуру можно произвести в терминах модели Кауффмана.

Утверждение, что с помощью соотношений из таб. 2, 1 можно вычислить среднее от произвольной диаграммы узла, как и то, что в результате действительно получится полином Лорана от переменных A и q глубоко нетривиально: на этот счет есть соответствующая теорема [51, 65, 66].

Метод тождеств Уорда (или переплетающих соотношений) весьма эффективен для вычисления простых полиномов ХОМФЛИ, которые при определенных соотношениях между формальными переменными дают полиномы Джонса ($A = q^2$) и Александра ($A = 1$), а также и обобщается на случай полиномов Кауффмана. Можно также показать, что обобщение подхода на случай раскрашенных полиномов отвечало бы условию трех и более различных собственных значений оператора перекрестка вместо условия из стр. 4 таб. 3. Обобщенных таким образом условий, однако, оказывается недостаточно, чтобы вычислять средние только с помощью тождеств Уорда — хотя они и позволяют получить ряд важных соотношений между раскрашенными полиномами [71].

Частное решение для операторов перекрестков Альтернативный путь состоит в написании явных выражений для операторов перекрестков. После этого процедура усреднения может производиться как явным образом — посредством определения соответствующих весов, так и неявным — с помощью соотношений из таб. 2. Ниже мы проиллюстрируем оба подхода. При этом мы ограничим общность даже по сравнению с предыдущим примером: все выкладки мы сделаем для частного решения уравнений из таб. 2, 3, имеющего особенно простой вид. Полученные с помощью этого решения средние будут полиномами Джонса.

Решение, о котором идет речь, имеет вид

$$S_{kl}^{ij} = q^{-1} \delta_l^i \delta_k^j - q^{-2} \epsilon^{ij} \epsilon_{kl}, \quad (1.16)$$

Оператор (1.18) иногда называют *матрицей Кауффмана* [69]. Для этого оператора, как можно непосредственно убедиться, выполнены условия из стр. 1-2 и 4 таб. 3 (хотя последнее и не используется явным образом в данном подходе), но *не* условие из стр. 3 таб. 3. Последнее условия выполнено, однако, *под знаком следа*, при условии

$$\langle \text{TrId} \rangle \equiv q + q^{-1}, \quad (1.17)$$

которое нужно понимать в указанном в предыдущем примере смысле. Действительно:

$$\langle S_{jl}^{ij} \rangle = a \langle \delta_l^i \rangle \langle \delta_j^j \rangle - b \langle \epsilon^{ij} \epsilon_{jl} \rangle = \left(a \langle \delta_j^j \rangle - b \right) \text{Tr} \langle \text{Id} \rangle = \langle \delta_l^i \rangle \Rightarrow \text{Tr} \langle \text{Id} \rangle = \frac{1+b}{a}, \quad (1.18)$$

где мы обозначили коэффициенты в (1.18) через $a \equiv q^{-1}$ и $b \equiv -q^{-2}$, чтобы более ясно показать структуру ответа. Как видно из вычисления, условие из стр. 3 таб. 3 даже под знаком среднего выполнено лишь с точностью до множителя, который равен единице только если среднее от следа единичного оператора дается выражением (1.17).

Для среднего, отвечающего диаграмме 3, тогда имеем:

$$\begin{aligned}
\langle S_{ab}^{ij} S_{lc}^{ak} S_{mi}^{bc} S_{kj}^{ml} \rangle &= a^4 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle + b^4 \langle (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) \rangle + \\
&+ a^3 b \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\delta_l^m \delta_k^j) + \\
&+ (\delta_b^i \delta_a^j) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_l^m \delta_k^j) + (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle + \\
&+ a b^3 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + \\
&+ (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle + \\
&+ a^2 b^2 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\delta_b^i \delta_a^j) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\delta_b^i \delta_a^j) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\delta_j^m \delta_k^l) + \\
&+ (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\epsilon^{ml} \epsilon_{kj}) + (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\epsilon^{bc} \epsilon_{mi}) (\delta_j^m \delta_k^l) + (\epsilon^{ij} \epsilon_{ab}) (\epsilon^{ak} \epsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle = \\
&= a^4 \langle \text{Tr Id} \rangle^3 + 4a^3 b \langle \text{Tr Id} \rangle^2 + a^2 b^2 \left(2 \langle \text{Tr Id} \rangle^3 + 4 \langle \text{Tr Id} \rangle \right) + 4ab^3 \langle \text{Tr Id} \rangle^2 + b^4 \langle \text{Tr Id} \rangle = \\
&= (q + q^{-1}) (q^{-2} + q^{-6} - q^{-8}) = q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} - q^{-9}. \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Ответ, как и должен, совпадает с выражением (1.11) при $A = q^2$.

Явные выражения для решений условий топологической инвариантности можно написать и в более общем случае, в котором среднее дает полином ХОМФЛИ, а также в случае, отвечающем полиному Кауффмана — однако соответствующие операторы уже не допускают простых разложений по инвариантным тензорам вида (1.18). Более того, известны также явные выражения для операторов, позволяющие получить соответствующие раскрашенные полиномы, для чего одних тождеств Уорда уже недостаточно. Такими решениями и являются уже упомянутые нами \mathcal{R} -матрицы [1].

До сих пор операция взятия среднего сводилась к ряду формальных операций: к преобразованию таб. 3 — стр. 3 усредняемого выражения, к применению дистрибутивного разложения таб. 2 — стр. 1 и свойства вынесения единицы таб. 2 — стр. 2, а также к формальной замене среднего от следа единичного оператора на выражение (1.12) или (1.17). Далее мы собираемся придать данной операции более конкретный смысл: то есть, явным образом перейти от операторов на пространстве V к операторам на пространстве $V \otimes \mathcal{L}$, где \mathcal{L} — некоторое вспомогательное пространство, и ввести операцию среднего как отображение $\mathcal{L} \rightarrow C$. Но, перед тем как перейти к изложению этого подхода, мы покажем, как можно вовсе избавиться от этой дополнительной операции: для этого в операторную свертку наряду с четырехиндексными операторами, связанными с перекрестками на диаграмме узла, необходимо включить также двухиндексные операторы, связанные с *некоторыми* из ребер диаграммы.

Оборотные операторы вместо операции усреднения Правило, по которому дополнительные операторы связываются с ребрами диаграммы, можно сформулировать различными способами [24, 72] (см. разд. 2.2). Мы приведем мало распространенный, но важный для нас вариант, опирающийся на понятие цикла. А именно: *простым циклом* на направленном графе называется упорядоченный набор вершин, включающий каждую из вершин графа не более одного раза, такой что от каждой вершины в последующей, а также от последней вершины к первой ведет направленное ребро [73]. Двухиндексные операторы тогда следует разместить на ребрах диаграммы согласно следующему правилу:

- Всякий простой цикл на диаграмме узла должен содержать в точности один дополнительный оператор.

Например, для диаграммы на рис. 3 возможный набор ребер для вставки операторов отмечен штрихами; соответствующая операторная свертка при этом принимает вид

$$\left\langle S_{ab}^{ij} S_{lc}^{ak} S_{mi}^{bc} S_{kj}^{ml} \right\rangle \equiv S_{ab}^{ij} S_{lc}^{\alpha k} S_{mi}^{\beta c} S_{kj}^{ml} \mathcal{M}_{\alpha}^a \mathcal{M}_{\beta}^b \mathcal{M}_k^{\kappa}. \quad (1.20)$$

Явный вид оператора \mathcal{M} определяется условием в стр. 3 таб. 3, которое теперь должно быть выполнено *без усреднения* — но со вставкой оператора \mathcal{M} в сворачиваемую петлю. Нетрудно показать (см. разд. 2.2), что оператору S вида (1.18) соответствует оператор \mathcal{M} вида

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Вычисление свертки (1.20) при этом буквально повторяет вычисление свертки (1.19) — с точностью до того, что всякий раз вместо среднего от следа единичного оператора возникает след оператора \mathcal{M} :

$$\langle \delta_a^a \rangle \longrightarrow \mathcal{M}_a^a, \quad (1.22)$$

как раз равный выражению в правой части (1.17), что приводит к тому же ответу для полинома Джонса.

Явное определение среднего В примере, разобранным ниже, мы, наконец, дадим явное определение среднего. Подход, который мы при этом проиллюстрируем, максимально близок к той версии \mathcal{R} -матричного формализма, которая и лежала в основе нашей работы.

Идея определения среднего такова: будем считать, что операторы перекрестков на самом деле представляют из себя проекции некоторых “первичных” операторов на исходном пространстве V на некоторое подпространство V_r :

$$S_r \equiv \mathcal{P}_r S \mathcal{P}_r, \quad (1.23)$$

после чего просуммируем с определенными весами w_r такие свертки для различных подпространств V_r , в сумме составляющих исходное пространство V :

$$\langle S \dots S \rangle \equiv \sum_r w_r \langle S_r \dots S_r \rangle. \quad (1.24)$$

Для явного описания такой процедуры проще всего сначала переписать операторную свертку как след матричного произведения. В частности, для свертки (3) это можно сделать следующим образом:

$$S_{ab}^{sj} \delta_{\kappa}^t \cdot S_{lc}^{\alpha k} \delta_{\underline{u}}^{\beta} \cdot S_{\underline{mi}}^{\bar{u}c} \delta_{\underline{v}}^{\bar{l}} \cdot S_{\underline{tj}}^{mv} \delta_{\underline{s}}^i = S_{ucl}^{(2)\beta\alpha k} S_{imv}^{(1)ucl} S_{sjt}^{(2)imv} S_{bak}^{(1)sjt} = \text{Tr} \left\{ S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\} \quad (1.25)$$

где каждая из матриц $S_L^{(i)I}$, $i = 1, 2$, имеет по два мультииндекса, верхний и нижний, отвечающих, соответственно, тройкам верхних и нижних индексов исходных операторов:

$$S_L^{(1)I} \equiv S_{\underline{lmn}}^{(1)ijk} \equiv S_{\underline{ml}}^{ij} \delta_n^k, \quad S_L^{(2)I} \equiv S_{\underline{lmn}}^{(2)ijk} \equiv \delta_l^i S_{\underline{nm}}^{jk}. \quad (1.26)$$

Обратим внимание, что сведение тензорной свертки к операторному произведению потребовало введения *двух* различных двуиндексных операторов вместо одного четырехиндексного. Проведенную выкладку можно представить наглядно: как перерисовывание исходной диаграммы узла (рис. 3) в виде замыкания косы [24].

В случае S из (1.18) введенные операторы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ даются явными выражениями

$$S_{lmn}^{(1)ijk} = q^{-1} \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k - q^{-2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ml} \delta_n^k, \quad S_{lmn}^{(2)ijk} = q^{-1} \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k - q^{-2} \delta_l^i \epsilon^{jk} \epsilon_{nm}, \quad (1.27)$$

так что их матрицы суть, соответственно,

$$q^2 S^{(1)} = \begin{array}{cccccccc} & 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 & ijk/lmn \\ \left\| \begin{array}{c} q \\ \\ q+1 \\ -1 \\ -1 \\ \\ q \\ \\ q \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{c} 111 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 211 \\ 212 \\ 221 \\ 222 \end{array} \right\| \end{array}, \quad (1.28)$$

и

$$q^2 S^{(2)} = \begin{array}{cccccccc} & 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 & ijk/lmn \\ \left\| \begin{array}{c} q \\ q+1 \\ -1 \\ \\ q \\ \\ q \\ q+1 \\ -1 \\ \\ q \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{c} 111 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 211 \\ 212 \\ 221 \\ 222 \end{array} \right\| \end{array}. \quad (1.29)$$

После этого процедура усреднения определяется с помощью дополнительного оператора Q : как сумма по собственным значениям оператора Q произведений операторов S , спроектированных на инвариантные подпространства оператора Q , отвечающие каждому из его собственных значений, с самими собственными значениями в качестве весов:

$$\left\langle \text{Tr} \left\{ S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\} \right\rangle \equiv \sum_{\substack{\lambda=q^3, q, \\ q^{-1}, q^{-3}}} \lambda \text{Tr} \left\{ S_{\lambda}^{(2)} S_{\lambda}^{(1)} S_{\lambda}^{(2)} S_{\lambda}^{(1)} \right\}, \quad S^{(i)} \equiv \mathcal{P}_{\lambda} S^{(i)} \mathcal{P}_{\lambda}, \quad i = 1, 2. \quad (1.30)$$

Описанная процедура, конечно, эквивалентна простой вставке оператора Q под знак следа:

$$\left\langle \text{Tr} \left\{ S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\} \right\rangle \equiv \text{Tr} \left\{ \mathcal{Q} S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\}. \quad (1.31)$$

Однако, во многих версиях \mathcal{R} -матричного формализма, в частности в той, которая нас интересует прежде всего, исходными понятиями являются именно спроектированные операторы \mathcal{S}_{λ} и соответствующие веса, а не “первичные” операторы S — так что именно выражение (1.30), а не (1.31) принимается при этом за определение среднего.

В выбранном базисе оператор \mathcal{Q} и соответствующие даются диагональными матрицами:

$$\begin{array}{l} \mathcal{Q} = \text{diag} \left(\begin{array}{cccccccc} 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 \\ q^3 & q & q & q & q^{-1} & q^{-1} & q^{-1} & q^{-3} \end{array} \right) \\ \mathcal{P}_1 = \text{diag} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \mathcal{P}_2 = \text{diag} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \mathcal{P}_3 = \text{diag} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \mathcal{P}_4 = \text{diag} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}. \quad (1.32)$$

Можно непосредственно убедиться, что оператор \mathcal{Q} связан с оператором \mathcal{M} из предыдущего примера как

$$\mathcal{Q}_L^I \equiv \mathcal{Q}_{lmn}^{ijk} = \mathcal{M}_l^i \mathcal{M}_m^j \mathcal{M}_n^k, \quad (1.33)$$

так что след (1.30) в точности совпадает со сверткой (1.20).

Среднее как разложение по характерам. Входящие в определение среднего подпространства и веса не произвольны: их выбор диктуется инвариантностью среднего относительно первого движения Рейдемейстера (стр. 3 таб. 3) — мы еще вернемся к этому вопросу в разд. 2.1. Эти подпространства и веса допускают, однако, бесконечное множество эквивалентных описаний, отвечающих различному выбору базиса в выражении (1.30). В частности, в наиболее важной для нас версии подхода, базис выбирается так, что среднее принимает вид линейной комбинации

$$\left\langle \text{Tr} \left\{ S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\} \right\rangle \equiv \sum_{r=s,a} [\dim]_q^r \text{Tr} \left\{ S_r^{(2)} S_r^{(1)} S_r^{(2)} S_r^{(1)} \right\} = \text{Tr} \left\{ \mathcal{Q} S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\}, \quad (1.34)$$

$$S_r^{(i)} \equiv \mathcal{P}_r S^{(i)} \mathcal{P}_r, \quad r = s, f, \quad i = 1, 2,$$

где величины $[\dim]_q^f$ и $[\dim]_q^s$ суть *квантовые размерности* (полиномы от q , переходящие при $q = 1$ в простые размерности — см. ниже) [74] представлений группы $SU(2)$, полученных при действии группы на векторах и симметричных тензорах ранга три, соответственно [75]. Мы отложим точные определения всех упомянутых величин до разд. 2.1, а здесь приведем лишь явный вид разложения (1.34) для случая из предыдущего примера.

Выражение (1.34) можно получить из выражения (1.30), заметив, что при специальном выборе базиса матрицы обоих операторов $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ блочно-диагональны:

$$S_{8 \times 8}^{(i)} = \begin{pmatrix} S_{4 \times 4}^{(i)s} & & \\ & S_{2 \times 2}^{(i)a} & \\ & & S_{2 \times 2}^{(i)a} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (1.35)$$

в то время как матрица оператора \mathcal{Q} просто диагональна:

$$\mathcal{Q} = \text{diag} \left(\underbrace{q^3 \ q \ q^{-1} \ q^{-3}}_s, \underbrace{q \ q}_a, \underbrace{q^{-1} \ q^{-1}}_a \right). \quad (1.36)$$

След (1.31) разлагается тогда в сумму (1.34), так что следы оператора \mathcal{Q} по соответствующим подпространствам оказываются весами:

$$[\dim]_q^s = q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, \quad [\dim]_q^f = q + q^{-1}. \quad (1.37)$$

При $q = 1$ эти веса как раз дают размерности $[\dim]_q^f(q = 1) = 2$ и $[\dim]_q^s(q = 1) = 4$ представлений группы $SU(2)$: фундаментального или спина $\frac{1}{2}$, полученного действием группы на векторах, и спина $\frac{3}{2}$, полученного действием группы на симметрических тензорах ранга 3. Приведем также явный вид соответствующих матричных блоков:

$$S_s^{(1)} = S_a^{(1)} = q^{-1} \text{Id}_{4 \times 4}, \quad S_a^{(1)} = \begin{pmatrix} q^{-1} & \\ & -q^{-3} \end{pmatrix}, \quad S_a^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{q^3 + q^5} & \frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{q^2+q^4} \\ \frac{\sqrt{1+q^2+q^4}}{q^2+q^4} & \frac{q}{1+q^2} \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

Подставляя явные формулы (1.38) и (1.37) для блоков и квантовых размерностей в определение среднего (1.34), а также воспользовавшись тождествами $\text{Tr} A^2 = \sum A_{ij} A_{ji}$ и

$$\left(\frac{-q^{-1}}{q^3 + q^5} \right)^2 + \left(\frac{-q}{q^3(1+q^2)} \right)^2 - 2q^{-1}(-q^{-3}) \frac{1+q^2+q^4}{(q^2+q^4)^2} = -q^{-8}, \quad (1.39)$$

мы, наконец, приходим к ответу

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Tr} \left\{ S^{(2)} S^{(1)} S^{(2)} S^{(1)} \right\} \right\rangle &= q^{-4} [\dim]_q^s - q^{-8} [\dim]_q^f = q^{-4} (q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}) - q^{-8} (q + q^{-1}) = \\ &= q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} - q^{-9} \end{aligned} \quad (1.40)$$

который еще раз воспроизводит полином Джонса узла-трилистника.

1.3. К квантово-полевому представлению инвариантов узлов

Как мы обсудили выше, всякий топологический инвариант можно рассматривать как величину, сопоставляемую диаграмме Фейнмана некоторой абстрактной *топологической* квантовой теории поля. В частности, подобная конструкция применяется для описания некоторого класса инвариантов узлов — и именно эта конструкция (см. разд. 2.2) лежит в основе нашей работы.

Связь между инвариантами узлов и наблюдаемыми в квантовой теории поля, однако, не исчерпывается абстрактными конструкциями описанного типа (см. разд. 1.2). В настоящем разделе мы обсудим крайне любопытную интерпретацию, или, скорее, две различных интерпретации [6, 7, 8, 9, 12, 16, 76] и [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], инвариантов узлов как точно вычислимых наблюдаемых в топологической квантовой теории поля.

Структура раздела. Мы начнем с формулировки точного утверждения о соответствии полиномов узлов наблюдаемым в ТКТП в разд. 1.3.1. Там же, и отчасти в разд. 1.3.2 мы приведем набросок рассуждения, приведенного в [76] в качестве доказательства этого утверждения, и развитого в один из наиболее плодотворных подходов к полиномам узлов в последующих работах [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. В заключение разд.разд. 1.3.2 мы сформулируем вопрос, на который изложенный подход не дает ответа, и который мотивировал (и продолжает мотивировать) дальнейшее исследование вопроса о квантово-полевой интерпретации полиномов узлов.

В разд. 1.3.3 мы приведем альтернативный, восходящий к [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] взгляд на то же самое соотношение между узлами и квантово-полевыми наблюдаемыми, а в последующих разделах обсудим его несколько подробнее. В разд. 1.3.4 для удобства дана сводка основных понятий ТКТП, к которым апеллирует обсуждаемое соответствие. В разд. 1.3.5 подробно обсуждается квантово-полевая интерпретация простейшего топологического инварианта — *гауссова числа зацеплений* [51]. Именно этот пример в свое время послужил отправной точкой для всего сюжета [77]. Далее, в разд. 1.3.6 обсуждается проблема регуляризации входящий в интересующее нас соответствие квантово-полевой величины — речь идет о так называемой операции *оснащения* [17]. Мы подробно разберем простейший пример, а также обсудим кое-какие тонкости, касающиеся общего случая. Мы также прокомментируем роль процедуры *оснащения* как аргумента *в пользу* отождествления полиномов узлов с квантово-полевыми наблюдаемыми. Наконец, в разд. 1.3.7 представляет собой краткий обзор основной части данного сюжета: речь пойдет о сравнение представления для определенных инвариантов узлов (инвариантов *Васильева*), известного как интеграл *Концевича*, с одной стороны, с разложением полинома ХОМФЛИ в ряд по некоторому формальному параметру, а с другой стороны — с рядом теории возмущений для соответствующей наблюдаемой в ТКТП.

1.3.1. Инварианты узлов как наблюдаемые в теории Весса — Зумино — Виттена — Новикова и как аксиоматически определенные вильсоновские средние

Современный взгляд на интерпретацию инвариантов узлов, о которой речь, сконцентрирован в утверждении, что

- Раскрашенный полином ХОМФЛИ есть вильсоновское среднее в теории Черна — Саймонса.

Полином ХОМФЛИ (см. разд. 1.2.1) [51] — это один из полиномов узла, допускающий описание в терминах статистической модели (см. разд. 1.2). Именно этот полином узла и составляет основной предмет нашей работы.

Буквально утверждение выше было сформулировано и подробно рассмотрено в известной работе Виттена [76]. Однако, различные стоящие за этим утверждением соображения на тот момент уже широко обсуждались (к сожалению, эти обсуждения по большей части остались неопубликованными — в качестве редких исключений см., например, [52, 77]), а сама работа отнюдь не поставила точку в вопросе, а напротив дала начало его подробному исследованию

[6, 7, 8, 9, 12, 17, 18, 20, 21, 19, 22, 23, 24, 78, 79], многие направления которого остаются открытыми до сих пор (например, весьма захватывающий сюжет изложен в [80]). Таким образом, обсуждаемое соответствие между полиномами узлов и квантово-полевыми наблюдаемыми вовсе не сводится к отдельной однажды доказанной теореме, а скорее представляет из себя целый сюжет, включающий в себя множество различных, но при этом тесно переплетенных между собой идей.

Наглядное описание конструкции Сейчас мы кратко обсудим квантово-полевую интерпретацию полиномов узлов в ее версии, изложенной в работе [76]. Установленное там соответствие между двумя величинами основано на утверждении что

- Переплетающие соотношения для (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ совпадают с известными соотношениями между конформными блоками Весса — Зумино — Виттена — Новикова.

Приведенное в работе рассуждение можно представить достаточно наглядно, что оказывается полезным как для распространения сделанного утверждения на более общий случай раскрашенных полиномов, так и для развития представленной идеи до метода вычисления этих величин. Ниже мы дадим набросок этой наглядной конструкции³

- Область на диаграмме узла, отделенную от остальной диаграммы окружностью с четырьмя точками и содержащую либо перекресток, либо пару непересекающихся отрезков (рис. 1.41), можно рассматривать как проекцию сферы с четырьмя проколами, попарно соединенными отрезками исходной кривой.
- Эти отрезки можно непрерывно, не пересекая друг с другом и с неподвижными концами, деформировать в пару кривых на сфере; результат этой процедуры можно рассматривать как сферу с двумя проколами и двумя попарно соединяющими их разрезами.
- На такой сфере можно ввести комплексную координату z и определить мероморфные комплексные функции с особенностями в проколах и на разрезах (например, $f(z) = \log \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)(z-d)}$, где разрезы соединяют точку a с точкой c , а точку b с точкой d) [46]. Известны также матричнозначные обобщения подобных функций: *конформные блоки Весса — Зумино — Виттена — Новикова* [82, 83].
- Аналитические функции на сфере с проколами в данных точках образуют конечномерное линейное пространство; то же верно и для конформных блоков Весса — Зумино — Виттена — Новикова. В частности, в случае четырех проколов размерность этого пространства равна двум [83].
- За пределы описанного линейного пространства не выводит следующее преобразование.
 - Отсечем от исходной кривой ее отрезки внутри выбранной сферы, после чего непрерывно и не пересекая друг с другом деформируем их так, что в одной и из двух пар лежащих на сфере их концов точки сохранят свои положения, а в другой — обменяются местами.
 - Если затем деформировать эти отрезки в пару кривых на сфере: непрерывно и не пересекая друг с другом, и на этот раз с неподвижными концами, получится *другая* пара разрезов, которую невозможно получить из старой путем непрерывной деформации разрезов на поверхности сферы, при которой разрезы не пересекаются друг с другом, а их концы неподвижны (рис. 1.41).

³Сделаем оговорку, что непосредственно в работе [76] речь про полиномы Джонса, а прямолинейное обобщение конструкции на случай полиномов ХОМФЛИ приводится в последующей работе [81] того же автора. Мы с самого начала будем рассматривать более общий случай полиномов ХОМФЛИ, из которых полиномы Джонса получаются при соотношении $A = q^2$ между формальными переменными.

- Ту же операцию можно проделать, сначала положив отрезки исходной кривой на сферу, а затем обменяв их концы местами. При этом со всяким положением проколов и разрезов связать конформный блок и рассмотреть его непрерывное преобразование при описанной деформации.
- Аналогичным образом можно определить обратное преобразование, переставив ту же пару точек, перемещая их в противоположном направлении.
- Поскольку по завершении описанного преобразования восстанавливается исходное положение проколов, исходный конформный блок и его образы при прямом и обратном преобразовании лежат в *одном и том же двумерном пространстве* конформных блоков на сфере с четырьмя проколами в данных точках. Следовательно, эти три величины (которые суть матрицы и функции координаты на сфере) должны удовлетворять линейному соотношению с постоянными коэффициентами.
- Для описанного преобразования коэффициенты соответствующего соотношения между исходным конформным блоком и его образами при прямом и обратном преобразованиях могут быть вычислены явно в теории Весса — Зумино — Виттена — Новикова.
- Если в исходном положении отрезки в проекции на некоторую плоскость не пересекались, то их проекции после прямого и обратного преобразования будут давать прямое и обратное пересечения (направления на отрезках индуцированы направлением на исходной кривой): рис. 1.41.
- Линейное соотношение между соответствующими конформными блоками перейдет при этом в соотношение в стр. 5 таб. 3, которое порождает *переплетающие соотношения* на полиномы ХОМФЛИ. Входящая в эти соотношения формальная переменная выразится при этом через параметры теории Весса-Зумино-Виттена.

$$\begin{array}{c}
 (q - q^{-1}) \times \begin{array}{c} \text{C} \quad \text{A} \\ \text{D} \quad \text{B} \end{array} = A^{-1} \times \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{C} \\ \text{D} \quad \text{B} \end{array} - A \times \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{C} \\ \text{D} \quad \text{B} \end{array} \\
 \text{Id} \qquad \qquad \hat{\Omega}_{AB} \qquad \qquad \hat{\Omega}_{AB}^{-1}
 \end{array} \tag{1.41}$$

Запутывающие соотношения на полиномы ХОМФЛИ

как проекция трехмерной картинка.

Оператор Ω_{AB} непрерывно перемещает

Оператор точки A и B на места друга

в некотором выбранном направлении вместе с прилежащими разрезами.

Далее в работе [76] предлагается интерпретировать описанное выше соответствие между свойствами полиномов узлов и конформных блоков Весса-Зумино-Виттена следующим образом:

- Исходный узел можно разрезать (топологическими) сферами с четырьмя проколами на “элементарные составляющие”, которые при проекции переходят в прямые и обратные перекрестки либо в пары непересекающихся отрезков на диаграмме узла.
- Полином ХОМФЛИ данного узла есть свертка отвечающих “элементарным составляющим” конформных блоков, определенная в теории Весса — Зумино — Виттена — Новикова.

Теория Весса-Зумино-Виттена, на самом деле, является калибровочной теорией. Применительно к конформным блокам это означает, что такой соответствует проколотой сфере, с каждым проколом на которой связано с некоторым представлением калибровочной группы теории. Соотношение (1.41) имеет место в случае когда со всеми четырьмя проколами связаны фундаментальные представления группы $SU(N)$ — это случай (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ. В работе [76] затем предлагается следующее обобщение установленного соответствия:

- Всевозможные раскрашенные полиномы ХОМФЛИ есть свертки конформных блоков Весса — Зумино — Виттена — Новикова для всевозможных представлений калибровочной группы.

Хотя сама по себе описанная конструкция является полностью неявной, на ее основе был развит один из наиболее эффективных на данный момент методов вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ [6, 7, 8, 9, 12, 16]. Для нас эта конструкция интересна, прежде всего тем, что она, на самом деле, дает представление полинома узла в том же духе, что и обсуждавшаяся выше (см. разд. 1.2, 1.2.2) конструкция Кауффмана [55], а также непосредственно использованной нами \mathcal{R} -матричный подход [1] (см. разд. 2.2). Более того, операторы перестановки проколов на сфере оказываются ничем иным как квантовыми \mathcal{R} -матрицами — хотя в двух подходах используются различные явные выражения для этих матриц и получаются различные представления для полиномов узлов [6].

1.3.2. Конформные блоки Весса — Зумино — Виттена — Новикова и классические поля в теории Черна — Саймонса

Наконец, раскрашенный полином ХОМФЛИ получает в работе [76] интерпретацию в рамках трехмерной калибровочной теории Черна — Саймонса [84] посредством следующего утверждения:

- Конформные блоки Весса-Зумино-Виттена на сфере с проколами находятся во взаимно-однозначном соответствии с формами нулевой кривизны, регулярными во внутренней относительно сферы области пространства за исключением соединяющих проколы отрезков — такие формы являются решениями классических уравнений в теории Черна — Саймонса источниками поля на этих отрезках.

В работе [76] также содержится рассуждение, связывающее последнее утверждение с утверждением в начале раздела. Вопрос о *явном* вычислении вильсоновского среднего в теории Черна — Саймонса о сравнении полученной при этом величины с полиномом ХОМФЛИ оставлен, однако, в работе [76] открытым. Этот вопрос стал предметом многочисленных дальнейших и до сих пор незавершенных исследований [19, 17, 18, 20, 21, 22, 23], и мы немного коснемся его в следующем разделе.

1.3.3. Полином ХОМФЛИ как пертурбативное вильсоновское среднее в лагранжевой теории Черна — Саймонса: постановка задачи.

Как мы вкратце обсудили выше, в работе [76] установлено точное, но *неявное* соответствие между полиномами ХОМФЛИ и вильсоновскими средними в теории Черна — Саймонса. В работах [20, 19, 17, 18, 20, 21, 22, 23] излагается противоположный подход: то же самое соответствие устанавливается *явно*, но лишь *пертурбативно*. А именно, ряд теории возмущений для вильсоновского среднего в теории Черна — Саймонса поочленно сравнивается в этих работах с разложением полинома ХОМФЛИ в ряд по некоторому параметру (пропорциональному логарифму формальной переменной q) — параметр интерпретируется при этом как постоянная Планка. Наибольших продвижений в таком подходе удалось достичь с помощью формализма интеграла Концевича [85], который связывают с разложением по теории возмущений вильсоновского среднего в так называемой голоморфной калибровке [20, 21, 22, 23, 86]. Замечательным образом, при этом получается еще одно представление для полинома узла в духе статистической модели — последнее известно как *комбинаторное представление* интеграла Концевича [86].

1.3.4. Вильсоновские средние в теории Черна — Саймонса.

Мы начнем наше обсуждение с того, что напомним определения основных необходимых величин, а также немного обсудим их физический смысл. Более подробное обсуждение физических свойств теории Черна — Саймонса можно найти в обзоре [3].

Действие Черна — Саймонса. В рамках лагранжева подхода теория Черна — Саймонса задается трехмерным действием

$$\int d^3x \text{Tr}_{\text{adj}} \left\{ \epsilon^{ijk} \left(A_i \partial_j A_k + \frac{2gi}{3} A_i A_j A_k \right) \right\} \equiv S_{CS}, \quad (1.42)$$

где $A_\mu(x)$ — трехмерное калибровочное поле. Действие (1.42) возникает, в частности, из топологического члена в теории Янга-Миллса, интеграл от которого по четырехмерному евклидовому пространству (имеется в виду, что произведен поворот Вика $t \equiv i\tau$)

$$S_{CS} = \int dx^4 \text{Tr} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (1.43)$$

сводится к интегралу (1.43) по бесконечно удаленной трехмерной сфере. Действие Черна — Саймонса зависит от метрики, но зависит от ее сигнатуры — в этом смысле теория называется *топологической* [17, 84].

Хотя стандартное классическое действие Янга-Миллса и не содержит топологического члена, такой член мог бы возникать в результате квантовых непертурбативных поправок [38]. С другой стороны, величина действия Янга-Миллса — если она конечна, для чего для каждой точки бесконечно удаленной сферы должно существовать калибровочное преобразование, обращающее в нуль потенциал в этой точке — ограничена снизу величиной действия Черна — Саймонса для произвольного потенциала, связанного с исходным глобальным (то есть определенным во всем четырехмерном пространстве) калибровочным преобразованием. В результате само-дуальные поля, то есть поля, удовлетворяющие уравнениям *первого* порядка $F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, в силу которого $S_{YM} = S_{CS}$, дают частные решения классических уравнений Янга-Миллса [37]. Интерес к такого рода решениям возник после работы А.Полякова [38], где было показано, что учет аналогичных решений в модельной задаче (в решеточной двумерной электродинамике) приводит к эффекту конфайнмента.

Классические уравнения движения в теории Черна — Саймонса

$$\epsilon^{ijk} (\partial_j A_k + [A_j, A_k]) = \epsilon^{ijk} F_{jk} = 0 \quad (1.44)$$

суть уравнения нулевой кривизны. Как уже упоминалось выше, решения таких уравнений могут быть глубоко нетривиальными: примеры таковых можно получить с помощью инстантонных решений в теории Янга-Миллса [37].

Вильсоновские линии и петли. Вильсоновская линия — это наблюдаемая величина, которая вводится в калибровочной теории [36]. В *абелевой* калибровочной теории *вильсоновская линия* по определению равна

$$W^{ab}[A(x), \gamma] \equiv \exp \int_\gamma dx^\mu A_\mu(x^\mu). \quad (1.45)$$

Эта величина дает изменение фазы волновой функции частицы, прошедшей по линии γ , взаимодействуя с калибровочным полем A .

В *неабелевой* калибровочной теории *вильсоновская линия* вводится с помощью понятия упорядоченной экспоненты. Экспонента от неабелева калибровочного поля \vec{A} , упорядоченная по пути γ , по определению есть оператор, удовлетворяющий уравнению

$$W(t + \delta t) = W(t) (1 + \vec{A}(t) \cdot \vec{n}(t) \delta t), \quad (1.46)$$

где на кривой γ выбран параметр t , $\vec{n}(t)$ касательный вектор к кривой в данной точке. Определение неабелевой вильсоновской линии при этом записывают как

$$W[A(x), \gamma] \equiv \text{Pexp} \left(\int_{0[\gamma]}^t \vec{A}(s) \cdot \vec{n}(s) ds \right) \equiv \text{Pexp} \left(\int_{\gamma} \vec{A} \cdot dl \right). \quad (1.47)$$

Эта величина представляет собой конечное калибровочное преобразование, которому подвергается мультиплет частиц материи, прошедший по линии γ , взаимодействуя с неабелевым калибровочным полем A .

Для замкнутого контура γ след вильсоновской линии называется *вильсоновской петлей*. Эта величина калибровочно инвариантна и не зависит от выбора начальной точки на контуре. Таким образом, вильсоновская петля есть наблюдаемая величина в (вообще говоря) неабелевой калибровочной теории.

Вильсоновские средние. В квантовой теории поля рассматривают также понятие вильсоновского среднего. В теории возмущений эта величина определена как среднее от разложения в ряд вильсоновской линии:

$$\langle W_{\gamma}(A) \rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g^k \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}} dx_k^{i_1} \int_{\tilde{x}}^{x_1} dx_k^{i_2} \dots \int_{\tilde{x}}^{x_{k-1}} dx_k^{i_1} \langle A_{i_k}(x_k) \dots A_{i_2}(x_2) A_{i_1}(x_1) \rangle,$$

где все интегрирования производятся по линии γ .

Вильсоновские средние в теории Черна — Саймонса. Замечательное свойство теории Черна — Саймонса состоит в том, что она сводится к абелевой теории путем выбора специальной калибровки (см. [76], а также разд. 1.3.7). В результате этого вильсоновское среднее в теории Черна — Саймонса, на самом деле, равно вильсоновской линии, вычисленной на решении классических уравнений движения в соответствующей калибровке. Поскольку классические уравнения в теории Черна — Саймонса суть уравнения нулевой кривизны, их интегралы от полей — их решений по замкнутым контурам не изменяются при непрерывных преобразованиях контура и, тем самым являются топологическими инвариантами.

1.3.5. Гауссово число зацеплений как вклад второго порядка в вильсоновское среднее в абелевой теории Черна — Саймонса.

Первое соображение в пользу обсуждаемой квантово-полевой интерпретации полиномов узлов касается известной интегральной формулы для числа зацеплений кривых C_1 и C_2 в трехмерном пространстве [87]:

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \oint_{C_1} dy^i \oint_{C_2} dx^j \frac{\epsilon^{ijk} (x^k - y^k)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (1.48)$$

А именно, ядро интеграла оказывается функцией Грина классических уравнений движения для действия

$$\frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{kij} A_k \partial_i A_j, \quad (1.49)$$

которое есть действие абелевой теории Черна — Саймонса [17] (по модулю некоторых тонкостей, которые обсуждаются, например, в прил. В к работе [88]). Интеграл (1.48) тогда возникает как член второго порядка в разложении абелева вильсоновского среднего (1.45) в ряд теории возмущений.

Однако, если быть точнее, член второго порядка в выражении (1.45) представляет собой расходящийся повторный интеграл от функции Грина по одному и тому же контуру. Откладывая

обсуждение этого явления до разд. 1.3.6, мы заметим здесь, что в случае *зацепления* вклад в этот интеграл перекрестного члена

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{cross}}^{(2)}(\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2) \rangle &= \left\langle \oint_{\mathcal{C}_2} dx^i \oint_{\mathcal{C}_1} dy^j A_i(x) A_j(y) \right\rangle = \oint_{\mathcal{C}_2} dx^i \oint_{\mathcal{C}_1} dy^j \langle A_i(x) A_j(y) \rangle = \\ &= \oint_{\mathcal{C}_2} dx^i \oint_{\mathcal{C}_1} dy^j G_{ij}(z) \end{aligned} \quad (1.50)$$

хорошо определен и как раз воспроизводит интеграл (1.48) для гауссова числа зацеплений.

1.3.6. Инварианты узлов как инварианты зацеплений: оснащение с точки зрения теории Черна — Саймонса

Теперь вернемся к вопросу о расходящемся повторном интеграле в ряду теории возмущений для вильсоновского среднего. Принятое доопределение пертурбативного черн — саймонсовского вильсоновского среднего состоит в том, что этот интеграл регуляризуют, сдвигая второй из контуров интегрирования относительно первого. Интеграл при этом принимает вид хорошо определенного перекрестного члена (1.50) и дает число зацеплений исходного и сдвинутого контуров [17]. Это число входит как новый параметр в регуляризованную теорию.

На первый взгляд кажется, что для регуляризации описанным выше образом последующих вкладов в вильсоновское среднее, в которые содержат четыре, шесть, и т.д. интегрирований по одному и тому же контуру потребуется вводить новые и новые контура. Это, однако, не так, поскольку теория Черна — Саймонса сводится к квадратичной теории путем выбора соответствующей калибровки [76], после чего среднее становится гауссовым, и все члены старшего порядка в ряду теории возмущений выражаются через член второго порядка по теореме Вика [36].

Аналогичный подход применим и в неабелевой теории [17]. Поскольку интегралы в ряду теории возмущений для вильсоновского среднего теперь упорядочены вдоль контура интегрирования (1.48), вместе со сдвигом контура необходимо ввести правило отождествления точек исходного и сдвинутого контуров. Это правило можно представить геометрически: вводя на исходном контуре нормальное векторное поле (4). Такая процедура и называется оснащением узла [17]. Замечательным образом, изучаемые нами полиномы узлов оказываются инвариантами оснащенных узлов в рамках своего независимого определения в терминах статистической модели (см. разд. 1.2, 1.2.2).

Можно показать, что зависимость вильсоновских средних от оснащения сводится к появлению множителя — степени числа зацеплений исходного и сдвинутого контуров, показатель которой также содержит множитель, зависящий от представления калибровочной группы, в котором вычисляется вильсоновское среднее [23].

1.3.7. Интеграл Концевича как ряд теории возмущений для черн — саймонсовского вильсоновского среднего в голоморфной калибровке.

Наиболее точное на сегодняшний день утверждение о связи полиномов ХОМФЛИ с пертурбативной лагранжевой теорией Черна — Саймонса основано на формализме интеграла Концевича [85] и основано на двух свойствах такового:

- Интеграл Концевича дает интегральное представление для разложенного в формальный ряд полинома ХОМФЛИ.
- Интеграл Концевича можно почленно связать с рядом теории возмущений для вильсоновского среднего теории Черна — Саймонса в голоморфной калибровке.

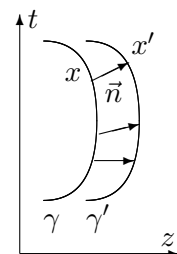


Рис. 4. Оснащение узла с точки зрения в неабелевой теории Черна — Саймонса

Ниже мы кратко сформулируем идею соответствия интеграла Концевича ряду теории возмущений для вильсоновского среднего. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работах [19, 20, 21, 22, 23, 86, 88].

Полином ХОМФЛИ как производящая функция для инвариантов Васильева Как мы уже упоминали, интерпретация полиномов узлов как наблюдаемых в пертурбативной ТКТП существенным образом опирается на интегральное представление для определенных инвариантов узлов. Эти инварианты известны в теории узлов как *инварианты Васильева* [56, 57], а соответствующее представление — как *интеграл Концевича* [57, 85].

Уже для отдельных инвариантов Васильева интегральное представление обладает рядом характерных свойств, существенных для квантово-полевой интерпретации этих инвариантов. Но гораздо важнее, что из бесконечное множество представленных в интегральном виде инвариантов Васильева можно собрать в производящую функцию, структура которой в точности повторяет структуру вильсоновского среднего в теории Черна — Саймонса, определенного как ряд теории возмущений (при сравнении рядов формальную переменную производящей функции следует отождествить с постоянной Планка).

С другой стороны, известно, что полином ХОМФЛИ $\mathcal{H}(A, q)$ при подстановке $q = e^{2\pi\hbar}$, $A = e^{2\pi N\hbar}$ с последующим разложением в ряд по параметру \hbar оказывается *точно такой же* производящей функцией для инвариантов Васильева, что и интеграл Концевича [89]. Такое соответствие можно рассматривать как отождествление полинома ХОМФЛИ с *пертурбативно* определенным вильсоновские средним в теории Черна — Саймонса.

Более того, известно, что интеграл Концевича — именно как ряд в целом — разлагается в тензорную свертку определенных “элементарных составляющих”, обнаруживая при этом ту же структуру, что и \mathcal{R} -матричное [1, 24] (см. разд. 2.2) и ВЗВН [6, 7, 8, 9, 12, 16] представления для полинома ХОМФЛИ [23, 57, 86]. Хотя и не известно явного соответствия между “элементарными составляющими” первого представления с таковыми последних двух, схожесть структур разложения позволяет предположить, что \mathcal{R} -матричное и ВЗВН представления для полинома ХОМФЛИ также можно отождествить с рядами теории возмущений для черн — саймонсовского вильсоновского среднего — при этом ряды теории возмущений, отвечающие различным представлениям для полинома ХОМФЛИ могли бы отличаться выбором калибровки в действии Черна — Саймонса [23, 24, 86].

Структура интеграла Концевича. Подробное обсуждение свойств интеграла Концевича [85] можно найти в обзоре [57]. Здесь мы перечислим те свойства, которые существенны для соотношения интеграла с рядом теории возмущений для вильсоновского среднего:

- Интеграл Концевича в целом представляет из себя бесконечный формальный ряд интегралов возрастающих (четных) кратностей.
- Каждый из кратных интегралов является *t-упорядоченным*, т.е., интегрирование производится по области, где переменные удовлетворяют условию $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.
- Каждый из кратных интегралов входит в ряд с определенным *групповым множителем*, представляющим из себя некоторую свертку генераторов заданной алгебры Ли в заданном ее представлении.
- Все интегралы кратности $2g$ вместе со своими групповыми множителями можно естественным образом занумеровать с помощью *спариваний* $2g$ элементов.
- Ядро каждого из кратных интегралов разлагается в произведение *Функций Грина* определенного дифференциального уравнения.
- Ряд в целом можно представить в виде тензорной свертки “элементарных составляющих”.

Например, ряд в интеграле Концевича может начинаться с 1, продолжаться 6-ю интегралами типа

$$\sum_{a,b} \text{Tr } T_a T_a \int_a^b dt \left\{ \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)}}_{\langle 12 \rangle} + \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_3(t)}{z_1(t) - z_3(t)}}_{\langle 13 \rangle} + \dots \right\}, \quad (1.51)$$

за которыми будут следовать $\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + \left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right) = 6 + 12 + 36 = 54$ двойных интеграла трех различных типов

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b} \text{Tr} \int_a^b dt \int_a^t ds \left\{ \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_1(s) - \dot{z}_2(s)}{z_1(s) - z_2(s)}}_{\langle 12 \rangle \langle 12 \rangle} 2T_a T_b T_a T_b + \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_1(s) - \dot{z}_3(s)}{z_1(s) - z_3(s)}}_{\langle 1123 \rangle} \left(\underbrace{T_a T_b T_a T_b}_{\langle 12 \rangle \langle 13 \rangle} + \underbrace{T_a T_b T_b T_a}_{\langle 13 \rangle \langle 12 \rangle} \right) + \right. \\ & \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_3(s) - \dot{z}_4(s)}{z_3(s) - z_4(s)}}_{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} T_a T_a T_b T_b + \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_3(s) - \dot{z}_4(s)}{z_3(s) - z_4(s)}}_{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle} T_a T_a T_b T_b + \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_3(s) - \dot{z}_4(s)}{z_3(s) - z_4(s)}}_{\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle} T_a T_a T_b T_b + \\ & \left. \dots \right\}, \end{aligned}$$

и т.д. Структура ряда в целом совпадает при этом с разложением в ряд Гауссова среднего

$$\text{P} \prod_{k=1}^4 \left(1 + \int dz A^a(z_k) T_a + A^a(z_k) A^b(z_k) T_a T_b + \dots \right), \quad (1.52)$$

так что двойные интегралы (1.51) отвечают членам второго порядка, четырехкратные (1.52) — четвертого, и т.д. Метки под каждым членом в (1.51) и (1.52) указывают соответствующие средние (например, знак $\langle 1234 \rangle$ отвечает $\langle A(z_1)A(z_2)A(z_3)A(z_4) \rangle$) и спаривание (например, знак $\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle$ отвечает $\langle A(z_1)A(z_2) \rangle \langle A(z_3)A(z_4) \rangle$). Символ P в (1.52) означает, что все кратные интегралы в разложении упорядочены согласно номерам переменных интегрирования, например,

$$\text{P} \iint dz_1 dz_2 \equiv \int_a^b dz_2 \int_a^{z_2} dz_1. \quad (1.53)$$

Одна из проявляющихся здесь тонкостей состоит в том, что члены интеграла Концевича (1.51, 1.52), как и члены старших порядков, воспроизводят лишь *регулярную* часть разложения для вильсоновского среднего, которое, вообще говоря, содержит также *сингулярные* члены, типа спаривания $\langle 11 \rangle \langle 22 \rangle$, приходящего из коррелятора $\langle 1122 \rangle$. Опусканию этих членов можно, тем не менее, придать определенный смысл с помощью операции *оснащения* контура интегрирования [57, 23], на которой основан стандартный способ регуляризации вильсоновского среднего (см. разд. 1.3.6).

1.4. Постановка задачи

1.4.1. Цель работы

Нашей задачей было научиться считать раскрашенные полиномы ХОМФЛИ с помощью формулы разложения по характерам, а также прояснить разные тонкости касательно самой формулы.

1.4.2. Исходное положение дел

- Для полинома ХОМФЛИ было известно представление в виде разложения по характерам неприводимых представлений группы $SU(N)$ в специальной точке [90]

$$S_Q^*(A, q) = S_Q \left\{ t_k = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}} \right\} = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}}, \quad (1.54)$$

а именно [26]:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}}(A, q) = \left(A^{-|T_1| - |T_2| - \dots} q^{-4\kappa_{T_1} - 4\kappa_{T_2} - \dots} \right)^{w_{\mathcal{B}}} \sum_{Q \vdash T_1 \otimes T_2 \otimes \dots} h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{B}, Q}(q) S_Q^*(A, q), \quad (1.55)$$

где

$$\kappa_Q = \sum_{(i,j) \in Q} (i - j), \quad (1.56)$$

а $w_{\mathcal{B}}$ — разность числа прямых и обратных пересечений (см. рис. 8) в косе \mathcal{B} .

- Коэффициенты h в (1.55) непосредственно зависят не от узла \mathcal{K} , а от косы \mathcal{B} , в виде замыкания которой представлен узел. Кроме того, каждый h зависит от представления Q , на характер которого он умножается в (1.55). Этот коэффициент [26] равен упорядоченному вдоль косы произведению \mathcal{R} -матриц, отвечающих всем пересечениям косы α и спроектированных на неприводимое представление Q :

$$h_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}^{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha \in \mathcal{B}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{R}_{\alpha} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}. \quad (1.57)$$

- В то время как единичный оператор, действующий на тензорном произведении представлений, можно разложить в сумму

$$\begin{aligned} \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes (\text{Id}_{T_i} \otimes \text{Id}_{T_{i+1}}) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} &= \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \left(\sum_j \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j} \right) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} = \\ &= \sum_{j,k} \mathcal{P}_{T_1 \otimes \dots \otimes Q_j \otimes \dots \otimes T_m | Q'_k} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

для матрицы \mathcal{R}_{α} , соответствующей пересечению α прядей i и $i + 1$ косы \mathcal{B} , с которыми связаны представления T_i и T_{i+1} , было известно аналогичное спектральное разложение [91]:

$$\begin{aligned} \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{R}_{T_i \otimes T_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} &= \\ = \text{Id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \left(\text{perm} \sum_j q^{\kappa_{Q_j} - \kappa_{T_1} - \kappa_{T_2}} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j} \right) \otimes \dots \otimes \text{Id}_{T_m} &= \\ = \text{perm} \sum_{j,k} q^{\kappa_{Q_j} - \kappa_{T_1} - \kappa_{T_2}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes \dots \otimes Q_j \otimes \dots \otimes T_m | Q'_k} \mathcal{P}_{T_i \otimes T_{i+1} | Q_j}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Величины $q^{\kappa_{Q_j} - \kappa_{T_1} - \kappa_{T_2}}$ в (1.59) суть собственные значения \mathcal{R} -матрицы, действующей на тензорном произведении пространств представлений T_1 и T_2 [92].

- Было известно, что с помощью процедуры каблирования [64], которая основана на операции коумножения для \mathcal{R} -матриц, коэффициенты разложения по характерам раскрашенного полинома ХОМФЛИ выражаются через таковые для простого полинома ХОМФЛИ каблированной косы $\mathcal{B}^{|T_1| + |T_2| + \dots}$ как [93]

$$\begin{aligned} h_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}^{\mathcal{B}} &= \left(A^{-|T_1| - |T_2| - \dots} q^{-2\kappa_{T_1} - 2\kappa_{T_2} - \dots} \right)^{w_{\mathcal{B}}} \cdot \\ \cdot \text{Tr}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha \in \mathcal{B}^{|T_1| + |T_2| + \dots}} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{P}_{\square | T_1 | \otimes \square | T_2 | \dots | T_1 \otimes T_2 \dots} \mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q} \mathcal{R}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.4.3. Проблемы

Матричные элементы \mathcal{R} -матриц и коэффициенты Рака для квантовой группы $U_q(SL_n)$

- Из величин, входящих в выражение (1.59), в литературе в явном виде были доступны только собственные значения матриц \mathcal{R}_α , но *не* матричные элементы проекторов. Этого было недостаточно для вычисления коэффициентов в разложении (1.55) по формуле (1.57), поскольку отвечающие различным пересечениям косы матрицы \mathcal{R}_α , вообще говоря, не коммутируют и как следствие не имеют общего базиса из собственных векторов.
- Если с тремя соседними прядями косы связаны представления T_1 , T_2 и T_3 алгебры Ли \mathfrak{g} , то матрицы перехода между базисами из собственных векторов матриц $\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)}$ и $\mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3}$ суть матрицы $U_{T_1T_2T_3}$ и $U_{T_2T_1T_3}^\dagger$, составленные из коэффициентов Рака для соответствующей квантовой группы $U_q(\mathfrak{g})$ [74]:

$$\begin{array}{ccc} (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3}} & (T_2 \otimes T_1) \otimes T_3 \\ \downarrow U_{T_1T_2T_3} & & \downarrow U_{T_2T_1T_3} \\ T_3 \otimes (T_2 \otimes T_1) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)}} & T_3 \otimes (T_1 \otimes T_2) \end{array}$$

$$\mathcal{R}_{T_3(T_2T_1)} = U_{T_1T_2T_3} \mathcal{R}_{(T_1T_2)T_3} U_{T_2T_1T_3}^\dagger \quad (1.61)$$

- На момент начала нашей работы явные формулы для элементов матриц $U_{T_1T_2T_3}$ (коэффициентов Рака) были доступны в литературе лишь для квантовой группы $U_q(su_2)$ (хотя и для произвольных ее представлений) — в этом случае выражения для коэффициентов являются прямолинейным обобщением соответствующих формул для простой группы $SU(2)$ [35, 74]: последние получаются из первых путем простой подстановки.
- Несмотря на то, что в настоящий момент перечень доступных явных выражений для коэффициентов Рака существенно расширился [13, 33, 94], и нет существенных препятствий для его расширения по мере необходимости, выражения для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ через собственные значения \mathcal{R} -матриц и коэффициенты Рака (каковые являются, с точностью до не влияющих на ответы для полиномов нормировочных множителей, рациональными функциями от параметра q квантовой группы) оказываются недостаточно эффективными для явных вычислений раскрашенных полиномов ХОМФЛИ и не имеют достаточно ясной структуры для анализа общих свойств этих полиномов — поэтому формулы (1.55, 1.57) как нуждались, так и продолжают нуждаться в дополнительных упрощениях.

Процедура каблирования

- При вычислении раскрашенного полинома методом каблирования необходимо вычислять соответствующий простой полином для косы, содержащей в $\mathcal{B}^{|T_1|+|T_2|+\dots}$ раз больше прядей и в $\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} |T_i||T_{i+1}|$ раз больше пересечений, чем исходная — что приводит к очень быстрому усложнению формул с ростом числа клеток в диаграмме Юнга представления.
- При получения ответа также необходимы явные формулы для матричных элементов проекторов $\mathcal{P}_{T_1 \otimes T_2 \dots | Q}$, каковые к моменту начала работы также не были доступны в литературе — по крайней мере, в достаточно ясном анализе и удобном для вычислений виде.

1.4.4. Основное содержание проделанной работы

- В качестве первого шага мы явно вычислили коэффициенты Рака для группы $U_q(su_3)$ в случае $T_1 = T_3 = \square$ в (1.61), а затем предположили ответ для аналогичных коэффициентов в случае группы $U_q(su_N)$ [30].
- С помощью полученных коэффициентов Рака мы вычислили для ряда узлов расширенные (нераскрашенные) полиномы ХОМФЛИ, ранее недоступные в таблицах. Прделанное вычисление также послужило косвенной проверкой предполагаемого ответа для коэффициентов Рака, поскольку при замене таковых на иные рациональные функции от параметра квантовой группы q в ответе более не получается полином [30].
- Мы вычислили элементы самих матриц \mathcal{R}_α -матриц, отвечающих различным пересечениям косы, со всеми прядями которой связаны фундаментальные представления квантовой группы $U_q(su_N)$ с произвольным N и сделали наблюдение, что эти элементы допускают удобное единообразное описание в терминах путей на графе Юнга [32, 34].
- Выражения для элементов \mathcal{R}_α -матриц, изначально полученные с помощью предполагаемого ответа для коэффициентов Рака и для квантовой группы $U_q(su_N)$, мы в последствии вывели: расположение ненулевых элементов в матрицах с помощью спектрального разложения (1.59) для \mathcal{R} -матрицы, а явный вид самих элементов — с помощью уравнения Янга — Бакстера [34].
- Далее мы заметили, что наличие проектора в формуле (1.60) для вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ с помощью процедуры каблирования удобно учесть путем замены исходного графа Юнга на его подграф, в вершинах которого на соответствующем уровне стоит желаемое представление [32, 34].
- На основе сделанных наблюдений мы написали компьютерную программу, которая позволила вычислять коэффициенты разложения по характерам полиномов ХОМФЛИ, а также раскрашенные полиномы ХОМФЛИ за пределами известных таблиц [31, 34]. Кроме того, мы прояснили некоторые тонкости: как насчет самих полиномов, так и насчет использованных выражений для таковых [34].
- Развитую в ходе исследования технику применения \mathcal{R} -матричного формализма мы использовали, чтобы сформулировать ряд гипотез о свойствах полиномов Хованова — Рожанского [95, 96, 97, 98, 99], установленных нами эмпирическим путем [100]

1.5. Основные результаты

- Представление для коэффициентов разложения по характерам полинома ХОМФЛИ произвольного узла или зацепления в терминах \mathcal{R} -матриц сведено к кратной сумме по путям на графе Юнга.
- С помощью полученного представления явно вычислены коэффициенты разложения по характерам неприводимых представлений полиномов ХОМФЛИ для всех узлов с 9 пересечениями, представимых в виде замыканий 5-прядных кос.
- С помощью процедуры каблирования раскрашенный полином ХОМФЛИ представлен в виде кратной суммы по путям на подграфе графа Юнга.
- С помощью полученного представления явно вычислены раскрашенные полиномы ХОМФЛИ
 - для первого симметрического представления — для всех узлов не более чем 7 пересечениями, представимых в виде замыканий 4-прядных кос;

— для первого несимметричного представления — для всех узлов не более чем с 8 пересечениями, представимых в виде замыканий 3-рядных косы.

- Предложена гипотеза об \mathcal{R} -матричном представлении для размерностей пространств в вершинах гиперкуба разрешений диаграммы узла в модифицированной конструкции Хованова для вычисления суперполиномов узлов.

1.6. Основные публикации

- 1) Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // Nucl. Phys. — 2013 — Vol. B868 — P. 271-313.
- 2) Knot polynomials in the first non-symmetric representation / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, // Nucl. Phys. — 2014 — Vol. B882 — P. 171-194.
- 3) Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux/ A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov and And. Morozov // Adv. in high energy phys. — 2013 — Vol. 2013, no. 931830.
- 4) Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ // 178 (2014) 3-68, ТМФ — 2014 — Т. 178 — С. 1-58
- 5) Anokhina A., Morozov A. Towards R-matrix construction of Khovanov-Rozansky polynomials. I. Primary T-deformation of HOMFLY // JHEP. —2014 Vol. 07, no. 063.

2. Представление полинома узла в терминах \mathcal{R} -матриц

Метод вычисления полинома узлов, который составляет наш основной интерес, основан на частном случае такой конструкции как статистическая модель для полинома узла (см. разд. 1.2, 1.2.2). Существенная особенность этого метода состоит в использовании в качестве оператора перекрестка такого объекта как *квантовая \mathcal{R} -матрица* (см. разд. 2.2), а также в соответствующей процедуре усреднения (см. разд. 2.3) — поэтому метод иногда называется \mathcal{R} -матричным формализмом.

Непосредственно в нашей работе мы использовали вариант \mathcal{R} -матричного формализма, в рамках которого полином узла строится по представлению узла в виде замыкания косы. Такой подход, на самом деле, может быть сформулирован независимо от статистической модели: в терминах теории представлений группы перестановок. Такая формулировка, с одной стороны, дает дополнительную иллюстрацию обсуждаемого метода, а с другой стороны открывает широкие возможности для физических приложений полиномов узлов — поскольку позволяет интерпретировать инвариант узла как наблюдаемую в любой модели, в которой так или иначе действует группа перестановок. По этим причинам, перед тем как перейти к описанию непосредственно метода \mathcal{R} -матриц, мы уделим некоторое внимание методу группы перестановок. При этом мы не будем явным образом апеллировать к понятию \mathcal{R} -матрицы — однако, как мы убедимся в частных случаях в разд. 2.7, основные величины, через которые будет выражаться полином узла, окажутся именно \mathcal{R} -матрицами.

2.1. Полином узла как взвешенный след элемента группы кос

Метод вычисления полиномов узлов, который мы обсудим в настоящем разделе, основан на соответствии между группой кос и группой перестановок: первая, как известно [51], есть расширение последней (см. далее). В общих чертах метод сводится к построению матричного представления группы кос с помощью известных представлений группы перестановок. При этом потребуется

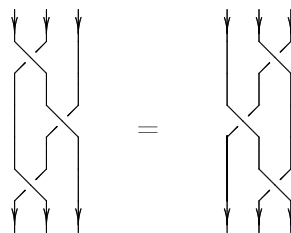
Таблица 4. Генераторы группы кос (стл. 1) удовлетворяют части соотношений алгебры Гекке (стл.3), которая есть обобщение группы перестановок (стл.2) и, в свою очередь, допускает обобщение (стл.4)

Группа кос	Группа перестановок	Алгебра Гекке	“Раскрашенная” алгебра Гекке
$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$ $b_i b_j = b_j b_i, i-j \neq 1$	$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, i-j \neq 1$ $\sigma_i^2 = \text{Id}$ \Downarrow $(\sigma_i - 1)(\sigma_i + 1) = 0$	$h_i h_{i+1} h_i = h_{i+1} h_i h_{i+1}$ $h_i h_j = h_j h_i, i-j \neq 1$ $h_i^2 = \text{Id} + (q - q^{-1})h_i = 0$ \Downarrow $(h_i - q)(h_i + q^{-1}) = 0$	$H_i H_{i+1} H_i = H_{i+1} H_i H_{i+1}$ $H_i H_j = H_j H_i, i-j \neq 1$ $H_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k H_i^k$ \Downarrow $\prod_{k=1}^m (H_k - \lambda_k) = 0$

также рассмотреть “промежуточный” между этими группами объект: *алгебру Гекке* [75] — группа кос является расширением также и этой алгебры, а сама алгебра является расширением группы перестановок (см. таб. 4).

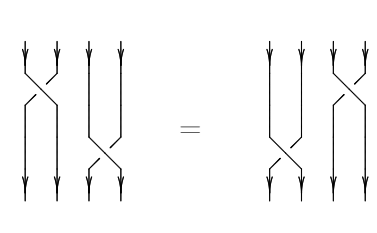
Тожественные преобразования кос

I



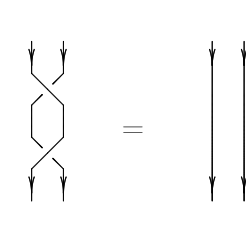
$b_1 b_2 b_1 = b_2 b_1 b_2$

II



$b_1 b_3 = b_3 b_1$

III

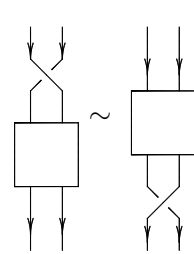


$b_1 \tilde{b}_1 = 1$

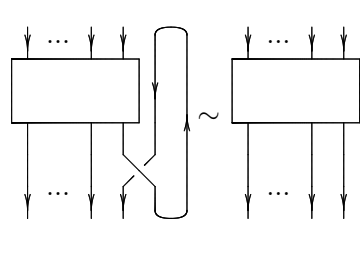
(2.1)

Тожественные преобразования замыканий кос

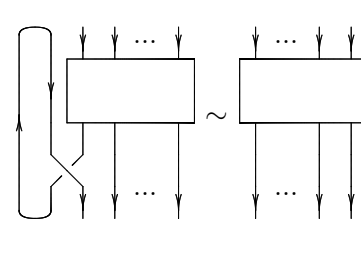
I



II



II'



(2.2)

Перед тем как перейти к изложению метода вычисления инвариантов узлов, напомним определение группы кос и группы перестановок.

Каждый генератор σ_i ($i = \overline{1, n}$) **группы перестановок** $n+1$ элементов отвечает перестановке элементов номер i и $i+1$ в последовательности. Перемножить две перестановки значит произвести их одну за другой. Групповая единица дается тривиальной перестановкой, при которой все элементы остаются на своих местах.

В свою очередь, каждый генератор b_i ($i = \overline{1, n}$) **группы кос** из $n+1$ прядей отвечает переплетению прядей номер i и $i+1$ в некотором сечении косы. Перемножить две косы значит заплести одну за другой на одних и тех же прядях. Групповая единица дается тривиальной косой, состоящей из $n+1$ параллельных прядей.

Генераторы каждой из групп удовлетворяют соответствующим **групповым соотношениям** (стр. 1 и 2 таб. 4, соответственно). Соотношения группы перестановок обеспечивают формальное равенство двух произведений генераторов, реализующих одну и ту же перестановку. Соотношения группы кос отвечают непрерывным преобразованиям кос в трехмерном пространстве (2.1). При этом, согласно теореме Артина [51], всякое такое преобразование можно представить как некоторую последовательность элементарных преобразований (2.1 I, II) проекции косы на плоскость.

Перейдем теперь к алгоритму построения инварианта узла. Прежде всего следует

Шаг 2.1. *Представить узел в виде замыкания косы,*

что возможно для произвольного узла [51]. Далее необходимо построить представление группы кос, то есть

Шаг 2.2. *Сопоставить каждому генератору b_i группы кос матрицу B_i , а всякому произведению генераторов — произведение соответствующих матриц.*

Нетривиальность этого шага в том, чтобы обеспечить выполнение групповых соотношений (стл. 1 таб. 4). Для этого и привлекают упомянутое выше соответствие между группой кос и группой перестановок. А именно, поскольку генераторы группы перестановок удовлетворяют также соотношениям группы кос, всякое представление группы перестановок одновременно окажется представлением группы кос. Все неприводимые представления группы перестановок при этом известны: они находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа элементов (диаграммами Юнга с соответствующим числом клеток) [35, 101] (см. далее).

К сожалению, “лишнее” соотношение группы перестановок (последние две строки стл. 2 таб. 4) оказывается слишком сильным, чтобы получить интересные инварианты узлов с помощью представлений этой группы. Известно, однако, однопараметрическое расширение группы перестановок, известное как алгебра Гекке [69]. Генераторы алгебры Гекке удовлетворяют соотношениям в стл. 3 таб. 4, которые также включают соотношения группы кос. Представления алгебры Гекке находятся во взаимно-однозначном соответствии с представлениями симметрической группы и сводятся к ним при частном значении параметра $q = 1$ (за исключением случаев $q^n = 1$ для некоторого целого n [74]). Это, в частности, означает, что представления алгебры Гекке также нумеруются разбиениями (диаграммами Юнга), и что их размерности равны размерностям соответствующих представлений группы перестановок. Более того, известен явный вид матриц генераторов алгебры Гекке во всевозможных неприводимых представлениях (эти матрицы выписаны, например, в [75]). Мы, однако, не будем использовать здесь соответствующих формул, а вместо этого получим нужные матрицы, записывая и решая групповые соотношения “в лоб” в частных случаях (разд. 2.1.1, 2.1.2). При этом мы, однако, используем в качестве анзаца тот факт, что

Шаг 2.3. *Размер матриц, отвечающих переплетениям прядей в косе равен размерности одного из неприводимых представлений группы перестановок числа элементов, равного числу прядей в косе.*

Если при этом

Шаг 2.4. *Матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос,*

то

Шаг 2.5. *Произведение матриц, отвечающее данной косе, одинаково для всех изотопных кос.*

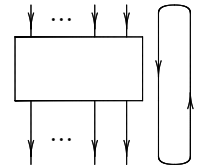


Рис. 5. Замыкание косы со “свободной” прядью: значение инварианта для несвязного объединения зацеплений равно произведению значений инвариантов его компонент

Этого, однако, недостаточно, для того, чтобы получить инвариант узла. А именно, необходимо позаботиться о том, чтобы полученная величина была инвариантна также относительно тождественных преобразований *замыканий* кос. Согласно теореме Маркова [51], всякое такое преобразование можно представить в виде последовательности тождественных преобразований кос (2.1), а также преобразований на рис. 2.2 I, II (в частности, таким образом можно получить преобразование на рис. 2.2 III). Чтобы получить инвариант преобразования на рис. 2.2 I, достаточно

Шаг 2.6. Взять след соответствующего косе произведения матриц.

Добиться инвариантности относительно преобразования на рис. 2.2 II существенно труднее. Для этого потребуется дополнительная “процедура усреднения” — вроде тех, что мы рассмотрели в примерах из разд. 1.2. Мы не будем сразу приводить формулировку этой процедуры в общем случае, но начнем с простейших примеров, в каждом из которых

Шаг 2.7. Запишем линейную комбинацию следов матриц, отвечающих различным представлениям данного элемента группы кос, с неопределенными коэффициентами,

после чего

Шаг 2.8. Будем искать эти коэффициенты как решение системы уравнений, следующей из условия на рис. 2.2 II.

Искомый инвариант узла, помимо перечисленных выше условий, собственно, топологической инвариантности, обладаем еще одним свойством, а именно

- Значение инварианта для несвязного объединения зацеплений равно произведению значений инвариантов его компонент (рис. 5).

Из этого условия также следует бесконечное число соотношений на неопределенные коэффициенты в процедуре усреднения, которыми следует дополнить систему уравнений, следующих из условия на рис. 2.2 II.

2.1.1. Двупрядные косы

В случае двупрядной косы (рис. 6) нужно, согласно сформулированным выше правилам, рассмотреть все неприводимые представления группы перестановок двух элементов x и y . Таковых два [101, 35], и их можно реализовать как симметричную и антисимметричную формальные линейные комбинации двух ($2! = 2$) перестановок:

$$\frac{1}{2}(xy + yx), \quad \frac{1}{2}(xy - yx). \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться, что оба представления одномерные: при единственной нетривиальной перестановке $xy \rightarrow yx$ каждое из выражений (2.3) остается пропорциональным самому себе, с коэффициентами 1 и -1 , соответственно. Для обозначения этих представлений используются разбиения (диаграммы Юнга): [2] для симметрической комбинации, [11] — для антисимметрической.

Анзац **Шага 2.3** в данном случае сводится к тому, чтобы рассмотреть две (по числу неприводимых представлений) матрицы 1×1 , и поставить элементы которые мы обозначим λ и μ . Никаких ограничений на эти элементы соотношения группы кос (2.1) не накладывают, так что мы сразу переходим к **Шагу 2.2**. Таковой состоит в поиске обладающей свойствами на рис. 2.2 II и 5 линейной комбинации

$$\lambda^n \chi_2 + \mu^n \chi_{11}, \quad (2.4)$$

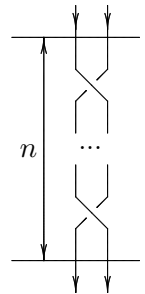


Рис. 6. Двупрядная коса с n пересечениями

где λ^n и μ^n как следы соответствующих матриц 1×1 , связанные на **Шагах** 2.2 и 2.6 с содержащей n пересечений двупрядной косой, а отвечающие χ_2 и χ_{11} — подлежащие определению коэффициенты. Можно непосредственно показать, что среди бесконечного числа уравнений, следующих из условий 2.2 и 5, всего два линейно независимых, в качестве которых можно выбрать, например, уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Id}^{(2)} &\sim \text{Id}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(1)} &\Rightarrow \chi_1^2 &= \chi_2 + \chi_{11}, \\ h_1^{(2)} &\sim \text{Id}^{(1)} &\Rightarrow \chi_1 &= \lambda\chi_2 + \mu\chi_{11}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя решение системы (2.5) в выражение (2.4), находим, что двупрядной косе с n пересечениями соответствует величина

$$H(\mathcal{B}^{(2)}; \lambda, \mu) = \lambda^n \frac{(\mu\chi_1 - 1)\chi_1}{\mu - \lambda} + \mu^n \frac{(\lambda\chi_1 - 1)\chi_1}{\lambda - \mu}, \quad (2.6)$$

которая, согласно теоремам Артина и Маркова, есть инвариант узла-замыкания этой косы. Полученный инвариант с точностью до замены переменных равен *полиному ХОМФЛИ* торического узла или зацепления типа $[2, n]$ (см. далее) [75].

2.1.2. Трехрядные косы

В этом случае необходимо рассмотреть группу перестановок из трех элементов x, y и z . Всего имеем $3! = 6$ различных перестановок. Из их формальных линейных комбинаций можно составить два одномерных неприводимых представления: *симметрическое*

$$xyz + yxz + xzy + yzx + zxy + zyx \quad (2.7)$$

и *антисимметрическое*

$$xyz - yxz - xzy + yzx + zxy - zyx \quad (2.8)$$

а всякая пара выражений (связанных перестановкой двух последних элементов в каждом мономе)

$$\{a(xy + yx)z + b(yz + zy)x + c(zx + xz)y, a(xzy + yzx) + b(yxz + zxy) + c(zyx + xyz)\}, \quad (2.9)$$

$$a + b + c = 0,$$

образует базис в двумерном неприводимом представлении, которое иногда называют *смешанным* — как можно непосредственно убедиться, действуя на эти элементами генераторами группы, в данном случае отвечающие перестановкам первой и второй пары элементов в каждом мономе. Все неприводимые представления группы перестановок из трех элементов исчерпываются перечисленными случаями [35, 101]. Для обозначения симметрического и антисимметрического неприводимых представлений используются разбиения (диаграммы Юнга) [3] и [111], а для обозначения смешанного представления — разбиение [21].

Анзац **Шага 2.3** на этот раз предписывает рассмотреть три пары матрицы: соответственно, по числу неприводимых представлений и генераторов группы (последние отвечают пересечениям двух пар соседних прядей в трехрядной косе). Пары матриц, отвечающие одномерным симметрическому и антисимметрическому представлениям, по-прежнему имеют размер 1×1 — так что групповые соотношения не ограничивают значений их элементов α и β . Однако для пары матриц 2×2 , отвечающей двумерному смешанному представлению, условие (2.2 I) дает нетривиальное уравнение

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где в выбранном базисе матрица, отвечающая пересечению двух первых прядей, диагональна. Уравнение (2.10), прежде всего, означает, что собственные значения обеих матриц совпадают:

$$h_{1|21}h_{2|21}h_{1|21} = h_{2|21}h_{1|21}h_{2|21} \Rightarrow (h_{1|21} - \lambda)h_{2|21}h_{1|21} = h_{2|21}h_{1|21}(h_{2|21} - \lambda) \Rightarrow \det(h_{1|21} - \lambda) = \det(h_{2|21} - \lambda)$$

Это уравнение также позволяет выразить диагональные элементы, а также произведение внедиагональных элементов второй матрицы через эти собственные значения

$$a = \frac{\gamma^2}{\gamma - \beta}, \quad bc = \frac{\beta\gamma(\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2)}{(\beta - \gamma)^2}, \quad d = \frac{\beta^2}{\beta - \gamma}. \quad (2.12)$$

Мы дополнительно потребуем, чтобы недиагональная матрица была симметричной ($b = c$) — что всегда достигается соответствующей перенормировкой векторов выбранного базиса. В результате имеем:

$$\begin{aligned} h_{21|1} &= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (h_{21|1})^{-1} = \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \\ h_{21|2} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2}{\gamma - \beta} & \frac{\sqrt{\beta\gamma(\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2)}}{\beta - \gamma} \\ \frac{\sqrt{\beta\gamma(\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2)}}{\beta - \gamma} & \frac{\beta^2}{\gamma - \beta} \end{pmatrix}, \\ (h_{21|2})^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\gamma(\gamma - \beta)} & \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{(\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2)}{\beta\gamma}} \\ \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{(\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2)}{\beta\gamma}} & \frac{\gamma}{\beta(\gamma - \beta)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Линейная комбинация, которую нужно составить на **Шаге 2.7**, теперь содержит три (по числу неприводимых представлений) неопределенных коэффициента χ_3 , χ_{21} и χ_{111} . Можно непосредственно убедиться, что число линейно независимых однородных линейных уравнений, которые следуют из условий (на рис. 2.2 II, 5) и связывают эти коэффициенты с произведениями $\chi\chi_2$ и $\chi\chi_{11}$ аналогичных коэффициентов для одно- и двухрядных кос, равно 5, если все собственные значения α , β , γ и δ матриц пересечений прядей попарно различны, и уменьшается на один всякий раз, когда пара собственных значений совпадает — в последнем случае система имеет нетривиальное решение относительно $\{\chi_3, \chi_{21}, \chi_{111}, \chi\chi_2, \chi\chi_{11}\}$. Дальнейших выводов относительно собственных значений и неопределенных коэффициентов условия топологической инвариантности сделать не позволяют, и в этот момент вводится **дополнительное** условие

$$\lambda = \alpha = \beta, \quad \mu = \gamma = \delta, \quad (2.14)$$

из которого следуют следующие соотношения на между коэффициентами в операции усреднения для одно-, двух- и трехрядных кос:

$$\chi\chi_2 = \chi_3 + \chi_{21}, \quad \chi\chi_{11} = \chi_{21} + \chi_{111}. \quad (2.15)$$

Выполнение этих соотношений позволяет придать коэффициентам χ теоретико-групповой смысл (который мы обсудим в разд. 2.7), что и мотивирует сделанное выше предположение. После этого оставшиеся независимые уравнения позволяют выразить трехрядные коэффициенты через одно- и двухрядные, а также через двухрядные собственные значения:

$$\chi_3 = \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\lambda^2\chi + \mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)\lambda\mu}, \quad \chi_{21} = \frac{\chi(\lambda\chi - 1)(\mu^2\chi + \lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)\lambda\mu}, \quad (2.16)$$

и

$$\chi_{111} = \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\lambda\chi - 1)}{\lambda\mu}.$$

В результате произвольной трехрядной косе $b_1^{a_1} b_2^{b_1} \dots b_1^{a_k} b_2^{b_k}$ (напомним, что b_1 и b_2 — два генератора группы трехрядных кос, отвечающие переплетениям первой пряди со второй и второй с третьей, соответственно) соответствует выражение

$$H \left(b_1^{a_1} b_2^{b_1} \dots b_1^{a_k} b_2^{b_k} \right) = \lambda^n \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\lambda^2\chi + \mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)\lambda\mu} + \mu^n \frac{\chi(\lambda\chi - 1)(\mu^2\chi + \lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)\lambda\mu} + \\ + \text{Tr} \prod_k (h_{1|21})^{a_k} (h^{2|21})^{b_k} \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\lambda\chi - 1)}{\lambda\mu}. \quad (2.17)$$

где матрицы h даются выражениями (2.13) при условии (2.14), а коэффициенты χ — выражениями (2.16). В силу теорем Артина и Маркова, эта величина есть инвариант узла-замыкания трехрядной косы, который заменой переменных приводится к полиному ХОМФЛИ для этого узла (см. далее) [75].

2.2. Использование \mathcal{R} -матриц в качестве операторов перекрестков в модели Кауффмана

2.2.1. Понятие квантовой \mathcal{R} -матрицы

В разд. 2.1 мы рассмотрели элементы алгебры Гекке, обсудив при этом, как с помощью этих элементов можно реализовать некоторую симметрию, обобщающую перестановочную симметрию. Приведенные в разделе матричные представления для элементов алгебры Гекке на самом деле представляют собой частные случаи *квантовых \mathcal{R} -матриц* [51, 53, 2, 74]. А именно, оператор, удовлетворяющий соотношениям группы перестановок (стр. 1, 2 стл. 2 таб. 4), но, вообще говоря, *не* (стр. 3 стл. 2 таб. 4), по определению есть \mathcal{R} -матрица. При этом \mathcal{R} -матрица может также удовлетворять либо (стр. 3 стл. 2 таб. 4), либо более общему уравнению на собственные значения (стр. 3 стл. 3, 4 таб. 4).

Как мы обсудили выше, соотношения группы перестановок (стр. 1, 2 стл. 2 таб. 4) можно соотнести с преобразованиями диаграммы узла в стр. 1 и 2 таб. 3, соответственно. Эти соотношения, в свою очередь, порождают операторные уравнения в правом столбце таблицы. Четырехиндексный оператор, удовлетворяющий этим соотношениям есть другое представление \mathcal{R} -матрицы. Уравнения (стр. 3 стл. 2 таб. 4, стр. 2 таб. 3), представленное в одной из этих двух эквивалентных форм называется *уравнением Янга — Бакстера* [51] и хорошо известно в теории квантовых групп [74] и интегрируемых систем [2].

Здесь мы не будем останавливаться на подробном описании \mathcal{R} -матрицы в терминах *квантовых групп* [74]. Вместо этого мы ограничимся перечислением некоторых свойств \mathcal{R} -матрицы, существенных для использования ее при построении полинома узла:

Квантовая \mathcal{R} -матрица

- Строится явным образом по всякому представлению Q всякой группы Ли G
- Зависит от формальной переменной q (которая называется *квантовым* параметром)
- Удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера, которое связано с преобразованием диаграммы узла III движением Рейдемейстера

Простейшее семейство квантовых \mathcal{R} -матриц отвечает фундаментальным представлениям серии групп $SU(N)$; в некотором базисе компоненты этих \mathcal{R} -матриц имеют вид

$$R_{ii}^{ii} = q; \quad R_{ij}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad R_{ji}^{ij} = q - q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (2.18)$$

Такие \mathcal{R} -матрицы удовлетворяют всем трем соотношениям алгебры Гекке (стл. 3 таб. 4), и, как мы убедимся в примере из разд. 2.7, в определенном базисе воспроизводят матричное представление

для таковых из разд. 2.1. Можно также убедиться, что для ненулевых элементов обратного (в смысле **Шага 2.14** оператора) имеют место выражения

$$R_{ii}^{ii} = q^{-1}; \quad R_{ij}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad R_{ji}^{ij} = -q + q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq N. \quad (2.19)$$

С помощью семейства (2.18) решений уравнения Янга — Бакстера можно получить \mathcal{R} -матричное представление для простых (нераскрашенные) полиномов ХОМФЛИ.

2.2.2. Свертка \mathcal{R} -матриц как инвариант разрезанной диаграммы узла

Мы начнем с повторения первых шагов построения полинома узла методом модели Кауффмана (см. разд. 1.2), на этот раз сформулировав их способом, особенно удобным для дальнейшего изложения.

Прежде всего,

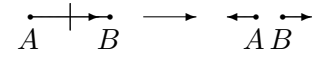


Рис. 7. Разрезание ребра на диаграмме узла

Шаг 2.9. Узлу соответствует диаграмма узла,

определение которой дано в разд. 1.2. Теперь мы перейдем от диаграммы узла к *разрезанной* диаграмме узла, а именно

Шаг 2.10. Разрежем некоторые ребра на диаграмме узла так, что разрезанная диаграмма будет представлением набора кривых без самопересечений.

Разрезать внутреннее ребро, направленное от вершины A к вершине B значит заменить это ребро парой ребер: входящим в вершину A и выходящим из вершины B (см. рис. 7).

Соответствующее разрезание диаграммы узла можно выполнить следующим образом. Первый разрез сделаем на произвольном ребре. Далее будем следовать по ребрам диаграммы в выбранном на них направлении, на каждом перекрестке выбирая отрезок — продолжение только что пройденного на исходной кривой (т.е., на рис. 8 ребро k есть продолжение ребра i , а ребро l — ребра j). Следующий разрез сделаем прежде, чем первый раз снова попасть на уже пройденное ребро. Затем процедура повторяется до тех пор, пока мы не вернемся к первому разрезу. В случае зацепления описанную процедуру разрезания следует произвести для диаграммы каждой компоненты зацепления в отдельности. Примеры получающихся в результате разрезанных диаграмм узла приведены на рис. 11 и 3.

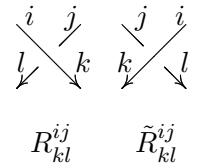


Рис. 8. Прямое и обратное пересечение

После завершения процедуры

Шаг 2.11. Каждому ребру разрезанной диаграммы дается номер, причем номера ребер, сходящихся в перекрестке и принадлежащих проекции одного и того же отрезка исходной кривой (пары i, k и j, l на рис. 8), одинаковы.

В результате имеем набор направленных пронумерованных ломанных, а всякий перекресток на исходной диаграмме узла теперь соответствует пересечению пары таковых и, таким образом, паре чисел — номеров ломанных. Следующие два шага состоят в том, что

Шаг 2.12. Ломанной номер α на разрезанной диаграмме узла соответствует векторное пространство \mathcal{L}_α ,

и

Шаг 2.13. Прямому пересечению (рис. 8, слева) ломанных α и β соответствует линейный оператор $S^{(\alpha, \beta)}$ на пространстве $\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_\beta$.

Компоненты $S_{kl}^{(\alpha,\beta)ij}$ этого оператора имеют по четыре тензорных индекса: два нижних $i \in \mathcal{L}_\alpha$ и $j \in \mathcal{L}_q$, бегущих в пространстве-оригинале и связанных с входящими ребрами, и два верхних $k \in \mathcal{L}_\alpha$ и $l \in \mathcal{L}_q$, бегущих в пространстве-образе и связанных с выходящими ребрами. При этом левый индекс в каждой паре соответствует верхнему относительно плоскости проекции отрезку исходной кривой. Тот же оператор можно понимать как действующий на пространстве $\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_\beta$ — тогда его компоненты нумеруются двумя мультииндексами: $S_J^{(\alpha,\beta)I}$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} i \swarrow \searrow j \\ \\ b \\ \\ k \swarrow \searrow l \end{array} \\
 \sum_{a,b} R_{ab}^{ij} \tilde{R}_{kl}^{ab}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} i \swarrow \\ \\ k \swarrow \\ \\ k \swarrow \\ \\ k \swarrow \end{array} \\
 \delta_k^i \delta_l^j
 \end{array}
 , \tag{2.20}$$

Наконец, в завершение общей части конструкции,

Шаг 2.14. Обратному пересечению (рис. 8, справа) ломанных α и β соответствует оператор $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$, обратный к оператору $S^{(\alpha,\beta)}$ на пространстве $\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_q$.

Иными словами, операторы $S^{(\alpha,\beta)}$ и $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$ по определению удовлетворяют соотношениям стр. 3 таб. 3.

Как только всякое ребро диаграммы отмечено индексом,

Шаг 2.15. Разрезанной диаграмме соответствует свертка (до сих пор неопределенных) операторов $S^{(\alpha,\beta)}$ и $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$, причем такие свертки будут тождественно совпадать для всякой пары диаграмм, связанных последовательностью вторых движений Рейдемейстера (стр. 3 таб. 2).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} j \\ \\ a \\ \\ n \end{array} \\
 R_{ba}^{ji} R_{cm}^{bk} R_{nl}^{ac}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \\ \\ c \\ \\ n \end{array} \\
 R_{ac}^{ik} R_{bn}^{jc} R_{ml}^{ba}
 \end{array}
 , \tag{2.21}$$

Теперь мы перейдем, собственно, к R -матричной части конструкции, а именно, примем следующий анзац:

Шаг 2.16. Пространство \mathcal{L}_α есть пространство представления Q_α группы Ли G ,

и

Шаг 2.17. Оператор $S^{(\alpha,\beta)}$ квантовая \mathcal{R} -матрица $\mathcal{R}_{Q_\alpha, Q_\beta, G}(q)$ для данной группы и данного представления.

Теоретико-групповое описание таких \mathcal{R} -матриц можно найти в [74]⁴. Здесь мы лишь еще раз отметим, что в теории представлений для всякой такой \mathcal{R} -матрицы известно *явное*, хотя и весьма сложное выражение [24, 74]. Подставляя соответствующее выражение на место всех операторов перекрестков, получим, что

Шаг 2.18. С разрезанной диаграмме узла с n входящими и n выходящими ребрами связан тензор типа (n, n) , зависящий от группы Ли G , ее представления Q , а также от формального параметра q .

⁴Строго говоря, под G следует понимать не группу Ли, а соответствующую квантовую группу, однако мы не как правило не будем этого уточнять, поскольку между представлениями обеих групп имеется взаимно однозначное соответствие — до тех пор, пока параметр q не равен целому корню из единицы [74].

Более того, по определению \mathcal{R} -матрицы,

Шаг 2.19. *Всякой паре диаграмм, связанных комбинацией II (стр. 3 таб. 3) и III (стр. 2 таб. 3) движениями Рейдемейстера, отвечает один и тот же тензор.*

В последующей части раздела мы сосредоточимся на частном случае **фундаментального** представления группы $SU(N)$, сохраняя N в качестве свободного параметра. Полученные при этом инварианты узлов окажутся — после подстановки $A = q^N$ и аналитического продолжения до произвольных комплексных значений A — (нераскрашенными) полиномами ХОМФЛИ (см. разд. 1.2.1 и 1.2). Хотя те же полиномы узлов можно с равным успехом получить в рамках многих других подходов (в частности, с помощью тех, что обсуждались разд. 1.2.4 и 2.1), мы выбрали именно этот простейший случай в качестве иллюстрации метода \mathcal{R} -матриц, который, как уже упоминалось, также позволяет вычислять раскрашенные полиномы ХОМФЛИ узлов [13, 27, 28, 31, 33, 34, 70] и полираскрашенных полиномы зацеплений (если выбрать старшие представления $SU(N)$ в качестве представлений Q) [10, 11, 14, 15, 16, 34, 102], как и полиномы Кауффмана [55]: простые [24, 103] и раскрашенные [104] (если рассмотреть группу $SO(N)$ вместо группы $SU(N)$), и даже более экзотические инварианты узлов [105] (если рассматривать исключительные группы — к сожалению, описание таких случаев литературе ограничивается единичными ответами).

2.3. Вставка обратных операторов в качестве процедуры усреднения

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} i \downarrow \\ a \\ \curvearrowright \\ k \downarrow \\ b \end{array} \\
 \sum_{a,b} \mathcal{M}_a^b R_{bk}^{ia} = \delta_k^i
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ k \end{array}
 \quad (2.22)$$

Инвариантности описанной R -матричной свертки также относительно первого движения Рейдемейстера (2.22) можно добиться, дополнив конструкцию еще одним элементом [1, 24, 72]. А именно, связанную с (2.22) свертку R -матрицы по паре индексов следует осуществлять при помощи нового двухиндексного оператора \mathcal{M} , который мы будем называть *обратным оператором*. Равенство (2.22) есть определение элемента оператора. А именно, если подставить в (2.22) анзац, состоящий в том, что в выбранном базисе (где справедливы выражения (2.18) для элементов \mathcal{R} -матрицы) оператор \mathcal{M} диагонален:

$$\mathcal{M}_j^i = m_i \delta_j^i, \quad (2.23)$$

получится система линейных уравнений на ненулевые элементы оператора

$$m_i R_{ii}^{ii} + \sum_{j=i+1}^N m_j R_{ji}^{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad qm_i + (q - q^{-1}) \sum_{j=i+1}^N m_j = 1, \quad (2.24)$$

решение которой есть

$$\boxed{m_i = q^{2i-2N-1}, \quad i = 1, \dots, N.} \quad (2.25)$$

На самом деле необходимо ввести несколько, а именно четыре различных обратных оператора, отвечающих стягиванию четырех различных петель в таб. 2.26 (где $\tilde{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{R}^{-1}$). Соответствующие уравнения на (диагональные в выбранном базисе) обратные операторы вместе с их

решениями для диагональных элементов операторов приведены в таб. 2.26.

$\mathcal{M}_a^b R_{bk}^{ia} = \delta_k^i$	$\mathcal{M}_a^b R_{lb}^{aj} = \delta_l^j$	$\tilde{\mathcal{M}}_a^b \tilde{R}_{bk}^{ia} = \delta_k^i$	$\tilde{\mathcal{M}}_a^b \tilde{R}_{lb}^{aj} = \delta_l^j$
$m_i = q^{2i-2N-1}$	$m'_j = q^{-2i+1}$	$\tilde{m}_i = q^{2N-2i+1}$	$\tilde{m}'_i = q^{2i-1}$
$\mathfrak{m}_i = q^{2i-N-1}$	$\mathfrak{m}'_i = q^{N-2i+1}$	$\tilde{\mathfrak{m}}_j = q^{N-2i+1}$	$\tilde{\mathfrak{m}}'_i = q^{2i-N-1}$

(2.26)

2.4. Процедура оснащения в \mathcal{R} -матричном формализме

Теперь мы ожидаем, что

Шаг 2.20. Полная свертка оператора, полученного в результате шагов Шаги 2.9 — 2.19 с помощью соответствующих оборотных операторов сопоставит всякой диаграмме узла величину, сохраняющуюся при всех трех движениях Рейдемейстера (2.21, 2.20, 2.22) и, следовательно, в силу теоремы Рейдемейстера [51] являющуюся инвариантом узла.

При этом мы, однако, сталкиваемся с проблемой, которая проявляется уже в следующем простом примере.

Для двух диаграмм перекрученных окружностей на рис. 9 I и II перечисленные выше правила дают, соответственно, значения инварианта

$$\sum_{i,j,a,b} R_{ab}^{ij} \mathcal{M}_b^i \mathcal{M}_a^j = \sum_{i,j} R_{ji}^{ij} m_i m'_j = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{j=1}^N m'_j = \sum_{i=1}^N q^{-2i+1} = q^{-N} \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} \equiv q^{-N} [N] \quad (2.27)$$

и

$$\sum_{i,j,a,b} \tilde{R}_{ab}^{ij} \tilde{\mathcal{M}}_b^i \tilde{\mathcal{M}}_a^j = \sum_{i,j} \tilde{R}_{ji}^{ij} \tilde{m}_i \tilde{m}'_j = \sum_{i=1}^N \tilde{m}_i = \sum_{j=1}^N \tilde{m}'_j = \sum_{i=1}^N q^{2i-1} = q^N [N]. \quad (2.28)$$

в то время как обе диаграммы отвечают тривиальному узлу.

Более того, простая окружность, диаграмма которой не содержит перекрестков, требует одного разреза, в который с равным успехом можно вставить любой из четырех оборотных операторов — след вставленного оператора получится при этом в качестве значения соответствующего инварианта. Следы введенных нами операторов, однако, различны:

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^i = \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^i = q^{-N} [N], \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N \tilde{\mathcal{M}}_i^i = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathcal{M}}_i^i = q^N [N], \quad (2.29)$$

Ключом к разрешению проблемы, с которой мы столкнулись, может стать следующее наблюдение. Выражения (2.27) и (2.28) получены с помощью диаграмм узла с различным значением *относительного инварианта*: алгебраического числа пересечений w (число прямых минус число обратных — рис. 8). Эта величина сохраняется при II (2.20) и III (2.21) движениях Рейдемейстера, но увеличивается либо уменьшается на один при I движении (2.22), в зависимости от вида пересечения на стянутой петле. Ответы (2.27) и (2.28) совпадут после умножения обоих на q^{wN} , где $w = 1$ и $w = -1$ для диаграмм на рис. 9 I и II, соответственно. Это наблюдение не решает,

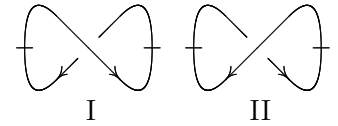


Рис. 9. Диаграммы-восьмерки: обе отвечают тривиальному узлу

однако, проблемы с простой окружностью, для которой $w = 0$. Таковой можно избежать путем следующей перенормировки оборотных операторов:

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{M} \equiv q^{-N} \mathcal{M}, \quad \text{and} \quad \mathcal{M}' \rightarrow \mathfrak{M}' \equiv q^{-N} \mathcal{M}'. \quad (2.30)$$

Полученные в результате матричные элементы приведены в последней строке таб. 2.26. Теперь все четыре следа (2.29) равны $[N]$, а (2.27) совпадает с (2.28), как и с ответом для простой окружности — при условии, что каждый из ответов дополнительно умножается на q^{-wN} с соответствующим w (то есть, на множитель *обратный* множителю выше). Вышеприведенные соображения могут послужить мотивацией для введения следующих правил:

Шаг 2.21. *Оборотные операторы нормируются так, что следа всех четырех равны между собой,*

и

Шаг 2.22. *Результат Шагов 2.9 — 2.19 умножается на q^{-wN} , где w — алгебраическое число пересечений на диаграмме узла, использованной при вычислении.*

Если следовать правилам выше, для обоих диаграмм на рис. 9 и диаграммы на рис. 10 получится одно и то же значение $[N]$ для инварианта тривиального узла. Произведенная перенормировка оборотных операторов, однако, нарушает условие инвариантности относительно I движения Рейдемейстера (2.22): правая часть равенства теперь содержит “лишний” множитель q^N — при стягивании петли типа рис. 2.26 I или II, либо q^{-N} — при стягивании петли типа рис. 2.26 —= III или IV. Подчеркнем, что при этом величина, которая связывается с диаграммой узла, инвариантностью относительно I движения Рейдемейстера *обладает* — это обеспечивается **Шагом 2.22.**

Поскольку петля на рис. 2.22 стягивается в трехмерном пространстве, появление нетривиального множителя в правой части соответствующего условия означает, что узел теперь снабжен дополнительной структурой. Эту структуру можно представить наглядно: заменив нить, на которой завязан узел, *лентой*. Для таких узлов первое движение Рейдемейстера не является тождественным преобразованием, поскольку приводит к перекручиванию ленты. Произведенная операция называется *оснащением узла* [51], и мы только что на элементарном примере продемонстрировали, что интересующие нас инварианты узлов, на самом деле, суть инварианты *оснащенных узлов*⁵ [1]. Удивительно это или нет, но к тому же заключению приводят попытки квантово-полевой интерпретации этих инвариантов [17] (см. также разд. 1.3.6).

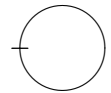


Рис. 10. Простая окружность — одна из диаграмм тривиального узла требует вставки оборотного оператора

2.5. Циклы на диаграмме узла и оборотные операторы

Нам осталось сформулировать правило вставки оборотных операторов в свертку \mathcal{R} -матриц, отвечающую произвольной диаграмме узла. Рецепт состоит в том, чтобы

Шаг 2.23. *Вставить оборотные операторы в некоторые ребра на диаграмме узла так, чтобы каждый простой цикл содержал в точности один оператор \mathcal{M} либо в оператор \mathcal{M}' , если этот цикл ориентирован по или против часовой стрелки соответственно.*

Под *простым циклом* мы понимаем здесь замкнутый путь на диаграмме узла, который может быть пройден вдоль направлений ребер, причем никакое ребро не проходится дважды. Такой подход (несколько подробнее изложенный в [88]) отличается от подхода, принятого в литературе

⁵На самом деле, оснащение узла состоит не просто в замене исходной кривой на ленту, но во введении нормального векторного поля вдоль этой кривой [69]. Мы уже немного коснулись этого вопроса в разд. 1.3.6.

[72], и хуже разработан, однако имеет ряд преимуществ. Хотя нам и не известно теоремы, из которой следовала бы эквивалентность обоих подходов, они приводят к одним и тем же выражениям для инвариантов узлов в широком классе случаев — в частности, формулу разложения по характерам (1.55), на которой основана основная часть нашей работы с равным успехом выводится обоими способами. Следует, однако, иметь ввиду ряд тонкостей, связанных с применением правилом (2.23) — одну из таких тонкостей мы обсудим в разд. 2.7.1.

2.6. Явное вычисление полинома ХОМФЛИ для узла-трилистника

После всех обсуждений, мы, наконец, готовы проделать явное вычисление обсуждаемого инварианта (полинома ХОМФЛИ) для простейшего узла: узла-трилистника. Если следовать описанному выше алгоритму, приняв во внимание все сделанные при его формулировке предположения, то диаграмме узла на рис. 11 соответствует выражение

$$q^{-wN} \sum_{\substack{i,j,k,l, \\ a,b,c,d}} R_{ai}^{kc} R_{bl}^{ia} R_{dj}^{lb} \mathfrak{M}_c^d \mathfrak{M}_k^j = q^{-3N} \sum_{\substack{i,k,l, \\ a,b,c}} R_{ai}^{kc} R_{bl}^{ia} R_{ck}^{lb} \mathfrak{m}_c \mathfrak{m}_k. \quad (2.31)$$

Из вида выражения (2.18) для элементов \mathcal{R} -матриц следует, что все ненулевые слагаемые в (2.31) относятся к одной из строк в таблице

	$k \ c$	$i \ a$	$l \ b$	$k \ c$	$c \ k$
	$a \ i$	$b \ l$	$c \ k$	$c \ k$	$c \ k$
$k = a = l = c = i = b$	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$
	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$	$i \ i$
$k = a = l < c = i = b$	$k \ i$	$i \ k$	$k \ i$	$k \ i$	$i \ k$
	$k \ i$	$i \ k$	$i \ k$	$i \ k$	$k \ i$
$k = a = b < c = i = l$	$k \ i$	$i \ k$	$i \ k$	$k \ i$	$i \ k$
	$k \ i$	$k \ i$	$i \ k$	$i \ k$	$k \ i$
$k = i = b < c = a = l$	$k \ l$	$k \ l$	$l \ k$	$k \ l$	$l \ k$
	$l \ k$	$k \ l$	$l \ k$	$l \ k$	$l \ k$
$k = a = b = c = i = l < k$	—				
$k = i = b = c = a = l < k$	—				
$k = i = l = c = a = b < k$	—				
$k = i = l < c = a = b$	$k \ a$	$k \ a$	$k \ a$	$k \ a$	$a \ k$
	$a \ k$	$a \ k$	$a \ k$	$a \ k$	$a \ k$

(2.32)

Собирая вместе все перечисленные выше выражения и подставляя в них матричные элементы из (2.18), получаем

$$\begin{aligned} H_N^{31} &= q^{-3N} \left\{ \sum_{i=1}^N R_{ii}^{ii} R_{ii}^{ii} R_{ii}^{ii} \mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_i + \sum_{\substack{i,k=1, \\ i < k}}^N \left(3R_{ik}^{ik} R_{ik}^{ik} R_{ki}^{ik} + R_{ik}^{ki} R_{ik}^{ki} R_{ik}^{ki} \right) \mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_k \right\} \equiv \\ &\equiv q^{-3N} \{ q^3 \alpha_N + (3(q - q^{-1}) + (q - q^{-1})^3) \beta_N \} = q^{-3N} \{ q^3 (\alpha_N + \beta_N) - q^{-3} \beta_N \}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где через \mathfrak{m} обозначены перенормированные согласно **Шагу 2.21** элементы обратных операторов, а также введены обозначения

$$\alpha_N \equiv \sum_{i=1}^N (\mathfrak{m}_i)^2, \quad \beta_N \equiv \sum_{\substack{i,k=1, \\ i < k}}^N \mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_N + \beta_N = \sum_{\substack{i,k=1, \\ i \leq k}}^N \mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_k. \quad (2.34)$$

Эти величины, как показывает их непосредственное вычисление по формулам из таб. 2.26, есть квантовые размерности, соответственно, антисимметрического и симметрического представлений

группы $SU(N)$ [74] (см. также разд. 1.2.4):

$$\begin{aligned}\beta_N &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} q^{2i+2j-2N-2} = \frac{[N][N-1]}{[2]} = \chi_{11}, \\ \alpha_N + \beta_N &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} q^{2i+2j-2N-2} = \frac{[N][N+1]}{[2]} = \chi_2.\end{aligned}\tag{2.35}$$

В результате получаем выражение

$$H_N^{3_1}(N, q) = q^{-3N} \left\{ q^3 \frac{[N][N+1]}{[2]} - q^{-3} \frac{[N][N-1]}{[2]} \right\},\tag{2.36}$$

которое допускает аналитическое продолжение к произвольным значениям N путем простой замены $q^N \rightarrow A \in \mathbb{C}$, которое, после деления на значение инварианта для тривиального узла $[N] \equiv \frac{A-A^{-1}}{q-q^{-1}}$ (см. разд. 2.3) воспроизводит известный ответ для полинома ХОМФЛИ узла-трилистника [58] (где $a = A^{-1}$ и $z = q - q^{-1}$),

$$\mathcal{H}_N^{3_1}(A, q) = \frac{A^{-3}}{[2]} \left\{ q^3 \frac{Aq - A^{-1}q^{-1}}{q - q^{-1}} - q^{-3} \frac{Aq^{-1} - A^{-1}q}{q - q^{-1}} \right\} = A^{-2}(q^2 + q^{-2}) - A^{-4}.\tag{2.37}$$

2.6.1. Зеркальная симметрия

Диаграмма на рис. 11 I при замене всех перекрестков на обратные переходит в диаграмму на рис. 11 II. Вычисление инварианта для такой диаграммы практически буквально повторяет вычисление выше: единственная разница состоит в замене \mathcal{R} -матриц и оборотных операторов \mathfrak{M} на обратные \mathcal{R} -матрицы и операторы \mathfrak{M} , соответственно. Матричные элементы первых даются выражениями (2.19), а матричные элементы последних приведены в последней строке таб. 2.26, и, как можно убедиться, все эти величины получаются из соответствующих элементов операторов \mathcal{R} и \mathfrak{M} путем замены $q \rightarrow q^{-1}$. Легко проверить, что ответ (2.36) для полинома узла при такой замене *не* сохраняется, даже с точностью до множителя — что отвечает топологической *неэквивалентности* узла-трилистника своему зеркальному отражению (рис. 11 I и II).

Заметим также, что обращение ориентации на диаграмме узла (fig. 11 III) на ответ не влияет вовсе: так и должно быть, поскольку старая и новая диаграммы отвечают проекциям одного и того же узла “на пол” и “на потолок”.

Полином ХОМФЛИ (нераскрашенный) и в общем случае обладает симметрией относительно зеркального отражения узла с одновременной заменой $q \rightarrow q^{-1}$ [69], в то время как для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ имеет вид более сложная симметрия, которая продемонстрирована, например, на многочисленных примерах в [34]. С точки зрения \mathcal{R} -матричного формализма описанные свойства полиномов ХОМФЛИ суть следствия так называемой зеркальной симметрии представлений квантовых групп [74].

2.7. Сведение \mathcal{R} -матричного представления к представлению через группу кос и разложение полиномов ХОМФЛИ по характерам

В настоящем разделе мы обсудим, каким образом метод использования \mathcal{R} -матриц в качестве операторов перекрестков (разд. 2.2 — 2.6) соотносится с методом представления группы кос (разд.

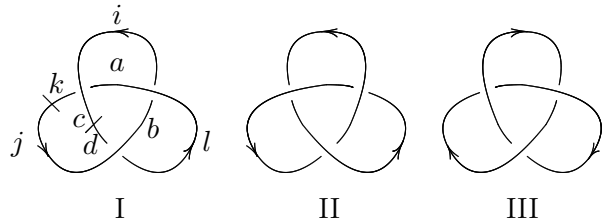


Рис. 11. I. Разрезанная диаграмма узла-трилистника. II. Диаграмма зеркально отраженного узла, I, *не эквивалентного* исходному. III. Диаграмма узла I с обратной ориентацией: проекция того же узла “на потолок” вместо “пола”

2.1). Грубо говоря, матричные представления для элементов алгебры Гекке, след от произведения которых вдоль косы дает инвариант узла в соответствующем подходе, суть блоки, на которые распадаются \mathcal{R} -матрицы для фундаментального представления группы $SU(N)$ в определенном базисе [1, 24]. Мы поясним это утверждение с помощью примеров, приведенных ниже. Но сначала мы обсудим одну тонкость касательно вставки оборотных операторов, которая оказывается существенной при переходе к представлению узла в виде косы.

2.7.1. Оборотные операторы и нулевое движение Рейдемейстера

Тонкость, о которой идет речь, состоит в том, что замыкания одной и той же косы по и против часовой стрелки требуют вставки *различных* оборотных операторов. Соответствующие значения инварианта узла должны, тем не менее, быть одинаковы: такие диаграммы связаны поворотом замыкающей дуги на 180° в трехмерном пространстве вокруг некоторой оси в плоскости проекции. Такое преобразование называется *нулевым движением Рейдемейстера*. Хотя теорема Рейдемейстера требует рассматривать это преобразование наряду с тремя, описанными выше [51], мы до сих пор им пренебрегали, поскольку связанные таким образом диаграммы не различаются как с точки зрения метода статистической модели, так и с точки зрения метода группы кос — до тех пор, пока на вводятся оборотные операторы. В разд.7.4.6 [88], продемонстрировано, что предлагаемая процедура вставки оборотных операторов согласуется с нулевым движением Рейдемейстера в случае двупрядных кос — хотя совпадение значений инварианта для двух эквивалентных замыканий уже в этом простейшем случае выглядит как нетривиальный факт. А именно, как можно убедиться непосредственным вычислением, соответствующий двупрядной косе с n пересечениями оператор (все индексы бегут от 1 до N),

$$h_{kl}^{ij} \equiv \mathcal{R}_{j_2 i_2}^{ij} \mathcal{R}_{j_3 i_3}^{i_2 j_2} \dots \mathcal{R}_{l_k}^{i_n j_n}, \quad (2.38)$$

при свертке по левой либо по правой паре индексов при помощи соответствующего оборотного оператора, отвечающей замыканию *одной* нити против либо по часовой стрелки, соответственно, дает оператор, пропорциональный единичному, причем коэффициент пропорциональности в обоих случаях равен нормированному (деленному на полином тривиального узла) полиному ХОМФЛИ:

$$h_{kl}^{ij} \mathfrak{M}_j^l = h_{kl}^{ij} \mathfrak{M}_k^i = \delta_l^k \left(\frac{q^n [N+1] + (-1)^n q^{-n} [N-1]}{[2]} \right) \equiv \delta_l^k \mathcal{H}_r^{2,n}. \quad (2.39)$$

Замыканию второй нити в одном из двух возможных направлений отвечают, таким образом, свертка оператора (2.39) с одним из двух различных оборотных операторов, что приводит к замене δ -символа на след выбранного оператора. С другой стороны, оба этих следа, как мы осуждали в разд. 2.4, должны давать значение инварианта для простой окружности (рис. 10) — что и имеет место при соответствующей нормировке этих операторов. В результате получаем верное значение ненормированного полинома ХОМФЛИ для обоих эквивалентных замыканий (слева и справа) косы на рис. 6:

$$h_{kl}^{ij} \mathcal{M}_j^l \mathcal{M}_i^k = h_{kl}^{ij} \mathcal{M}_j^l \mathcal{M}_i^k = \mathcal{M}_i^i \mathcal{H}_r^{2,n} = \mathcal{M}_i^i \mathcal{H}_r^{2,n} = [N] \mathcal{H}_r^{2,n} \equiv \mathcal{H}^{2,n}. \quad (2.40)$$

2.7.2. От свертки \mathcal{R} -матриц к разложению полинома ХОМФЛИ по характеристам: двупрядные косы

Как мы уже обсуждали в разд. 1.2.4, свертку операторов перекрестков, отвечающую произвольной диаграмме узла, можно переписать как произведение некоторых линейных операторов вдоль косы, при замыкании которой получается тот же узел. В случае двупрядной косы для этого достаточно попарно объединить четыре индекса оператора в два мультииндекса, после чего двум

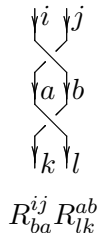


Рис. 12. “Последовательное соединение” пересечений

последовательным пересечениям на рис. 12 отвечает произведение матриц

$$\sum_{a,b} \mathcal{R}_{ba}^{ij} \mathcal{R}_{lk}^{ab} = \sum_{a,b} \mathcal{R}_{ab}^{ij} \mathcal{R}_{kl}^{ab} \equiv \sum_J R_J^I R_K^J, \quad (2.41)$$

где мы ввели обозначение

$$R_J^I \equiv R_{kl}^{ij} \equiv \mathcal{R}_{lk}^{ij} \quad (2.42)$$

для *скрученной* \mathcal{R} -матрицы. В частности, блоки исходной и скрученной матриц, в которых верхние и нижние индексы попарно различны и пробегает значения 1 и 2 имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(12)}^{(12)} &\equiv \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{12}^{12} & \mathcal{R}_{21}^{12} \\ \mathcal{R}_{12}^{21} & \mathcal{R}_{21}^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q - q^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{(12)}^{(12)} &\equiv \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{21}^{12} & \mathcal{R}_{12}^{12} \\ \mathcal{R}_{21}^{21} & \mathcal{R}_{12}^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - q^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Полином ХОМФЛИ замыкания произвольной двупрядной косы (рис. 6), в свою очередь, будет выражаться через степень скрученной матрицы, равную числу пересечений в косе. Для вычисления соответствующего выражения полезно определить собственные вектора и собственные значения скрученной матрицы, которые находятся непосредственно из определения как решение системы линейных уравнений (напомним, что нас интересуют собственные вектора на пространстве $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, которые суть тензора ранга два на пространстве \mathcal{L})

$$\sum_{i,j} R_{kl}^{ij} x_{ij} = \lambda x_{kl} \quad (2.44)$$

Исходя из вида выражений (2.18, 2.42) естественно искать решение системы (2.44) в виде тензора, компоненты которого имеют вид

$$x_{ij} = \alpha \xi_i \eta_j + \beta \xi_j \eta_i, \quad (2.45)$$

где ξ и η — произвольные вектора пространства \mathcal{L} . Подстановка (2.18, 2.42) и (2.45) в (2.44) дает

$$\sum_{i,j} R_{kl}^{ij} (\alpha \xi_i \eta_j + \beta \xi_j \eta_i) \stackrel{(2.18, 2.42)}{=} \alpha \xi_l \eta_k + ((q - q^{-1})\alpha + \beta) \xi_k \eta_l = \lambda (\alpha \xi_k \eta_l + \beta \xi_l \eta_k), \quad (2.46)$$

откуда получается, что всякий тензор с компонентами вида $x_{ij}^+ = q \xi_i \eta_j + \xi_j \eta_i$ является собственным вектором скрученной матрицы с собственным значением q , а всякий тензор с компонентами вида $x_{ij}^- = \xi_i \eta_j - q \xi_j \eta_i$ — с собственным значением $-q^{-1}$. Таким образом, выбирая в качестве ξ и η вектора некоторого базиса $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ в пространстве \mathcal{L} , получаем базис на пространстве $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, составленный из “симметрических” и “антисимметрических” собственных векторов скрученной матрицы, отвечающих $\frac{N(N+1)}{2}$ -кратно вырожденному собственному значению q и $\frac{N(N+1)}{2}$ -кратно вырожденному собственному значению $-1/q$, соответственно:

$$\begin{aligned} \lambda = q, \quad x_{(\alpha\beta)}^+ &= q x_\alpha \otimes x_\beta + x_\beta \otimes x_\alpha, \quad \beta = \overline{1, \alpha}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \\ \lambda = -1/q, \quad x_{(\alpha\beta)}^- &= x_\alpha \otimes x_\beta - q x_\beta \otimes x_\alpha, \quad b = \overline{1, \alpha}, \quad \alpha = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Согласно перечисленным в разд. 2.2 — 2.4 правилам, полином ХОМФЛИ замыкания двупрядной косы с n пересечениями дается выражением

$$H_N^n(q) \equiv \sum_{\substack{a,b,\dots,c,d \\ i,j,p,q}} R_{\alpha\beta}^{ij} \dots R_{pq}^{cd} \mathfrak{M}_i^p \mathfrak{M}_j^q = \sum_{\substack{A,\dots,C \\ I,P}} R_A^I \dots \mathcal{R}_P^C (\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M})_I^P = \text{Tr} \{ R^n \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \}, \quad (2.48)$$

При этом можно непосредственно убедиться, что оператор замыкания $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ коммутирует с оператором пересечения R , так что первый можно поместить в произвольное сечение косы, в на пространстве $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ выбрать базис из общих собственных векторов этих оператор. А именно, нетрудно убедиться, что, если в качестве базисных элементов x_α выбраны собственные вектора оператора \mathfrak{M} , то найденные нами собственные вектора (2.47) оператора R суть также собственные вектора оператора $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$, причем собственные значения одинаковы для соответственных “симметричного” и “антисимметричного” векторов:

$$\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} x_{\alpha\beta}^\pm = \mathfrak{m}_\alpha \otimes \mathfrak{m}_\beta x_{\alpha\beta}^\pm. \quad (2.49)$$

Таким образом, вставка в конец косы пары оборотных операторов снимает вырождение собственных значений R -матрицы, и мы приходим к формуле разложения по характеристам для случая двупрядной косы:

$$\begin{aligned} H_N^n(q) &= q^{-Nn} \left\{ \underbrace{q^n \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \leq \beta}}^N \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta}_{\lambda(x_{(\alpha\beta)}^+) = q} + \underbrace{(-q)^{-n} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta}_{\lambda(x_{(\alpha\beta)}^-) = -1/q} \right\} = \\ &= \frac{q^{-n(N-1)} [N]_q [N+1]_q}{[2]_q} + (-q)^{-n(N+1)} \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где мы учли оснащающий множитель q^{-2n} согласно **Шару** 2.22. Полином ХОМФЛИ $\mathcal{H}_N^n(A, q)$ узла или зацепления — замыкания двупрядной косы с n пересечениями получается из выражения выше путем аналитического продолжения, которое в данном случае сводится к формальной замене $q^N \rightarrow A$ всюду, после которой переменные A и q считаются независимыми. В частности, на месте квантовых чисел $[N]_q$, $[N+1]_q$ и $[N-1]_q$ возникают выражения $\frac{A-A^{-1}}{q-q^{-1}}$, $\frac{Aq-A^{-1}q^{-1}}{q-q^{-1}}$ и $\frac{Aq^{-1}-A^{-1}q}{q-q^{-1}}$, соответственно, так что квантовые размерности переходят в соответствующие полиномы Шура в специальной точке (1.54).

2.7.3. От свертки \mathcal{R} -матриц к разложению полинома ХОМФЛИ по характеристам: двупрядные косы

Как мы уже показали на примере из разд. 1.2.4, сведение R -матричной свертки к следу от произведения требует введения нескольких новых операторов. В частности, свертка \mathcal{R} -матриц, отвечающая двум последовательным пересечениям в трехрядной косе на рис. 13, переписется как произведение

$$B_{lmn}^{ijk} \equiv R_{lb}^{ij} R_{mn}^{bk} = R_{ab}^{ij} \delta_c^a \delta_l^c R_{mn}^{bc} \Leftrightarrow B = R \otimes \text{Id} \cdot \text{Id} \otimes \text{Id} \equiv R_1 R_2 \quad (2.51)$$

операторов

$$R_1 \equiv R \otimes \text{Id} \quad \text{и} \quad R_2 \equiv \text{Id} \otimes R. \quad (2.52)$$

Операторы R_1 и R_2 , как можно непосредственно убедиться, не коммутируют — поэтому из их общих собственных векторов (даже если таковые имеются) нельзя составить базис на пространстве $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$. Можно тем не менее показать, что это пространство разбивается на не более чем двумерные общие собственные подпространства операторов R_1 и R_2 ([1], см. также примеры и комментарии в [26, 88]). А именно, по аналогии с рассмотренным в разд. 2.7.2 случаем двупрядных кос, по всяком базису $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ на пространстве \mathcal{L} можно построить $\frac{N(N+1)(N+2)}{6}$ и $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$, соответственно, “ q -симметричных” и “ q -антисимметричных” тензоров ранга 3

$$x_{\alpha\beta\gamma}^{S,A} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, 1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq N, \quad (2.53)$$

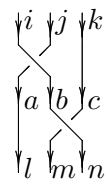


Рис. 13. Фрагмент трехрядной косы

которые будут общими собственными векторами операторов R_1 и R_2 с собственными значениями q и $-q^{-1}$, соответственно:

$$(R_1)_{lmn}^{abc} x_{abc}^S = (R_2)_{lmn}^{abc} x_{abc}^S = q x_{lmn}^S, \quad (R_1)_{lmn}^{abc} x_{abc}^A = (R_2)_{lmn}^{abc} x_{abc}^A = -q^{-1} x_{lmn}^A, \quad (2.54)$$

а также $\frac{N(N^2-1)}{3}$ пар “ q -смешано-симметричных” тензоров ранга 3 (x^M, y^M), которые будут двумерными собственными подпространствами операторов R_1 и R_2 . В качестве базисных элементов x^M и y^M каждого из этих подпространств можно, в частности, выбрать собственные вектора оператора R_1 на этом подпространстве. В последнем случае действие операторов R_1 и R_2 на базисных элементах запишется как

$R_1 x_{\alpha\beta\gamma}^M = q x_{\alpha\beta\gamma}^M$	$R_2 x_{\alpha\beta\gamma}^M = -\frac{1}{q^2 [2]_q} x_{\alpha\beta\gamma}^M x_{\alpha\beta\gamma}^M + \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} y_{\alpha\beta\gamma}^M$
$R_1 y_{\alpha\beta\gamma}^M = -q^{-1} y_{\alpha\beta\gamma}^M$	$R_2 y_{\alpha\beta\gamma}^M = \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} x_{\alpha\beta\gamma}^M x_{\alpha\beta\gamma}^M + \frac{q^2}{[2]_q} y_{\alpha\beta\gamma}^M$

где $1 \leq \alpha < \beta \leq \gamma \leq N$. Компоненты всех тензоров x (и y) при этом имеют вид

$$x_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = \sum_{\sigma \in S_3} c_{\sigma(ijk)}(q) x_{\alpha}^{\sigma(ijk)_1} x_{\beta}^{\sigma(ijk)_2} x_{\gamma}^{\sigma(ijk)_3}, \quad (2.55)$$

суммирование производится по всем различным перестановкам σ элементов (ijk) (6 слагаемых для $i \neq j \neq k$, 3 слагаемых для $i \neq j = k$ и 1 слагаемое для $i = j = k$). Мы не приводим здесь явного вида коэффициентов c , а также не поясняем, почему соответствующие тензора называются (анти-, смешано-)симметрическими, ссылаясь по обоим вопросам на разд. 4.4.

По правилам из разд. 2.3 замыканию трехрядной косы отвечает вставка оператора

$$Q \equiv \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \quad (2.56)$$

Как и в случае двурядных кос, можно непосредственно убедиться, что этот оператор коммутирует с операторами пересечений в косе (в данном случае с *как* с R_1 так и с R_2) — и поэтому может быть вставлен в любое сечение косы, а также, что если в качестве базисных векторов x_{α} выбраны собственные вектора оператора \mathfrak{M} , то всякий тензорный моном $x_{\alpha} \otimes x_{\beta} \otimes x_{\gamma}$, и тем самым всякая линейная комбинация вида $(\)$, будет собственным вектором оператора Q с собственным значением $\mathfrak{m}_{\alpha} \mathfrak{m}_{\beta} \mathfrak{m}_{\gamma}$. В частности, таким свойством будут обладать базисные вектора собственных подпространств операторов R_1 и R_2 , построенные с помощью собственных векторов оператора \mathfrak{M} :

$$Q x_{\alpha\beta\gamma}^{S,M,A} = \mathfrak{m}_{\alpha} \mathfrak{m}_{\beta} \mathfrak{m}_{\gamma} x_{\alpha\beta\gamma}^{A,S,M}. \quad (2.57)$$

Приведенных выше соображений достаточно, чтобы свести R -матричную свертку к разложению по характерам в случае произвольной трехрядной косы $\mathcal{B} = (a_1, b_1 | \dots | a_m, b_m)$ (см. рис. 13). А именно, вычисляя следы

$$\text{Tr}_T \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} = \begin{cases} \frac{[N]_q [N+1]_q [N+2]_q}{[2]_q [3]_q}, & T & - & q - \text{симметрические} & \text{тензора} \\ \frac{[N-1]_q [N]_q [N+1]_q}{[3]_q}, & -// - & & q - \text{смешанные} & -// - \\ \frac{[N]_q [N-1]_q [N-2]_q}{[2]_q [3]_q}, & -// - & & q - \text{антисимметрические} & -// - \end{cases}, \quad (2.58)$$

и вводя обозначение $w = \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)$ для алгебраического числа пересечений в косе, а также обозначения B_1 и B_2 , соответственно, для матриц операторов R_1 и R_2 , действующих на их общих

двумерных собственных подпространствах, которые при вышеуказанном выборе базиса в этих подпространствах имеют вид

$$B_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

получаем следующее разложение для полинома ХОМФЛИ произвольной трехрядной косы

$$\begin{aligned} H^{(a_1, b_1 | \dots | a_m, b_m)} &= \text{Tr} \left(Q \prod_{i=1}^m R_1^{a_i} R_2^{b_i} \right) = \\ &= q^w \frac{[N]_q [N+1]_q [N+2]_q}{[2]_q [3]_q} + \left(\text{tr} \prod_{i=1}^m B_1^{a_i} B_2^{b_i} \right) \frac{[N-1]_q [N]_q [N+1]_q}{[3]_q} + (-q)^{-w} \frac{[N]_q [N-1]_q [N-2]_q}{[2]_q [3]_q}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где

$$w = \sum_{i=1}^k (a_i + b_i). \quad (2.61)$$

Выражение (2.17), ранее полученное с помощью группы кос, переходит в (2.60) в результате подстановки $\lambda = A^{-1}q$, $\mu = -1/Aq$, $\chi = \frac{A-A^{-1}}{q-q^{-1}}$, причем матрицы B_1 и B_2 совпадают с матрицами операторов R_1 и R_2 на любом из общих двумерных собственных подпространств: соответственно, “ q -симметрических” и “ q -антисимметрических”.

2.7.4. Теоретико-групповой смысл общих собственных подпространств операторов пересечений и замыкания

Построенные нами общие собственные подпространства операторов пересечений и замыкания косы, на самом деле, суть пространства неприводимых представлений, возникающих в разложении соответствующей степени фундаментального представления группы $SU(N)$, которое имеет вид $[1] \otimes [1] = [2] + [11]$ в случае двухрядных кос и $[1] \otimes [1] \otimes [1] = [3] + 2 \times [21] + [111]$ в случае трехрядных кос. Иными словами, всякий вектор пространства представления $[2]$ или $[11]$ в первом случае, как и всякий вектор пространства представления $[3]$ или $[111]$ в последнем случае есть общий собственный вектор всех действующих в сечении косы операторов, в то время как вектора двух изоморфных представлений $[21]$ разбиваются на пары так, что каждая пара образует базис в одном из двумерных общих собственных подпространств этих операторов.

В свою очередь, веса, с которыми следы по общим инвариантным подпространствам входят полученное разложение, суть характеры соответствующих неприводимых представлений. Как мы показали в разобранных выше примерах, эти характеры возникают как следы операторов замыкания по общим инвариантным подпространствам операторов пересечения. В частности, при $q = 1$ операторы замыкания переходят в единичные операторы, а характеры — в размерности неприводимых представлений.

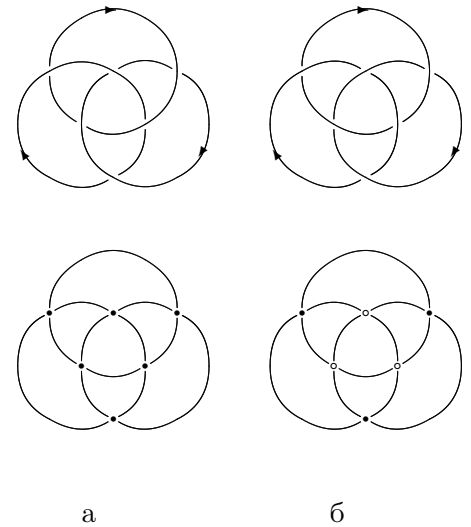


Рис. 14. Торическое зацепление $T(3, 3)$ (а) и зацепление кольца Борромео (б). Обе диаграммы симметричны относительно поворотов на $\frac{\pi}{3}$. На первой диаграмме все пересечения прямые (при ориентации кривых как на рисунке), так что кольца попарно зацеплены. Вторая диаграмма получается из первой при обращении трех пересечений во внутреннем треугольнике, после чего никакие два кольца не зацеплены друг за друга

3. Полином ХОМФЛИ как сумма по путям на графе Юнга

В разд. 1.4 мы привели формулу разложения (раскрашенных) полиномов ХОМФЛИ по характеристам (1.55), а также выражение (1.57) для коэффициентов разложения через собственные значения \mathcal{R} -матриц и коэффициенты Рака. В разд. 2.1 и 2.2 мы рассказали о двух путях вывода этой формулы, а также о связи этих путей между собой. В разд. 1.4 мы также сформулировали в общих чертах основные проблемы, на которые наталкивается явное вычисление раскрашенных полиномов ХОМФЛИ по формулам (1.55, 1.57). Как сказано далее, наша работа состояла в вычислении недостающих в литературе величин, входящих в эти формулы, а также в построении на основе их достаточно эффективного алгоритма вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ. В настоящем разделе Прежде чем перейти к подробному изложению нашей формулировки (1.55, 1.57), мы приведем пример вычисления полираскрашенного полинома ХОМФЛИ непосредственно по этим формулам — в простом случае, когда все величины, входящие в эти формулы известны.

3.1. Пример вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ с помощью \mathcal{R} -матриц, связанных с генераторами группы кос.

Проиллюстрируем формулы (1.55, 1.57) с помощью явного вычисления простейшего полираскрашенного полинома ХОМФЛИ для простейшего неторического⁶ трех компонентное зацепление (рис. 14, зацепление 6^3_2 в обозначениях Рольфсена [58]).

Это зацепление можно представить в виде замыкания трехрядной косы $\mathcal{B} = b_1^{-1}b_2b_1^{-1}b_2b_1^{-1}b_2$ (рис. 15). Простейший полираскрашенный полином ХОМФЛИ отвечает случаю, когда с одной из компонент зацепления связано фундаментальное представление группы $SU(N)$, а с двумя другими — первое и второе симметрические представления. Эти представления получаются, в частности, при действии операторов группы на, соответственно, векторах и симметричных тензорах рангов два и три в N -мерном комплексном линейном пространстве [109]. Для обозначения перечисленных представлений используют диаграммы Юнга [1], [2] и [3]. Формула (1.55) для интересующего нас полинома ХОМФЛИ дает Если все предыдущие разделы носили вводный характер, то настоящий раздел, как и все последующие, посвящен непосредственно нашей работе. Здесь мы, в основном, сосредоточимся на простых (нераскрашенных) полиномах ХОМФЛИ.

$$H_{[1] \otimes [2] \otimes [3]}^{6^3_2} = \sum_{\substack{Q=[6],[51],[42] \\ [411],[33],[321]}} S_Q^* \text{Tr} \mathcal{R}_{(1 \otimes 2) \otimes 3|Q}^{-1} \mathcal{R}_{2 \otimes (1 \otimes 3)|Q} \mathcal{R}_{(2 \otimes 3) \otimes 1|Q}^{-1} \mathcal{R}_{3 \otimes (2 \otimes 1)|Q} \mathcal{R}_{(3 \otimes 1) \otimes 2|Q}^{-1} \mathcal{R}_{1 \otimes (3 \otimes 2)|Q}, \quad (3.1)$$

где Q пробегает все неприводимые представления в разложении

$$[1] \otimes [2] \otimes [3] = [6] + 2 [51] + 2 [42] + [411] + [33] + [321], \quad (3.2)$$

S_Q^* — характеры этих представления в специальной точке (1.54), а матрицы $\mathcal{R}_{\cdot|Q}$ состоят из элементов матриц \mathcal{R} между старшими векторами этих представлений. Размерность матрицы $\mathcal{R}_{\cdot|Q}$ равна кратности, с которой представление Q появляется в правой части (3.2) (см. разд. 2.7), где кратности, отличные от 0 и 1, обозначены соответствующими числовыми множителями перед диаграммами Юнга. Таким образом, представлениям [6], [411], [33] и [321] отвечают матрицы 1×1 , в то время как представлениям [51] и [42] отвечают матрицы 2×2 .

⁶Торическими называются узлы и зацепления, лежащие без самопересечений на поверхность тора [51]. Для (поли)раскрашенных полиномов ХОМФЛИ таких узлов и зацеплений существует общая формула, известная как формула Джонса — Россо [106, 107, 108]. Таким образом, альтернативные способы вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ, в частности формулы (1.55, 1.57), прежде всего представляют интерес в приложении к неторическим узлам и зацеплениям.

Собственные значения входящих в (3.2) \mathcal{R} -матриц выражаются согласно (1.59) через величины⁷ $\varkappa_{[1]} = 0$, $\varkappa_{[2]} = 1$ и $\varkappa_{[3]} = 3$. Таким образом, матрицы 1×1 равны

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|6} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|6} = \mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|6} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|6} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|411} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|411} = \mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|411} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|411} = -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|33} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|33} = \mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|33} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|33} = q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} = q^2, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|321} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|321} = \mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|321} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|321} = -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|6} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|6} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|6} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|6} = q^{\varkappa_4 - \varkappa_3} = q^3, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|411} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|411} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|411} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|411} = -q^{\varkappa_{31} - \varkappa_3} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|33} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|33} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|33} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|33} = -q^{\varkappa_{31} - \varkappa_3} = -q^{-1}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|321} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|321} = \mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|321} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|321} = q^{\varkappa_{31} - \varkappa_3} = q^{-3}, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|6} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|6} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|6} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|6} = q^{\varkappa_5 - \varkappa_2 - \varkappa_3} = q^6, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|411} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|411} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|411} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|411} = -q^{\varkappa_{41} - \varkappa_2 - \varkappa_3} = -q,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|33} = \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|33} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|33} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|33} = (q^{\varkappa_{32} - \varkappa_2 - \varkappa_3}) = q^{-2}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|321} = \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|321} = \mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|321} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|321} = (q^{\varkappa_{32} - \varkappa_2 - \varkappa_3}) = q^{-2},$$

а матрицы 2×2 , соответствующие пересечению первых двух прядей, в базисе своих собственных векторов суть:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|51} &= \mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3|42} = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|51}^\dagger = \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3|42}^\dagger = \begin{pmatrix} q^{\varkappa_3 - \varkappa_2} & \\ & -q^{\varkappa_{21} - \varkappa_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|51} &= \mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2|42} = \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|51}^\dagger = \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2|42}^\dagger = \begin{pmatrix} q^{\varkappa_4 - \varkappa_3} & \\ & -q^{\varkappa_{31} - \varkappa_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^3 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|51} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|51}^\dagger = \begin{pmatrix} q^{\varkappa_5 - \varkappa_2 - \varkappa_3} & \\ & -q^{\varkappa_{41} - \varkappa_2 - \varkappa_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^6 & \\ & -q \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1|42} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1|42}^\dagger = \begin{pmatrix} q^{\varkappa_{41} - \varkappa_2 - \varkappa_3} & \\ & -q^{\varkappa_{32} - \varkappa_2 - \varkappa_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \\ & -q^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Формула (1.59), в частности, означает, что матрицы, отвечающие пересечению последних двух прядей, имеют в точности тот же вид в базисе *своих* собственных векторов. Как уже упоминалось в разд. 1.4 и 2.7, и как мы более подробно обсудим в разд. 3.4, переход к последнему базису от базиса, в котором справедливы формулы (3.4), дается матрицами Рака, явные формулы для

⁷Формула (1.59), однако, дает собственные значения лишь с точностью до множителя ± 1 . Нам неизвестно простого правила для определения этих знаков в общем случае, и здесь мы воспользуемся эмпирическим правилом, сформулированным ниже в разд. 4.7.2.

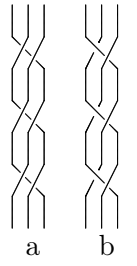


Рис. 15. Косы, замыканием которых являются торическое зацепление $T[3, 3]$ и (б) зацепление кольца Борромео

которых приведены, в частности, в [34],

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|51} = \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|51} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{[5]_q}} \sqrt{\frac{[2]_q[6]_q}{[3]_q[5]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[6]_q}{[3]_q[5]_q}} - \frac{1}{\sqrt{[5]_q}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|42} = \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|42} = \begin{pmatrix} \frac{[2]_q}{[3]_q} \sqrt{\frac{[5]_q}{[3]_q}} \\ \sqrt{\frac{[5]_q}{[3]_q}} - \frac{[2]_q}{[3]_q} \end{pmatrix}, \quad (3.5) \\
\mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|51} = \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|51} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q[5]_q}} \sqrt{\frac{[3]_q[6]_q}{[4]_q[5]_q}} \\ \sqrt{\frac{[3]_q[6]_q}{[4]_q[5]_q}} - \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q[5]_q}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|42} = \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|42} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} - \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|51} = \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|51} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}} \sqrt{\frac{[6]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[6]_q}{[3]_q[4]_q}} - \sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|42} = \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|42} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} \\ \sqrt{\frac{[2]_q[5]_q}{[3]_q[4]_q}} - \sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Это приводит к следующим формулам для недиагональных (в выбранном базисе) матриц 2×2 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|51} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|51}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|51} \begin{pmatrix} q^2 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|51}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{q^4 \sqrt{[4]_q[5]_q}} & \frac{q \sqrt{[3]_q[6]_q}}{\sqrt{[4]_q[5]_q}} \\ \frac{\sqrt{[3]_q[6]_q}}{\sqrt{[4]_q[5]_q}} & \frac{q^5 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q[5]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{3\otimes(1\otimes 2)|42} = \mathcal{R}_{3\otimes(2\otimes 1)|42}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{3\otimes 1\otimes 2|42} \begin{pmatrix} q^2 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{3\otimes 2\otimes 1|42}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{q^3 \sqrt{[3]_q[4]_q}} & \frac{\sqrt{[2]_q[5]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} \\ \frac{q \sqrt{[2]_q[5]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} & \frac{q^4 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|51} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|51}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|51} \begin{pmatrix} q^3 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|51}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^3 \sqrt{[5]_q}} & \frac{q^2 \sqrt{[2]_q[6]_q}}{\sqrt{[3]_q[5]_q}} \\ \frac{\sqrt{[2]_q[6]_q}}{\sqrt{[3]_q[5]_q}} & \frac{q^5}{\sqrt{[5]_q}} \end{pmatrix}, \quad (3.6) \\
\mathcal{R}_{2\otimes(1\otimes 3)|42} = \mathcal{R}_{2\otimes(3\otimes 1)|42}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{2\otimes 1\otimes 3|42} \begin{pmatrix} q^3 & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{2\otimes 3\otimes 1|42}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2 [3]_q} & \frac{q \sqrt{[5]_q}}{[3]_q} \\ \frac{q \sqrt{[5]_q}}{[3]_q} & \frac{q^4}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|51} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|51}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|51} \begin{pmatrix} q^6 & \\ & -q \end{pmatrix} \mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|51}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q}} & \frac{q^4 \sqrt{[6]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} \\ \frac{q^3 \sqrt{[6]_q}}{\sqrt{[3]_q[4]_q}} & \frac{q^7 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[4]_q}} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{1\otimes(2\otimes 3)|42} = \mathcal{R}_{1\otimes(3\otimes 2)|42}^{\dagger} &= \mathcal{U}_{1\otimes 2\otimes 3|42} \begin{pmatrix} q & \\ & -q^2 \end{pmatrix} \mathcal{U}_{1\otimes 3\otimes 2|42}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{[2]_q}}{\sqrt{q^4 [3]_q [4]_q}} & \frac{\sqrt{[2]_q [5]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [5]_q}}{q \sqrt{[3]_q [4]_q}} & \frac{q^3 \sqrt{[2]_q}}{\sqrt{[3]_q [4]_q}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Подстановка явных выражений (3.4, 3.3, 3.6) для \mathcal{R} -матриц в формулу разложения по характерам (1.55) с учетом формулы (1.54) для самих характеров позволяет вычислить простейший полираскрашенный полином ХОМФЛИ для трехкомпонентного зацепления кольца Борромео (рис. 14):

$$\begin{aligned}
H^{6\frac{3}{2}} &= S_6^* + (-q^{12} + q^{10} + q^8 - q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - q^{-4} + q^{-8} + q^{-10} - q^{-12}) S_{51}^* + (3.7) \\
&+ (-q^{10} + q^8 + 2q^6 - 2q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} + q^{-8} - q^{-10}) S_{42}^* + S_{411}^* + S_{33}^* + S_{321}^* = \\
&= \frac{S_3^*}{(q^2 - 1)^2 (q^4 - 1)} \left((q^{15} - 2q^{13} + q^9 + q^7 - q^5 - 2q^3 + q) A^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-q^{17} + 2q^{15} - 2q^{11} + 2q^7 + 3q^5 - 2q^3 - q + 2q^{-1} + q^{-3} - q^{-5})A + \\
& +(q^{13} - q^{11} - 2q^9 + q^7 + 2q^5 - 3q^3 - 2q + 2q^{-3} - 2q^{-7} + q^{-9})A^{-1} + \\
& +(-q^7 + 2q^5 + q^3 - q - q^{-1} + 2q^{-5} - q^{-7})A^{-3}.
\end{aligned}$$

Можно также убедиться, что ответ симметричен по перестановкам компонент зацепления, хотя это и не очевидно по виду выражения (3.1).

3.2. Задача о явном вычислении элементов \mathcal{R} -матриц

Как уже упоминалось в разд.(1.4), для вычисления коэффициентов разложения полинома ХОМФЛИ по характерам по формуле (1.57), необходимо знать матричные элементы всех входящих в это выражение \mathcal{R} -матриц, которые, в свою очередь, выражаются через известные в общем случае собственные значения \mathcal{R} -матриц и неизвестные в общем случае коэффициенты Рака. В настоящем разделе мы сформулируем конкретную задачу о вычислении коэффициентов Рака, к которой сводится вычисление коэффициентов разложения по характерам (нераскрашенного) полинома ХОМФЛИ, а в следующем разделе приведем решение этой задачи “в лоб”.

Во всем дальнейшем изложении, говоря о базисе из векторов неприводимых представлений, возникающих в разложении тензорной степени фундаментального $[1]^{\otimes m}$, мы по умолчанию будем иметь в виду вектора, возникающие при последовательном разложении произведения по неприводимым представлениями согласно расстановке скобок

$$(((\dots((1 \otimes 1) \otimes 1) \otimes \dots) \otimes 1) \otimes 1). \quad (3.8)$$

Полученный таким образом базис мы будем называть *стандартным* базисом.

3.2.1. Выражения для \mathcal{R} -матриц через перебрасывающие матрицы

Задача о вычислении матричных элементов \mathcal{R} -матриц в случае нераскрашенного полином ХОМФЛИ, когда на со всеми пряжами косы связаны фундаментальные представления, сводится к поиску матрицы перехода между базисами из собственных векторов матриц \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_j :

$$\underbrace{[1] \otimes [1]}_{\mathcal{R}_1} \otimes [1] \otimes \dots \xrightarrow{\mathcal{U}_j} \underbrace{[1] \otimes [1] \otimes \dots \otimes [1] \otimes [1]}_{\mathcal{R}_j} \otimes \dots \quad (3.9)$$

$$\mathcal{R}_j = \mathcal{U}_{j-1} \mathcal{R}_{j-1} \mathcal{U}_{j-1}^\dagger \quad (3.10)$$

Матрицу \mathcal{U}_j , в свою очередь, можно выразить как произведение “перебрасывающих матриц”, которые, например в случае четырехрядной косы, отвечают следующим заменам базиса:

$$\begin{aligned}
([1] \otimes [1]) \otimes [1] \otimes [1] &\cong (([1] \otimes [1]) \otimes [1]) \otimes [1] \xrightarrow{U} ([1] \otimes ([1] \otimes [1])) \otimes [1] \\
\downarrow \mathcal{U}_2 = UVU & & \downarrow V \\
[1] \otimes [1] \otimes ([1] \otimes [1]) &\cong [1] \otimes ([1] \otimes ([1] \otimes [1])) \xleftarrow{U} [1] \otimes (([1] \otimes [1]) \otimes [1])
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно убедиться, что в случае пятирядной косы матрица перехода между базисами собственных векторов матриц \mathcal{R}_1 и $\mathcal{R}_4 = \mathcal{U}_3 \mathcal{R}_1 \mathcal{U}_3^\dagger$, отвечающих, соответственно, пересечениям первой и последней пары пряжей, выражается через уже введенные матрицы U и V , а также через новую матрицу W , отвечающую переходу

$$([1] \otimes ([1] \otimes ([1] \otimes [1]))) \otimes [1] \xrightarrow{W} [1] \otimes (([1] \otimes ([1] \otimes [1])) \otimes [1]) \quad (3.11)$$

как

$$\mathcal{U}_m = UVUWU^\dagger V^\dagger U^\dagger. \quad (3.12)$$

Вводя обозначение U_j для “перемещающей матрицы уровня j ”:

$$\left([1] \otimes \underbrace{([1] \otimes \dots \otimes [1])}_j \right) \otimes [1] \xrightarrow{U_j} [1] \otimes \left(([1] \otimes \dots \otimes [1]) \otimes [1] \right), \quad (3.13)$$

можно показать, что матрица \mathcal{U}_j (так что $U \equiv \mathcal{U}_1$, $V \equiv \mathcal{U}_2$ и $W \equiv \mathcal{U}_3$), отвечающая переходу (3.9), выражается через палиндромные комбинации матриц U_j с помощью рекуррентной формулы

$$\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_{j-1} U_j \mathcal{U}_{j-1}^\dagger, \quad (3.14)$$

в частности, для $j = 2$ и $j = 3$,

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 U_2 \mathcal{U}_1^\dagger = UVU, \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_2 U_3 \mathcal{U}_2^\dagger = UVUW(UVU)^\dagger = UVUWU^\dagger V^\dagger U^\dagger. \quad (3.15)$$

Явные формулы для $j = 4$ и $j = 5$ (соответствующие матрицы впервые необходимы для вычисления полиномов ХОМФЛИ в случаях, соответственно, шести- и семипрядных кос) приведены в разд. 3.4.5 и 3.4.6.

3.2.2. Элементы перемещающих матриц как коэффициенты Рака

Вектора базисов, связанных друг с другом перемещающей матрицей (3.13), по определению суть вектора неприводимых представлений, которые получаются при последовательном разложении тензорных произведений согласно расстановке скобок (см. разд. 3.3). При этом подразумевается, что расстановка внутренних (опущенных в формуле) скобок в левой правой частях одна и та же и такая же как в определении стандартного базиса (3.8). Иными словами, вектора неприводимых представлений, возникающие при последовательном раскрытии скобок в левой части соотношения, будут тождественно совпадать с таковыми в правой части равенства вплоть до последнего шага, на котором каждое (полученное результате предыдущих шагов) неприводимое представление S умножается на очередное фундаментальное, соответственно, слева и справа в левой и правой частях (3.13). Таким образом, задача о вычислении перемещающей матрицы уровня j (3.8) сводится к задаче о вычислении матрицы Рака $\mathcal{U}_{[1] \otimes S \otimes [1]}$ для представления S уровня j , которая по определению есть матрица перехода между базисами векторов неприводимых представлений, возникающих в следующих двух разложениях тензорного произведения [74] (см. также разд. 3.3):

$$\begin{array}{ccc} ([1] \otimes S) \otimes [1] & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes S \otimes [1]}} & [1] \otimes (S \otimes [1]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{Q + \dots + Q}_{\mathcal{N}_{QS}} & \mathcal{U}_{SQ} \equiv \mathcal{U}_{[1] \otimes S \otimes [1] + Q} & \underbrace{Q + \dots + Q}_{\mathcal{N}_{QS}} \end{array} \quad (3.16)$$

В свою очередь, пространства неприводимых представлений Q — точнее говоря, прямые суммы нескольких (\mathcal{N}_{QS}) копий таких пространств, возникающие в разложении произведения тензорного произведения $[1] \otimes S \otimes [1]$, являются собственными подпространствами матрицы $\mathcal{U}_{[1] \otimes S \otimes [1]}$ [74] (см. также пример в разд. 2.7), что отражено в нижней строке последней формулы. Поэтому “элементарной величиной”, подлежащей вычислению, является блок $\mathcal{U}_{[1] \otimes S \otimes [1] + Q}$ матрицы Рака,

отвечающий соответствующему подпространству:

$$(3.17)$$

Например, при $j = 2$ имеем:

$$\begin{array}{ccc}
 ([1] \otimes ([1] \otimes [1])) \otimes [1] & \xrightarrow{U_2 \equiv V} & [1] \otimes (([1] \otimes [1]) \otimes [1]) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 ([1] \otimes [2]) \otimes [1] & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1]}} & [1] \otimes ([2] \otimes [1]) \\
 + & & + \\
 ([1] \otimes [11]) \otimes [1] & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes [11] \otimes [1]}} & [1] \otimes ([11] \otimes [1]) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [3] & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [3]}} & [3] \\
 + & & + \\
 \underline{[21]} + \underline{[21]} & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [21]}} & \overline{[21]} + \overline{[21]} \\
 + & & + \\
 [111] & \xrightarrow{\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [111]}} & [111]
 \end{array}, \quad (3.18)$$

где левая и правая часть таблицы отличаются друг от друга выбором базиса в двумерном старших векторов представления $[21]$ (см. разд. 2.7).

3.2.3. Размеры элементарных блоков в перебрасывающих матрицах

Поскольку в выражение (1.55) входят только элементы \mathcal{R} -матриц между старшими векторами неприводимых представлений (см. разд. 2.7), необходимо вычислить только аналогичные элементы матриц Рака — в дальнейшем под матрицами \mathcal{U}_{QS} мы будем понимать именно соответствующие блоки размером $\mathcal{N}_{QS} \times \mathcal{N}_{QS}$. В частности, переходам (3.18) отвечают матрицы $\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [3]}$, $\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [21]}$ и $\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [111]}$ размеров, соответственно, 1×1 , 2×2 и 1×1 . Элементы этих матриц хорошо известны из литературы по теории представлений квантовых групп (см. напр. [74]):

$$\mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [3]} = 1, \quad \mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [21]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{[1] \otimes [2] \otimes [1] \rightarrow [111]} = -1, \quad (3.19)$$

$$[2]_q \equiv \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}}, \quad [3]_q \equiv \frac{q^3 - q^{-3}}{q - q^{-1}} = q^2 + 1 + q^{-2}.$$

В частности, вторая из формул при $q = 1$ воспроизводит выражения (приведенные в том числе в [35]) для обыкновенной группы $SU(2)$.

Замечательные свойства коэффициентов Рака приводят к тому, что матрицы U_{SQ} для представлений группы $SU(N)$ с диаграммами Юнга Q и S (то есть, с данными весами старших векторов $[101]$) одинаковы для *всех* групп серии [74] (в разд. 3.3 мы в некоторой степени продемонстрируем, почему так происходит), причем это свойство сохраняется и при переходе к квантовым

группам $U_q(su_N)$ [74]. Поэтому достаточно проделать вычисление для *произвольного* N . Проблема, однако, состоит в том, что неприводимые представления группы $SU(N)$ не могут иметь более N строк в диаграмме Юнга [101]. В свою очередь, разложение тензорного произведения j фундаментальных представлений содержит неприводимые представления со всевозможными диаграммами Юнга Q из $|Q| = j$ клеток [101]. Непосредственное вычисление матриц U_{SQ} требует, таким образом, рассмотрения группы $U_q(SU(N))$ с $N \geq |Q|$. Последнее условие можно ослабить, воспользовавшись известной в теории квантовых групп [74] симметрией коэффициентов Рака

$$U_{SQ}(q) = \sigma U_{S^T Q^T}(1/q), \quad \sigma = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1), \quad (3.20)$$

где Q^T означает диаграмму Юнга дуального к Q разбиения (диаграммы Q и Q^T переходят друг в друга при отражении относительно главной диагонали), а выбор знаков в матрице σ (у разных элементов матрицы они, вообще говоря, различны) прокомментирован ниже (см. разд. 3.2.4). Эта симметрия позволяет, в частности, получить формулы (3.19), рассматривая только диаграммы [3] и [21], и таким образом, привлекая только теорию представлений группы $U_q(SU(2))$. В общем случае новое условие имеет вид $2N \geq |Q|$: то есть, все случаи с $|Q| = 3, 4$ можно рассмотреть, положив $N = 2$, все случаи $|Q| = 5, 6$ — положив $N = 3$, в то время как среди диаграмм с $|Q| = 7$ есть диаграмма Юнга $[4, 1, 1, 1]$, и соответствующую матрицу U_{QS} можно вычислить только рассмотрев соответствующее представление группы $U_q(SU(4))$. Оказывается, однако, что элементы матриц $U_q(SU(2))$ зависят от диаграммы Юнга Q весьма простым образом — в результате чего выражений, которые можно получить для $N = 3$ достаточно, чтобы предположить вид ответа для произвольного N . Отличной проверкой гипотезы может служить подстановка этого ответа в выражения для полиномов ХОМФЛИ: как мы упоминали во введении, при всяком изменении входящих в формулу величин вместо достаточно компактного полинома получается громоздкая рациональная функция. Именно такая проверка и была предпринята в работе [30].

3.2.4. Явная формула для элементов перебрасывающих матриц

Согласно гипотезе из [30], интересующие нас “элементарные” блоки матриц Рака имеют вид

$$U_{SQ} = \begin{pmatrix} -u_{SQ} & \varepsilon_S \sqrt{1 - u_{SQ}^2} \\ \sqrt{1 - u_{SQ}^2} & \varepsilon_S u_{SQ} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

где $\varepsilon_S = -1$ для $S = [1]$ и $\varepsilon_S = +1$ для прочих S , а u_{SQ}^{-1} равно целому *квантовому числу*

$$u_{SQ} = \frac{1}{[k_{SQ}]_q}, \quad \sqrt{1 - u_{SQ}^2} = \frac{\sqrt{[k_{SQ} - 1]_q [k_{SQ} + 1]_q}}{[k_{SQ}]_q}, \quad (3.22)$$

где $[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\{q^x\}}{\{q\}}$ (замечательным образом $[k]_q^2 - 1 = [k + 1]_q [k - 1]_q$).

Приведем для удобства список значений k_{SQ} , которые могут быть вычислены с помощью теории представлений группы $U_q(SU(3))$ (см. разд. 3.3):

S	Q	k_{SQ}
$l[1]$	$[21]$	2
$l[2]$	$[31]$	3
$l[11]$	$[211]$	3
$l[3]$	$[41]$	4
$l[21]$	$[32]$	2
	$[221]$	2
	$[311]$	4
$l[4]$	$[51]$	5
$l[31]$	$[42]$	3
	$[321]$	2
	$[411]$	5
$l[22]$	$[321]$	4

S	Q	k_{SQ}
$l[5]$	$[61]$	6
$l[41]$	$[52]$	4
	$[421]$	2
	$[511]$	6
$l[32]$	$[43]$	2
	$[421]$	5
	$[331]$	3
$l[311]$	$[421]$	3
	$[4111]$	6
...

(3.23)

Нетрудно убедиться, что все приведенные ответы описываются общей формулой

$$k_{SQ} = s_i - s_j + j - i \quad (3.24)$$

где $i < j$ — номера строк в диаграмме Юнга S , которым нужно добавить по клетке, чтобы получить диаграмму Q , а $s_i > s_j$ — длины этих строк.

Диаграммам, не перечисленным в таб. 3.23, отвечают матрицы 1×1 единственный элемент v_{SQ} которых равен $+1$ или -1 :

S	Q	v_{SQ}
$[1]$	$[3]$	1
	$[111]$	1
$[2]$	$[4]$	1
	$[22]$	1
	$[211]$	-1
$[11]$	$[31]$	1
	$[22]$	-1
$[3]$	$[5]$	1
	$[32]$	1
	$[311]$	-1
$[21]$	$[41]$	1
$[111]$	$[311]$	1
	$[221]$	-1

S	Q	v_{SQ}
$[4]$	$[6]$	1
	$[42]$	1
	$[411]$	-1
$[31]$	$[51]$	1
	$[33]$	1
$[22]$	$[42]$	1
	$[33]$	-1
	$[222]$	1

S	Q	v_{SQ}
$[5]$	$[7]$	1
	$[52]$	1
	$[511]$	-1
$[41]$	$[61]$	1
	$[43]$	1
$[32]$	$[52]$	1
	$[322]$	1
$[311]$	$[511]$	1
	$[331]$	1
	$[322]$	-1
...

(3.25)

Вообще говоря, матрицы 2×2 возникают всякий раз, когда порядок добавления клеток к диаграмме Юнга S может быть изменен (в обоих случаях на промежуточном шаге также возникает диаграмма Юнга), а матрицы 1×1 — в противном случае, а именно, когда обе клетки добавляются либо в одну строку (тогда $v_{SQ} = 1$) либо в один столбец (тогда $v_{SQ} = -1$). Других случаев при умножении фундаментальных представлений группы $SU(N)$ не возникает [101].

Как мы уже говорили, все перебрасывающие матрицы U_j состоят из элементов матриц U_{QS} . Мы не будем обсуждать здесь соответствующую (подробно описанную в [31]) общую процедуру, поскольку, как оказывается, аналогичная процедура применима для самих \mathcal{R} -матриц (см. разд. 3.5.4). Вместо этого, мы выпишем явные формулы для \mathcal{U} -матриц, а также выражения для \mathcal{R} -матриц и полиномов ХОМФЛИ в форме разложения по характерам для 2-7-рядных кос в разд. 3.4.1 — 3.4.6, соответственно. Но перед этим мы приведем краткий вывод формулы (3.24).

3.3. Задача о коэффициентах Рака для квантовой группы $U_q(sl_3)$

Настоящий раздел посвящен вычислению коэффициентов Рака “в лоб”. Эта классическая, незаслуженно обойденная вниманием задача [74] в последнее время становится все более актуальной, прежде всего, в контексте \mathcal{R} -матричного подхода в теории инвариантов узлов [26, 102, 110, 111]. Именно в таком контексте в задаче за последнее время был достигнут большой прогресс [13, 30, 94, 112].

Сама величина — коэффициенты Рака — естественным образом возникает в задаче о разложении тензорного произведения трех неприводимых представлений на неприводимые представления, с которой часто сталкиваются при рассмотрении многочастичных систем [101]. В отличие от наиболее известных физических приложений теории симметрии, наша задача требует рассмотрения не обыкновенной алгебры Ли, а ее обобщения — так называемый *квантовой группы* [74]. Это понятие может использоваться для описания сложных симметрий квантовых систем, которые не описываются простыми алгебрами Ли и широко используется в теории рассеяния [53] и в теории точно решаемых статистических моделей [2], а также постепенно входит в физику низкоразмерных систем [4] и в физику высоких энергий [113].

Здесь мы приведем точную формулировку задачи о коэффициентах Рака и краткий вывод результата в случае умножения двух фундаментальных и одного произвольного неприводимого представления квантовой группы $U_q(su_3)$ — именно такая задача возникает при выводе формул разд. 3.4 для \mathcal{R} -матриц и полиномов ХОМФЛИ в случае фундаментальных представлений на всех прядях косы. Соответствующее вычисление, которое поначалу представляется сложным, оказывается гораздо более простым по следующим причинам:

- В вычислении коэффициентов Рака задействованы лишь несколько членов разложения старших векторов неприводимых представлений по тензорным произведениям векторов перемножаемых представлений имеют значения лишь несколько первых (в некотором порядке) членов.
- Матрицы Рака *одновременно* симметричны и ортогональны, что позволяет выразить все их элементы через циклические комбинации $(U_{ii}, U_{ij}U_{ji}, U_{ij}U_{jk}U_{kl}, \dots)$ этих элементов, независимые от нормировки базисных векторов — это позволяет нормировать базисные вектора произвольным образом, тем самым заметно упростив выражения для них и, в частности, избавившись от всех иррациональностей в коэффициентах Клебша-Гордана.

3.3.1. Сводка необходимых фактов о группе $SU(N)$, алгебре su_N и их представлениях

Последовательное изложение теории представлений, безусловно, выходит за рамки настоящего текста — по этому предмету достаточно учебной литературы, например [101, 74]. Однако, поскольку неспециалистам часто бывает непросто ориентироваться в этом чрезвычайно обширном предмете, мы начнем с краткой сводки понятий и фактов, наиболее существенных для дальнейшего изложения.

Унитарная групп $U(N)$ как матричная группа. Унитарную группу проще всего определить как группу матриц размера $N \times N$, удовлетворяющих соотношению $UU^\dagger = \text{Id}_{N \times N}$, где элементы матриц — произвольные комплексные числа, а \dagger означает эрмитово сопряжение. Унитарные матрицы действительно образуют группу относительно матричного умножения в силу тождества $U_1U_2(U_1U_2)^\dagger = U_1U_2U_2^\dagger U_1^\dagger = \text{Id}$, выполненного для всякой пары унитарных матриц U_1 и U_2 ; групповой единицей при этом является матрица $\text{Id}_{N \times N} \equiv \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$.

Группа $U(N)$ как группа Ли. Всякую унитарную матрицу можно представить как *экспоненту* от линейного оператора [87] — то есть, грубо говоря, как композицию бесконечно большого числа унитарных матриц, бесконечно близких к единичной:

$$U = \exp(A) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{Id} + \frac{A}{N} \right)^N. \quad (3.26)$$

При этом для всякого N матрица $u(N)$ также принадлежит группе в силу соотношения

$$u(N) = \left(\exp \left(\frac{A}{N} \right) \right)^N = \exp(A) = U. \quad (3.27)$$

Более того, для всякой пары матриц U_1 и U_2 , принадлежащих группе, для соответствующих матриц $u_1(N)$ и $u_2(N)$ в пределе больших N выполнены соотношения

$$\begin{aligned} u_1(N)u_2(N) &= \left(1 + \frac{A_1}{N} \right) \left(1 + \frac{A_2}{N} \right) = 1 + \frac{A_1 + A_2}{N} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right) = \\ &= \exp \left(\frac{1}{N} (A_1 + A_2) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

так что матрица

$$U_{12} = \left(\exp \left(\frac{1}{N} (A_1 + A_2) \right) \right)^N = \exp(A_1 + A_2) \quad (3.29)$$

также принадлежит группе (при этом, вообще говоря, $U_1 U_2 \neq U_{12}$). Из этих двух свойств следует, что *генераторы бесконечно малых преобразований* A образуют линейное пространство:

$$\begin{aligned} \text{Если } \exp(A_1), \exp(A_2) \text{ принадлежат группе, то для всяких чисел} \\ \exp(t_1 A_1 + t_2 A_2) \text{ также принадлежит группе.} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Этот факт верен не только для унитарной группы, но является достаточно общим: свойство (3.30) выполнено как только *всякий* элемент группы может быть представлен в виде (3.26) с *некоторой* матрицей A — такие группы называются *группами Ли*.

Таким образом, унитарную матрицу *общего вида* можно задать с помощью N параметров a_i как [109]

$$U = \exp \left(\sum_{k=1}^N a_k \tau_k \right), \quad (3.31)$$

где $\{\tau_k\}$ — некоторый базис в пространстве генераторов бесконечно малых преобразований. В случае унитарной группы это пространство есть пространство *антиэрмитовых* матриц, то есть матриц A , таких что $A^\dagger = -A$ (для всяких вещественных чисел a_1, a_2 и антиэрмитовых матриц A_1, A_2 верно $A^\dagger = (a_1 A_1 + a_2 A_2)^\dagger = -A$ и $\exp(A) \exp^\dagger(A) = \exp(A) \exp(A^\dagger) = \text{Id}$). В качестве базиса $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ в пространстве антиэрмитовых матриц в случае $N = 2$ обычно выбирают умноженные на $-i$ матрицы Паули [114]:

$$\tau_1 = -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

а в случае $N = 3$ — матрицы Гелл-Манна [114].

Антиэрмитовы матрицы как алгебра Ли. Пространство представления алгебры одновременно является пространством представления группы. Следовательно, всякий элемент алгебры остается таковым при сопряжении произвольным групповым элементом:

$$A \rightarrow UAU^\dagger, \quad A^\dagger \rightarrow (UAU^\dagger)^\dagger = -UAU^\dagger. \quad (3.33)$$

В частности, всякая антиэрмитова матрица остается таковой при сопряжении произвольной унитарной матрицей U .

С помощью экспоненциальной формы (3.33) унитарной матрицы преобразование (3.33) можно, в свою очередь, представить как экспоненту от линейного оператора

$$\hat{A} : A \rightarrow [A, B], \quad (3.34)$$

а именно:

$$\begin{aligned} \text{Id} + \frac{1}{N}\hat{A} : A \rightarrow A + \frac{1}{N}[A, B] &= \left(\text{Id} + \frac{B}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right) A \left(\text{Id} - \frac{B}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \right), \\ \exp(\hat{A}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{Id} + \frac{1}{N}\hat{A} \right)^N : A \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{Id} + \frac{B}{N} \right)^N A \left(\text{Id} + \frac{B^\dagger}{N} \right)^N &= \exp(B)A \exp(B^\dagger) = \\ &= UAU^\dagger. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Генератор \hat{A} преобразования (3.33) при этом задает билинейную операцию на пространстве антиэрмитовых матриц — после чего это пространство по определению является *алгеброй*. При этом соотношение (3.26) по определению означает, что алгебра матриц A является *алгеброй Ли* для группы U матриц U .

Специальная унитарная группа и соответствующая алгебра. Специальная унитарная группа отличается от просто унитарной дополнительным условием на матрицы $\det U = 1$, которое согласовано с групповым умножением в силу тождества $\det(U_1U_2) = \det(U_1)\det(U_2)$. Матрицы соответствующей алгебры тогда удовлетворяют условию

$$\det U = \det e^A = e^{\text{Tr}A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} A = 0, \quad (3.36)$$

которое согласовано как со структурой линейного пространства (в силу линейности следа), так и с операцией в алгебре, поскольку $\text{Tr}[A, B] = 0$ для произвольных матриц A и B .

Законы преобразования тензорных компонент как различные представления группы. Всякой унитарной матрице U можно сопоставить линейный оператор, действующий на векторах T комплексного N -мерного пространства так, что компоненты этих векторов преобразуются по закону:

$$T_i \rightarrow U_i^j T_j. \quad (3.37)$$

Такое соответствие называется *фундаментальным* представлением унитарной группы. Существенно, что (3.37) согласуется с групповой операцией: произведению матриц соответствует композиция операторов. То же свойство будет выполнено и при соответствии унитарной матрицы линейному оператору

$$\hat{\Omega}(U) : T^{j_1 \dots j_r} \rightarrow U_{j_1}^{i_1} \dots U_{j_r}^{i_r} T^{j_1 \dots j_r}, \quad (3.38)$$

осуществляющему преобразование компонент тензора произвольного ранга r под действием линейного оператора с матрицей U на вектора пространства. При этом для всякого r по определению получится некоторое *представление* унитарной группы: в частности, $r = 0$ отвечает тривиальному представлению $U \rightarrow \text{Id}$, а $r = 1$ рассмотренному выше фундаментальному представлению. Более того, оказывается, что всякое представление унитарной группы можно представить как соответствие вида (3.38) для некоторого r (при этом, однако, вместо пространства всех тензоров ранга r как правило нужно рассматривать его определенное подпространство) [109].

Законы преобразования тензорных компонент как различные представления алгебры. Если теперь представить оператор U в виде экспоненты (3.26), генератору A бесконечно малого преобразования будет соответствовать линейный оператор

$$\hat{\omega}(A) : T^{j_1 \dots j_r} \rightarrow \delta T^{j_1 \dots j_r} = A_{j_1}^{i_1} T^{j_1 i_2 \dots i_r} + \dots + A_{j_r}^{i_r} T^{i_1 \dots i_{r-1} j_r}. \quad (3.39)$$

Такое соответствие линейно

$$\hat{\omega}(aA + bB) = a\hat{\omega}(A) + b\hat{\omega}(B) \quad (3.40)$$

и, как можно непосредственно убедиться, согласуется с билинейной операцией в алгебре бесконечно малых генераторов

$$\hat{\omega}([A, B]) = \hat{\omega}(A) \circ \hat{\omega}(B) - \hat{\omega}(B) \circ \hat{\omega}(A), \quad (3.41)$$

где \circ означает композицию линейных отображений. Таким образом можно перейти от представления группы Ли к представлению соответствующей алгебры Ли, которая в случае группы унитарных матриц является алгеброй антиэрмитовых матриц.

Формальное определение алгебр su_2 и su_3 через соотношения Серра. Выше мы дали определение алгебры su_N как алгебру Ли, соответствующей группе специальных унитарных матриц. Альтернативой является эквивалентное, более формальное определение той же алгебры. А именно: алгебра su_N есть вещественное линейное пространство, натянутое на элементы $\{iE_k, iF_k, iH_k\}_{k=1}^{N-1}$ и всевозможные их коммутаторы. При этом коммутатор есть антисимметричная билинейная операция, определенная для всякой пары элементов алгебры так, что выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} [H_j, H_k] &= 0, \\ [F_j, E_k] &= 0 \quad \text{для } j \neq k, & [E_j, F_j] &= H_j, \\ [H_j, E_k] &= E_k \quad \text{для } j \neq k, & [H_j, E_j] &= 2E_j, \\ [H_j, F_k] &= -F_k \quad \text{для } j \neq k, & [H_j, F_j] &= -2F_j, \\ [E_j, [E_j, E_k]] &= 0, & [F_j, [F_j, F_k]] &= 0, \quad j, k = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Элементы алгебры E_k, F_k, H_k называются, соответственно, повышающими, понижающими и весовыми операторами, а соотношения (3.42) называются *соотношениями Серра*. В частности, соотношения Серра для алгебры su_2 имеют вид

$$[E, F] = H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F \quad (3.42)$$

где тройке операторов E, F, H в изложенном выше альтернативном определении отвечают матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Соотношения Серра суть частный случай *коммутационных соотношений*

$$[A_i, A_j] = \sum_k \alpha_{ijk} A_k, \quad (3.44)$$

входящих в формальное определение произвольной алгебры Ли.

Алгебра su_2 как алгебра спиновых операторов. Алгебра su_2 часто возникает в физических приложениях, поскольку она изоморфна алгебре so_3 вращений трехмерного пространства. При этом в качестве базиса в алгебры обычно выбирают операторы

$$S_x = \frac{1}{2}(E + F), \quad S_y = \frac{1}{2i}(E - F), \quad S_z = \frac{1}{2}H, \quad (3.45)$$

имеющие простой геометрический смысл — эти операторы дают изменение компонент вектора при бесконечно малых поворотах вокруг координатных осей и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[S_x, S_y] = iS_z, \quad [S_z, S_x] = iS_y, \quad [S_y, S_z] = iS_x. \quad (3.46)$$

При этом трехмерное векторное пространство является пространством *присоединенного* (или первого симметрического) представления алгебры, в то время как пространство фундаментального представления есть пространство состояний частицы со спином $\frac{1}{2}$ [35].

Тождество Якоби. Во всякой алгебре Ли любые три элемента алгебры удовлетворяют условию

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (3.47)$$

которое называется *тождеством Якоби*. При определении алгебры Ли с помощью соответствующей матричной группы тождество Якоби выполнено автоматически:

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon C}[A, B]A^{\epsilon C} &= [A, B] + \epsilon[[A, B], C] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \parallel \\ [e^{-\epsilon C}Ae^{\epsilon C}, e^{-\epsilon C}Be^{\epsilon C}] &= [A, B] + \epsilon[[A, C], B] + \epsilon[A, [B, C]] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}, \quad (3.48)$$

откуда в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ получаем (3.47).

При формальном подходе условие (3.47) накладывается на элементы алгебры в дополнение к коммутационным соотношениям (3.44).

Действие операторов алгебры на тензорном произведении представлений: операция коумножения. Представление (3.39) алгебры Ли, полученное выше при рассмотрении действия групповых операторов на тензорах, можно рассматривать как формальное определение новой операции Δ , действующей на всякий элемент A алгебры как

$$\Delta(A) = \text{Id} \otimes A + A \otimes \text{Id}. \quad (3.49)$$

Операторы $\Delta(A)$ для всевозможных элементов алгебры A по построению образуют линейное пространство, причем билинейная операция в исходной алгебре позволяет ввести соответствующую операцию в этом пространстве:

$$[\Delta(A), \Delta(B)] \equiv \text{Id} \otimes [A, B] + [A, B] \otimes \text{Id}. \quad (3.50)$$

При этом можно непосредственно убедиться, что операторы $\{\Delta(E_i), \Delta(F_i), \Delta(H_i)\}_{i=1}^{N-1}$ удовлетворяют, относительно своей билинейной операции, тем же соотношениям (3.42), что и сами операторы $\{E_i, F_i, H_i\}_{i=1}^{N-1}$, например,

$$[\Delta(E), \Delta(F)] \equiv \text{Id} \otimes [E, F] + [E, F] \otimes \text{Id} = \text{Id} \otimes H + H \otimes \text{Id} = \Delta(H). \quad (3.51)$$

Операция Δ называется *коумножением*, так как она действует из пространства операторов V его тензорный квадрат $V \otimes V$ — в противоположность билинейной операции в алгебре, которая действует $V \otimes V \rightarrow V$ и называется *умножением*. Коумножение позволяет рассматривать различные представления алгебры в рамках ее формального определения. Кроме того, переход от алгебры Ли к соответствующей *квантовой группе* (см. разд. 3.3.3) осуществляется путем обобщения операции коумножения [74].

Тензорное произведение трех представлений как сумма неприводимых представлений: задача о коэффициентах Клебша-Гордана.

Неприводимые представления. Линейные операторы, соответствующие операторам группы или алгебры в некотором ее представлении, по построению действуют на некотором линейном пространстве, которое называется *пространством представления*. Это пространство может, однако, содержать подпространство, инвариантное относительно действия всех операторов представления (то есть для всякого элемента группы или алгебры и для всякого вектора подпространства образ вектора под действием соответствующего элементу алгебры линейного оператора лежит в том же подпространстве). Такое подпространство само по себе может рассматриваться как пространство представления. Пространство *неприводимого* представления таких подпространств по определению не содержит.

Пример. В частности, пространство всех тензоров ранга r является пространством *приводимого* представления (3.38) или (3.39): например, всякий полностью симметричный тензор остается таковым в результате преобразования (3.38) или (3.39), и то же верно для всякого полного антисимметричного тензора. Таким образом, случаи полностью симметричных и антисимметричных тензоров в (3.38) или (3.39) отвечают различным представлениям группы или алгебры, причем можно показать что сами эти представления являются неприводимыми. Более того, в частном случае $r = 2$ исходное приводимое представление является их прямой суммой, поскольку всякий тензор ранга 2 есть разлагается в сумму симметричного и антисимметричного тензоров: $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$.

Задача о разложении базиса в тензорном произведении неприводимых представлений по базисам неприводимых представлений. Если в векторном пространстве выбран некоторый базис $\{x_i\}_{i=1}^N$, то тензора ранга r на этом пространстве можно описать как линейное пространство, натянутое на всевозможные мономы вида $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r}$. Если исходное пространство является пространством представления группы алгебры Ли, таковым является и всякая его тензорная степень — согласно формулам (3.38) и (3.39), соответственно. Это представление, как обсуждалось выше, может оказаться приводимым. При этом описанные тензорные мономы, вообще говоря, не принадлежат подпространствам — пространствам неприводимых представлений. Одной из основных задач теории представлений является задача о разложении каким-то образом заданных базисных векторов пространств неприводимых представлений по тензорным мономам, образующим естественный базис в исходном пространстве — тензорной степени. Коэффициенты разложения называются *коэффициентами Клебша-Гордана*.

Простейший нетривиальный пример: $N = 2, r = 2$. В частном случае $N = 2$ -мерного линейного пространства с базисом $\{\psi_+, \psi_-\}$ пространство произвольных тензоров ранга r есть $rN = 4$ -мерное пространство с базисом $\{\psi_+ \otimes \psi_+, \psi_+ \otimes \psi_-, \psi_- \otimes \psi_+, \psi_- \otimes \psi_-\}$. Как мы уже обсуждали выше, при действии на этом пространстве операторов представления группы или алгебры согласно (3.38) или (3.39) пространство разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, каковыми являются подпространства симметричных и антисимметричных тензоров. В случае двумерного векторного пространства второе из них есть одномерное подпространство,

Таблица 5. Естественный выбор базиса в пространстве $V \otimes V$ — тензорном квадрате фундаментального представления su_N (стл. 1) и базисы в пространствах неприводимых представлений (стл. 4). *Коэффициентами Клебша-Гордана* называются элементы матрицы перехода между этими базисами

Базис в пространстве — тензорном квадрате	Базисы в пространствах неприводимых представлений
$\psi_+ \otimes \psi_+$	Φ_{++}
$\psi_+ \otimes \psi_-$, $\psi_- \otimes \psi_+$	Φ_{+-} , ϕ
$\psi_- \otimes \psi_-$	Φ_{--}

натянутое на элемент

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \otimes \psi_- - \psi_- \otimes \psi_+), \quad (3.52)$$

а первое есть трехмерное подпространство, натянутое на элементы

$$\begin{aligned} \Phi_{++} &= \psi_+ \otimes \psi_+, \\ \Phi_{+-} &= \Phi_{-+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \otimes \psi_- + \psi_- \otimes \psi_+), \\ \Phi_{--} &= \psi_- \otimes \psi_-. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Коэффициенты линейных комбинаций (3.52, 3.53) суть частные случаи *коэффициентов Клебша-Гордана* — вообще говоря, так называются коэффициенты перед тензорными мономами, составленных из векторов пространств неприводимых представлений, такие что полученная линейная комбинация снова отвечает вектору пространства некоторого неприводимого представления.

Формальный подход к задаче о коэффициентах Клебша-Гордана.

Если алгебра Ли, задана формально через соотношения Серра (3.42) и тождество Якоби (3.47), задача о вычислении коэффициентов Клебша-Гордана допускает общий подход, основанный существовании специального базиса в пространстве всякого неприводимого представления [74]. А именно, вектора $\{x_I\}_{i=1}^d$ (через d обозначена размерность пространства представления) этого базиса обладают следующими свойствами:

- Все вектора базиса являются общими собственными векторами попарно коммутирующих операторов $H_i: H_i x_I = \lambda_{Ii} x_I$, $i = \overline{1, N-1}$, $I = \overline{1, d}$.
- Один базисных векторов — такой вектор x_0 называется старшим — одновременно принадлежит ядрам всех операторов: $E_i x_0 = 0$, $i = \overline{1, N-1}$.
- Все вектора базиса получаются из старшего последовательным применением операторов $F_i: x_I = F_{i_1} \dots F_{i_k} x_0$, $I = \overline{1, d}$ — соотношения (3.42) гарантируют, что при этом будут снова получаться общие собственные вектора операторов H_i .

Таблица 6. Веса базисных векторов в пространствах трех простейших неприводимых представлений su_2 . Вектора скалярного и простейшего тензорного представлений могут быть реализованы как вектора в пространстве $V \otimes V$ — тензорном квадрате фундаментального представления (см. таб. 7).

Вес представ- ления	Веса базисных векторов		
	вектор		вес
0 скалярное, антисим-, метрическое	старший вектор	ϕ	0
1 векторное, фундаментальное	старший вектор	ψ_+	+1
		ψ_-	-1
2 тензорное, симметрическое	старший вектор	Φ_{++}	+2
		Φ_{+-}	0
		Φ_{--}	-2

Формальный подход в простейшем примере.

При определении группы $SU(2)$ как группы унитарных матриц пространство ее фундаментального представления есть двумерное комплексное пространство, которое одновременно является пространством фундаментального представления соответствующей алгебры Ли: алгебры антиэрмитовых матриц su_2 . При сопоставлении такого подхода формальному определению алгебры за оператор iH можно принять любую из матриц алгебры — обычно полагают

$$iH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

После этого за операторы E и F нужно принять такие матрицы, чтобы выполнялись соотношения (3.42), а именно:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Как мы обсуждали выше, эти матрицы можно рассматривать как матрицы линейных операторов, отвечающих элементам алгебры в фундаментальном представлении. Если в качестве базиса в пространстве представления выбрать собственные вектора оператора H :

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{так что } H\psi_+ = \psi_+, \quad H\psi_- = -\psi_-, \quad (3.56)$$

то можно непосредственно убедиться, что операторы E и F действуют на эти вектора как

$$E\psi_+ = 0, \quad F\psi_+ = \psi_-, \quad \text{а также } E\psi_- = \psi_+, \quad F\psi_- = 0. \quad (3.57)$$

Заметим также, что соотношение между собственными значениями базисных векторов следует непосредственно из коммутационных соотношений (3.42):

$$H\psi_- = HF\psi_+ = FH\psi_+ - 2F\psi_+ = -\psi_-. \quad (3.58)$$

Пространство тензоров ранга два на двумерном комплексном пространстве можно описать как пространство, натянутое на мономы

$$\{\psi_+ \otimes \psi_+, \psi_+ \otimes \psi_-, \psi_- \otimes \psi_+, \psi_- \otimes \psi_-\}. \quad (3.59)$$

При этом, если операторы группы и алгебры действуют на пространстве тензоров согласно (3.39) и (3.38), то все эти мономы являются собственными векторами оператора H :

$$H(\psi_+ \otimes \psi_+) = 2\psi_+ \otimes \psi_+, \quad (3.60)$$

$$H(\psi_+ \otimes \psi_-) = H(\psi_- \otimes \psi_+) = 0,$$

$$H(\psi_- \otimes \psi_-) = -2\psi_- \otimes \psi_-. \quad (3.61)$$

Старшие вектора неприводимых представлений также являются собственными векторами оператора H , так что каждый из таковых должен быть равен линейной комбинации мономов с одним и тем же собственным значением. Собственным значениям $+2$ и -2 отвечают по одному моному, причем первый является старшим вектором:

$$E(\psi_+ \otimes \psi_+) = 0, \quad (3.62)$$

а второй нет:

$$E(\psi_- \otimes \psi_-) = \psi_- \otimes \psi_+ + \psi_+ \otimes \psi_- \neq 0. \quad (3.63)$$

Собственному значению 0 соответствует двумерное подпространство, натянутое на два оставшихся монома, которое содержит один старший вектор:

$$\begin{aligned} E\Phi &\equiv 0, \\ E\phi = (\alpha + \beta)\psi_+ \otimes \psi_+ &= 0 \Rightarrow \alpha = \beta \end{aligned} \quad (3.64)$$

Пространство, натянутое на вектор

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \otimes \psi_- + \psi_- \otimes \psi_+), \quad (3.65)$$

является пространством одномерного (и тем самым неприводимого) представления: элементы алгебры действуют на нем как

$$H\phi = E\phi = F\phi = 0. \quad (3.66)$$

Второй из найденных старших векторов порождает трехмерное пространство с базисом

$$\begin{aligned} \Phi_{++} &\equiv \psi_+ \otimes \psi_+, & H\Phi_{++} &= 2\Phi_{++}, \\ \Phi_{+-} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}F\Phi_{++} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \otimes \psi_- + \psi_+ \otimes \psi_+), & H\Phi_{+-} &= 0, \\ \Phi_{--} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}F\Phi_{+-} = \psi_- \otimes \psi_-, & H\Phi_{--} &= -2\Phi_{--}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

которое также является представлением алгебры, причем можно убедиться, это представление также является неприводимым. Поскольку вектора

$\{\phi, \Phi_{++}, \Phi_{+-}, \Phi_{--}\}$ вместе образуют базис в исходном четырехмерном подпространстве, задача о разложении тензорного произведения пространств неприводимых представлений в сумму пространств неприводимых представлений в данном случае решена. Описанный подход применим к той же задаче и в общем случае.

Коэффициентами Клебша-Гордана в рассмотренном случае являются числовые множители перед тензорными мономами в выражениях (3.65, 3.67). Вообще говоря, для каждого из базисных векторов эти коэффициенты определены с точностью до общего множителя, поскольку определяющие свойства базиса (3.64, 3.67, 3.65, 3.67) сохраняются при умножении каждого из базисных векторов на число. Однако, в случае унитарной группы на коэффициенты налагают дополнительные условия, а именно нормируют базисные вектора на 1 относительно сохраняющегося под действием унитарной группы скалярного произведения — относительно такого произведения базисные вектора также оказываются попарно ортогональными. В рассмотренном случае дополнительные условия дают значения коэффициентов, стоящие в (3.65, 3.67).

Таблица 7. Естественный базис в пространстве $V \otimes V \otimes V$ (стл. 3), базисы в пространствах $\tilde{V} \otimes V$ (стл. 2) и $\tilde{V} \otimes V$ (стл. 4), получающиеся при раскрытии тензорного произведения, соответственно как $(V \otimes V) \otimes V$ и $V \otimes (V \otimes V)$, а также соответствующие базисы в пространствах неприводимых представлений (стл. 1 и 5). Коэффициентами Рака называются элементы матрицы перехода от базиса в стл. 1 к базису в стл. 5

Λ_{+++}	$\Phi_{++} \otimes \psi_+$	$\psi_+ \otimes \psi_+ \otimes \psi_+$	$\psi_+ \otimes \Phi_{++}$	Λ_{+++}
Λ_{++-} ,	$\psi_- \otimes \Phi_{++}$,	$\psi_+ \otimes \psi_+ \otimes \psi_-$,	$\Phi_{++} \otimes \psi_-$,	Λ_{++-} ,
λ_+ ,	$\psi_+ \otimes \Phi_{+-}$,	$\psi_+ \otimes \psi_- \otimes \psi_+$,	$\Phi_{+-} \otimes \psi_+$,	λ'_+ ,
μ_+	$\psi_+ \otimes \phi$	$\psi_- \otimes \psi_+ \otimes \psi_+$	$\phi \otimes \psi_+$	μ'_+
Λ_{+--} ,	$\psi_+ \otimes \Phi_{--}$,	$\psi_+ \otimes \psi_- \otimes \psi_-$,	$\Phi_{--} \otimes \psi_+$,	Λ_{+--} ,
λ_- ,	$\psi_- \otimes \Phi_{+-}$,	$\psi_- \otimes \psi_+ \otimes \psi_-$,	$\Phi_{+-} \otimes \psi_-$,	λ'_- ,
μ_-	$\psi_- \otimes \phi$	$\psi_- \otimes \psi_- \otimes \psi_+$	$\phi \otimes \psi_-$	μ'_-
Λ_{---}	$\psi_- \otimes \Phi_{--}$	$\psi_- \otimes \psi_- \otimes \psi_-$	$\Phi_{--} \otimes \psi_-$	Λ_{---}

Тензорное произведение трех представлений как сумма неприводимых представлений: произвол в выборе базиса и задача о коэффициентах Рака. Естественным обобщением задачи, рассмотренной выше, является аналогичная задача для тензорного произведения трех и более пространств неприводимых представлений. Здесь, однако, уже в простейшем случае в разложении имеется произвол: в восьмимерном линейном пространстве, натянутом на мономы старшие вектора неприводимых представлений с весом +1 образуют двумерное подпространство. Действительно, для всякого вектора

$$\Xi = \alpha\psi_+ \otimes \psi_+ \otimes \psi_- + \beta\psi_+ \otimes \psi_- \otimes \psi_+ + \gamma\psi_- \otimes \psi_+ \otimes \psi_+, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (3.68)$$

имеем:

$$H\Xi = \Xi \text{ и } E\Xi = (\alpha + \beta + \gamma)\psi_+ \otimes \psi_+ \otimes \psi_+. \quad (3.69)$$

В этом подпространстве, однако, имеется два выделенных базиса: это старшие вектора неприводимых представлений, полученных при последовательном разложении тензорного произведения как $(V \otimes V) \otimes V$ и как $V \otimes (V \otimes V)$, соответственно. Соответствующие коэффициенты α , β и γ даются квадратичными комбинациями коэффициентов Клеббша-Гордана и вычисляются путем последовательного применения описанной выше процедуры. *Коэффициентами Рака* называются элементы матрицы перехода между описанными базисами.

Для удобства выпишем здесь формулы и соотношения, на которые ниже будем часто ссылаться:

Канонический базис в алгебре su_3 (стл.1-8): каждое выражение следует умножить на i								
E_1	F_1	H_1	E_2	F_2	H_2	$[E_1, E_2]$	$[F_1, F_2]$	$[[E_1, E_2], [F_1, F_2]]$ $= H_1 + H_2$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3.70)

Базис в фундаментальном представлении su_3	
обозначение	веса
$ 0\rangle$	$(1, 0)$
$ 1\rangle$	$(-1, 1)$
$ 2\rangle$	$(0, -1)$

(3.71)

Действие элементов алгебры su_3 на базисных векторах фундаментального представления					
$H_1 0\rangle = 0\rangle$,	$H_2 0\rangle = 0$	$E_1 0\rangle = 0$,	$E_2 0\rangle = 0$	$F_1 0\rangle = 1\rangle$,	$F_2 0\rangle = 0$
$H_1 1\rangle = - 1\rangle$,	$H_2 1\rangle = 1\rangle$	$E_1 1\rangle = 0\rangle$,	$E_2 1\rangle = 0$	$F_1 1\rangle = 0$,	$F_2 1\rangle = - 2\rangle$
$H_1 2\rangle = 0$,	$H_2 2\rangle = - 1\rangle$	$E_1 2\rangle = 0$,	$E_2 2\rangle = 1\rangle$	$F_1 2\rangle = 0$,	$F_2 2\rangle = 0$

(3.72)

$$F_k E_k X = h_k X, \text{ для всякого старшего вектора } X: E_k X = 0, H_k X = h_k X, k = 1, 2. \quad (3.73)$$

3.3.2. Явное вычисление коэффициентов Рака для группы $SU(3)$ в частном случае

Точная формулировка задачи. Пусть X — старший вектор в пространстве неприводимого представления алгебры su_3 с весами (h_1, h_2) ($E_1 X = E_2 X = 0$, $H_1 X = h_1 X$, $H_2 X = h_2 X$), X' — вектор произвольного веса ($H_1 X' = h'_1 X$, $H_2 X' = h'_2 X$) в том же пространстве, а $|i\rangle$ — вектор базиса (3.37) фундаментального представления. Рассмотрим линейную комбинацию тензорных мономов

$$\mathcal{X}_1 = |i\rangle \otimes X \otimes |j\rangle + \sum_{i,j=0,1,2} c_{kl} |k\rangle \otimes X'_{kl} \otimes |l\rangle, \quad (3.74)$$

которая снова даст старший вектор некоторого неприводимого представления:

$$\begin{aligned} E_1 \mathcal{X}_1 &= E_2 \mathcal{X}_1 = 0, \\ H_1 \mathcal{X}_1 &= (h_1 + \delta_1) \mathcal{X}_1, \quad H_2 \mathcal{X}_1 = (h_2 + \delta_2) \mathcal{X}_1, \end{aligned} \quad (3.75)$$

причем этот вектор также лежит в тензорном произведении фундаментального и еще одного неприводимого представления: один раз

$$\mathcal{X}_i = |i\rangle \otimes Y + \sum_{j=0,1,2} \mathcal{C}_j |i\rangle \otimes Y'_j, \quad (3.76)$$

а другой

$$\tilde{\mathcal{X}}_i = Y \otimes |i\rangle + \sum_{j=0,1,2} \tilde{\mathcal{C}}_j Y'_j \otimes |j\rangle, \quad (3.77)$$

где через Y и Y' обозначены, соответственно, вектора старшего и произвольного весов в пространстве неприводимого представления.

Нас интересует матрица перехода

$$\mathcal{X}_i = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} U_{ij} \tilde{\mathcal{X}}_j. \quad (3.78)$$

Коэффициенты линейной комбинации (3.74) находятся из системы уравнений (3.75) и аналогичной системы для вектора Y . В результате ассоциативности тензорного произведения подпространства пространства тройных тензорных мономов, натянутые на наборы векторов $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ и $\{\tilde{\mathcal{X}}_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ совпадают. Чтобы получить матрицу перехода, достаточно вычислить произвольные \mathcal{N} коэффициентов в линейных комбинациях (3.74, 3.75).

Возможны три случая.

Случай $\mathcal{X} = |0\rangle \otimes X \otimes |1\rangle + \dots$ ($\delta_1 = 0, \delta_2 = 1$) В этом случае коэффициенты линейных комбинаций вычисляются по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{Y_1} = |1\rangle \otimes X + \mathcal{C}_{X,1} |0\rangle \otimes E_1 X & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}_1 = \boxed{Y_1} \otimes |0\rangle = \\ \uparrow & & \underline{|1\rangle \otimes X \otimes |0\rangle} + \mathcal{C}_{X,1} |0\rangle \otimes E_1 X \otimes |0\rangle \\ X & & \\ \downarrow & & \\ \boxed{Y_0} = |0\rangle \otimes X & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}_0 = \boxed{Y_0} \otimes |1\rangle + \mathcal{C}_{Y,1} E_1 Y \otimes |0\rangle = \\ \downarrow \Delta(E_1) & & \underline{|0\rangle \otimes X \otimes |1\rangle} + \\ |1\rangle \otimes X + |0\rangle \otimes E_1 X & & \underline{\underline{\mathcal{C}_{Y,1} |1\rangle \otimes X \otimes |0\rangle}} + \mathcal{C}_{Y,1} |0\rangle \otimes E_1 X \otimes |0\rangle \end{array}, \quad (3.79)$$

так что искомые вектора равны

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{C}_{Y,1} & \mathcal{C}_{X,1} \\ 0 & 1 & \mathcal{C}_{X,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \otimes X \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes X \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes E_1 X \otimes |0\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Аналогичным образом находятся соответствующие выражения для второй пары векторов:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{Y,1} & 1 & \mathcal{C}_{Y,1} \\ 1 & 0 & \mathcal{C}_{X,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \otimes X \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes X \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes E_1 X \otimes |0\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Каждая из пар векторов (3.80) и (3.81) образует базис в двумерном подпространстве пространства $\{|0\rangle \otimes X \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes X \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes E_1 X \otimes |0\rangle\}$, которое задается системой уравнений (3.75). Матрица перехода вычисляется по матрицам в (3.80), (3.81) с помощью любой пары соответственных подматриц 2×2 , например:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{10} \\ U_{01} & U_{00} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{Y,1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C_{Y,1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{Y,1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -C_{Y,1}^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_{Y,1} & 1 - C_{Y,1}^2 \\ 1 & -C_{Y,1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Заметим, что в этом случае выражения для старших векторов содержат только два вектора фундаментального представления $|0\rangle$ и $|1\rangle$, а также только один понижающий оператор E_1 — так что здесь, мы, на самом деле, имеем дело лишь с su_2 подалгеброй алгебры su_3 .

Случай $\mathcal{X} = |1\rangle \otimes X \otimes |2\rangle + \dots$ ($\delta_1 = -1, \delta_2 = 0$). Этот случай по существу аналогичен предыдущему — достаточно во всех формулах заменить $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ и $E_1 \rightarrow E_2$:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{Y_2} = |2\rangle \otimes X + C_{X,2} |1\rangle \otimes E_2 X & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}_2 = \boxed{Y_2} \otimes |1\rangle = \\ \uparrow & & \underline{|2\rangle \otimes X \otimes |1\rangle} + C_{X,2} |1\rangle \otimes E_2 X \otimes |1\rangle \\ X & & \\ \downarrow & & \\ \boxed{Y_1} = |1\rangle \otimes X & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}_1 = \boxed{Y_1} \otimes |2\rangle + C_{Y,2} E_2 Y \otimes |1\rangle = \\ \downarrow \Delta(E_2) & & \underline{|1\rangle \otimes X \otimes |2\rangle} + \\ |2\rangle \otimes X + |1\rangle \otimes E_2 X & & \underline{C_{Y,2} |2\rangle \otimes X \otimes |1\rangle} + C_{Y,2} |1\rangle \otimes E_2 X \otimes |1\rangle. \end{array} \quad (3.83)$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{pmatrix} U_{22} & U_{21} \\ U_{12} & U_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{Y,2} & 1 - C_{Y,2}^2 \\ 1 & -C_{Y,2} \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Случай $|0\rangle \otimes X \otimes |2\rangle + \dots$ ($\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$). Этот именно тот случай, который впервые возникает для алгебры su_3 : в выражения впервые содержат все три вектора фундаментального

случай $|2\rangle \otimes X + \dots$, новый для алгебры su_3 .

$$Y = |2\rangle \otimes X + |1\rangle \otimes \mathcal{C}_2 E_2 X + |0\rangle \otimes (\mathcal{C}_{12} E_1 E_2 + \mathcal{C}_{21} E_1 E_2) X \quad (3.91)$$

$$\boxed{F_2 Y = 0} \Rightarrow |1\rangle \otimes (1 + h_2 \mathcal{C}_3) X + |0\rangle \otimes (h_2 \mathcal{C}_{12} + (h_2 + 1) \mathcal{C}_{21}) E_1 X = 0 \quad (3.92)$$

$$\boxed{F_1 Y = 0} \Rightarrow |0\rangle \otimes (\mathcal{C}_2 + (h_1 + 1) \mathcal{C}_{12} + h_2 \mathcal{C}_{21}) E_2 X = 0$$

$$\boxed{\mathcal{C}_1 = -\frac{1}{h_1}, \quad \mathcal{C}_2 = -\frac{1}{h_2}, \quad \mathcal{C}_{12} = -\frac{h_2 + 1}{h_2(h_1 + h_2 + 1)}, \quad \mathcal{C}_{21} = \frac{1}{h_1 + h_2 + 1}.} \quad (3.93)$$

Разложение для старших векторов в нашей нормировке Для справок выпишем явные выражения для старших векторов в нашей нормировке:

$$\boxed{Y_1 = |1\rangle \otimes X - \frac{1}{h_1} |0\rangle \otimes \mathcal{C}_1 E_1 X.} \quad (3.94)$$

$$\boxed{Y_2 = |2\rangle \otimes X - \frac{1}{h_2} |1\rangle \otimes \mathcal{C}_2 E_2 X + \frac{1}{h_1 + h_2 + 1} |0\rangle \otimes \left(E_1 E_2 - \frac{h_2 + 1}{h_2} E_1 E_2 \right) X.} \quad (3.95)$$

Матрицы Рака С помощью вычисленных коэффициентов Клебша-Гордана получаем окончательные выражения для матриц перехода: в нашей нормировке

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 1 - \frac{1}{u^2} \\ 1 & -\frac{1}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{11} & \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{U}_{21} & \mathcal{U}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{N}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

где \mathcal{U} — матрица Рака в стандартной нормировке, а \mathcal{N} и $\tilde{\mathcal{N}}$ — нормы базисных векторов. Получить элементы матрицы \mathcal{U} не обязательно вычислять эти нормы — достаточно воспользоваться тем, что сопряжение диагональной матрицей сохраняет циклические комбинации элементов (в данном случае $U_{11} = \mathcal{U}_{11}$, $U_{22} = \mathcal{U}_{22}$ и $U_{12}U_{21} = \mathcal{U}_{12}\mathcal{U}_{21}$), а также известным фактом, что матрица Рака в стандартной нормировке симметрична [74]. В результате получаем:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & \sqrt{U_{12}U_{21}} \\ \sqrt{U_{12}U_{21}} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{\sqrt{(u-1)(u+1)}}{u} \\ \frac{\sqrt{(u-1)(u+1)}}{u} & -\frac{1}{u} \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Параметр u берется из таблицы

$\mathcal{X}_1 =$	$ 0\rangle \otimes X \otimes 1\rangle + \dots$	$ 1\rangle \otimes X \otimes 2\rangle + \dots$	$ 0\rangle \otimes X \otimes 2\rangle + \dots$
u	$h_1 + 1$	$h_2 + 1$	$h_1 + h_2 + 2$

(3.98)

и дается общей формулой

$$\boxed{\mathcal{X}_1 = |i\rangle \otimes X \otimes |j\rangle + \dots \Rightarrow u = \sum_{k=i+1}^j h_k + j - i,} \quad (3.99)$$

которая при переходе от весов h_k представления к длинам строк s_k в его диаграмме Юнга — по определению $s_{n-k+1} = \sum_{i=1}^k h_i$, где n — число ненулевых h_i и, соответственно, строк в диаграмме — воспроизводит (3.24).

3.3.3. Обобщение решения классической задачи о коэффициентах Рака на случай квантовой группы

“Квантовая деформация” классической задачи: ключевые наблюдения

Ответ. Мы начнем с формулировки ответа. Он сводится к замене

$$n \longrightarrow [n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} q^k \quad (3.100)$$

в формуле (3.97), где

$$u = n - 1, n, n + 1. \quad (3.101)$$

Полином $[n]_q$ от формальной переменной q называется *квантовым числом* n .

Результат (3.101) можно вывести непосредственно. При этом достаточно использовать следующие два свойства квантовых групп и квантовых чисел:

- Вместо соотношения (3.73) имеем для всякого старшего вектора X

$$\boxed{F_k E_k X = [h_k]_q X, \quad E_k X = 0, \quad H_k X = h_k X, \quad k = 1, 2.} \quad (3.102)$$

- Для всяких целых k, m, n выполнено билинейное соотношение

$$\begin{vmatrix} [n]_q & [n+k]_q \\ [n+m]_q & [n+m+k]_q \end{vmatrix} = [m]_q [k]_q. \quad (3.103)$$

Последнее соотношение есть частный случай “правила квантования” детерминанта

$$\det_{i,j} \left\| \left[n + \sum_{a=1}^i k_a + \sum_{b=1}^j m_b \right]_q \right\| = \prod_{i,j} [k_i]_q [m_j]_q, \quad (3.104)$$

которое лежит в основе обобщений ряда теорем и формул со случая классических групп на случай квантовых [115, 116, 117]. — заметим, что это соотношение нетривиально, поскольку, вообще говоря, $[k]_q + [m]_q \neq [k+m]_q$ и $[km]_q \neq [k]_q [m]_q$.

Мы не приводим здесь подробного вывода результата (3.101), поскольку буквально повторяет вычисление из разд. 3.3.2 с точностью до двух указанных замен во всех формулах.

Квантовая группа $U_q(su_N)$: определение и основные свойства В заключение раздела дадим понятие о формальном определении квантовой группы — хотя таковое и не требуется для наших целей.

Коммутационные соотношения При более последовательном рассмотрении квантовая группа получается из соответствующей классической алгебры Ли путем замены части линейных коммутационных соотношений (3.42) на выражения, вообще говоря, содержащие бесконечные формальные ряды по генераторам алгебры. В частности, группа $U_q(su_N)$ определяется с помощью соотношения

$$[E_k, F_k] = \frac{q^{H_k} - q^{-H_k}}{q - q^{-1}}, \quad (3.105)$$

которое переходит в соответствующее соотношение для алгебры su_2 при $q \rightarrow 1$. Выражение в правой части (3.105), строго говоря, является элементом не алгебры Ли, а ее *универсальной обертывающей* — поскольку такая величина как квадрат генератора в самой алгебре не определена. Для нас, однако, эта тонкость не существенна: во всех случаях мы рассматриваем некоторое представление алгебры, а под произведением генераторов подразумеваем композицию соответствующих линейных операторов.

Коумножение. Основное свойство соотношений (3.105) в том, что они несовместны с наивным законом (3.39) действия элементов алгебры на тензора. Поэтому для квантовой группы существенно аккуратное определение соответствующей операции — обсуждавшейся выше операции коумножения, с заменой (3.49) на более сложные и разные для разных генераторов алгебры выражения

$$\begin{aligned}\Delta(E_i) &= I \otimes E_i + E_i \otimes q^{-H_i}, \\ \Delta(F_i) &= q^{H_i} \otimes F_i + F_i \otimes I, \\ \Delta(H_i) &= I \otimes H_i + H_i \otimes I,\end{aligned}\tag{3.106}$$

Упражнение: коумножение сохраняет коммутационные соотношения В согласии (3.106) с (3.105) можно убедиться непосредственно, например:

$$F_k E_k (T_l) = [F_k, E_k] T_l = \delta_{k,l} T_l\tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}F(Y \otimes X) &= q^{h_Y} Y \otimes F X + F Y \otimes X \\ EF(Y \otimes X) &= q^{h_Y} Y \otimes E F X + q^{h_Y - h_X + 2} E Y \otimes F X + F Y \otimes E X + q^{-h_X} E F Y \otimes X \\ E(Y \otimes X) &= Y \otimes E X + q^{-h_X} E Y \otimes X \\ FE(Y \otimes X) &= q^{h_Y} Y \otimes F E X + q^{-h_X} F Y \otimes E X + q^{-h_X + h_Y + 2} E Y \otimes F X + q^{-h_X} F E Y \otimes X,\end{aligned}\tag{3.108}$$

так что

$$\begin{aligned}[E, F](Y \otimes X) &= q^{h_Y} T \otimes [E, F] X + q^{-h_X} [E, F] Y \otimes X = \\ &= q^{h_Y} \frac{q^{h_X} - q^{-h_X}}{q - q^{-1}} Y \otimes X + q^{-h_X} \frac{q^{h_Y} - q^{-h_Y}}{q - q^{-1}} Y \otimes X = \\ &= \frac{q^{h_X + h_Y} - q^{-h_X - h_Y}}{q - q^{-1}} Y \otimes X = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} Y \otimes X.\end{aligned}\tag{3.109}$$

3.4. Явное вычисление (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ с помощью диагональных \mathcal{R} -матриц и коэффициентов Рака

В заключение раздела приведем сводку явных формул для вычисления (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ узлов, представленных в виде замыканий кос, содержащих от 2 до 7 прядей. Соответствующие выражения получаются непосредственно с помощью общих правил, изложенных в разд. 3.2 — если принять сформулированную там гипотезу об общем виде необходимых коэффициентов Рака (формулы 3.22, 3.24).

3.4.1. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для двупрядных кос

В данном случае мы еще раз приходим к выражению

$$\mathcal{H}_{\square}^{(a)} = q^a S_{[2]} + \left(-\frac{1}{q}\right)^a S_{[11]} \equiv q^a S_{[2]} + (\text{зерк. симм.}),\tag{3.110}$$

уже дважды полученному другими путями: в разд. 2.1 (формула 2.6) с помощью группы кос и в разд. 2.2 (формула 2.50) путем непосредственного применения метода \mathcal{R} -матриц. Обратим внимание, выражение (3.110) не содержит ни матричных следов, ни коэффициентов Рака.

3.4.2. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для трехрядных кос

На этот раз в конечном выражении

$$\mathcal{H}_{\square}^{(a_1 b_1 | a_2 b_2 | \dots)} = q^{\sum_i (a_i + b_i)} S_{[3]} + (\text{зерк. симм.}) + \left(\text{Tr}_{2 \times 2} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[21]}^{a_i} U_{[21]} \mathcal{R}_{[21]}^{b_i} U_{[21]}^\dagger \right) \right) \cdot S_{[21]} \quad (3.111)$$

остается след от матрицы 2×2 , элементы которой зависят от доступных в литературе коэффициентов Рака для квантовой группы $U_q(su_2)$. Здесь $(\text{зерк. симм.}) = \left(-\frac{1}{q}\right)^{\sum_i (a_i + b_i)} S_{[111]}$ и

$$\mathcal{R}_{[21]} = \begin{pmatrix} q & \\ & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[21]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

Выражение (3.111) как и должно совпадает с полученными ранее для того же случая формулами (2.17) и (2.60).

3.4.3. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для четырехрядных кос

В этом случае конечное выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\square}^{(a_1 b_1 c_1 | a_2 b_2 c_2 | \dots)} &= q^{\sum_i (a_i + b_i + c_i)} S_{[4]} + \\ &+ S_{[31]} \cdot \text{Tr}_{3 \times 3} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[31]}^{a_i} U_{[31]} \mathcal{R}_{[31]}^{b_i} V_{[31]} U_{[31]} \mathcal{R}_{[31]}^{c_i} U_{[31]}^\dagger V_{[31]}^\dagger U_{[31]}^\dagger \right) + (\text{зерк. симм.}) + \\ &+ S_{[22]} \cdot \text{Tr}_{2 \times 2} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[22]}^{a_i} U_{[22]} \mathcal{R}_{[22]}^{b_i} V_{[22]} U_{[22]} \mathcal{R}_{[22]}^{c_i} U_{[22]}^\dagger V_{[22]}^\dagger U_{[22]}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (3.113)$$

содержит уже три матричных следа: два от матриц 2×2 и один от матрицы 3×3 . Для явного вычисления элементов этих матриц, однако, все еще достаточно коэффициентов Рака для квантовой группы $U_q(sl_2)$. На этот раз (зерк. симм.) содержит вклады двух диаграмм $Q = [211]$ и $Q = [1111]$, а

$$\mathcal{R}_{[31]} = \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[31]} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} & \end{pmatrix}, \quad V_{[31]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

и

$$\mathcal{R}_{[22]} = \begin{pmatrix} q & \\ & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[22]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad V_{[22]} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

3.4.4. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для пятирядных кос

Это первый случай, в котором доступных в справочной литературе величин оказывается недостаточно: необходимы коэффициенты Рака для группы $U_q(su_3)$, непосредственное вычисление

которых приведено в разд. 3.3. В качестве конечного ответа имеем выражение

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\square}^{(a_1 b_1 c_1 d_1 | a_2 b_2 c_2 d_2 | \dots)} &= q^{\sum_i (a_i + b_i + c_i + d_i)} S_{[5]} + \tag{3.116} \\
&+ S_{[41]} \cdot \text{Tr}_{4 \times 4} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[41]}^{a_i} U_{[41]} \mathcal{R}_{[41]}^{b_i} V_{[41]} U_{[41]} \mathcal{R}_{[41]}^{c_i} W_{[41]} V_{[41]} U_{[41]} \mathcal{R}_{[41]}^{d_i} U_{[41]}^\dagger V_{[41]}^\dagger W_{[41]}^\dagger U_{[41]}^\dagger V_{[41]}^\dagger U_{[41]}^\dagger \right) + \\
&+ S_{[32]} \cdot \text{Tr}_{5 \times 5} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[32]}^{a_i} U_{[32]} \mathcal{R}_{[32]}^{b_i} V_{[32]} U_{[32]} \mathcal{R}_{[32]}^{c_i} W_{[32]} V_{[32]} U_{[32]} \mathcal{R}_{[32]}^{d_i} U_{[32]}^\dagger V_{[32]}^\dagger W_{[32]}^\dagger U_{[32]}^\dagger V_{[32]}^\dagger U_{[32]}^\dagger \right) + \\
&\quad + \left(\text{зерк. симм.} \right) + S_{[311]} \cdot \\
&\cdot \text{Tr}_{6 \times 6} \prod_i \left(\mathcal{R}_{[311]}^{a_i} U_{[311]} \mathcal{R}_{[311]}^{b_i} V_{[311]} U_{[311]} \mathcal{R}_{[311]}^{c_i} W_{[311]} V_{[311]} U_{[311]} \mathcal{R}_{[311]}^{d_i} U_{[311]}^\dagger V_{[311]}^\dagger W_{[311]}^\dagger U_{[311]}^\dagger V_{[311]}^\dagger U_{[311]}^\dagger \right),
\end{aligned}$$

где (зерк. симм.) содержит вклады уже трех диаграмм $Q = [2111]$, $[221]$ и $[11111]$, а

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[41]} &= \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \\ & & q & \\ & & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[41]} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ & & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix}, \tag{3.117} \\
V_{[41]} &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & \\ & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad W_{[41]} = \begin{pmatrix} & -\frac{1}{[4]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} & \\ & \frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} & \frac{1}{[4]_q} & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{R}_{[32]} &= \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \\ & & -\frac{1}{q} & \\ & & & q \\ & & & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[32]} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \\ & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} & \\ & & & -\frac{1}{[2]_q} & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ & & & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix} \tag{3.118} \\
V_{[32]} &= \begin{pmatrix} & -\frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & \\ & \frac{\sqrt{[2]_q [4]_q}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad W_{[32]} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{1}{[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \\ & & -\frac{1}{[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ & & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \\ & & & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[311]} &= \begin{pmatrix} q & & & & & \\ & q & & & & \\ & & -\frac{1}{q} & & & \\ & & & q & & \\ & & & & -\frac{1}{q} & \\ & & & & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[311]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -\frac{1}{[2]_q} - \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & & & & \\ & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} & & & \\ & & & -\frac{1}{[2]_q} - \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & & \\ & & & & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & -\frac{1}{[2]_q} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.119) \\
V_{[311]} &= \begin{pmatrix} & -\frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & & & \\ & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -\frac{1}{[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} \\ & & & & & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} \end{pmatrix}, \\
W_{[311]} &= \begin{pmatrix} & & & & -1 & & \\ & & & & & -\frac{1}{[4]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q} \\ & & & & & & -\frac{1}{[4]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q} \\ & & & & & & & \frac{1}{[4]_q} \\ & & & & & & & \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q} \\ & & & & & & & \frac{1}{[4]_q} \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В качестве приложения приведенных формул мы вычислили (отсутствующие в стандартных таблицах) коэффициенты разложения по характерам полиномов ХОМФЛИ для всех 5-рядных узлов с 9-ю пересечениями. Ответы приведены в приложении Б.1.

3.4.5. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для шестипрядных кос

В данном случае имеем выражение

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\square}^{(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 | a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 | \dots)} &= q^{\sum_i (a_i + b_i + c_i + d_i + e_i)} S_{[6]} + (\text{зерк. симм.}) + \quad (3.120) \\
&+ \sum_Q S_Q \cdot \text{Tr} \prod_i (\mathcal{R}_Q^{a_i} U_Q \mathcal{R}_Q^{b_i} V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{c_i} W_Q V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{d_i} Y_Q W_Q V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{e_i} U_Q^\dagger V_Q^\dagger W_Q^\dagger Y_Q^\dagger U_Q^\dagger V_Q^\dagger W_Q^\dagger U_Q^\dagger V_Q^\dagger U_Q^\dagger),
\end{aligned}$$

для явных вычислений с помощью которого все еще достаточно коэффициентов Рака для квантовой группы $U_q(su_3)$. В выражении выше стоит сумма по четырем диаграммам Юнга [51], [42], [411], [33], к которой следует добавить вклады транспонированных диаграмм [21111], [2211], [3111],

[222], а также диаграммы $Q = [321]$. При этом вклад диаграмм [6] и [11111], переходящих друг в друга при транспонировании, выписаны явно в первой строке формулы: оба соответствующих представления возникают в разложении шестой тензорной степени фундаментального представления без кратностей, так что им соответствуют матрицы 1×1 — числа q и $-1/q$, соответственно. Явные формулы для перебрасывающих матриц приведены в приложении А.1. С помощью этих формул мы вычислили (ранее недоступные в справочной литературе) коэффициенты разложения по характерам полиномов ХОМФЛИ для всех 6-прядных узлов с 10-ю пересечениями. Ответы приведены в приложении Б.2.

3.4.6. Расширенные полиномы ХОМФЛИ для семипрядных кос

Здесь впервые оказывается недостаточно непосредственно проделанных вычислений: матричные элементы зависят от коэффициентов Рака для группы $U_q(su_4)$. Таким образом, это первый из случаев, который опирается на гипотезу об общем виде этих коэффициентов и вычисления в котором одновременно послужили ее проверкой.

Формула в данном случае полностью аналогична формуле (3.120) — к нее следует добавить лишь один новый компонент: $\mathcal{R}_Q^{f_i}$ (вместе с соответствующей перебрасывающей матрицей Z_Q):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\square}^{(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 | a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 | \dots)} &= q^{\sum_i (a_i + b_i + c_i + d_i + e_i + f_i)} S_{[7]} + (\text{зерк. симм.}) + \\ &+ \sum_Q S_Q \cdot \text{Tr} \prod_i (\mathcal{R}_Q^{a_i} U_Q \mathcal{R}_Q^{b_i} V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{c_i} W_Q V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{d_i} Y_Q W_Q V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{e_i} Z_Q Y_Q W_Q V_Q U_Q \mathcal{R}_Q^{f_i} \cdot \\ &\cdot U_Q^\dagger V_Q^\dagger W_Q^\dagger Y_Q^\dagger Z_Q^\dagger U_Q^\dagger V_Q^\dagger W_Q^\dagger Y_Q^\dagger U_Q^\dagger V_Q^\dagger W_Q^\dagger U_Q^\dagger V_Q^\dagger U_Q^\dagger). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Теперь перебрасывающие матрицы могут иметь размер вплоть до 35×35 (для диаграммы [421]). Явный вид этих матриц приведен в приложении А.2. В качестве примера применения этих формул мы вычислили коэффициенты разложения по характерам полинома ХОМФЛИ для всех 7-прядного узла 12 пересечениями. Ответы приведены в приложении Б.3 (в стандартных таблицах полиномов узлов они не приводятся).

3.5. Полином ХОМФЛИ как сумма по путям на графе Юнга

Если использовать формулы предыдущего раздела для вычисления не полиномов ХОМФЛИ, а самих \mathcal{R} -матриц, можно убедиться, что эти матрицы имеют весьма простую структуру. Именно, ненулевые элементы матрицы \mathcal{R}_j (3.10) стоят в точности на тех же позициях, что и ненулевые элементы перебрасывающей матрицы U_j (3.13), причем первые получаются из последних лишь множителем — степенью параметра q . Как мы поясним ниже (см. разд. 3.5.4), положение ненулевых элементов в матрице \mathcal{R}_j следует из ее замечательного свойства: матрица никогда не смешивает различные (неизоморфные) представления в разложении тензорного произведения, на которое действует [74]. В результате этого оказывается удобным описать структуру матрицы \mathcal{R}_j (и тем самым матрицы U_j) в терминах путей на графе Юнга (см. рис. 18). Вид самих матричных элементов, в свою очередь, можно вывести из уравнения Янга — Бакстера, что мы и сделаем в разд. 4.3.1. Более того, далее можно получить элементы матрицы U_j , приведенные в разд. 3.4 в качестве гипотезы (из условия самосогласованности процедуры коумножения для \mathcal{R} -матриц [34]). Наконец, конструкцию удастся обобщить на случай некоторых старших представлений группы $SU(N)$: а именно, на случай представлений типа крюков (мы рассмотрим этот случай в разд. 4.3.2). Это, в частности, позволяет доказать ранее известное [118] соотношение между раскрашенными полиномами ХОМФЛИ для таких представлений в двойном скейлинговом пределе.

Сейчас, перед тем как перейти к изложению общей процедуры вычисления полинома ХОМФЛИ как суммы по путям на графе Юнга и ее обоснованию, мы продемонстрируем, как эта процедура работает в простейших случаях.

3.5.1. Сумма по путям для двупрядных кос

В данном случае имеем всего два представления $Q = [2]$ и $Q = [11]$ и по одной матрице \mathcal{R}_1 для каждого. Соответствующие графы Юнга даются любыми двумя подграфами графа на рис. 18 с корнями в диаграммах $[2]$ и $[11]$, соответственно.

Граф Юнга в случае $\mathbf{Q} = [2]$ содержит единственный путь $[1] \rightarrow [2]$ (например, отвечающий листу **1** графа на рис. 18), на котором к диаграмме $[1]$ добавляется клетка в *строку*, так что получается диаграмма $[2]$. По нашим правилам этому пути отвечает матрица 1×1 , единственный элемент которой есть $\mathcal{R}_{1|[2]} = q$.

Для $\mathbf{Q} = [11]$ также имеем один путь $[1] \rightarrow [11]$ (например, к листу **3** графа на рис. 18), но на этот раз клетка добавляется к диаграмме $[1]$ в *столбец*. По нашим правилам это отвечает матрице $\mathcal{R}_{1|[11]} = -1/q$.

Те же самые величины, q и $-1/q$, стоят в основании экспонент перед характеристиками $S_{[2]}^*$ и $S_{[11]}^*$, соответственно, в разложении (3.110) для полиномов ХОМФЛИ узлов и зацеплений — замыканий двупрядных кос.

3.5.2. Сумма по путям для трехрядных кос

В этом случае имеем три графа Юнга: это любые три подграфа на рис. 18 с корнями $[3]$, $[21]$ и $[111]$, соответственно. Два из этих графов, отвечающие представлениям $\mathbf{Q} = [3]$ и $[111]$ по прежнему содержат по одному пути: $[1] \rightarrow [2] \rightarrow [3]$ (например, к листу **1**) и $[1] \rightarrow [11] \rightarrow [111]$ (например, к листу **3**), соответственно. При этом на в первом случае на обоих шагах новая клетка добавляется в *строку*, а во втором — в *столбец*, так что наши правила дают $\mathcal{R}_{1|[3]} = \mathcal{R}_{2|[3]} = q$ и $\mathcal{R}_{1|[3]} = \mathcal{R}_{2|[3]} = -1/q$.

Случай диаграммы $\mathbf{Q} = [21]$, однако, отличается от двух предыдущих. Теперь граф Юнга содержит два пути: путь $[1] \rightarrow [2] \rightarrow [21]$ (например, к листу **2**), на котором клетка сначала добавляется в *строку*, затем в *столбец*, и путь $[1] \rightarrow [11] \rightarrow [21]$ (например, к листу **3**) с обратным порядком добавления клеток. Согласно нашим правилам такой паре путей отвечают две матрицы размера 2×2 : матрица $\mathcal{R}_{1|[21]}$ диагональна, причем ее элементы, отвечающие левому и правому пути суть q и $-1/q$, соответственно, в то время как матрица $\mathcal{R}_{2|[21]}$ не диагональна:

$$\mathcal{R}_{1|[21]} = \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{2|[21]} = \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} -1/q^2 & \sqrt{[3]_q} \\ \sqrt{[3]_q} & q^2 \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

Входящий в выражение параметр $[2]_q \equiv q + q^{-1}$ есть длина крюка (рис. 16 I) между двумя клетками, порядком добавления которых различаются пути. При этом параметр $[3]_q \equiv q^2 + 1 + q^{-2}$ не является независимым, а возникает при вычислении выражения $\sqrt{1 - \frac{1}{[2]_q^2}}$.

Точно такая же матрица получится, если вычислить произведение $U_{[21]} \mathcal{R}_{[21]} U_{[21]}$ матриц из (3.112) — так что с помощью описанных правил мы снова приходим к выражениями для коэффициентов трехрядного разложения по характеристам (3.111).

3.5.3. Сумма по путям для четырехрядных кос

Три из пяти различных графов Юнга для этого случая на рис. 18 отвечают всяким подграфам с корнями в диаграммах $[31]$, $[22]$ и $[221]$. Двух оставшихся графов, с корнями $[4]$ и $[1111]$, рисунок не содержит.

Для диаграмм $\mathbf{Q} = [4]$ и $[1111]$ имеем по три одинаковых матрицы размеров 1×1 : $\mathcal{R}_{1|[4]} = \mathcal{R}_{2|[4]} = \mathcal{R}_{3|[4]} = q$ и $\mathcal{R}_{1|[1111]} = \mathcal{R}_{2|[1111]} = \mathcal{R}_{3|[1111]} = -1/q$.

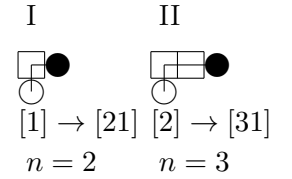


Рис. 16. Добавление пары клеток (обозначены кругами) к диаграмме Юнга: порядок добавления может быть различным

Граф Юнга для диаграммы $\mathbf{Q} = [31]$ содержит три пути — например, к листьям **1**, **2**, **3** на рис. 18, соответственно:

$$\alpha = [1] \rightarrow [2] \rightarrow [3] \rightarrow [31], \quad \beta = [1] \rightarrow [2] \rightarrow [21] \rightarrow [31], \quad \gamma = [1] \rightarrow [11] \rightarrow [21] \rightarrow [31].$$

Пути β и γ различаются порядком добавления двух клеток на втором шаге, а пути α and β — на третьем. При этом длина крюка между добавленными клетками равна 3 в первом случае (рис. 16 I) и 2 во втором случае (рис. 16 II). В соответствии с нашими правилами для диаграммы $[31]$ имеем

$$\mathcal{R}_{1|[31]} = \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{2|[31]} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{3|[31]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^3[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & 0 \\ \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (3.123)$$

Случай диаграммы $Q = [211]$ аналогичен: три отвечающих ей пути — например, к листьям **15**, **16**, **17** — суть, соответственно,

$$\bar{\alpha} = [1] \rightarrow [2] \rightarrow [21] \rightarrow [211], \quad \bar{\beta} = [1] \rightarrow [11] \rightarrow [21] \rightarrow [211], \quad \bar{\gamma} = [1] \rightarrow [11] \rightarrow [111] \rightarrow [211],$$

так что наши правила приводят к матрицам

$$\mathcal{R}_{1|[211]} = \begin{pmatrix} q & & \\ & -\frac{1}{q} & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{2|[211]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{3|[211]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q^3[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} \\ 0 & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} \end{pmatrix}. \quad (3.124)$$

Наконец, для диаграммы $\mathbf{Q} = [22]$ граф Юнга содержит два пути, ведущих, например, к листьям **4** и **5** на рис. 18:

$$\delta = [1] \rightarrow [2] \rightarrow [21] \rightarrow [22] \quad \text{и} \quad \bar{\delta} = [1] \rightarrow [11] \rightarrow [21] \rightarrow [22]$$

и связаны заменой порядка добавления клеток на втором шаге. По нашим правилам все матрицы в таком случае имеют размер 2×2 , причем обе матрицы $\mathcal{R}_{1|[22]}$ и $\mathcal{R}_{3|[22]}$ диагональны, в отличие от матрицы $\mathcal{R}_{2|[22]}$:

$$\mathcal{R}_{1|[22]} = \mathcal{R}_{3|[22]} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{2|[22]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}. \quad (3.125)$$

Как и в предыдущих случаях, диагональные элементы q и $-1/q$ отвечает добавлению клеток на двух последовательных шагах в одну *строку* и *столбец*, соответственно, а параметр в блоке 2×2 определяется соответствующей длиной крюка (рис. 16 I).

Полученные таким образом матрицы совпадают с матрицами, которые можно вычислить непосредственно по формулам разд. 3.4.3.

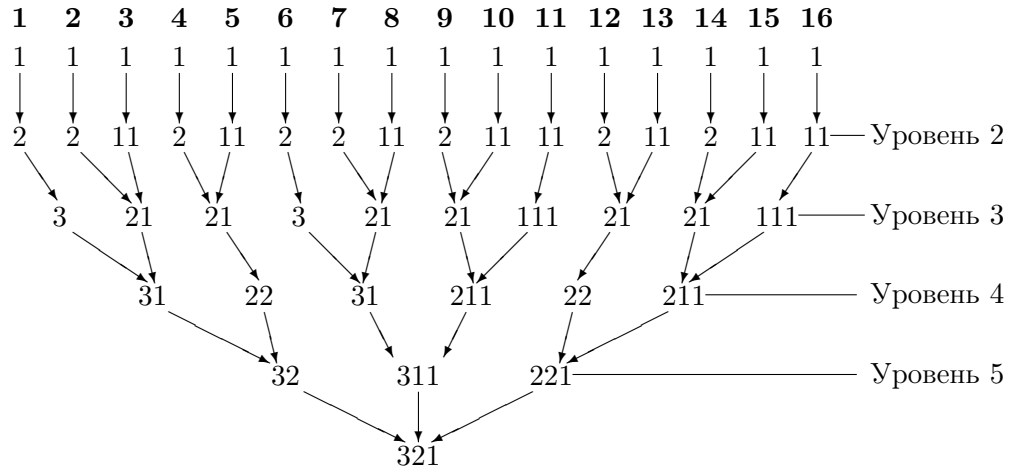


Рис. 18. Дерево для представления $[321]$ возникающего при умножении 6 фундаментальных представлений

3.5.4. Общий алгоритм вычисления коэффициентов разложения полиномов ХОМ-ФЛИ по характерам как кратной суммы по путям на графе Юнга

Теперь мы готовы сформулировать процедуру в общем случае, а также объяснить, почему положения ненулевых элементов \mathcal{R} -матрицы именно таковы.

Наиболее простой вид \mathcal{R} -матрицы имеют в базисе (3.127). Вектора этого базиса удобно описать в терминах путей на определенном графе [32]. Для каждого неприводимого представления можно нарисовать дерево, изображающее все способы получить это представление в разложении некоторого тензорного произведения. На рис. 18 изображен пример такого дерева для представления $[321]$, возникающего в разложении тензорного произведения 6 фундаментальных представлений. Каждая стрелка на этом дереве соответствует умножению на одно фундаментальное представление. Введем также блок b_j размера 2×2 :

$$b_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^j [j]_q} & \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} \\ \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} & \frac{q^j}{[j]_q} \end{pmatrix}. \quad (3.126)$$

Опишем теперь явный вид \mathcal{R} -матриц в базисе неприводимых представлений, которые возникают при последовательном раскрытии тензорного произведения в следующем порядке (обозначен скобками):

$$((((1 \otimes 1) \otimes 1) \otimes \dots) \otimes 1) \otimes 1 \quad (3.127)$$

Этот базис будем называть стандартным базисом. Мы утверждаем, что матрица R_{k-1} , соответствующая пересечению прядей $k-1$ и k в некотором сечении косы, состоит только из блоков b_k размера 2×2 и блоков q или $-q^{-1}$ размера 1×1 . Осталось описать положение этих блоков. Для этого воспользуемся примером на рис. 18:

Каждая строка и каждый столбец \mathcal{R} -матрицы соответствуют одному из листов на дереве, то есть, одной из точек, в которых

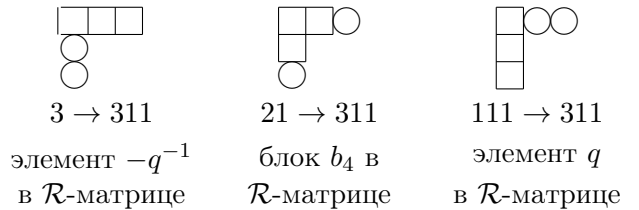


Рис. 17. Описание \mathcal{R} -матрицы в терминах добавления клеток к диаграмме Юнга для уровня 4 и конечного представления 311. Круги обозначают клетки, добавленные к исходной диаграмме

Далее, действие матрицы R_k на произведение $T_1 \otimes \dots \otimes T_{k+1} \otimes T_m$ получается из ее действия на произведении $T_1 \otimes \dots \otimes T_{k+1}$, где она не смешивает неприводимые представления, которым соответствуют разные диаграммы Юнга. Поэтому, любые два пути, которые смешивает матрица R_k , должны проходить через одну и ту же диаграмму Q на уровне $k + 1$. Наконец, на представлениях T_{k+1}, \dots, T_m \mathcal{R} -матрица снова действует как единичный оператор, поэтому соответствующие части путей, смешиваемых R_k , также совпадают. Таким образом, все пути, принадлежащие к одному блоку в матрице R_k , совпадают (т.е. проходят одну и ту же последовательность диаграмм Юнга), везде, кроме уровня k .

Размер блоков зависит от представлений, которые входят в рассматриваемое произведение. В случае фундаментальных представлений, $T_i = \square$, каждая стрелка на дереве соответствует добавлению одной клетки к диаграмме Юнга. Пути, совпадающие всюду, кроме уровня k , проходят через одну и ту же диаграмму Юнга как на уровне $k - 1$, так и на уровне $k + 1$. При этом диаграмма уровня $k + 1$ отличается от диаграммы уровня $k - 1$ добавлением двух клеток на определенную пару позиций. Следовательно, есть либо два таких пути (соответствующих заполнению этих позиций в одном или в другом порядке), либо только один (если позиции расположены в одной строке или в одном столбце так что порядок их заполнения фиксирован). В первом случае возникает блок 2×2 , во втором — 1×1 . Других вариантов в случае фундаментальных представлений нет.

Блоки 1×1 есть просто собственные значения фундаментальной \mathcal{R} -матрицы. Поскольку добавление двух клеток в одну строку соответствует симметризации по соответствующей паре перемножаемых представлений, а добавлений в один столбец — антисимметризации, первый случай соответствует собственному значению q , а второй — $-q^{-1}$. Осталось определить вид блоков 2×2 — это будет сделано в разделе, после обсуждения процедуры *каблирования* [64] (операции копроизведения для \mathcal{R} -матриц [119, 93, 120]).

4. Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ

Как мы уже обсуждали в разд. 1.4, вычисление раскрашенного полинома ХОМФЛИ всякого узла можно свести к вычислению простых полиномов ХОМФЛИ нескольких его узлов спутников. Соответствующая процедура известна как *процедура каблирования* [64]. Основным результатом настоящего раздела следует считать представление раскрашенного полинома ХОМФЛИ в виде суммы по путям на графе Юнга с помощью процедуры каблирования. Однако, перед тем перейти к изложению этой процедуры, мы проиллюстрируем обсудим некоторые тонкости самой процедуры, а также приведем ее \mathcal{R} -матричную формулировку [34, 93, 119, 120].

Во всем настоящем разделе прямая R означает \mathcal{R} -матрицу в случае фундаментального представления на всех прямых косы:

$$R_k \equiv \mathcal{R} \underbrace{\square \otimes \dots \otimes \square}_{k-1} \otimes (\square \otimes \square) \otimes \dots \quad (4.1)$$

4.1. Каблирование тривиального узла и выражения для проекторов на симметрическое и антисимметрическое представления

Простейший случай процедуры каблирования — это каблирование окружности (тривиального узла) двойным кабелем [29]. В этом случае всевозможные кабели отвечают всевозможным двухпрядным косам, а определенные линейные комбинации этих полиномов должны давать простейшие раскрашенные полиномы ХОМФЛИ для окружности: это полиномы, отвечающие (первым) симметрическому и антисимметрическому представлениям группы $SU(N)$.

Как следует из формулы (1.55), среди полиномов ХОМФЛИ таковых не более двух линейно независимых (поскольку в этом случае разложение (1.55) содержит только два характера χ_2

и χ_{11}). При этом всяким двум двупрядным косам с различным числом пересечений отвечают различные (и не пропорциональные друг другу) полиномы ХОМФЛИ, которые можно выбрать в качестве базиса в пространстве полиномов всевозможных двупрядных кос — двойных кабелей однопрядной косы. Проще всего взять двупрядные косы без пересечений (полином ХОМФЛИ $H_0 = S_2^*(A, q) + S_{1,1}^*(A, q)$) и с одним пересечением (полином ХОМФЛИ $H_1 = S_2^*q - S_{1,1}^*q^{-1}$). Замыкание первой косы есть пара не зацепленных окружностей, а второй — одна перекрученная окружность.

Нетривиальное свойство процедуры каблирования для полиномов ХОМФЛИ, которое мы обсудим в разд. 4.3, состоит в том, что коэффициенты $\{p_2^0, p_2^1, p_{11}^0, p_{11}^1\}$ линейных комбинаций, отвечающих раскрашенным полиномам зависят от q , но *не* от характеров S_2^* , S_{11}^* (или *не* от A , если подставить выражения (1.54) для характеров с специальной точке):

$$\begin{aligned} S_2^*(A, q) &= p_2^0(q)H_0(A, q) + p_2^1(q)H_1(A, q), \\ S_{11}^*(A, q) &= p_{11}^0(q)H_0(A, q) + p_{11}^1(q)H_1(A, q). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение, обладающее таким свойство существует и единственно:

$$\begin{aligned} p_2^0 &= \frac{1}{q(q+q^{-1})}, & p_2^1 &= \frac{1}{(q+q^{-1})}, \\ p_{11}^0 &= \frac{q}{(q+q^{-1})}, & p_{11}^1 &= -\frac{1}{(q+q^{-1})}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выражения (4.2, 4.3) для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ можно переписать в виде

$$S_2^*(A, q) = \text{Tr } P_2, \quad S_{11}^*(A, q) = \text{Tr } P_{11}, \quad (4.4)$$

где введены операторы-проекторы на симметрическое и антисимметрическое представления

$$P_2 = \frac{1}{q(q+q^{-1})} + \frac{1}{(q+q^{-1})}R, \quad P_{11} = \frac{q}{(q+q^{-1})} - \frac{1}{(q+q^{-1})}R. \quad (4.5)$$

Легко проверить, что эти проекторы ортогональны:

$$\begin{aligned} P_2 P_{11} &= \frac{1}{(q+q^{-1})^2} \left(1 + R(q^{-1} - q) - R^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(q+q^{-1})^2} \left(1 + R(q - q^{-1}) - (R(q - q^{-1}) + 1) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а также, что выполняются свойства $P_2^2 = P_2$ и $P_{11}^2 = P_{11}$. Более того, формулы (1.55, 1.57) позволяют убедиться, что раскрашенные полиномы получаются при действии проекторов (4.5) на *произвольный* двойной кабель (то есть, на двупрядную косу с любым числом пересечений):

$$S_2^*(A, q) = \text{Tr } P_2 \mathcal{R}^n, \quad S_{11}^*(A, q) = \text{Tr } P_{11} \mathcal{R}^n. \quad (4.7)$$

В сделанном наблюдении проявляется одно из основных свойств процедуры каблирования для полиномов ХОМФЛИ: проектор зависит от представления, которым раскрашен искомый полином, но *не* от кабеля, использованного при вычислении. Мы подробно остановимся на этом свойстве в разд. 4.4.

4.1.1. Проблема высших кабелей

Разобранный выше пример позволяет также проиллюстрировать проблему, которая возникает при переходе от двойных к высшим (тройным, четверным и т.д.) кабелям.

Например, процедура предполагает, что полиномы ХОМФЛИ, раскрашенные представлениями с тремя клетками в диаграмм Юнга ([3], [21] и [111]) образуют базис в пространстве (над полем рациональных функций от q) полиномов ХОМФЛИ каблирования данного узла всевозможными

тройными кабелями. Это пространство, как следует из формулы (1.55), имеет размерность 3. Можно, однако, показать, что матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 , отвечающие пересечениям в тройном кабеле, порождают кольцо многочленов размерности 6, в качестве базиса в котором можно выбрать мономы Id , \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ [74] (см. также разд.3.3. [34]). Это, в частности, означает, что операторные выражения для проекторов уже в этом случае не удастся получить наивным способом, описанным выше — поскольку на месте системы (4.2) из 2 уравнений на 2 неопределенных коэффициента перед Id и \mathcal{R}_1 теперь будет система из 3 (по числу линейно независимых полиномов) уравнений на 6 неопределенных коэффициентов.

Тонкости наподобие описанной выше заставляют обратиться к \mathcal{R} -матричной формулировке процедуры каблирования для полиномов ХОМФЛИ, что мы и сделаем в разд. 4.3. Но перед этим мы обсудим еще одно яркое приложение процедуры каблирования, не требующее \mathcal{R} -матричного формализма.

4.1.2. Процедура каблирования и теорема о факторизации раскрашенного полинома ХОМФЛИ в двойном скейлинговом пределе

Здесь мы обсудим одно свойство раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в пределе $q \rightarrow 1$ (или $\hbar \equiv \log q \rightarrow 0$) и $A = q^N = \text{const}$. Ряд, в который полином ХОМФЛИ разлагается в этом пределе, называется разложением по родам [121]. Здесь мы, однако, интересуемся нулевым членом этого разложения, который и называется специальным полиномом [118]:

$$\sigma_Q^{\mathcal{K}}(A) = H_Q^{\mathcal{K}}(A = q^N = \text{const}, q = 1). \quad (4.8)$$

Поведение полинома ХОМФЛИ в этом пределе, изучавшееся, в частности, в работах [27, 34, 121, 107, 118, 122], описывается формулой, которая связывает простые и раскрашенные полиномы ХОМФЛИ [118]:

$$\sigma_Q^{\mathcal{K}} = \sigma_1^{\mathcal{K}^{|Q|}} = (\sigma_q^K)^{|Q|}. \quad (4.9)$$

Это свойство называется *свойством факторизации*. Оно следует из основных свойств полиномов ХОМФЛИ: из переплетающих соотношений (3), из самосогласованности процедуры каблирования, из факторизации полинома ХОМФЛИ для несвязного объединения узлов или зацеплений, и из теоремы о том, что не приведенный (не деленный на полином тривиального узла) ХОМФЛИ для n -компонентного зацепления в фундаментальном представлении в пределе $q \rightarrow 1$ расходится как $(q - q^{-1})^{-n}$ [123].

Из процедуры каблирования следует, что раскрашенный полином ХОМФЛИ в представлении Q в пределе $q \rightarrow 1$ расходится как полином ХОМФЛИ $|Q|$ -компонентного зацепления, т.е. как $(q - q^{-1})^{-|Q|}$. Действительно, при процедуре каблирования не может получиться зацепления содержащего больше, чем $|Q|$ компонент и всегда получится зацепление с $|Q|$ компонентами. Следовательно, $\sigma_Q^{\mathcal{K}} \sim (q - q^{-1})^{-|Q|}$. Далее, $|Q|$ -компонентное зацепление можно преобразовать в несвязное объединение его $|Q|$ компонент с помощью переплетающих соотношений (стр. 4 таб. 3); при этом в пределе $q \rightarrow 1$ полином ХОМФЛИ не изменится. Действительно, если переплетающие соотношения применяются к пересечению различных связных компонент, то член, соответствующий разрешению этого пересечения, содержит на одну компоненту связности меньше и, таким образом расходится как $(q - q^{-1})^{-|Q|+2}$. Следовательно, этот член менее сингулярен при $q \rightarrow 1$, чем два оставшихся, и его можно положить равным нулю. В результате получим тождество, означающее, что полиномы ХОМФЛИ двух зацеплений с числом зацеплений, отличающемся на один, в пределе $q \rightarrow 1$ равны. Следовательно, $\sigma_1^{\mathcal{K}^{|Q|}} = (\sigma_q^K)^{|Q|}$. Заметим, что в вертикальном оснащении переплетающие соотношения принимают вид 4.62 — так что в них больше не входит переменная A — поэтому она и не входит явным образом в соотношение (4.9).

Наше рассуждение относится к полиному ХОМФЛИ, вычисленному в вертикальном оснащении (разд. 4.6). Однако, легко показать, что тождество (4.9) верно также и в топологическом оснащении.

В частности, в случае состоящего из трех зацепленных друг за друга окружностей зацепления кольца Борромео, простейший полираскрашенный полином ХОМФЛИ которого мы вычислили в разд. 3.1, теорема о факторизации запишется как

$$\frac{H_{1 \otimes 2 \otimes 3}^{6_3^3}}{S_1^* S_2^* S_3^*} \Big|_{q \rightarrow 1} = 1. \quad (4.10)$$

С помощью формулы (3.1) можно убедиться, что это соотношение действительно выполняется.

4.2. Раскрашенный полином ХОМФЛИ как сумма по путям на подграфе Юнга

В настоящем разделе мы изложим основной результат нашей работы, касающийся вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ. Как мы уже упоминали выше, и как мы подробно обсудим в дальнейшем, процедура каблирования позволяет выразить раскрашенные полиномы ХОМФЛИ через простые. При этом, однако, потребуется дополнительная операция *проекции*. Ниже мы опишем, как эту можно произвести эту операцию в терминах путей на графе Юнга — тем самым адаптировав изложенную в разд. 3 алгоритм для вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ. Обоснование такой процедуры проекции, как и самого метода каблирования, мы обсудим в разд. 4.3. Как и в предыдущем разделе, мы начнем с конкретного примера.



Рис. 19. Двойное каблирование косы, при замыкании которой получается узел-трилистник

4.2.1. Простейший раскрашенный полином ХОМФЛИ узла-трилистника

Чтобы проиллюстрировать формулировку процедуры каблирования в терминах путей на графе Юнга, мы обратимся к простейшему нетривиальному примеру: к вычислению полинома ХОМФЛИ в первом симметрическом представлении двупрядной косы с тремя пересечениями, при замыкании которой получается узел-трилистник (рис. 11). Процедура каблирования в данном случае состоит в замене каждой пряди в косе на кабель из двух нитей с последующей вставкой соответствующего проектора. Проще всего рассмотреть кабель, нити которого параллельны: в таком случае получится четырехрядная коса (рис. 19). Простой (нераскрашенный) полином ХОМФЛИ для такой косы можно вычислить с помощью выражений для четырехрядных \mathcal{R} -матриц, приведенных вместе с соответствующими графами Юнга в разд. 3.5.3. Как мы объясним в разд. 4.3, в результате вычисления получится полиномом ХОМФЛИ узла-трилистника в *приводимом* представлении $[1] \otimes [1] = [2] + [11]$. Для получения простейшего раскрашенного полинома ХОМФЛИ требуется дополнительная операция: *проекция* на неприводимое (первое симметрическое) представление $[2]$. На уровне процедуры операция сводится к выбрасыванию всех путей на графе Юнга, *за исключением* проходящих через представление $[2]$. Обоснование этого правила обсуждается в разд. 4.3.

Каждому пересечению косы (рис. 19) соответствует комбинация из четырех пересечений каблированной косы (рис. 19), которому, согласно (1.57), отвечает произведение \mathcal{R} -матриц

$$\mathfrak{R} = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_2, \quad (4.11)$$

так что полином ХОМФЛИ зацепления — замыкания полученной косы согласно общими формулам (1.55, 1.57) равен

$$\mathcal{H}_{[1]}^{\mathcal{B} \circ \mathcal{B}} = \sum_{\substack{Q=[4],[31],[22] \\ [211],[1111]}} S_Q^* \text{Tr} \mathfrak{R}_Q^3, \quad (4.12)$$

где через \mathcal{B} мы обозначили исходную косу, а через $\mathcal{B} \circ \mathcal{B}$ — ее двойное каблирование. Проекцию на проходящие через нужное представление пути можно осуществить, домножив, в соответствии

с правилом (1.60), произведения \mathcal{R} -матриц под знаком следа в выражении (4.13) на проекторы — диагональные матрицы с нулями и единицами в качестве соответствующих диагональных элементов:

$$\mathcal{H}_{[2]}^{\mathcal{B}} = \sum_{\substack{Q=[4],[31],[22] \\ [211],[1111]}} S_Q^* \text{Tr} \mathfrak{P}_{[2]|Q} \mathfrak{R}_Q^3. \quad (4.13)$$

Замечательным образом, такие матрицы коммутируют с произведением \mathfrak{R} (но не с отдельными \mathcal{R} -матрицами!) — в данном примере в этом можно убедиться непосредственно, а причину этого мы обсудим в разд. 4.3 и 4.4. Поэтому, если принять во внимание, что квадрат всякого проектора равен ему самому, операцию проекции можно свести к умножению матрицы калиброванного пересечения \mathfrak{R} на соответствующую матрицу проектора слева и справа, что позволяет далее рассматривать только ненулевые блоки полученных матриц:

$$\mathfrak{R}_{[4]} = q^4 \longrightarrow \mathfrak{P}_{[2]} \mathfrak{R}_{[2]} \mathfrak{P}_{[2]} = q^4, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{[31]} &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^3[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & 0 \\ \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{[3]_q} & -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} & \frac{q^2\sqrt{[2]_q[3]_q[4]_q}}{q^2[2]_q[3]_q} \\ -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} & -\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} & -\frac{q^2}{\sqrt{[3]_q}} \\ \frac{q^2\sqrt{[2]_q[3]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} & -\frac{q^2}{\sqrt{[3]_q}} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathfrak{P}_{[2]} \mathfrak{R}_{[31]} \mathfrak{P}_{[2]} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{[3]_q} & -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} \\ -\frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} & -\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} \end{pmatrix}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2} & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathfrak{P}_{[2]} \mathfrak{R}_{[22]} \mathfrak{P}_{[2]} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ q^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_{[211]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & & \\ & -\frac{1}{q} & \\ & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{q} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q^3[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} \\ 0 & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[3]_q} & \frac{q^3}{[3]_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{q} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2\sqrt{[3]_q}} & \frac{\sqrt{[2]_q[3]_q[4]_q}}{q^2[2]_q[3]_q} \\ \frac{1}{q^2\sqrt{[3]_q}} & -\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} \\ \frac{\sqrt{[2]_q[3]_q[4]_q}}{q^2[2]_q[3]_q} & \frac{\sqrt{[2]_q[4]_q}}{[2]_q[3]_q} & -\frac{1}{[3]_q} \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \mathfrak{P}_{[2]}\mathfrak{R}_{[211]}\mathfrak{P}_{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (0), \quad (4.17) \\
&\mathfrak{R}_{[1111]} = q^{-4} \longrightarrow \mathfrak{P}_{[2]}\mathfrak{R}\mathfrak{P}_{[2]} = 0.
\end{aligned}$$

Если заметить, что матрица 2×2 имеет два собственных значения: 1 и 0, то полученные ответы, вместе с формулой разложения по характерам (1.55), позволяют воспроизвести известный ответ для полинома ХОМФЛИ торического узла или типа $[2, 2n + 1]$ (получающегося при замыкании двупрядной косы с $2n + 1$ пересечениями) в первом симметрическом представлении [2] [106, 26],

$$\mathcal{H}_{[2]}^{[2, 2n+1]} = q^{-4n-2} A^{-4n-2} \left(q^{8n+4} S_{[4]} - S_{[31]} + q^{-4n-2} S_{[22]} \right). \quad (4.18)$$

Ответ нетрудно проверить с помощью непосредственного применения общих формул (1.55, 1.57), положив в них $\mathcal{B} = b_1^3$ и $T_1 = T_2 = [2]$ и учтя, что $\varkappa_{[4]} = 6$, $\varkappa_{[31]} = 2$ и $\varkappa_{[22]} = 0$, а также воспользовавшись правилом чередования знаков для не кратных собственных значений \mathcal{R} -матрицы (см. разд. 4.7). Обратим, однако, внимание на то, что *оснащающие* (см. разд. 2.4) множители в этих двух случаях различны: при вычислении непосредственно по формулам (1.55, 1.57) таковой равен $q^{-8n-4} A^{-4n-2} = (q^{-4\varkappa_{[2]}} A^{-|[2]|})^{2n+1}$ (он вычисляется по правилу — обобщению **Шага** 2.22 на случай старших представлений), а при использовании процедуры каблирования — $q^{-4n-2} A^{-4n-2} = (q^{-2\varkappa_{[2]}} A^{-|[2]|})^{2n+1}$. Мы остановимся на этом вопросе подробнее в разд. 4.6.

В частности, при $n = 1$, после подстановки выражений (1.54) для характеров в специальной точке, (4.18) дает искомый ответ для простейшего раскрашенного полинома ХОМФЛИ узла трилистника (ср., например, с [26])

$$\begin{aligned}
H_{[2]}^{[2, 2n+1]} &= A^{-6} \left(q^6 S_{[4]} - q^{-6} S_{[31]} + q^{-12} S_{[22]} \right) = \\
&= S_{[2]}^* \left\{ (q^4 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-8}) A^{-4} - (1 + q^{-2} + q^{-6} + q^{-8}) A^{-6} + q^{-6} A^{-8} \right\}. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Если простой полином ХОМФЛИ всегда пропорционален $S_{[1]}^*$, на этот раз из ответа выносится множитель $S_{[2]}^*$ — (ненормированный) полином ХОМФЛИ тривиального узла в первом симметрическом представлении.

4.2.2. Описание проекции в терминах путей на графе Юнга

Общая процедура вычисления раскрашенного полинома ХОМФЛИ, отвечающего в представлении Q группы $SU(N)$, как суммы по путям на графе Юнга такова:

- Записать выражение (1.57) для простого полинома ХОМФЛИ, заменив каждую нить косы, замыканием которой является узел, на $|Q|$ параллельных нитей.
- Подставить в полученное выражение элементы \mathcal{R} -матриц по правилам из разд. 3.5.4.
- Перейти к выражению вида (1.60), введя под знак след проектор на желаемое представление Q .

- Подставить в последнее выражение значения матричных элементов проекторов: 1 для диагональных элементов, отвечающих путям, проходящим на графе Юнга через представление Q и 0 для всех остальных элементов.

Как обычно, $|Q|$ означает уровень представления Q , т.е., число клеток в его диаграмме Юнга.

Рассмотрим, к примеру, граф Юнга на рис. 18. С его помощью можно построить проекторы на представления $[2]$ или $[11]$ для трехрядной косы или проекторы на представления $[3]$, $[21]$ или $[111]$ для двухрядной косы. В частности, матрица-проектор на представление $[2]$, входящий в выражение для коэффициента перед характером S_{321}^* в случае трехрядной косы выглядит как

$$P_{2 \otimes 1^4 | 321} = \text{diag}(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0). \quad (4.20)$$

Описанная конструкция позволяет построить только проекторы на первую нить исходной раскрашенной косы. Тем не менее, этого достаточно, чтобы вычислить раскрашенный полином произвольного узла: как уже обсуждалось, для этого достаточно одного проектора, который можно поместить в первую нить. Более того, всякую косу, можно с помощью движений Рейдемейстера деформировать так, что каждая нить, относящаяся одной из связанных компонент, окажется первой в некотором сечении косы. Проектор для этой нити можно поместить в соответствующее сечение.

Как мы уже убедились в разобранный выше примере, для упрощения вычислений можно поместить в первую нить несколько проекторов, по одному между каждыми двумя пересечениями исходной косы. Действительно, если каждое произведение \mathcal{R} -матриц, которое соответствует одному из пересечений каблированного узла, с двух сторон умножить на диагональный проектор, некоторые строки и столбцы станут нулевыми. После этого можно будет получить полином узла, перемножая матрицы меньшего размера (ненулевые блоки), чем изначальные \mathcal{R} -матрицы.

4.3. Процедура каблирования как операция копроизведения

В предыдущих разделах мы описали процедуру каблирования и все необходимые для нее величины, а также рассмотрели ряд примеров. При этом сама процедура до сих пор рассматривалась как постулат. В настоящем разделе мы обсудим, почему процедура каблирования должна работать с точки зрения теории представлений. Подчеркнем, что процедура каблирования возникает не из топологии, а из теории представлений. Поэтому с помощью процедуры каблирования можно вычислять не только топологические инварианты, то есть полиномы ХОМФЛИ, но также объекты, которые тесно связаны с последними, но сами по себе не являются топологическими инвариантами: расширенные полиномы ХОМФЛИ [25] и \mathcal{R} -матрицы.

В теории представлений старшие представления вводятся с помощью операции коумножения. Коумножение задает действие алгебры на тензорном произведении представлений и тем самым определяет разложение тензорного произведения представлений на неприводимые представления. Именно в этом и состоит процедура каблирования. Рассмотрим двухрядную \mathcal{R} -матрицу, соответствующую пересечению прядей, с которыми связаны представления T_1 и T_2 . Мы собираемся описать ее с помощью фундаментальных R -матриц, действующих в $|T_1| + |T_2|$ -рядной косе. Соответствующую процедуру каблирования можно схематически описывать с помощью следующих двух операций:

- Каждая раскрашенная \mathcal{R} -матрица заменяется произведением фундаментальных, отвечающему фрагменту косы на рис. 20.
- Это произведение облагается проекторами на желаемые неприводимые представления, как показано на рис. 20.

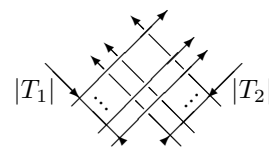


Рис. 20. Замена перекрестка на диаграмме узла в процедуре каблирования

Первая из этих операций основана на утверждении

$$\mathcal{R}_{1^{|T_1|} \otimes 1^{|T_2|}} = \prod_{i=1}^{|T_2|} \prod_{j=1}^{|T_1|} R_{|T_1|+i-j}. \quad (4.21)$$

которое, в свою очередь, основано на определении коумножения для \mathcal{R} -матриц [93, 119, 120]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3} &= (I_{T_1} \otimes \mathcal{R}_{T_2 \otimes T_3}) \cdot (\mathcal{R}_{T_1 \otimes T_3} \otimes I_{T_2}), \\ \mathcal{R}_{T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)} &= (\mathcal{R}_{T_1 \otimes T_2} \otimes I_{T_3}) \cdot (I_{T_2} \otimes \mathcal{R}_{T_1 \otimes T_3}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где T_1 , T_2 и T_3 — произвольные представления, не обязательно неприводимые.

Соотношение (4.21) выводится из (4.22) по индукции: вначале нужно применить первое из соотношений (4.22) $|T_1|$ раз:

$$\mathcal{R}_{1^{m+1} \otimes 1} = \mathcal{R}_{(1^m \otimes 1) \otimes 1} = (I_{1^m} \otimes \mathcal{R}_{1 \otimes 1}) \cdot (\mathcal{R}_{1^m \otimes 1} \otimes I_1) = R_{m+1} (\mathcal{R}_{1^m \otimes 1} \otimes I_1) = \prod_{i=1}^{m+1} R_{m-i+1}, \quad (4.23)$$

затем нужно аналогичным образом применить второе из соотношений (4.22) $|T_2|$ раз.

Вторая из операций основана на определении проекторов. Это определение, в свою очередь, опирается на разложение тензорной степени фундаментального (или старшего) представления по неприводимым $1^m = \sum_{T \vdash m} T$ (см. разд. 4.4) — которое также заложено в определение коумножения [74]. После того, как проекторы определены, вторая из описанных операций основана на тождестве из линейной алгебры:

$$\mathrm{Tr}_{1^{|T_1|} \otimes 1^{|T_2|}} P_{T_1} \times P_{T_2} \cdot (\dots) = \mathrm{Tr}_{T_1 \otimes T_2} \cdot (\dots). \quad (4.24)$$

Коммутация проекторов с отвечающими каждому пересечению комбинациями \mathcal{R} -матриц при этом следует из свойства (1.59): собственными подпространствами \mathcal{R} -матрицы являются неприводимые представления в разложении тензорного произведения представлений, на которое она действует.

Подводя итог вышесказанному, процедура каблирования основана на следующем утверждении: **раскрашенная \mathcal{R} -матрица равна произведению \mathcal{R} -матриц в фундаментальном представлении и проекторов**. Это, в частности, означает, что в базисе, где соответствующие проекторы диагональны, “каблированное” произведение фундаментальных матриц распадается на “раскрашенные блоки”, относящиеся к разным неприводимым представлениям. Это утверждение, однако, нетривиально с точки зрения разложения (1.59), которое дает независимые явные формулы для элементов \mathcal{R} -матриц в различных представлениях.

Если рассматривать процедуру каблирования как комбинацию описанных выше операций теории представлений, то выражения для матриц проекторов, описанные в разд. 4.2 при формулировке процедуры проекции в терминах путей на графе Юнга, следуют просто из определения стандартного базиса (3.8) и графа Юнга.

4.3.1. Вычисление параметров смешивающих блоков с помощью процедуры каблирования

Из условия самосогласованности процедуры каблирования (операции коумножения для \mathcal{R} -матриц) можно также определить вид блоков в \mathcal{R} -матрицах, который приведен в разд. 3.5.4. А именно, рассмотрим единственное пересечение и применим процедуру каблирования к одной из двух прядей (21). Тогда из формулы для коумножения (4.22) следует, что на элементы R -матриц должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\mathrm{diag} \left(\mathcal{R}_{ux|w}^2 \right)_{\substack{w+u \otimes x \\ w \otimes x \dashv Q}} = \mathcal{R}_{x^{m+1} \otimes x} \mathcal{R}_{x \otimes x^{m+1}}, \quad (4.25)$$

или

$$\begin{aligned} \text{diag}\left(\mathcal{R}_{ux|w}^2\right)_{\substack{w \vdash u \otimes x \\ w \otimes x \dashv Q}} &= \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} \mathcal{R}_{(x^m \otimes x) \otimes x} \mathcal{R}_{(x \otimes x^m) \otimes x} \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} = \\ &= \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)} \text{diag}\left(\mathcal{R}_{wx|Q}^2\right)_{\substack{w \vdash u \otimes x \\ w \otimes x \dashv Q}} \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где u — неприводимое представление, такое, что $u \vdash x^{m-1}$ и $Q \vdash u \otimes x^2$. Различные u никогда не появляются в одной и той же матрице смешивания в силу свойств \mathcal{R} -матриц. Размер n недиагонального блока равен числу представлений w , которые одновременно удовлетворяют $w \vdash u \otimes x$ и $w \otimes x \dashv Q$. Ниже мы найдем явный вид блоков в недиагональных \mathcal{R} -матрицах в двух случаях, в которых эти блоки имеют размер $n = 2$. Это случай фундаментального представления $x = \square$ и случай, когда представления x , u , Q и, следовательно, все представления w описываются диаграммами типа крюков (такие диаграммы содержат на главной диагонали только одну клетку — в частности, таковы все диаграммы не более, чем с 3 клетками, а также все диаграммы с 4 клетками за исключением диаграммы [22]).

Обозначив через r_{11} , r_{12} и r_{22} неизвестные элементы недиагонального блока, а через λ_1 и λ_2 — соответствующие собственные значения $\mathcal{R}_{ux|w}$, перепишем уравнение (4.25) для блока 2×2 в виде:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Уравнения для внедиагональных элементов имеют вид

$$r_{12}(\lambda_1^2 r_{11} + \lambda_2^2 r_{22}) = 0. \quad (4.28)$$

Кроме того, воспользуемся свойством матрицы 2×2 :

$$r_{11} + r_{22} = \mu_1 + \mu_2,$$

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \mu_1\mu_2,$$

где μ_1 и μ_2 — собственные значения внедиагонального блока, которые мы считаем известными. Решения уравнений имеют вид:

$$r_{11} = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad r_{22} = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad r_{12}^2 = \frac{(\mu_1\lambda_1^2 + \mu_2\lambda_2^2)(\mu_1\lambda_2^2 + \mu_2\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}. \quad (4.29)$$

Фундаментальное представление. В случае $x = \square$ диаграмма Q получается из диаграммы u добавлением пары клеток (i_1, j_1) и (i_2, j_2) , следовательно, есть два возможных w , полученных из u добавлением одной или другой из этих клеток. В соответствии с общей формулой (1.59):

$$\mu_1 = q, \quad \mu_2 = -q^{-1}, \quad \lambda_{1,2} = q^{\chi_{w_1,2} - \chi_u} = q^{j_{1,2} - i_{1,2}}. \quad (4.30)$$

Подстановка (4.30) в (4.29) дает формулу (3.126) из разд. 3.5.4 для блоков в \mathcal{R} -матрицах в фундаментальном представлении.

4.3.2. Обобщение формулы суммы по путям на случай представлений типа крюков и формулы для раскрашенных полиномов Александера

Свойства представлений типа крюков. Если представления x и u есть представления типа крюков:

$$x = [r_1, 1^{s_1}], \quad u = [r_2, 1^{s_2}], \quad (4.31)$$

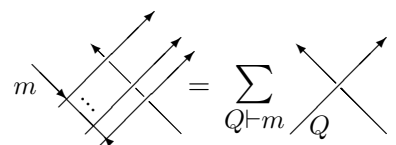


Рис. 21. Пересечение с каблированной прядью разлагается в прямую сумму пересечений с раскрашенной прядью

то представление Q может быть одним из трех представлений типа крюков, так как

$$\begin{aligned} & [r_2, 1^{s_2}] \times [r_1, 1^{s_1}] \times [r_1, 1^{s_1}] = \\ & = ([r_2 + r_1, 1^{s_2+s_1}] + [r_2 + r_1 - 1, 1^{s_2+s_1+1}] + \text{не крюки}) \times [r_1, 1^{s_1}] = \\ & = [2r_1 + r_2, 1^{2s_1+s_2}] + 2[2r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}] + [2r_1 + r_2 - 2, 1^{2s_1+s_2+2}] + \text{не крюки}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Эти три возможных представления таковы:

$$Q = [2r_1 + r_2, 1^{2s_1+s_2}], \quad Q' = [2r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}], \quad Q'' = [2r_1 + r_2 - 2, 1^{2s_1+s_2+2}], \quad (4.33)$$

где первое и последнее представления синглеты, а второе дублет, причем промежуточные представления есть:

$$w_1 = [r_1 + r_2, 1^{s_1+s_2}], \quad w_2 = [r_1 + r_2 - 1, 1^{s_1+s_2+1}]. \quad (4.34)$$

Так как всякий путь, который заканчивается представлением типа крюка Q проходит только через представления типа крюков, соответствующий блок матрицы $\mathcal{R}_{x^m \otimes x \otimes x}$ относится к одному из двух представлений y , возникающих в разложении $x \otimes x$:

$$y_1 = [2r_1, 1^{2s_1}], \quad y_2 = [2r_1 - 1, 1^{2s_1+1}]. \quad (4.35)$$

Для этих представлений собственные значения (4.29) задаются формулой (1.59):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= q^{z_{y_1} - z_x} = q^{r_1(2r_1-1) - s_1(2s_1+1)} \equiv q^{r_1+s_1} \mu, & \mu_2 &= -q^{z_{y_2} - z_x} = -q^{-r_1-s_1} \mu, \\ \lambda_1 &= q^{z_{w_1} - z_u} \equiv q^{r_2+s_2} \lambda, & \lambda_2 &= q^{z_{w_2} - z_u} = q^{-r_2-s_2} \lambda. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя эти собственные значения в (4.29), находим явный вид блоков:

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{x^m \otimes (x \otimes x) | Q} = q^{2r_1(r_1-1) - 2s_1(s_1+1)}. \\ & \cdot \begin{pmatrix} -\frac{[r]_q}{q^{rn} [rn]_q} & \frac{\sqrt{[r(n+1)]_q [r(n-1)]_q}}{[rn]_q} \\ \frac{\sqrt{[r(n+1)]_q [r(n-1)]_q}}{[rn]_q} & \frac{q^{rn} [r]_q}{[rn]_q} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$x = [r_1, 1^{s_1}], \quad w_1 = [r_1 + r_2, 1^{s_1+s_2}], \quad w_2 = [r_1 + r_2 - 1, 1^{s_1+s_2+1}],$$

$$Q = [2r_1 + r_2 - 1, 1^{2s_1+s_2+1}], \quad n = s_2 - r_2 + 1, \quad r = r_1 + s_1.$$

Вывод соотношений между раскрашенными полиномами Александра. Полиномы Александра представляют собой предел полиномов ХОМФЛИ при $A \rightarrow 1$:

$$A_Q^K(q) = H_Q^K(A = q^N = 1, q = \text{const}). \quad (4.38)$$

Для представлений Q , которым соответствуют диаграммы-крюки, существует гипотеза, описывающая зависимость полинома Александра от представления [118, 27]. Эта гипотеза утверждает, что:

$$A_Q^K(q) = A_1^K(q^{|Q|}). \quad (4.39)$$

Это утверждение можно вывести с помощью формулы (4.37) — так что оно также является следствием самосогласованности процедуры каблирования (операции коумножения для \mathcal{R} -матриц).

В пределе $A \rightarrow 1$ в полиномах Шура только множитель $(A - A^{-1})$ является существенным. Степень этого члена S_Q^* равна числу крюков в диаграмме Q . Это означает, что, если вычислять полином в представлении с диаграммой-крюком $[r, 1^s]$, то в пределе $A \rightarrow 1$ все диаграммы-не

крюки в разложении полинома ХОМФЛИ по характерам не дадут вклада в ответ для приведенного полинома ХОМФЛИ. Все оставшиеся \mathcal{R} -состоят из блоков размера не более, чем 2×2 (см. разд. 3.5.4), подобно тому, что имело место в случае фундаментальных представлений. Эти блоки имеют вид (4.37), и, как можно непосредственно убедиться, получаются из блоков (3.126) в случае фундаментальных представлений путем подстановки

$$\mathcal{R}_{\square}^i \xrightarrow{q \rightarrow q^{r+s}} \mathcal{R}_{[r,1^s]}^i. \quad (4.40)$$

Последнее означает, что свойство (4.39) выполнено для отдельных коэффициентов перед полиномами Шура в разложении по характерам (1.55). Кроме того, можно проверить, что в пределе $A \rightarrow 1$ характеры (полиномы Шура) сами по себе удовлетворяют необходимому соотношению. Следовательно, полиномы Александера также должны удовлетворять (4.39).

4.4. Проекторы не неприводимые представления как полиномы от \mathcal{R} -матриц

Обсудив \mathcal{R} -матричную формулировку процедуры каблирования, вернемся теперь к выводу операторных выражений для проекторов на неприводимые представления в случае высших каблей. Несмотря на то, что формулировки процедуры каблирования в терминах суммы по путям на графе Юнга, как мы объяснили в разд. 4.2, в принципе, достаточно для вычисления произвольных (поли)раскрашенных полиномов ХОМФЛИ узлов (зацеплений), такие операторные выражения могут быть весьма полезны: в первую очередь, для анализа общих свойств выражения (1.60). В частности, продемонстрированное в разд. 4.3 и обоснованное в разд. 4.3 свойство коммутации проекторов с каблированными пересечениями можно, как только проекторы представлены полиномами от \mathcal{R} -матриц, вывести непосредственно из уравнения Янга — Бакстера. Еще одно достоинство такого подхода в том, что непосредственного вычисления требуют лишь \mathcal{R} -матричные выражения для проекторов, вводимых в соответствующее число первых прядей в сечении косы: выражения для проектов, вводимых в другие наборы соседних прядей после этого получатся в результате простого сдвига индексов (что так же можно показать с помощью уравнения Янга — Бакстера).

4.4.1. Вывод \mathcal{R} -матричных выражений для проекторов с помощью матриц проекторов в специальном базисе.

Если известна матрица проектора в некотором базисе, то операторное выражение для проектора можно найти как комбинацию \mathcal{R} -матриц (элемент кольца многочленов), матрица которой в данном базисе совпадет с матрицей проектора. Такую комбинацию можно искать в виде разложения по базису на кольце многочленов,

$$\sum_I \alpha_I \Xi_I = P_Q, \quad (4.41)$$

где Ξ_I — произвольные базисные элементы кольца многочленов, порожденного матрицами R_m с $m = 1, |Q|$, а α_I — коэффициенты, которые предстоит определить. В случае фундаментального представления на всех прядях матрицы R_m порождают алгебру Гекке [124], размерность которой равна $|Q|!$ (см., например, [75]) — таким образом индекс I в этом случае пробегает значения от 1 до $|Q|!$. В правой части (4.41) стоит проектор в виде матрицы. Это может быть проектор на сумму любое из изоморфных представлений Q , возникающих в разложении $[1]^{|Q|}$, либо на сумму нескольких таких представлений. Поскольку все элементы кольца многочленов распадаются на блоки, соответствующие неприводимым представлениям Q в разложении $[1]^{|Q|} = \sum_i N_{Q_i} Q_i$, число элементов в матрице Ξ_i , не равных нулю тождественно, равно сумме квадратов кратностей $\sum_i (N_{Q_i})^2$. Это есть число уравнений в (4.41), и можно показать, что это в точности равно $|Q|!$, т.е. размерности кольца многочленов и тем самым числу переменных α_I . Действительно, как хорошо

известно в теории представлений, кратности вырождений могут быть получены из разложения степени $|Q|$ характера фундаментального представления $S_1^{|Q|} = t_1^{|Q|}$ по характерам неприводимых представлений: $Q_i \vdash 1^{|Q|}$. Эти характеры удовлетворяют соотношениям:

$$t_1^{|Q|} = \sum_{Q_i \vdash |Q|} N_{1^{|Q|}}^{Q_i} S_{Q_i}(t_k), \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{|Q|} = \sum_{Q_i \vdash |Q|} N_{1^{|Q|}}^{Q_i} S_{Q_i}\left(\frac{\partial}{k \partial t_k}\right).$$

Кроме того, на характерах можно определить скалярное произведение [90]:

$$S_T \left(\frac{\partial}{k \partial t_k} \right) S_R(t_k) = \delta_{Q,T}. \quad (4.43)$$

Если применить (4.43) к (4.42), получится тождество:

$$|Q|! = \sum \left(N_{1^{|Q|}}^{Q_i} \right)^2. \quad (4.44)$$

Это соотношение показывает, что число уравнений в (4.41) действительно равно числу определяемых коэффициентов α_I .

Теперь мы воспользуемся матричной формой проекторов, описанной в разд. 4.2, для вывода искомого операторных выражений.

Случай $|Q| = 2$. Кольцо многочленов имеет единственный генератор \mathcal{R}_1 , который удовлетворяет уравнению

$$(R_1 - q)(R_1 + q^{-1}) = 0. \quad (4.45)$$

Базис на этом кольце состоит из $2! = 2$ -х элементов, которые можно выбрать как

$$\Xi_0 = \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \Xi_1 = R_1 = \begin{pmatrix} q & \\ & -q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Следовательно, проекторы должны удовлетворять уравнениям:

$$P_2 = \alpha_2^0 + \alpha_2^1 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

$$P_{11} = \alpha_{11}^0 + \alpha_{11}^1 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $[1]^2 = [2] + [11]$, каждый элемент кольца разбиваются на 2 блока 1×1 , один для представления $[2]$, второй для представления $[11]$, так что получается в точности $1^2 + 1^2 = 2$ уравнения на $2! = 2$ неизвестных. Решения этих уравнений совпадают с (4.5):

$$P_2 = \frac{1 + qR_1}{q[2]_q} \quad P_{11} = \frac{q - R_1}{[2]_q}. \quad (4.48)$$

Случай $|Q| = 3$. В этом случае кольцо многочленов от R -матриц имеет два генератора: R_1 и R_2 . Кольцо многочленов $3! = 6$ -мерно, и базис может быть выбран как

$$\Xi_{00} = \text{Id}, \quad \Xi_{10} = R_1, \quad \Xi_{01} = R_2 R_1, \quad \Xi_{11} = R_1 R_2 R_1, \quad \Xi_{02} = R_2, \quad \Xi_{12} = R_1 R_2. \quad (4.49)$$

Проекторы должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned}
P_3 &= \alpha_3^{00} + \alpha_3^{10} R_1 + \alpha_3^{02} R_2 + \alpha_3^{12} R_1 R_2 + \alpha_3^{01} R_2 R_1 + \alpha_3^{11} R_1 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{\underline{21}} &= \alpha_{\underline{21}}^{00} + \alpha_{\underline{21}}^{10} R_1 + \alpha_{\underline{21}}^{02} R_2 + \alpha_{\underline{21}}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{\underline{21}}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{\underline{21}}^{11} R_1 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.50) \\
P_{\overline{21}} &= \alpha_{\overline{21}}^{00} + \alpha_{\overline{21}}^{10} R_1 + \alpha_{\overline{21}}^{02} R_2 + \alpha_{\overline{21}}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{\overline{21}}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{\overline{21}}^{11} R_1 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{111} &= \alpha_{111}^{00} + \alpha_{111}^{10} R_1 + \alpha_{111}^{02} R_2 + \alpha_{111}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{111}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{111}^{11} R_1 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Поскольку $[1]^3 = [3] + 2[21] + [111]$, каждый элемент кольца многочленов разбивается на 3 блока: блок 1×1 для представления $[3]$, блок 2×2 для представления $[21]$ и блок 1×1 для представления $[111]$. Таким образом, имеется в точности $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$ уравнений на $3! = 6$ переменных. Решение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_3 &= \frac{1}{q^3 [2]_q [3]_q} (1 + qR_1 + qR_2 + q^2 R_1 R_2 + q^2 R_2 R_1 + q^3 R_1 R_2 R_1), \\
P_{\underline{21}} &= \frac{1}{[3]_q} \left(1 + qR_1 - \frac{1}{q^2 [2]_q} R_2 - \frac{1}{q [2]_q} (R_1 R_2 + R_2 R_1) - \frac{1}{[2]_q} R_1 R_2 R_1 \right), \\
P_{\overline{21}} &= \frac{1}{[3]_q} \left(1 - q^{-1} R_1 + \frac{q^2}{[2]_q} R_2 - \frac{q}{[2]_q} (R_1 R_2 + R_2 R_1) + \frac{1}{[2]_q} R_1 R_2 R_1 \right), \\
P_{111} &= \frac{q^3}{[2]_q [3]_q} (1 - q^{-1} R_1 - q^{-1} R_2 + q^{-2} R_1 R_2 + q^{-2} R_2 R_1 - q^{-3} R_1 R_2 R_1).
\end{aligned} \quad (4.51)$$

Проектор ранга 2 на сумму двух изоморфных представлений $[21]$ может быть получен как сумма

$$P_{21} = P_{\underline{21}} + P_{\overline{21}} = \frac{1}{[3]_q} (2 + (q - q^{-1})(R_1 + R_2) - R_1 R_2 - R_2 R_1). \quad (4.52)$$

Другой способ состоит в том, чтобы вместо (4.51) написать уравнение

$$P_{21} = \alpha_{\underline{21}}^{00} + \alpha_{\underline{21}}^{10} R_1 + \alpha_{\underline{21}}^{02} R_2 + \alpha_{\underline{21}}^{12} R_1 R_2 + \alpha_{\underline{21}}^{01} R_2 R_1 + \alpha_{\underline{21}}^{11} R_1 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

решение которого приведет к тому же ответу. Используя уравнение Янга — Бакстера $R_2 R_1 R_2 = R_1 R_2 R_1$, а также характеристические уравнения $(R_1 - q)(qR_1 + 1) = (R_2 - q)(qR_2 + 1) = 0$, можно

привести выражение (4.52) к более простому виду:

$$P_{21} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{[3]_q}. \quad (4.54)$$

Случай $|\mathbf{Q}| = 4$. На этот раз кольцо многочленов порождается тремя генераторами: R_1 , R_2 и R_3 . Базис в кольце содержит 24 элемента, которые можно выбрать, например, как

$$\begin{aligned} \Xi_{000} &= \text{Id}, & \Xi_{001} &= R_3 R_2 R_1, & \Xi_{002} &= R_3 R_2, & \Xi_{003} &= R_3, \\ \Xi_{100} &= R_1, & \Xi_{101} &= R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{102} &= R_1 R_3 R_2, & \Xi_{103} &= R_1 R_3, \\ \Xi_{010} &= R_2 R_1, & \Xi_{011} &= R_2 R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{012} &= R_2 R_1 R_3 R_2, & \Xi_{013} &= R_2 R_1 R_3, \\ \Xi_{110} &= R_1 R_2 R_1, & \Xi_{111} &= R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{112} &= R_1 R_2 R_1 R_3 R_2, & \Xi_{113} &= R_1 R_2 R_1 R_3, \\ \Xi_{020} &= R_2, & \Xi_{021} &= R_2 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{022} &= R_2 R_3 R_2, & \Xi_{023} &= R_2 R_3, \\ \Xi_{120} &= R_1 R_2, & \Xi_{121} &= R_1 R_2 R_3 R_2 R_1, & \Xi_{122} &= R_1 R_2 R_3 R_2, & \Xi_{123} &= R_1 R_2 R_3. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Поскольку $[1]^4 = [4] + 3 [31] + 2 [22] + 3 [211] + [1111]$, каждый элемент кольца разбивается на 5 блоков: блок $1 \times [1]$ для представления $[4]$, блок 3×3 для представления $[31]$, блок 2×2 для представления $[22]$, блок 3×3 для представления $[211]$ и блок представления 1×1 для $[1111]$. Таким образом, есть ровно $1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 24$ уравнения на $4! = 24$ неизвестных. Выражения для проекторов на каждое из представлений, возникающих в разложении $[1]^4$, довольно громоздкие — они приведены в приложении А к работе [34], в то время как здесь ограничимся формулами для проекторов на представления $[4]$, $[1111]$, а также на пространства всех представлений $[31]$, $[22]$ и $[211]$:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{q^6 [4]_q!} \left(1 + q(R_1 + R_2 + R_3) + q^2(R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_3 R_2 + R_1 R_3) + \right. \\ &\quad + q^3(R_1 R_2 R_1 + R_2 R_3 R_2 + R_1 R_2 R_3 + R_2 R_1 R_3 + R_3 R_1 R_2 + R_3 R_2 R_1) + \\ &\quad + q^4(R_1 R_2 R_1 R_3 + R_1 R_2 R_3 R_2 + R_1 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_1 R_3 R_2 + R_2 R_3 R_2 R_1) + \\ &\quad \left. + q^5(R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 + R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 + R_2 R_1 R_3 R_2 R_1) + q^6 R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1 \right), \\ P_{31} &= \frac{1}{q^2 [2] [4]} \left(3 + (2q - q^{-1})(R_1 + R_2 + R_3) + (q^2 - 1)(R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_3 R_2) + \right. \\ &\quad + (q^2 - 2)R_1 R_3 + \\ &\quad + q^3(R_1 R_2 R_1 + R_2 R_3 R_2) - q(R_1 R_2 R_3 + R_2 R_1 R_3 + R_3 R_1 R_2 + R_3 R_2 R_1) - \\ &\quad - R_2 R_1 R_3 R_2 - \\ &\quad \left. - q(R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 + R_2 R_1 R_3 R_2 R_1) + q^3 R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 - q^2 R_1 R_2 R_1 R_3 R_2 R_1 \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
P_{22} = \frac{1}{[3][2]^2} & \left(2 + (q - q^{-1})(R_1 + R_2 + R_3) - (R_1R_2 + R_2R_1 + R_2R_3 + R_3R_2) + \right. \\
& + (q^2 + q^{-2})R_1R_3 + \\
& - (R_1R_2R_1R_3 + R_1R_2R_3R_2 + R_1R_3R_2R_1 + R_2R_3R_2R_1) + (q^2 + q^{-2})R_2R_1R_3R_2 - \\
& \left. - (q - q^{-1})(R_1R_2R_1R_3R_2 + R_1R_2R_3R_2R_1 + R_2R_1R_3R_2R_1) + 2R_1R_2R_1R_3R_2R_1 \right), \\
P_{211}(q) = P_{31}(-1/q), & \quad P_{1111}(q) = P_4(-1/q).
\end{aligned}$$

4.4.2. Вычисление проекторов с помощью характеристических уравнений

В этом разделе мы рассмотрим еще один способ построить проекторы как полиномы от R -матриц. Этот способ (в отличие от способа из предыдущей главы) не позволяет получить полиномы ни наименьший возможной степени, ни наименьшей возможной длины; зато он приводит к ответу с более понятной структурой, что важно для теоретического анализа.

Метод основан на том, что если известно характеристическое уравнение для линейного оператора:

$$\prod_{i=1}^n (A - \lambda_i) = 0, \quad (4.57)$$

то легко построить проекторы на подпространства, соответствующие каждому из собственных значений:⁸

$$P_{\lambda_j} = \prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad (4.58)$$

или на сумму таких подпространств:

$$P_{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}} = \sum_{l=1}^k P_{\lambda_{j_l}}. \quad (4.59)$$

При этом свойство $P_{\lambda_j}^2 = P_{\lambda_j}$ следует непосредственно из (4.57). Применительно R -матрицам, этот метод имеет следующий недостаток: многие из собственных значений R -матрицы совпадают. Например, в случае фундаментального представления, среди собственных значений всего два различных: q and $-q^{-1}$. Следовательно, основная задача в том, чтобы найти комбинации R -матриц, которые имеют достаточно много несовпадающих собственных значений, чтобы можно было “различить” все неприводимые представления в разложении $[1]^{|\mathcal{Q}|}$. Чтобы найти такие комбинации и соответствующие характеристические уравнения, достаточно рассмотреть $|\mathcal{Q}|$ -рядные косы. Естественно начать со случаев $|\mathcal{Q}| = 2$ и $|\mathcal{Q}| = 3$, а затем попытаться обобщить метод.

Поскольку R -матрицы разбиваются на блоки, соответствующие разным неприводимым представлениям, их характеристические уравнения можно записать в виде:

$$\prod_{Q \vdash 1^{|\mathcal{Q}|}} F_Q(R) = 0, \quad (4.60)$$

где через F_Q обозначено характеристическое уравнение блока, соответствующего представлению Q :

$$F_Q(P_Q R) = 0 \quad (4.61)$$

⁸Порядок множителей выражениях (4.57) и (4.58) несущественен, поскольку все множители коммутируют.

Случай $|Q| = 2$. В этом случае имеем одну R -матрицу, удовлетворяющую характеристическому уравнению:

$$F_2(R_1)F_{11}(R_1) \equiv (R_1 - q)(qR_1 + 1) = 0 \quad (4.62)$$

В этом уравнении содержится достаточно информации, чтобы построить оба проектора:

$$P_2 = \frac{R_1 + q^{-1}}{q + q^{-1}} \quad P_{11} = \frac{R_1 - q}{-q^{-1} - q} \quad (4.63)$$

Результат совпадает с полученным ранее (4.5).

Случай $|Q| = 3$. В этом случае имеем две матрицы, R_1 и R_2 , удовлетворяющих одному и тому же характеристическому уравнению (4.62). Проекторы, полученные из характеристического уравнения для первой из R -матриц, позволяют “отличить” представления [3] и [21], *симметрические* по первой паре прядей от представлений [21] и [111], *антисимметрических* по первой паре прядей. Проекторы, полученные из уравнения на вторую из R -матриц позволяют различить аналогичные группы представлений относительно второй пары прядей. Этого не достаточно, чтобы построить проекторы на каждое из представлений [3], [21] и [111]. Таким образом, необходимо построить комбинации R -матриц, которые позволят найти все необходимые проекторы. В случае $|Q| = 3$ примером подходящей комбинации является $(R_1 - R_2)^2$. Используя явные выражения для R_1 и R_2 , можно установить, что эта комбинация удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$(R_1 - R_2)^2 \left((R_1 - R_2)^2 - (q^2 + 1 + q^{-2}) \right) = 0, \quad (4.64)$$

где представлению [3], как и представлению [111], соответствует собственное значение 0, в то время как обоим представлениям [21] соответствует собственное значение $q^2 + 1 + q^{-2}$. Отсюда можно получить проектор P_{21} :

$$P_{21} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{q^2 + 1 + q^{-2}}. \quad (4.65)$$

Используя также (4.62), можно получить все четыре проектора:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(R_1 + q^{-1}) \left((q^2 + 1 + q^{-2}) - (R_1 - R_2)^2 \right)}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{\underline{21}} &= \frac{(R_1 + q^{-1})(R_1 - R_2)^2}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{\underline{2\bar{1}}} &= \frac{(q - R_1)(R_1 - R_2)^2}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}, \\ P_{111} &= \frac{(q - R_1) \left((q^2 + 1 + q^{-2}) - (R_1 - R_2)^2 \right)}{(q + q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.5. Примеры вычисления раскрашенных полиномов ХОМФЛИ методом каблирования

В этом разделе мы дадим несколько иллюстраций к приведенным выше процедурам и формулам. Мы начнем с того, что еще раз вычислим полираскрашенный полином ХОМФЛИ из разд. 3.1 — на этот раз методом каблирования. Затем мы приведем явные формулы для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в тех случаях, которые представляли основной интерес в течение нашей работы.

4.5.1. Вычисление полираскрашенного полином ХОМФЛИ для зацепления кольца Борромео методом каблирования

В этом случае имеем 6 различных подстановок для различных раскрашенных пересечений:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(1\otimes 2)\otimes 3} &= \mathcal{R}_{(2\otimes 1)\otimes 3}^\dagger \longrightarrow R_1 R_2, \\
\mathcal{R}_{(1\otimes 3)\otimes 2} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 1)\otimes 2}^\dagger \longrightarrow R_1 R_2 R_3, \\
\mathcal{R}_{(2\otimes 3)\otimes 1} &= \mathcal{R}_{(3\otimes 2)\otimes 1}^\dagger \longrightarrow R_2 R_1 R_3 R_2 R_4 R_3, \\
\mathcal{R}_{1\otimes (2\otimes 3)} &= \mathcal{R}_{1\otimes (3\otimes 2)}^\dagger \longrightarrow R_3 R_2 R_4 R_3 R_5 R_4, \\
\mathcal{R}_{2\otimes (1\otimes 3)} &= \mathcal{R}_{2\otimes (3\otimes 1)}^\dagger \longrightarrow R_3 R_4 R_5, \\
\mathcal{R}_{3\otimes (1\otimes 2)} &= \mathcal{R}_{3\otimes (2\otimes 1)}^\dagger \longrightarrow R_4 R_5.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

К каждой из матриц R следует применить такую же подстановку с заменой всех матриц R на обратные — что при этом действительно получится оператор, обратный к исходному, можно убедиться непосредственно, если учесть, что \mathcal{R} -матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос (стл. 1 таб. 4). Кроме того, имеем 6 проекторов, соответствующих $3! = 6$ перестановкам 3 раскрашенных прядей:

$$\begin{aligned}
P_{1\otimes 2\otimes 3} &= \frac{1+qR_2}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_4+qR_5+qR_4R_5+qR_5R_4+q^2R_4R_5R_4}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}, \\
P_{2\otimes 1\otimes 3} &= \frac{1+qR_1}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_4+qR_5+qR_4R_5+qR_5R_4+q^2R_4R_5R_4}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}, \\
P_{1\otimes 3\otimes 2} &= \frac{1+qR_5}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_2+qR_3+qR_2R_3+qR_3R_2+q^2R_2R_3R_2}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}, \\
P_{3\otimes 1\otimes 2} &= \frac{1+qR_5}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_1+qR_2+qR_1R_2+qR_2R_1+q^2R_1R_2R_1}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}, \\
P_{2\otimes 3\otimes 1} &= \frac{1+qR_1}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_3+qR_4+qR_3R_4+qR_4R_3+q^2R_3R_4R_3}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}, \\
P_{3\otimes 2\otimes 1} &= \frac{1+qR_4}{1+q^2} \cdot \frac{1+qR_1+qR_2+qR_1R_2+qR_2R_1+q^2R_1R_2R_1}{(1+q^2)(1+q^2+q^4)}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

С помощью приведенных выше формул можно вычислять полиномы ХОМФЛИ трехпрядных трехкомпонентных зацеплений в представлении $[1] \otimes [2] \otimes [3]$. В частности, полином ХОМФЛИ зацепления кольца Борромео, вычисление которого без помощи процедуры каблирования было приведено в разд. 3.1, равен

$$\begin{aligned}
H_{1\otimes 2\otimes 3}^{\otimes 3} &= \text{Tr}_{16} P_{1\otimes 2\otimes 3} R_2^{-1} R_1^{-1} \cdot R_5 R_4 R_3 \cdot R_2^{-1} R_1^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_4^{-1} R_3^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot R_4 R_5 \cdot R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} \cdot R_4 R_5 R_3 R_4 R_2 R_3 = \\
&= S_6^* + (-q^{12} + q^{10} + q^8 - q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - q^{-4} + q^{-8} + q^{-10} - q^{-12}) S_{51}^* + \\
&+ (-q^{10} + q^8 + 2q^6 - 2q^4 - q^2 + 4 - q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} + q^{-8} - q^{-10}) S_{42}^* + S_{411}^* + S_{33}^* + S_{321}^*.
\end{aligned}$$

При подстановке в полученное выражение явных формул для характеров в специальной точке (1.54) и упрощения полученного выражения воспроизводится ответ (3.7) из разд. 3.1.

4.5.2. Раскрашенные полиномы ХОМФЛИ четырехпрядных узлов в первом симметрическом представлении

Первое практически полезное приложения разработанная вычислительная процедура находит при вычислении простейших раскрашенных полиномов ХОМФЛИ узлов — замыканий четырехпрядных кос: именно на этом случае останавливались таблицы раскрашенных полиномов, составленные ранее [58, 25, 71, 10].

Простейшие раскрашенные полиномы ХОМФЛИ были вычислены для ряда четырехрядных узлов в работе [34]. В этом случае достаточно применить двойное каблирование, отвечающее следующим подстановкам для каждой из \mathcal{R} -матриц:

$$\mathcal{R}_{(1^2 \otimes 1^2) \otimes 1^2 \otimes 1^2} = R_2 R_1 R_3 R_2, \quad \mathcal{R}_{1^2 \otimes (1^2 \otimes 1^2) \otimes 1^2} = R_4 R_3 R_5 R_4, \quad \mathcal{R}_{1^2 \otimes 1^2 \otimes (1^2 \otimes 1^2)} = R_6 R_5 R_7 R_6. \quad (4.69)$$

При проекции этих комбинаций на представление [2] (первое симметрическое) в результате соответствующего вычисления получится простейший раскрашенный полином ХОМФЛИ, а при проекции на представление [11] (первое антисимметрическое) — тот же полином с точностью до замены $q \rightarrow 1/q$. Необходимые выражения для проекторов приведены в разд. 4.4: формула (4.47). Полиномы ХОМФЛИ четырехрядных узлов для представлений уровня 2 приведены в приложении В.1.

4.5.3. Раскрашенные полиномы ХОМФЛИ трехрядных узлов в первом несимметрическом представлении

По-настоящему интересным приложением описанной процедуры, однако, явилось вычисление раскрашенных полиномов ХОМФЛИ *неторических* узлов в случае первого представления, не являющегося не полностью симметрическим, ни полностью антисимметрическим: это представление [21]. Именно в отношении этого случая к моменту начала работы накопилось множество вопросов и противоречивых предположений, в то время как явный ответ был не известен даже для простейшего неторического узла: узла-восьмерки (узел 4_1 в обозначениях Рольфсена [58]) [31].

Ряд полиномов ХОМФЛИ неторических узлов в первом несимметрическом представлении был также вычислен в работе [34]. Для этого потребовалось применить тройное каблирование к по меньшей мере трехрядной косе — поскольку все узлы и зацепления — замыкания двурядных кос торические. Соответствующие замены для \mathcal{R} -матриц суть

$$\mathcal{R}_{(1^3 \otimes 1^3) \otimes 1^3} = R_3 R_2 R_4 R_1 R_3 R_5 R_2 R_4 R_3 \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{1^3 \otimes (1^3 \otimes 1^3)} = R_6 R_5 R_7 R_4 R_6 R_8 R_5 R_7 R_6 \quad (4.70)$$

Необходимые проекторы даются матрицами, описанными в разд. 4.2.2, либо \mathcal{R} -матричными выражениями, приведенными в разд. 4.4 — формулы (4.66, 4.65). Формулы для соответствующих раскрашенных полиномов приведены в приложении В.2. Та же процедура позволяет вычислить полиномы ХОМФЛИ в симметрическом представлении [3] и в антисимметрическом представлении [111] (которые связаны между собой заменой $q \leftrightarrow q^{-1}$), если при вычислении подставить в выражения соответствующие проекторы: при этом воспроизводятся ответы, полученные ранее в работе [25] с помощью непосредственного применения формулы (1.55).

4.6. Оснащение в процедуре каблирования.

Здесь мы обсудим еще одну тонкость, касающуюся процедуры каблирования.

Как мы обсуждали в разд. 2.2, \mathcal{R} -матрицы определены с точностью до общего множителя (поскольку таковой не изменяет уравнение Янга — Бакстера) что отвечает произволу в выборе оснащения полинома ХОМФЛИ (полиномы ХОМФЛИ в различных оснащениях отличаются друг от друга множителем — целой степенью параметра q).

В теории представлений как правило используют *вертикальное* оснащение [74], в котором собственные значения \mathcal{R} -матрицы равны $q^{\varkappa_Q - \frac{N|Q|}{2} - \varkappa_{T_1} + \frac{N|T_1|}{2} - \varkappa_{T_2} + \frac{N|T_2|}{2}}$, где T_1 и T_2 — представления на линиях в перекрестке (то есть, \mathcal{R} -матрица действует на пространстве $T_1 \otimes T_2$), а Q — одно из неприводимых представлений в разложении $T_1 \otimes T_2$ (число различных Q равно числу различных собственных значений). В частности, в вертикальном оснащении собственные значения \mathcal{R} -матрицы равны q , $-q^{-1}$ в фундаментальном представлении и q^4 , -1 , q^{-2} в первом симметрическом представлении. При использовании вертикального оснащения процедура каблирования

дает в точности те же ответы, что и непосредственное вычисление с помощью \mathcal{R} -матриц в старших представлениях. Однако, при вычислении полинома узла с помощью его диаграммы ответ на последнем шаге вычисления необходимо домножать на величину $(q^{-\varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}})^w$, где $|T|$ означает число клеток в диаграмме Юнга представления T , а w разность числа прямых и обратных перекрестков на диаграмме узла рис. 8 — это необходимо для совпадения ответов, вычисленных с помощью диаграмм с различным w (мы показали подобную необходимость это в разд. 2.4, правда, в частном случае $T_1 = T_2 = \square$ и в другом оснащении).

Чтобы ответ, вычисленный по диаграмме узла, был топологическим инвариантом без дополнительных операций, следует выбрать иное оснащение — таковое называется топологическим и часто используется в теории узлов [69]. В топологическом оснащении собственные значения \mathcal{R} -матрицы даются формулой $q^{\varkappa_Q - 4\varkappa_T} A^{-|T|}$, в частности, они равны $\frac{q}{A}$, $-\frac{1}{qA}$ в фундаментальном представлении и $\frac{q^2}{A^2}$, $\frac{1}{A^2 q^2}$, $\frac{1}{A^2 q^4}$ в первом симметрическом. Топологическое оснащение применяют только для самопересечений на диаграмме узла или отдельной компоненты зацепления, что отвечает случаю $T_1 = T_2 = T$. Для пересечений различных компонент зацепления выбор оснащения при этом произволен — но должен быть одинаков для данной пары компонент: ответы в различных оснащениях будут отличаться на множитель вида $q^{-const \cdot w_{12}}$, который, как и число зацеплений компонент w_{12} сам по себе есть топологический инвариант [51]. При вычислении полираскрашенных полиномов зацеплений мы всякий раз будем уточнять выбор оснащения для пересечений различных компонент.

4.7. Раскрашенные двупрядные косы и проблема знаков и кратностей собственных значений \mathcal{R} -матриц

В случае двупрядных узлов раскрашенные полиномы ХОМФЛИ известны для произвольного представления, так как для их вычисления с помощью (1.55, 1.57) достаточно собственных значений \mathcal{R} -матрицы. Поэтому случай двупрядных кос может быть использован в качестве иллюстрации к самосогласованности процедуры каблирования, а также для проверки произведенной вычислительной процедуры.

Общие формулы (1.55, 1.57) в случае двупрядных кос выглядят как

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,n]} = Tr_{T_1 \otimes T_2} \left((\mathcal{R}_{T_1 T_2} \mathcal{R}_{T_2 T_1})^{\frac{n}{2}} \right) = \frac{1}{q^{n\varkappa_{T_1} + n\varkappa_{T_2}}} \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} (\pm q^{\varkappa_{Q_i}})^n N_{T_1 T_2}^{Q_i} S_{Q_i}^*, \quad (4.71)$$

где q^{\varkappa_Q} — собственные значения двупрядной \mathcal{R} -матрицы в разложении (1.59), а суммирование производится по всем неприводимым представлениям Q_i в разложении произведения $T_1 \otimes T_2$, в которое представление Q_i входит с кратностью $N_{T_1 T_2}^{Q_i}$; коэффициент перед суммой приводит отвечает вертикальному оснащению (см. разд. 4.6).

Процедура каблирования приводит к следующему выражению для ответа:

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,n]} = Tr_{\mathbf{1} \otimes (|T_1| + |T_2|)} \left(P_{T_1 T_2} \left(\prod_{i=1}^{T_2} \prod_{j=1}^{T_1} R_{|T_1|+i-j} \prod_{i=1}^{T_1} \prod_{j=1}^{T_2} R_{|T_2|+i-j} \right)^{\frac{n}{2}} \right). \quad (4.72)$$

Для дальнейшего анализа полезно отдельно рассмотреть два случая: двупрядные узлы и двупрядные зацепления. Изучение зацеплений позволяет определить вид собственных значений в случае различных представлений на разных компонентах зацепления — что невозможно в при изучении узлов. С другой стороны, двупрядные узлы всегда содержат нечетное число пересечений — так что с применение процедуры каблирования в этом случае позволяет также определить *знаки* перед собственными значений, которые оставлены неопределенными в общей формуле (2.46).

4.7.1. Двупрядные зацепления

В этом случае имеем две \mathcal{R} -матрицы: $\mathcal{R}_{T_1 T_2}$ и $\mathcal{R}_{T_2 T_1}$ — они различны как линейные операторы, поскольку действуют на разных пространствах:

$$\mathcal{R}_{T_1 T_2} : T_1 \otimes T_2 \rightarrow T_2 \otimes T_1 \quad (4.73)$$

$$\mathcal{R}_{T_2 T_1} : T_2 \otimes T_1 \rightarrow T_1 \otimes T_2$$

Матрицы этих операторов, однако, совпадают, с точностью до транспонирования: $\mathcal{R}_{T_1 T_2} = \mathcal{R}_{T_2 T_1}^\dagger$. Выражение (4.71) для зацепления, имеющего $2n$ пересечений, можно переписать в виде:

$$H_{T_1 T_2}^{T[2,2n]} = (q^{\varkappa_{T_1} + \varkappa_{T_2}})^{-2n} \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} N_{T_1 T_2}^{Q_i} q^{2n \varkappa_{Q_i}} S_{Q_i}^* = \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} H_{T_1 T_2 | Q_i}^{[2,2n]} S_{Q_i}^* \quad (4.74)$$

Тот же ответ, в том числе для отдельных коэффициентов $H_{T_1 T_2 | Q_i}^{[2,2n]}$ в разложении полинома ХОМ-ФЛИ по характерам, можно получить с помощью процедуры каблирования⁹. При этом можно также непосредственно убедиться в том, что имеет место дуальность ранга-уровня (где \tilde{T} означает диаграмму дуального разбиения — зеркальное отражение диаграммы T относительно главной диагонали) [74]:

$$H_{T_1 T_2 | Q_i}^{T[2,2n]}(q) = H_{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2 | \tilde{Q}_i}^{T[2,2n]} \left(-\frac{1}{q} \right) \quad (4.75)$$

так и свойство симметрии по перестановке представлений:

$$H_{T_2 T_1 | Q_i}^{T[2,2n]} = H_{T_1 T_2 | Q_i}^{T[2,2n]} \quad (4.76)$$

Оба свойства коэффициентов разложения по характерам подробно обсуждаются, например, в [26, 27, 34]. Ответ, выраженный через собственные значения \mathcal{R} -матрицы в старших представлениях автоматически обладает этими симметриями в силу тождеств $N_{T_1 T_2}^{Q_i} = N_{T_2 T_1}^{Q_i} = N_{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}^{\tilde{Q}_i}$ и $\varkappa_Q = -\varkappa_{\tilde{Q}}$. Можно также проверить, что выбор различных копий изоморфных представлений, возникающих в разложении $1^{\otimes |T_1| + |T_2|}$, не влияет на ответ.

Кратности различных неприводимых представлений можно определить независимо, используя соотношение между характерами неприводимых представлений [90]

$$S_{T_1} S_{T_2} = \sum_{Q_i \vdash T_1 \otimes T_2} N_{T_1 T_2}^{Q_i} S_{Q_i} \quad (4.77)$$

— например,

$$S_{31} S_{31} = S_{62} + S_{611} + S_{53} + 2S_{521} + S_{5111} + S_{44} + 2S_{431} + S_{422} + S_{4211} + S_{332} + S_{3311} \quad (4.78)$$

Почти все рассмотренные представления имели кратности 0 или 1. Нетривиальные кратности при рассмотрении двупрядных узлов встречаются начиная с представлений уровня 3. Список всех представлений с нетривиальными кратностями в случае представлений T_1 и T_2 уровней 3 и 4 приведен в приложении Г.1.

В разложении $1^{\otimes |T_1| + |T_2|}$ содержатся некоторые неприводимые представления, которых не содержит разложение $T_1 \otimes T_2$. Для всех таких неприводимых представлений при вычислении ответа с помощью процедуры каблирования так или иначе должен получиться ноль. Поскольку мы помещаем проекторы, описанные в разд. 4.2 с обеих сторон от R -матрицы, для всех представлений, не содержащихся в разложении $T_1 \otimes 1^{\otimes |T_2|}$, нулевой ответ получается автоматически. Оставшиеся ненулевые блоки R -матриц также оказываются вырожденными, так для представлений, не содержащихся в разложении $1^{\otimes |T_1|} \otimes T_2$, обращается в нуль, как и должен.

⁹ достаточно убедиться в совпадении ответов для $2 \leq 2n \leq \min(\text{rank } P_{T_1}, \text{rank } P_{T_2})$

4.7.2. Двупрядные узлы.

Как уже отмечалось, процедура каблирования для двупрядных узлов позволяет определить собственные значения \mathcal{R} -матриц в старших представлениях вместе с их знаками. В этом случае $T_1 = T_2$, поскольку обе пряди косы после замыкания принадлежат одной и той же кривой. Методом каблирования можно проверить, что во всех случаях без кратностей (мы проверили вплоть до $|T_1| = |T_2| \leq 4$) собственные значения раскрашенной \mathcal{R} -матрицы удовлетворяют следующему правилу:

Собственное значение с наибольшей степенью q имеет знак плюс, собственное значение со следующей по величине степени q имеет знак минус, следующее — знак плюс, и т.д.

Это правило использовано, например, в [33]. Отступления от этого правила случаются, если в разложении тензорного произведения двух неприводимых представлений возникают кратности — в простейшем примере

$$[21] \times [21] = [42] + [411] + [33] + \mathbf{2} [321] + [3111] + [222] + [2211]. \quad (4.79)$$

Для этого случая процедура каблирования дает следующие собственные значения:

$$q^5, -q^3, -q^3, 1, -1, q^{-3}, q^{-3}, -q^{-5} \quad (4.80)$$

В следующем по сложности случае имеем

$$[31] \times [31] = [62] + [611] + [53] + \mathbf{2} [521] + [5111] + [44] + \mathbf{2} [431] + [422] + [4211] + [332] + [3311] \quad (4.81)$$

а собственные значения, вычисленные с помощью процедуры каблирования, равны:

$$q^{10}, -q^8, -q^6, q^3, -q^3, 1, q^4, 1, -1, q^{-2}, -q^{-4}, -q^{-4}, q^{-6}. \quad (4.82)$$

Таким образом, правило расстановки знаков в двупрядной \mathcal{R} -матрице при наличии кратностей оказывается заметно сложнее, чем правило чередования при отсутствии кратностей.

Таблицы собственных значений \mathcal{R} -матриц вместе со знаками приведены в приложении Г.2.

В качестве проверки можно подставить вычисленные собственные значения в выражение (4.71) и убедиться, что выполнены следующие два свойства полинома ХОМФЛИ. Во-первых, полином ХОМФЛИ действительно должен быть *полиномом*. Во-вторых, полином двупрядного узла с единственным пересечением должен быть равен полиному тривиального узла с точностью до оснащающего множителя. Действительно, такой узел преобразуется в тривиальный с помощью первого движения Рейдемейстера.

Таким образом, собственные значения должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$S_R^* = \sum \lambda_Q S_Q^* \quad (4.83)$$

$$\sum (\lambda_Q)^{2n+1} S_Q^* : S_R^*$$

Все знаки собственных значений, вероятно, задаются написанными уравнениями, но как определить эти знаки из уравнений — не ясно.

5. Приложение \mathcal{R} -матричного формализма к эмпирическому исследованию полиномов Хованова — Рожанского

Замечательным образом \mathcal{R} -матричный формализм оказывается также полезен при вычислении инвариантов узлов совсем другого рода. Речь идет о *полиномах Хованова* [95, 96, 97] и *Хованова — Рожанского* [98, 99], связанными с такой конструкцией как *гомологии узла*. Интерес

к этим полиномам обусловлен, в частности, тем, что с их помощью возможно единственное на сегодняшний день последовательное определение *суперполинома* узла [125, 126, 127, 128].

Определение полиномов Хованова [95, 96, 97] и Хованова — Рожанского [98] и описание их геометрического смысла, как и подробное описание известных вычислительных процедур [96, 99] и попыток найти более эффективную альтернативу таковым [100, 129] выходит за рамки настоящего текста. Идею приложения \mathcal{R} -матричного формализма к такого рода вычислениям можно сформулировать независимо от последовательного изложения самого сюжета. Именно такую — несколько формальную, но самодостаточную и конструктивную формулировку нашей задачи и полученных результатов мы приведем в настоящем разделе.

На самом деле, исходная конструкция Хованова уже включает в себя \mathcal{R} -матрицу, представленную в виде (1.18) — но этот формализм работает только при $N = 2$. Наша работа [100] была посвящена попытке обобщить этот формализм на случай произвольных N . При этом в качестве основного технического средства мы использовали разработанные в наших предыдущих работах [30, 31, 32, 34] приемы для работы с \mathcal{R} -матричными выражениями для полиномов ХОМФЛИ.

5.1. Метод

Полином Хованова — Рожанского $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(q, T, N)$ — это функция узла и трех формальных переменных — по переменным q и T полином Лорана с *целыми положительными коэффициентами*. Частный случай $N = 2$ отвечает полиному Хованова. В геометрической конструкции Хованова — Рожанского эти коэффициенты имеют смысл размерностей некоторых векторных пространств, а сам полином является полиномом Пуанкаре определенного на этих пространствах комплекса. При этом полином Хованова — Рожанского является топологическим инвариантом и связан с полиномом ХОМФЛИ как

$$\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(q, T = -1) = \mathcal{H}^{\mathcal{K}}(A = q^N, T) \quad (5.1)$$

Предлагаемая процедура [100] основана на перечисленных выше свойствах полинома Хованова — Рожанского и состоит из двух шагов:

- Вычислить полином ХОМФЛИ по формуле (1.55), подставив $A = q^N$ в выражения для характеров (1.54) и заменив выражения для коэффициентов перед характеристиками (1.57) каждую из прямых и обратных \mathcal{R} -матриц, соответственно, на операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\longrightarrow q^{N-1} \left(I \otimes I + (qT) \cdot [2]_q P_{11} \right) = -T \cdot \mathcal{R} + q^{N-1} (1 + T) \cdot I \otimes I, \\ \mathcal{R}^{-1} &\longrightarrow \frac{1}{q^N T} \left([2]_q P_{11} + (qT) \cdot I \otimes I \right) = (-T \cdot \mathcal{R})^{-1} + q^{1-N} (1 + T^{-1}) \cdot I \otimes I. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Описанную процедуру мы будем называть *первичной T -деформацией* полинома ХОМФЛИ. В отличие от исходного полинома ХОМФЛИ и искомого полинома Хованова, полученная при этом величина *не является* топологическим инвариантом: в частности, операторы, отвечающими прямому и обратному пересечениям (рис. 8) теперь *не* взаимно-обратны.

- Разделить первично деформированный полином на $T + 1$:

$$\mathfrak{P}(q, T, N) = \mathcal{P}(q, T, N) + (T + 1) \cdot \mathcal{Q}(q, T, N), \quad (5.3)$$

так что как остаток $\mathcal{P}(q, T, N)$ содержит наименьшее возможное число членов, причем как в остатке так и в частном $\cdot \mathcal{Q}(q, T, N)$ *все* коэффициенты перед мономами по q и T *положительны* — такие полиномы мы будем называть *положительными*.

Описанная процедура неоднозначна уже в простейших примерах (см. ниже), причем произвол быстро нарастает с усложнением узла или зацепления. Наша задача [100] состояла в том, чтобы сформулировать правила, которыми этот произвол фиксируется в известных примерах [99], и, по возможности, увидеть за этими правилами ту или иную структуру. Результаты нашего исследования приведены ниже.

5.1.1. Простейшие примеры

В качестве иллюстрации к описанной выше процедуре деления с остатком разберем два простейших примера.

Тривиальный узел. Простейшим случаем является двупрядная коса с единственным пересечением, замыкание которой дает тривиальный узел со стягиваемой петлей (рис. 9). Подстановка (5.2) в данном случае сводится к замене

$$\mathcal{R}_{[2]_q} = q \longrightarrow -qT + q^{N-1}(1+T), \quad \mathcal{R}_{[11]_q} = -q^{-1} \longrightarrow q^{-1}T + q^{N-1}(1+T) \quad (5.4)$$

в коэффициентах разложения по характерам полинома ХОМФЛИ (3.110 при $n = 1$) — при неизменных самих характерах. В результате имеем (всюду полагаем $A = q^N$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_r^{[2,1]_q} &= \mathcal{R}_{[2]_q} \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} \mathcal{R}_{[11]_q} \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q} = \\ &= \frac{[N]_q}{[2]_q} \{ T(-q[N+1]_q + q^{-1}[N-1]_q) + (1+T)q^{N-1}(-q[N+1]_q + q^{-1}[N-1]_q) \} = \\ &\quad -T[N]_q + (1+T)q^{N-1}[N]_q^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Первое слагаемое с точностью до множителя $(-T)$ равно (ненормированному) полиному ХОМФЛИ тривиального узла $\mathcal{H}^{[2,1]_q}$. Заметим, однако, что уже в этом простейшем случае коэффициенты перед всеми мономами в выражении $(-T)[N]_q = -\sum_{k=1}^N Tq^{-N+2k-1}$ отрицательны — так что полином Хованова — Рожанского *не* может даваться сами этим выражением. Искомое разложение с положительными полиномами в качестве частного и остатка в данном случае имеет вид

$$\mathfrak{R}_r^{[2,1]_q} = q^N [N]_q [N-1]_q T + q^{N-1} [N]_q^2 = [N]_q^2 + (1+T)q^N [N-1]_q, \quad (5.6)$$

к которому можно прийти, дважды воспользовавшись тождеством $[N]_q = q^{-N+1} + q[N-1]_q$.

Не вдаваясь в подробности заметим, что величины $[N]_q^2$ и $[N]_q [N-1]_q$ в выражении (5.6) являются размерностями градуированных пространств в вершинах одномерного гиперкуба разрешений диаграммы узла с одним пересечением, а полиномы Хованова — Рожанского $\mathcal{P}^{[2,1]_q}(q, T)$ и ХОМФЛИ $\mathcal{H}^{[2,1]_q}(q, A = q^N) = \mathcal{P}^{[2,1]_q}(q, -1)$ — соответственно, полиномом Пуанкаре и эйлеровой характеристикой заданного на этих пространствах комплекса Хованова — Рожанского [95, 96, 97, 98, 99].

Зацепление Хопфа. В этом, следующем по сложности примере *первичная* T -деформация полинома ХОМФЛИ (3.110 при $n = 2$) есть

$$\mathfrak{R}^{[2,1]_q} = \text{Tr}_{[1]_q \otimes [1]_q} q^{N-1} (I \otimes I + (qT)[2]_q P_{11}) = q^{N-1} ([N]_q^2 + qT [N]_q [N-1]_q). \quad (5.7)$$

Уже в этом случае положительный минимальный остаток от деления на $T+1$ с положительным частным не определен однозначно: наряду с разложением

$$\mathfrak{R}^{[2,2]_q} = \mathcal{P}^{[2,2]_q} + (1+T)\mathcal{Q}^{[2,2]_q}, \quad (5.8)$$

где

$$\mathcal{P}^{[2,2]_q} = q^{N-1} [N]_q + q^{2N+1} T^2 [N]_q [N-1]_q \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}^{[2,2]_q} = (1+T) \cdot q^{2N-1} [N]_q [N-1]_q, \quad (5.9)$$

дающим в качестве остатка $\mathcal{P}^{[2,2]_q}$ вычисленный в [99] ответ для полинома Хованова — Рожанского, тот же первичный полином допускает альтернативное разложение с

$$\tilde{\mathcal{P}}^{[2,2]_q} = 1 + q^{2N} T^2 [N+1]_q [N-1]_q \quad \text{и} \quad \tilde{\mathcal{Q}}^{[2,2]_q} = q^{2N-1} [N-1]_q \left(([N]_q + q^{1-N}) + q[N-1]_q T \right). \quad (5.10)$$

Заметим, что остатки в обоих случаях содержат одинаковое, наименьшее возможное число членов — так что требование минимальности остатка в данном случае не избавляет от произвола.

5.2. Результаты

5.2.1. Эмпирический алгоритм вычисления полинома Хованова — Рожанского

Предлагаемая процедура Правила, которыми в известных примерах фиксируется содержащийся в изложенной выше процедуре “положительного” деления с “минимальным” остатком сводятся к следующей схеме [100]:

- Вычислить первичный полином $\mathfrak{P}^{\mathcal{L}} = [N]_q \cdot \mathfrak{P}_r^{\mathcal{L}}$ с помощью разработанной техники вычисления полинома ХОМФЛИ (см. разд. 3).
- Разложить полученный полином как функцию N по произведениями последовательных квантовых чисел ($[N]_q \equiv \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$):

$$\mathfrak{P}_r^{\mathcal{L}} = \frac{q^{n \bullet (N-1)}}{(q^N T)^{n \circ}} \sum_{k=0}^{m-1} A_k^{\mathcal{L}}(q, T) \cdot \left(q^{(k+1-m)N} \prod_{i=1}^k [N-i]_q \right), \quad (5.11)$$

где m есть число прядей в косе, а коэффициенты разложения A_0, \dots, A_{m-1} более не зависят от N , но суть функции q и T .

- При $T = -1$ функции A_k должны быть кратны $(q - q^{-1})^k$ в случае узла и $(q - q^{-1})^{k+1-l}$ для l -компонентного зацепления — это следует из предельных свойств “полинома” ХОМФЛИ при $q \rightarrow 1$ [123]. Тогда при произвольном T эти коэффициенты допускают разложение

$$A_k = (1 + q^2 T)^{k+1-l} \bar{A}_k + (1 + T) \times \begin{array}{c} \text{положительный} \\ \text{полином} \end{array} \quad (5.12)$$

с некоторыми, вообще говоря, неоднозначно определенными \bar{A}_k .

- Каждую из *нетривиальных* функций A_1, \dots, A_{l-1} можно, в свою очередь, разложить по “диагональным функциям”:

$$A_k(q, T) = \sum_{\{\nu\}} q^{\mu_k} T^{\nu_k} \left(1 + q^2 T + q^4 T^2 + \dots + (q^2 T)^{s_k} \right) + (1 + T) \times \begin{array}{c} \text{положительный} \\ \text{полином} \end{array}, \quad (5.13)$$

где μ и s определяются выбором ν . Разложение (5.13) в большинстве случаев неоднозначно. Однако, для сравнительно простых узлов и зацеплений произвол невелик и, что существенно, правильный выбор *не* зависит от N .

- “Диагональные функции” допускают дальнейшую редукцию (выделение куска вида $(1 + T) \times$ положительный полином) с помощью тождеств типа

$$[N-1]_q (1 + q^2 T) = q^{2-N} + q^N T + q[N-2]_q (1 + T) \sim q^{2-N} + q^N T \quad (5.14)$$

и

$$[N]_q [N-1]_q (1 + q^2 T) = (q^{1-N} + q^{N+1} T) [N-1]_q + q[N-1]_q^2 (1 + T) \sim q^{1-N} + q^{N+1}. \quad (5.15)$$

При нечетных s_k процедура однозначна, при четных s_k остается дополнительный произвол в выборе непарного члена. При этом процедура может применяться последовательно несколько раз, например:

$$\begin{aligned} [N-1]_q [N-2]_q (1 + q^2 T)^2 &= (q^{2-N} + q^N T + q[N-2]_q (1 + T)) \times \\ &\times (q^{3-N} + q^{N-1} T + q[N-3]_q (1 + T)) \sim (q^{2-N} + q^N T) (q^{3-N} + q^{N-1} T) = \\ &= q^{5-2N} + q^2 [2]_q T + q^{2N-1} T^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

или

$$\begin{aligned} [N-1]_q [N-2]_q [N-3]_q (1+q^2 T)^3 &\sim (q^{2-N} + q^N T) (q^{3-N} + q^{N-1} T) (q^{4-N} + q^{N-2} T) \\ &= q^{9-3N} + q^{5-N} [3]_q T + q^{N+1} [3]_q T^2 + q^{3N-3} T^3, \end{aligned} \quad (5.17)$$

а также

$$\begin{aligned} [N]_q [N-1]_q [N-2]_q (1+q^2 T)^2 &\sim (q^{1-N} - q^{N+1} T) (q^{3-N} + q^{N-1} T) [N-1]_q = \\ &= (q^{4-2N} + (q^4 + 1) T + q^{2N} T^2) [N-1]_q \end{aligned} \quad (5.18)$$

и

$$\begin{aligned} &l [N]_q [N-1]_q [N-2]_q [N-3]_q (1+q^2 T)^3 \sim \\ &\sim (q^{1-N} + q^{N+1} T) (q^{3-N} + q^{N-1} T) (q^{4-N} + q^{N-2} T) [N-1]_q = \\ &= (q^{8-3N} + q^{-N} (q^8 + q^4 + q^2) T + q^N (q^4 + q^2 + q^{-2}) T^2 + q^{3N-2} T^3) [N-1]_q. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Заметим, что при редукции всякий раз сохраняется множитель $[N-1]_q$ (либо множитель $[N]_q$, если таковой имеется), что является произволом: вместо этого, *вообще говоря*, можно было сохранять, например, множитель $[N-2]_q$, что дало бы

$$(q^{1-N} - q^{N+1} T) (q^{2-N} + q^N T) [N-2]_q \quad (5.20)$$

вместо соответствующего выражения, приведенного выше. Такой выбор, однако, приводит к расхождению с ответами, явно вычисленными в [99]. Кроме того, отдельного рассмотрения может потребовать случай $N < m$ [100].

Наша гипотеза [100] состоит в том, что

- Остаток от деления первичного полинома на $T + 1$, полученный в результате описанной выше процедуры, есть полином Хованова — Рожанского.

Заметим, что предполагаемый ответ всегда является положительный полиномом по построению.

5.2.2. Нетривиальный пример: зацепление $6_1^3(v_2)$

. Это трехкомпонентное зацепление [60] (v_2 означает одну из двух возможных ориентаций зацепления) можно представить в виде замыкания трехрядной косы $\mathcal{B} = b_1^2 b_2^{-1} b_1^2 b_2^{-1}$. Согласно общей формуле (3.111), полином ХОМФЛИ этого зацепления равен

$$\mathcal{H}^{6_1^3} = \sum_{Q=[3]_q, [21]_q, [111]_q} \text{Tr} \mathcal{R}_{1|Q}^2 \mathcal{R}_{2|Q}^{-1} \mathcal{R}_{1|Q}^2 \mathcal{R}_{2|Q}^{-1} S_Q^*, \quad (5.21)$$

где явный вид \mathcal{R} -матриц приведен в разд. 3.4.2, а характеры S^* вычисляются по формуле (1.54).

Зацепление $6_1^3(v_2)$: первичная деформация полинома ХОМФЛИ. В результате подстановки $A = q^N$ в выражениях для характеров и замены (5.2) в коэффициентах разложения (5.21)

переходит в

$$\mathfrak{P}^{6_1^3} = \left\{ (-Tq + (1+T)q^{N-1}) (-(Tq)^{-1} + (1+T^{-1})q^{1-N})^2 \right\}^2 \frac{[N]_q [N+1]_q [N+2]_q}{[2]_q [3]_q} +$$

$$+ \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} -Tq + (1+T)q^{N-1} & 0 \\ 0 & Tq^{-1} + (1+T)q^{N-1} \end{pmatrix} \right\} \times \quad (5.22)$$

$$\times \left(\begin{array}{cc} \frac{q^3}{T(q^2+1)} + (1+T^{-1})q^{1-N} & -T \frac{\sqrt{q^4+q^2+1}}{q^2+1} \\ -T \frac{\sqrt{q^4+q^2+1}}{q^2+1} & -\frac{1}{T(q^4+q^2)} + (1+T^{-1})q^{1-N} \end{array} \right)^2 \frac{[N]_q [N+1]_q [N-1]_q}{[3]_q} + \quad (5.23)$$

$$+ \left\{ (Tq^{-1} + (1+T)q^{N-1}) (T^{-1}q + (1+T^{-1})q^{1-N})^2 \right\}^2 \frac{[N]_q [N-1]_q [N-2]_q}{[2]_q [3]_q}.$$

Мы не приводим здесь окончательного выражения для первичного полинома из-за его громоздкости.

Зацепление $6_1^3(v_2)$: первичные сокращения. Первый шаг — разложение остатка по “диагональным функциям” показан в таблице ниже, где символом \times отмечены *все возможные* положения неспаренных членов, а символом \otimes — *фактические*, в рамки заключены остатки от деления коэффициента при $[N-1]_q [N-2]_q$ на $(q - q^{-1})^2$ и коэффициента при $[N-1]_q$ при $(q - q^{-1})$, а в двойную рамку — остаток от деления коэффициента при $[N-1]_q [N-2]_q$ на $(q - q^{-1})$:

$6_1^3(v_2)$	$[N-1]_q [N-2]_q$					$q^{-N} [N-1]_q$					q^{-2N}		
	q^7	$-3q^5$	$5q^3$	$-3q$	q^{-1}	q^8	$-2q^6$	$3q^4$	$-q^2$	3	$-2q^{-2}$	q^{-4}	1
1					\times					\times		\otimes	
T											$2 \otimes$		
T^2					\otimes					$1 + \boxed{2 \otimes}$			\otimes
T^3									\otimes				
T^4				$4 \otimes$					$3 \otimes$	\times			
T^5			$5 \otimes$	$\boxed{-1}$	\times								
T^6		$2 + \boxed{1 \otimes}$		\times			$2 \otimes$	\times					
T^6	$\boxed{\otimes}$		\times			$\boxed{\otimes}$	\times		\times				

В результате этого шага имеем

$$\tilde{P}_r^{6_1^3}(q, T) = qT^4 [N-1]_q [N-2]_q + q^6 T^5 (q^{N-2} T + q^{-N+2}) [N-1]_q + (q^8 T^6 + 2T^2) q^{-N} [N-1]_q + \quad (5.25)$$

$$+ (2q^3 T^3 + qT^2) (q^{N-1} T + q^{-N+1}) (q^{N-2} T + q^{-N+2}) +$$

$$+ (2q^5 T^4 + q^3 T^3 + q^{-1} T + q^{-3}) (q^{N-1} T + q^{-N+1}) q^{-N} + q^{2-2N} T^3.$$

Зацепление $6_1^3(v_2)$: вторичные сокращения На следующем шаге следует исключить из остатка пары подобных слагаемых (отмечены одинаковым выделением):

$$\tilde{P}_r^{6_1^3}(q, T) = qT^4 [N-1]_q [N-2]_q + (q^{N+4} T^6 + \widetilde{q^{-N+8} T^5} + \widetilde{q^{-N+8} T^6} + 2q^{-N} T^2) [N-1]_q +$$

$$q^{-2N-2} + (\overline{\overline{q^{-2N}} + q^{-4}}) T + (\overline{\overline{q^{-2N+4}} + q^{-2}} + \overline{\overline{q^{-2N}}}) T^2 + \left(\underline{\underline{2q^{-2N+6}}} + \underline{\underline{q^2}} + 1 + \overline{\overline{q^{-2N+4}}} \right) T^3$$

$$+ \left(2q^2 + \underline{\underline{q^2}} + \underline{\underline{2q^4}} + \underline{\underline{2q^{-2N+6}}} + q^{2N-2} \right) T^4 + (2q^{2N} + \underline{\underline{2q^4}}) T^5.$$

Зацепление $\hat{P}_1^3(v2)$: редуцированный полином Хованова — Рожанского. В результате воспроизводим ответ, явно вычисленный в [99]:

$$\begin{aligned} \hat{P}_r^3(q, T) = & q^{-2N-2} + q^{-4}T + (q^{-2} + 2q^{-N}[N-1]_q)T^2 + T^3 + \\ & + (2q^2 + q^{2N-2} + q[N-1]_q[N-2]_q)T^4 + 2q^{2N}T^5 + q^{N+4}[N-1]_qT^6. \end{aligned} \quad (5.26)$$

6. Заключение

Поскольку резюме проделанной работы и достигнутых результатов уже было дано во введении, в качестве заключения мы обратим внимание на кое-какие оставшиеся вопросы, а также укажем те направления для дальнейших исследований, которые представляются нам особенно важными и интересными.

Несмотря на то, что на данный момент существует несколько методов — среди которых метод над которым работали мы — позволяющих вычислить, в принципе, произвольный раскрашенный полином ХОМФЛИ, множество вопросов о свойствах этих полиномах остаются открытыми. Помимо дальнейшего технического совершенствования вычислительных алгоритмов, основным направлением работы на сегодня является поиск *общих* формул для полиномов ХОМФЛИ — так, чтобы полином ряда узлов или ряд раскрашенных полиномов данного узла был задан как явная функция от параметров узла или представления. На данный момент известно несколько формулы такого рода: для торических узлов [106, 107, 108, 118], скрученных узлов [10, 28], узлов — замыканий двойных кос [71]; последним достижением стала весьма общая формула для раскрашенных полиномов крендельных улов и зацеплений [110, 130]. Кроме того, продолжают попытки описать зависимость раскрашенного полинома ХОМФЛИ от представления в терминах иерархии дифференциалов [71, 131, 132]. Получение общих формул для серий узлов и представлений было бы крайне полезно не только с точки зрения изучения самих полиномов ХОМФЛИ, но и для исследования некоторых связанных с ними сюжетов, таких как разностные уравнения [25] и τ -функции [121], суперполиномы [118, 125, 126, 127, 128] и упомянутые в последнем разделе гомологии Хованова — Рожанского [95, 96, 97, 98, 99, 129, 133].

С точки зрения получения общих формул для полином ХОМФЛИ весьма плодотворной может оказаться гипотеза собственных значений [33, 112]. Эта гипотеза, фактически, утверждает, что полином ХОМФЛИ полностью описывается собственными значениями \mathcal{R} -матрицы, несмотря на то, что при прямолинейном вычислении используется несколько \mathcal{R} -матриц, которые друг с другом не коммутируют. Описание гипотезы собственных значений на языке процедуры каблирования [34] является одним из возможных средств для дальнейшего изучения этого вопроса.

Совершенно другое направление для исследований состоит в усложнении топологии пространства (см., например, [51] и приведенные там ссылки). Едва ли не все известные ответы относятся к теории на многообразии S^3 и практически ничего не известно уже в следующем по сложности случае $S^1 \times S^2$. Одна из основных надежд здесь связана с так называемыми инвариантами виртуальных узлов [134, 135, 136, 137].

Что касается самого \mathcal{R} -матричного подхода к инвариантам узлов, то, хотя этот подход стал уже практически хрестоматийным, многие его тонкости так и остаются невыясненными. Более того, некоторые из этих тонкостей ведут к открытым существенным проблемам. Сформулируем две, на наш взгляд, наиболее интересных задачи, которые здесь можно поставить.

Первая задача касается связи \mathcal{R} -матричного формализма с теорией возмущений для теории Черна — Саймонса временной калибровке [24]. Существенная проблема здесь состоит в том, что \mathcal{R} -матрица связана (если действительно связана) с вильсоновской линией, в различных точках которой значения классического черн — саймонсовского поля не коммутируют друг с другом. Мы собираемся, прежде всего, изучить простые явные примеры таких полей и соответствующих вильсоновских линий, что может пролить свет на обсуждаемую проблему.

Вторая задача состоит в развитии ковариантной версии \mathcal{R} -матричного подхода — как альтернативы стандартной версии [1, 72], требующей выбора направления на плоскости проекции узла. Эта задача имеет, по меньшей мере, два приложения. Во-первых, квантово-полевая интерпретация \mathcal{R} -матричного подхода (если таковая возможна) выглядела бы гораздо более естественной в таком ковариантном формализме. Во-вторых, ковариантный \mathcal{R} -матричный формализм был бы полезен для дальнейшей разработки модифицированного формализма Хованова, который, в частности, позволяет применять элементы \mathcal{R} -матричного подхода для вычисления суперполиномов узлов [100, 129].

Хотя в настоящий момент сформулированные вопросы привлекают незаслуженно мало внимания исследователей, их важность позволяет надеяться, что они будут должным образом изучены ближайшее время.

7. Благодарности

Автор глубоко обязан А. Ю. Морозову и А. Д. Миронову за многолетнее кропотливое научное руководство его научной работой, а также Е. С. Суловой и В. В. Слепцовой (Насоновой) за создание условий для таковой. Автор благодарен Э. Т. Ахмедову, П. И. Дунину-Барковскому, Д. В. Васильеву, Е. А. Выродову, Д. В. Галахову, А. А. Морозову, И. В. Полюбину, А. В. Пополитову, А. А. Рослomu и А. В. Слепцову за проявленный интерес к работе, внимательное прочтение черновиков к настоящему тексту и многочисленные критические замечания. Автор также благодарен Н. Я. Амбург, Г. Б. Аминову, С. Б. Артамонову, И. А. Даниленко, А. В. Забродину, О. С. Круглинской, Н. А. Немкову, С. А. Миронову, Ш. Р. Шакирову и другим участникам семинара лаборатории методов математической физики ИТЭФ за регулярные увлекательные и полезные обсуждения. Автор также благодарен И. В. Тютину за подробный разбор вводного примера.

Автор особенно благодарен И. А. Дынникову, А. В. Малютину и М. Э. Казаряну за проявленное глубокое внимание к работе автора и ценные обсуждения.

Автор благодарен Э. Т. Ахмедову, М. И. Высотскому, А. В. Маршакову, В. А. Новикову, а также Т. В. Углову и другим организаторам молодежной конференции ИТЭФ за возможность выступить перед новой, разнообразной и внимательной аудиторией. Автор хотел бы также поблагодарить людей, открывших ему путь в науку, в особенности: А. А. Абрикосова, Д. А. Александрова, М. В. Данилова, Н. В. З. Нозика, Н. Острикова, В. П. Слободянина, Т. В. Углова, В. В. Шанькова и С. А. Шаракина.

Автор хотел бы отметить радушный прием и отличные условия для работы на летних школах “XI международная школа по теоретической и математической физике ИТЭФ-ИТЭФ-ВШЭ” (Севастополь 2012), “String and Fundamental physics” (Гамбург, 2012) и “Stochastic processes and random matrices” (Лез-Уш, Франция, 2015), где имел возможность обсудить настоящую работу с широким кругом заинтересованных людей.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов 14-01-92691-инд-а, 15-31-20832-мол-а-вед, 15-51-50034-ЯФ-а, НШ-1500.2014.2, а также стипендии фонда “Династия” (2010-2012) и стипендии для молодых ученых ИТЭФ (2010-2015).

Список литературы

- [1] Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // Commun. Math. Phys. — 1990. — Vol. 127. — P. 1–26.
- [2] Baxter R. J. Exactly solved models in planar mechanics. — London : Academic Press, 1989. — P. 502.
- [3] Dunne G. V. Aspects of Chern-Simons theory. — 1999. — arXiv : hep-th/9902115.

- [4] Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim // *Nature*. — 2005. — Vol. 438. — P. 201–204.
- [5] Морозов А. Ю. Теория струн – что это такое? // *УФН*. — 1992. — Т. 162, № 8. — С. 83–175.
- [6] Kaul R. K. Chern-Simons theory, colored-oriented braids and link invariants // *Commun. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 162. — P. 289–320. — arXiv : hep-th/9305032.
- [7] Kaul R. K., Govindarajan T. R. Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links // *Nucl. Phys.* — 1992. — Vol. B380. — P. 293–336. — arXiv : hep-th/9111063.
- [8] Ramadevi P., Govindarajan T. R., Kaul R. K. Three dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links III: Compact semi-simple group // *Nucl. Phys.* — 1993. — Vol. B402. — P. 548–566. — arXiv : hep-th/9212110.
- [9] Ramadevi P., Govindarajan T. R., Kaul R. K. Knot invariants from rational conformal field theories // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B422. — P. 291–306. — arXiv : hep-th/9312215.
- [10] Zodinmawia, Ramadevi P. SU(N) quantum Racah coefficients & non-torus links // *Nucl. Phys.* — 2013. — Vol. 870. — P. 205–242. — arXiv : hep-th/1107.3918.
- [11] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia. Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory // *J. Knot Theory Ramifications*. — 2013. — Vol. 22, no. 1350078. — arXiv : hep-th/1302.5144.
- [12] Kaul R. K. Chern-Simons theory, knot invariants, vertex models and three-manifold invariants // *Frontiers of field theory, quantum gravity and strings. Proceedings*. — 1999. — P. 45–63. — arXiv : hep-th/9804122.
- [13] Jie Gu Hans Jockers. A note on colored HOMFLY polynomials for hyperbolic knots from WZW models // *Commun. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 338. — P. 393–456. — arXiv : hep-th/1407.5643.
- [14] Mironov A., Morozov A., Morozov An. On colored HOMFLY polynomials for twist knots // *Mod. Phys. Lett.* — 2014. — Vol. A29, no. 1450183. — arXiv : hep-th/1408.3076.
- [15] Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov et al. // *JHEP*. — 2015. — Vol. 1507, no. 109. — arXiv : hep-th/1504.00371.
- [16] Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots / D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov // *Nucl. Phys.* — 2015. — Vol. B899. — P. 194–228. — arXiv : hep-th/1502.02621.
- [17] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Perturbative aspects of Chern-Simons theory // *Phys. Lett.* — 1989. — Vol. B227. — P. 111–117.
- [18] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B330. — P. 575–607.
- [19] Alvarez M., Labastida J. M. F. Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory // *Nucl. Phys.* — 1993. — Vol. B395. — P. 198–238. — arXiv : hep-th/9110069.
- [20] Axelrod S., Singer I. M. Chern-Simons perturbation theory // *Proc. of XXth DGM conference*. — New York : World Scientific, 1991. — P. 3–45. — arXiv : hep-th/9110056.
- [21] Fröhlich J., King C. The Chern-Simons theory and knot polynomial // *Commun. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 126. — P. 167–199.

- [22] Labastida J. M. F., Pèrez E. Kontsevich integral for Vassiliev invariants in the holomorphic gauge // *J. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 39. — P. 5183–5198. — arXiv : hep-th/9710176.
- [23] Labastida J. M. F. Chern-Simons gauge theory: ten years after // *AIP Conf. Proc.* — 1999. — Vol. 484. — P. 1–40. — arXiv : hep-th/9905057.
- [24] Morozov A., Smirnov A. Chern-simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix // *Nucl. Phys.* — 2010. — Vol. B835. — P. 284–313. — arXiv : hep-th/1001.2003.
- [25] Mironov A., Morozov A., Morozov And. Character expansion for HOMFLY polynomials. I. integrability and difference equations // *Strings, gauge fields, and the geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer.* — Singapore : World Scientific, 2013. — P. 101–118. — arXiv : hep-th/1112.5754.
- [26] Mironov A., Morozov A., Morozov And. Character expansion for HOMFLY polynomials. II. fundamental representation. up to five strands in braid // *JHEP.* — 2012. — Vol. 03. — arXiv : hep-th/1112.2654.
- [27] Character expansion for HOMFLY polynomials. III. all 3-strand braids in the first symmetric representation / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Int. J. of Mod. Phys.* — 2012. — Vol. A27, no. 1250099. — arXiv : hep-th/1204.4785.
- [28] HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *JHEP.* — 2012. — Vol. 07, no. 131. — arXiv : hep-th/1203.5978.
- [29] Mironov A., Morozov A. Equations on knot polynomials and 3d/5d duality // *AIP Conf. Proc.* — 2012. — Vol. 1483. — P. 189–211. — arXiv : hep-th/1208.2282.
- [30] Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Nucl. Phys.* — 2013. — Vol. B868. — P. 271–313. — arXiv : hep-th/1207.0279.
- [31] Knot polynomials in the first non-symmetric representation / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Nucl. Phys.* — 2014. — Vol. B882. — P. 171–194. — arXiv : hep-th/1211.6375.
- [32] Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux / A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Adv. in High Energy Phys.* — 2013. — Vol. 2013, no. 931830. — arXiv : hep-th/1304.1486.
- [33] Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *Int. J. of Mod. Phys.* — 2013. — Vol. A28, no. 1340009. — arXiv : hep-th/1209.6304.
- [34] Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ // *ТМФ.* — 2014. — Т. 178. — С. 3–68. — arXiv : hep-th/1307.2216.
- [35] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1976. — Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — С. 768.
- [36] Пескин М. Е., Шредер Д. В. Введение в квантовую теорию поля. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2011. — С. 784.

- [37] Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations / A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin // *Phys. Lett.* — 1975. — Vol. B59. — P. 85–87.
- [38] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. — Ижевск : Удмуртский университет, 1999. — С. 312.
- [39] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1978. — Т. 9. Статистическая физика. Часть 2. — С. 448.
- [40] Рубаков В. Классическая теория калибровочных полей. — Москва : Едиториал УРСС, 1999. — С. 336.
- [41] Stern A. Anyons and the quantum Hall effect — a pedagogical review // *Ann. of Phys.* — 2008. — Vol. 323. — P. 204–249.
- [42] Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. — Москва : МЦНМО, 1999. — P. 192.
- [43] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — Москва : Наука, 1989. — С. 96.
- [44] Елютин П. В., Кривченков В. Д. Квантовая механика. — Москва : Наука, 1974. — С. 336.
- [45] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1976. — Т. 5. Статистическая физика. Часть 1. — С. 584.
- [46] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — Москва : Едиториал УРСС, 2015. — Т. 1. — С. 336.
- [47] Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. — Москва : Мир, 1984. — С. 160.
- [48] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — Москва : Наука, 1984. — С. 600.
- [49] Волошин М. В., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — Москва : ЭнергATOMиздат, 1984. — С. 296.
- [50] “Радиофизика” Конспект лекций по курсу. С. П. Вятчанин. — Москва : Издательство Физического факультета МГУ, 2005. — С. 113. — URL: <http://hbar.phys.msu.ru/hbar/pages/vyat/conswork.pdf>.
- [51] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. — Москва : МЦНМО, 1997. — С. 352.
- [52] Atiyah M. F. New invariants of three and four dimensional manifolds // *Proc. Symp. Pure Math.* — 1988. — Vol. 48. — P. 285–299.
- [53] Korepin V. E., Bogolyubov N. M., Izergin A. G. Quantum inverse scattering method and correlation functions. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997. — P. 576.
- [54] Francesco P. Di, Mathieu P., D.Sènèchal. Conformal field theory. — New York : Springer, 1997. — P. 890.
- [55] Kauffman L. State models and the Jones polynomial // *Topology.* — 1987. — Vol. 26. — P. 395–407.
- [56] Vassiliev V. A. Cohomology of the knot spaces // *Adv. Soviet Math.* — 1990. — Vol. 1. — P. 23–69.

- [57] Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev knot invariants // Cambridge University Press. — 2012. — arXiv : math.GT/1103.5628v3.
- [58] Bar-Natan D., Scott M., et al. The Knot Atlas. — URL: <http://katlas.org> (дата обращения: 24.09.15).
- [59] Cha J. C., Livingston C. KnotInfo: Table of knot invariants. — URL: <http://www.indiana.edu/knotinfo> (дата обращения: 24.09.15).
- [60] Cha J. C., Livingston C. LinkInfo: Table of knot invariants. — URL: <http://www.indiana.edu/linkinfo> (дата обращения: 24.09.15).
- [61] Thistlethwaite M. Morwen Thistlethwaite’s homepage. — URL: <http://www.math.utk.edu/morwen/> (дата обращения: 24.09.15).
- [62] Alexander J. W. Topological invariants of knots and links // Trans. AMS. — 1928. — Vol. 30. — P. 275–306.
- [63] Jones V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra // Bull. AMS. — 1985. — Vol. 12. — P. 103–111.
- [64] Adams C. C. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. — Providence : AMS, 2004. — P. 307.
- [65] A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste et al. // Bull. AMS. — 1985. — Vol. 12. — P. 239–246.
- [66] Przytycki J. H., Traczyk P. Invariants of links of Conway type // Kobe J. Math. — 1988. — Vol. 4. — P. 115–139.
- [67] Kwon B.-H. On the HOMFLY polynomial of 4-plat presentations of knots. — arXiv : hep-th/1309.5052.
- [68] Morton H. R., Ryder H. J. Mutants and $su(3)_q$ invariants // Geom. Topol. Monogr. — 1998. — Vol. 1. — P. 365–381. — arXiv : math/9810197.
- [69] Kauffman L. H. The interface of knots and physics. — Singapore : World Scientific, 2001. — P. 788.
- [70] Nawata S., Ramadevi P., Singh V. K. Colored HOMFLY polynomials can distinguish mutant knots. — arXiv : hep-th/1504.00364.
- [71] Mironov A., Morozov A., Morozov An. Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials // AIP Conf. Proc. — 2013. — Vol. 1562. — arXiv : hep-th/1306.3197.
- [72] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // Infinite dimensional Lie algebras and groups. — Singapore : World Scientific, 1989. — P. 285–339. — URL: <https://math.berkeley.edu/reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>.
- [73] Харари Ф. Теория графов. — Москва : Едиториал УРСС, 2015. — С. 304.
- [74] Klimyk A., Schmüdgen K. Quantum groups and their representations. — Berlin Heidelberg : Springer, 2012. — P. 552.
- [75] Jones V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math. — 1989. — Vol. 126. — P. 335–388.

- [76] Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial // *Comm. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 121. — P. 351–399.
- [77] Schwarz A. S. New topological invariants arising in the theory of quantized fields // Бакинская международная топологическая конференция: тезисы. — Т. 2. — Баку : Институт Математики и Механики АН Азерб. СССР, 1987.
- [78] Bar-Natan D., Stoimenow A. The fundamental theorem of the Vassiliev invariants // *Geometry and physics.* — New York : Marcel Dekker, 1995. — P. 101–134. — arXiv : q-alg/9702009.
- [79] Mironov A., Morozov A. Towards effective topological field theory for knots // *Nucl. Phys.* — 2015. — Vol. B899. — P. 395–413. — arXiv : hep-th/1506.00339.
- [80] Källén Johan. Cohomological localization of Chern-Simons theory // *JHEP.* — 2011. — Vol. 1108, no. 008. — arXiv : hep-th/1104.5353.
- [81] Witten E. Gauge theories and integrable lattice models // *Nucl. Phys.* — 1989. — Vol. B322. — P. 629–697.
- [82] Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B247. — P. 83–103.
- [83] Alvarez-Gaumé L., Sierra G., Gomez C. Topics in conformal field theory. — 1989. — CERN-TH : 5540.
- [84] Chern S.-S., Simons J. Characteristic forms and geometric invariants // *Ann. Math.* — 1974. — Vol. 99. — P. 48–69.
- [85] Kontsevich M. Vassiliev’s knot invariants // *Adv. in Soviet Math.* — 1993. — Vol. 16:2. — P. 137–150.
- [86] Dunin-Barkowski P., Sleptsov A., Smirnov A. Kontsevich integral for knots and Vassiliev invariants // *Int. J. Mod. Phys.* — 2013. — Vol. A28, no. 1330025. — arXiv : hep-th/1112.5406.
- [87] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — Москва : Наука, 1986. — С. 760.
- [88] Anokhina A. On R-matrix approaches to knot invariants. — 2014. — arXiv : hep-th/1412.8444v2.
- [89] Bar-Natan D. On the Vassiliev knot invariants // *Topology.* — 1995. — Vol. 34. — P. 423–472.
- [90] Macdonald I. G. Schur functions: theme and variations // *Séminaire Lotharingien de Combinatoire.* — 1992. — Vol. 28.
- [91] P.P.Kulish, N.Yu.Reshetikhin, E.K.Sklyanin. Yang-Baxter equation and representation theory: I // *Lett. in Math. Phys.* — 1981. — Vol. 5. — P. 343–403.
- [92] Gould M. D., Zhang Y.-Z. Quantum affine Lie Algebras, Casimir invariants and diagonalization of the braid generator // *J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35. — P. 6757–6773. — arXiv : hep-th/9311041.
- [93] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. recent developments // *Lecture Notes in Physics.* — 1982. — Vol. 151. — P. 61–119.
- [94] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia. Multiplicity-free quantum 6j-symbols for $U_q(sl_N)$ // *Lett. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 103:12. — P. 1389–1398. — arXiv : hep-th/1302.5143.

- [95] Khovanov M. A categorification of the Jones polynomial // *Duke Math. J.* — 2000. — Vol. 101. — P. 359–426.
- [96] Bar-Natan D. On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial // *Algebr. Geom. Topol.* — 2002. — Vol. 2. — P. 337–370. — arXiv : math.QA/0201043.
- [97] Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov homologies. I. Unreduced Jones superpolynomial // *JHEP.* — 2013. — Vol. 1301, no. 065. — arXiv : hep-th/1208.4994.
- [98] Khovanov M., Rozansky L. Matrix factorizations and link homology // *Fund. Math.* — 2008. — Vol. 199. — P. 1–91. — arXiv : math.QA/0401268.
- [99] Carqueville N., Murfet D. Computing Khovanov-Rozansky homology and defect fusion // *Algebr. Geom. Topol.* — 2014. — Vol. 14. — P. 489–537. — arXiv : hep-th/1108.1081.
- [100] Anokhina A., Morozov A. Towards R-matrix construction of Khovanov-Rozansky polynomials. I. Primary T-deformation of HOMFLY // *JHEP.* — 2014. — Vol. 07, no. 063. — arXiv : hep-th/1403.8087.
- [101] Georgi H. Lie algebras in particle physics. From isospin to unified theories. — Boulder : Westview press, 1999. — P. 344.
- [102] Zodinmawia, Ramadevi P. Reformulated invariants for non-torus knots and links. — arXiv : hep-th/1209.1346.
- [103] Salakh A. — 2015. — Готовится к публикации.
- [104] Chen L., Chen Q. Orthogonal quantum group invariants of links // *Pacific Journ. of Math.* — 2012. — Vol. 257. — P. 267–318. — arXiv : math.QA/1007.1656.
- [105] Bracken A. J., Gould M. D., Zhang R. B. Quantum group invariants and link polynomials // *Comm. Math. Phys.* — 1991. — Vol. 137:1. — P. 13–21.
- [106] Rosso M., Jones V. F. R. On the invariants of torus knots derived from quantum groups // *J. Knot Theory Ramifications.* — 1993. — Vol. 2. — P. 97–112.
- [107] Lin X.-S., Zheng H. On the Hecke algebras and the colored HOMFLY polynomial // *Trans. AMS.* — 2010. — Vol. 362. — P. 1–18. — arXiv : math/0601267.
- [108] Stevan S. Chern-Simons invariants of torus links // *Trans. AMS.* — 2009. — Vol. 11. — P. 2001–2024. — arXiv : 1003.2861.
- [109] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — Москва : Наука, 1965. — С. 588.
- [110] Colored knot polynomials for pretzel knots and links of arbitrary genus / D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov et al. // *Phys. Lett.* — 2015. — Vol. B743. — P. 71–74. — arXiv : hep-th/1412.2616.
- [111] Galakhov D., Mironov A., Morozov A. Wall crossing invariants: from quantum mechanics to knots // *ЖЭТФ.* — 2015. — Т. 147. — С. 623–663. — arXiv : hep-th/1410.8482.
- [112] Colored knot polynomials. HOMFLY in representation [2,1] / A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov. — 2015. — arXiv : hep-th/1508.02870.
- [113] Bonatsos D., Daskaloyannis C. Quantum groups and their applications in nuclear physics // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 1999. — Vol. 43. — P. 537–618. — arXiv : nucl-th/9909003.

- [114] Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. — Москва : Наука, 1990. — С. 346.
- [115] Okounkov A. Quantum immanants and higher Capelli identities // Transformation Groups. — 1996. — Vol. 1. — P. 99–126. — arXiv : q-alg/9602028.
- [116] Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A. A generalization of the Capelli identity // Algebra, arithmetic, and geometry. — Berlin Heidelberg : Springer, 2009. — Vol. II: In Honor of Yu. I. Manin. — P. 383–398. — arXiv : math/0610799.
- [117] Chervov A., Falqui G., Rubtsov V. Algebraic properties of manin matrices 1 // Adv. in Appl. Math. — 2009. — Vol. 43. — P. 239–315. — arXiv : math.QA/0901.0235.
- [118] Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov et al. // JHEP. — 2013. — Vol. 03, no. 021. — arXiv : hep-th/1106.4305.
- [119] П.П.Кулеш, Н.Ю.Решетихин. О GL_3 -инвариантных решениях уравнения Янга-Бакстера и ассоциированных квантовых системах // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1982. — Vol. 120. — P. 92–121.
- [120] M. Jimbo T. Miwa, Okado M. An $A_{n-1}^{(1)}$ family of solvable lattice models // Mod. Phys. Lett. — 1987. — Vol. B1. — P. 73–79.
- [121] Миронов А. Д., Морозов А. Ю., Слепцов А. В. Разложение по родам для полиномов ХОМ-ФЛИ // ТМФ. — 2013. — Т. 177. — С. 179–221. — arXiv : hep-th/1303.1015.
- [122] Zhu Sh. Colored HOMFLY polynomial via skein theory // JHEP. — 2013. — Vol. 10, no. 229. — arXiv : math/1206.5886.
- [123] Lickorish W. B. R., Millett K. A polynomial invariant of oriented links // Topology. — 1987. — Vol. 26. — P. 107–141.
- [124] Turaev V. G. The Yang-Baxter equation and invariants of links // Invent. Math. — 1988. — Vol. 92. — P. 527–533.
- [125] Gukov S., Schwarz A., Vafa C. Khovanov-Rozansky homology and topological strings // Lett. Math. Phys. — 2005. — Vol. 74. — P. 53–74. — arXiv : hep-th/0412243.
- [126] Dunfield N. M., Gukov S., Rasmussen J. The superpolynomial for knot homologies // Experimental Math. — 2006. — Vol. 15. — P. 129–159. — arXiv : math/0505662.
- [127] Gorsky E., Gukov S., Stosic M. Quadruply-graded colored homology of knots. — 2014. — arXiv : math.QA/1304.3481.
- [128] Аргамонов С. Б., Миронов А. Д., Морозов А. Ю. Иерархия дифференциалов и дополнительная градуировка полиномов узлов // ТМФ. — 2014. — Т. 179. — С. 147–188. — arXiv : hep-th/1306.5682.
- [129] Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov homologies. III. A new and simple tensor-algebra construction of khovanov-rozansky invariants // Nucl. Phys. — 2014. — Vol. B878. — P. 12–81. — arXiv : hep-th/1308.5759.
- [130] Mironov A., Morozov A., Sleptsov A. Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links // JHEP. — Vol. 07, no. 069. — arXiv : hep-th/1412.8432.
- [131] Link polynomial calculus and the AENV conjecture / S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov // JHEP. — 2014. — Vol. 04, no. 156. — arXiv : hep-th/1309.7984.

- [132] Kononov Ya., Morozov A. On the defect and stability of differential expansion // Письма в ЖЭТФ. — 2015. — Т. 101. — С. 931–934. — arXiv : hep-th/1504.07146.
- [133] Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov homologies. II. Reduced Jones superpolynomials // J. Phys.: Conf. Ser. — 2013. — Vol. 411, no. 012013. — arXiv : hep-th/1209.5109.
- [134] Kauffman Louis H. Virtual knot theory // European J. Comb. — 1999. — Vol. 20. — P. 663–690. — arXiv : hep-th/9811028.
- [135] Morozov A., Morozov And., Morozov Ant. On possible existence of HOMFLY polynomials for virtual knots // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B737. — P. 48–56. — arXiv : hep-th/1407.6319.
- [136] Evolution method and HOMFLY polynomials for virtual knots / L. Bishler, A. Morozov, And. Morozov, Ant. Morozov // Int. J. of Mod. Phys. — 2015. — Vol. A30, no. 1550074. — arXiv : hep-th/1411.2569.
- [137] Mironov A., Morozov A., Popolitov A. Matrix model and dimensions for hypercube vertices. — 2015. — arXiv : hep-th/1508.01957.
- [138] Super-A-polynomials for twist knots / S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, X. Sun // JHEP. — 2012. — Vol. 1211, no. 157. — arXiv : hep-th/1209.1409.

А. Явные формулы для перебрасывающих матриц

А.1. Диагональные \mathcal{R} -матрицы и перебрасывающих матриц для шестипрядной косы

Матрицы 5×5 для представления $[5, 1]$

$$\mathcal{R}_{[5,1]} = \begin{pmatrix} q & & & & \\ & q & & & \\ & & q & & \\ & & & q & \\ & & & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[5,1]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} \\ & & & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} \end{pmatrix}, \quad V_{[5,1]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -\frac{1}{[3]} & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \\ & & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \frac{1}{[3]} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_{[5,1]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -\frac{1}{[4]} & \frac{\sqrt{[3][5]}}{[4]} & & \\ & \frac{\sqrt{[3][5]}}{[4]} & \frac{1}{[4]} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_{[5,1]} = \begin{pmatrix} & -\frac{1}{[5]} & \frac{\sqrt{[4][6]}}{[5]} & & \\ & \frac{\sqrt{[4][6]}}{[5]} & \frac{1}{[5]} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы 5×5 для представления $[3, 3]$

$$\mathcal{R}_{[3,3]} = \begin{pmatrix} q & & & & \\ & q & & & \\ & & -\frac{1}{q} & & \\ & & & q & \\ & & & & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}, \quad U_{[3,3]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & \\ & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} & & \\ & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} \\ & & & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} \end{pmatrix}, \quad V_{[3,3]} = \begin{pmatrix} & -\frac{1}{[3]} & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & & \\ & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \frac{1}{[3]} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$W_{[3,3]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & \\ & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \\ & & \frac{1}{[2]} & \frac{1}{[2]} & \\ & & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \frac{1}{[2]} & \end{pmatrix}, \quad Y_{[3,3]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы 9×9 для представления $[4, 2]$

$$\mathcal{R}_{[4,2]} = \begin{pmatrix} q & & & & & & & & \\ & q & & & & & & & \\ & & q & & & & & & \\ & & & \frac{1}{q} & & & & & \\ & & & & q & & & & \\ & & & & & q & & & \\ & & & & & & \frac{1}{q} & & \\ & & & & & & & q & \\ & & & & & & & & \frac{1}{q} \end{pmatrix}, U_{[4,2]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & & & & \\ & & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & \\ & & & & & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} & & \\ & & & & & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} \\ & & & & & & & -\frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & -\frac{1}{[2]} \end{pmatrix},$$

$$V_{[4,2]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \frac{1}{[3]} & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & & & & & & \\ & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \frac{1}{[3]} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -\frac{1}{[3]} & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & & & \\ & & & & \frac{\sqrt{[2][4]}}{[3]} & \frac{1}{[3]} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$W_{[4,2]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{[4]} & \frac{\sqrt{[3][5]}}{[4]} & & & & & & & \\ \frac{\sqrt{[3][5]}}{[4]} & \frac{1}{[4]} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & \\ & & & & & -\frac{1}{[2]} & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & & \\ & & & & & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \frac{1}{[2]} & & \\ & & & & & & \frac{\sqrt{[3]}}{[2]} & \frac{1}{[2]} & \\ & & & & & & & \frac{1}{[2]} & \end{pmatrix},$$

A.2. Перебрасывающие матрицы для семипрядной косы

$$c_k \equiv \frac{1}{[k]_q}, \quad s_k \equiv \frac{\sqrt{[k-1]_q[k+1]_q}}{[k]_q}$$

Матрицы 6×6 для представления [6, 1]

$$U_{61} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -c_2 & -s_2 \\ & & & & s_2 & -c_2 \end{pmatrix},$$

$$V_{61} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -c_3 & s_3 & \\ & & & s_3 & c_3 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_{61} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -c_4 & s_4 & & \\ & & s_4 & c_4 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_{61} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -c_5 & s_5 & & & \\ & s_5 & c_5 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z_{61} = \begin{pmatrix} -c_6 & s_6 & & & & \\ s_6 & c_6 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Б. Разложение по характеристам для полиномов ХОМФЛИ

Б.1. Все 5-прядные узлы с 9 пересечениями

Оставшиеся коэффициенты получаются с помощью симметрии $q \rightarrow -1/q$, $Q \rightarrow Q^T$, диаграммы Юнга Q и Q^T отвечают дуальным разбиением, т.е., переходят друг в друга при отражении относительно главной диагонали, а именно:
 $[5] \mapsto [11111]$, $[41] \mapsto [2111]$, $[32] \mapsto [221]$, а также $[311] \mapsto [311]$.

	$(a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2, d_2 a_3, b_3, c_3, d_3, \dots)$	S_5^*	S_{41}^*	S_{32}^*	
92	$(-3, -1, 0, 0 1, -1, -1, 0 0, 1, -1, -1 0, 0, 1, -1)$	q^{-6}	$-q^2 + 4 - 7q^{-2} + 6q^{-4} - 3q^{-6}$	$-q^8 + q^6 - 2q^2 + 6 - 9q^{-2} + 8q^{-4} - 5q^{-6} + 2q^{-8}$	
95	$(-2, -1, 0, 0 1, -2, -1, 0 0, 1, -1, -1 0, 0, 1, -1)$	q^{-6}	$-2q^2 + 7 - 10q^{-2} + 8q^{-4} - 4q^{-6}$	$-q^8 + q^6 - 4q^2 + 9 - 12q^{-2} + 11q^{-4} - 6q^{-6} + 2q^{-8}$	
98	$(-2, -1, 0, 0 1, -2, -1, 0 0, 1, -1, -1 0, 0, 1, -1)$	q^{-2}	$-q^4 + 3q^2 - 5 + 4q^{-2} - q^{-4} - 2q^{-6} + q^{-8}$	$-q^8 + 3q^6 - 6q^4 + 10q^2 - 12 + 10q^{-2} - 6q^{-4} + 2q^{-6}$	
912	$(-2, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, 1, -1, -1 0, 0, 1, -1)$	q^{-4}	$1 - 4q^{-2} + 5q^{-4} - 4q^{-6} + q^{-8}$	$-q^8 + 2q^6 - 3q^4 + 4q^2 - 3 + 2q^{-2} - 2q^{-4} + q^{-6}$	
914	$(2, -1, 0, 0 1, 0, 1, 0 0, -1, 1, 1 0, 0, -1, 1)$	q^4	$1 - 4q^2 + 5q^4 - 4q^6 + q^8$	$-q^8 + 2q^6 - 3q^4 + 4q^2 - 3 + 2q^{-2} - 2q^{-4} + q^{-6}$	
915	$(3, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, 1, 0, 1 0, 0, -1, 1)$	q^4	$q^8 - 4q^6 + 4q^4 - 2q^2 - 1 + 2q^{-2} - q^{-4}$	$q^8 - q^6 - q^4 + 4q^2 - 7 + 8q^{-2} - 6q^{-4} + 3q^{-6} - q^{-8}$	
919	$(1, -1, 0, 0 1, -2, -1, 0 0, 1, 0, 1 0, 0, -1, 1)$	1	$-q^8 + 3q^6 - 3q^4 - q^2 + 4 - 5q^{-2} + 2q^{-4}$	$3q^4 - 8q^2 + 12 - 12q^{-2} + 8q^{-4} - 4q^{-6} + q^{-8}$	
921	$(2, 1, 0, 0 -1, 1, -1, 0 0, 1, 0, 1 0, 0, -1, 1)$	q^4	$q^8 - 5q^6 + 6q^4 - 4q^2 + 2q^{-2} - q^{-4}$	$q^8 - 2q^6 + 2q^4 + 2q^2 - 6 + 7q^{-2} - 6q^{-4} + 3q^{-6} - q^{-8}$	
925	$(-2, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, -2, 0, 1 0, 0, -1, 1)$	q^{-4}	$-q^4 + 3q^2 - 5 + 3q^{-2} - 2q^{-4} + q^{-8}$	$q^8 + 4q^6 - 8q^4 + 13q^2 - 15 + 13q^{-2} - 9q^{-4} + 4q^{-6} - q^{-8}$	
935	$(-2, -1, 0, 0 1, -2, -1, 0 0, 2, 0, -1 0, 0, -1, 0)$	q^{-6}	$-q^4 + q^2 + 3 - 8q^{-2} + 10q^{-4} - 7q^{-6} + q^{-8}$	$-q^8 + 2q^6 - 4q^4 + 2q^2 + 4 - 9q^{-2} + 11q^{-4} - 9q^{-6} + 5q^{-8} - q^{-10}$	
937	$(-2, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, 1, 0, 0 1, 0, 0, -1 0, 0, 1, -1, 1)$	1	$-q^6 + 7q^4 - 15q^2 + 15 - 10q^{-2} + 3q^{-4}$	$-q^{10} + 4q^8 - 11q^6 + 22q^4 - 30q^2 + 31 - 25q^{-2} + 14q^{-4} - 5q^{-6} + q^{-8}$	
939	$(2, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, -1, 0, 0 1, 0, 0, 1 0, 0, -1, 1, 1)$	q^4	$2q^8 - 7q^6 + 8q^4 - 6q^2 + 2$	$-q^{10} + 3q^8 - 4q^6 + 4q^4 - 4 + 6q^{-2} - 6q^{-4} + 3q^{-6} - q^{-8}$	
941	$(2, 1, 0, 0 -1, 0, -1, 0 0, -2, 0, 1 0, 0, 1, 0 0, -1, 1, 1)$	q^2	$-2q^8 + 7q^6 - 12q^4 + 11q^2 - 6 + q^{-4}$	$q^{10} - 4q^8 + 8q^6 - 10q^4 + 9q^2 - 3 - 3q^{-2} + 5q^{-4} - 4q^{-6} + q^{-8}$	
			S_{221}^*	S_{2111}^*	S_{11111}^*
92			$-q^{-8} + q^{-6} - 2q^{-2} + 6 - 9q^2 + 8q^4 - 5q^6 + 2q^8$	$-q^{-2} + 4 - 7q^2 + 6q^4 - 3q^6$	q^6
95			$-q^{-8} + q^{-6} - 4q^{-2} + 9 - 12q^2 + 11q^4 - 6q^6 + 2q^8$	$-2q^{-2} + 7 - 10q^2 + 8q^4 - 4q^6$	q^6
98			$-q^{-8} + 3q^{-6} - 6q^{-4} + 10q^{-2} - 12 + 10q^2 - 6q^4 + 2q^6$	$-q^{-4} + 3q^{-2} - 5 + 4q^2 - q^4 - 2q^6 + q^8$	q^2
912			$-q^{-8} + 2q^{-6} - 3q^{-4} + 4q^{-2} - 3 + 2q^4 - 2q^6 + q^8$	$1 - 4q^2 + 5q^4 - 4q^6 + q^8$	q^4
914			$-q^{-8} + 2q^{-6} - 3q^4 + 4q^2 - 3 + 2q^{-4} - 2q^{-6} + q^{-8}$	$1 - 4q^{-2} + 5q^{-4} - 4q^{-6} + q^{-8}$	q^{-4}
915			$q^{-8} - q^{-6} - q^{-4} + 4q^{-2} - 7 + 8q^2 - 6q^4 + 3q^6 - q^8$	$q^{-8} - 4q^{-6} + 4q^{-4} - 2q^{-2} - 1 + 2q^2 - q^4$	q^{-4}
919			$3q^{-4} - 8q^{-2} + 12 - 12q^2 + 8q^4 - 4q^6 + q^8$	$-q^{-8} + 3q^{-6} - 3q^{-4} - q^{-2} + 4 - 5q^2 + 2q^4$	1
921			$q^{-8} - 2q^{-6} + 2q^{-4} + 2q^{-2} - 6 + 7q^2 - 6q^4 + 3q^6 - q^8$	$q^{-8} - 5q^{-6} + 6q^{-4} - 4q^{-2} + 2q^2 - q^4$	q^{-4}
925			$-q^{-8} + 4q^{-6} - 8q^{-4} + 13q^{-2} - 15 + 13q^2 - 9q^4 + 4q^6 - q^8$	$-q^{-4} + 3q^{-2} - 5 + 3q^2 - 2q^4 + q^6$	q^4
935			$-q^{-8} + 2q^{-6} - 4q^{-4} + 2q^{-2} + 4 - 9q^2 + 11q^4 - 9q^6 + 5q^8 - q^{10}$	$-q^{-4} + q^{-2} + 3 - 8q^2 + 10q^4 - 7q^6 + q^8$	q^6
937			$-q^{-10} + 4q^{-8} - 11q^{-6} + 22q^{-4} - 30q^{-2} + 31 - 25q^2 + 14q^4 - 5q^6 + q^8$	$-q^{-6} + 7q^{-4} - 15q^{-2} + 15 - 10q^2 + 3q^4$	1
939			$-q^{-10} + 3q^{-8} - 4q^{-6} + 4q^{-4} - 4 + 6q^2 - 6q^4 + 3q^6 - q^8$	$2q^{-8} - 7q^{-6} + 8q^{-4} - 6q^{-2} + 2$	q^{-4}
941			$q^{-10} - 4q^{-8} + 8q^{-6} - 10q^{-4} + 9q^{-2} - 3 - 3q^2 + 5q^4 - 4q^6 + q^8$	$-2q^{-8} + 7q^{-6} - 12q^{-4} + 11q^{-2} - 6 + q^4$	q^{-2}

Б.2. Разложение по характерам полиномов ХОМФЛИ для 6-прядных узлов с 10 пересечениями

Оставшиеся коэффициенты получаются с помощью симметрии $q \rightarrow -1/q$, $Q \rightarrow Q^T$, диаграммы Юнга Q и Q^T отвечают дуальным разбиением, т.е., переходят друг в друга при отражении относительно главной диагонали, а именно:

$$[6] \mapsto [111111], [51] \mapsto [21111], [42] \mapsto [2211], [411] \mapsto [3111], [33] \mapsto [222], \text{ а также } [321] \mapsto [321].$$

	$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 \dots)$	S_6^*	S_{51}^*	S_{42}^*
10 ₁	$(-2, -1, 0, 0, 0 1, -1, -1, 0, 0 0, 1, -1, -1, 0 0, 0, 1, 0, 1 0, 0, 0, -1, 1)$	q^{-3}	$3q^3 - 7q + 5q^{-1} - q^{-3} - 2q^{-5} + q^{-7}$	$q^9 - q^7 - 4q^5 + 14q^3 - 24q + 25q^{-1} - 16q^{-3} + 6q^{-5} - q^{-7}$
10 ₃	$(-2, -1, 0, 0, 0 1, -1, -1, 0, 0 0, 1, 0, 1, 0 0, 0, -1, 1, 1 0, 0, 0, -1, 1)$	q^{-1}	$2q^5 - 4q^3 + 2q - q^{-3} - q^{-5} + q^{-7}$	$q^9 - 3q^7 + 5q^5 - 4q^3 - 3q + 10q^{-1} - 10q^{-3} + 5q^{-5} - q^{-7}$
10 ₁₃	$(-2, -1, 0, 0, 0 1, 0, 1, 0, 0 0, -1, 0, -1, 0 0, 0, 1, 0, 1 0, 0, 0, -1, 1)$	q^{-1}	$q^5 - 5q + 7q^{-1} - 6q^{-3} + 2q^{-5}$	$q^9 - 4q^7 + 7q^5 - 5q^3 - 3q + 11q^{-1} - 13q^{-3} + 9q^{-5} - 4q^{-7} + q^{-9}$
10 ₃₅	$(-1, 1, 0, 0, 0 -1, 1, 1, 0, 0 0, -1, 0, -1, 0 0, 0, 1, 0, 1 0, 0, 0, -1, 1)$	q	$2q^5 - 6q^3 + 6q - 3q^{-1} - q^{-3} + q^{-5}$	$q^9 - 5q^7 + 13q^5 - 21q^3 + 21q - 11q^{-1} + 4q^{-5} - 3q^{-7} + q^{-9}$
10 ₅₈	$(1, -1, 0, 0, 0 1, 0, 1, 0, 0 0, -1, 0, -1, 0 0, 0, -2, 0, 1 0, 0, 0, -1, 1)$	q	$2q^5 - 4q^3 + 2q + q^{-1} - 4q^{-3} + 2q^{-5}$	$q^9 - 4q^7 + 6q^5 - 4q^3 - 5q + 16q^{-1} - 20q^{-3} + 15q^{-5} - 6q^{-7} + q^{-9}$
		S_{411}^*	S_{321}^*	S_{33}^*
10 ₁	$-6q^5 + 16q^3 - 20q + 19q^{-1} - 14q^{-3} + 9q^{-5} - 3q^{-7}$		$q^7 - 6q^5 + 12q^3 - 16q + 16q^{-1} - 12q^{-3} + 7q^{-5} - 3q^{-7} + q^{-9}$	$-2q^9 + 10q^7 - 24q^5 + 41q^3 - 52q + 52q^{-1} - 41q^{-3} + 24q^{-5} - 10q^{-7} + 2q^{-9}$
10 ₃	$-2q^7 + 2q^5 + q^3 - 2q + 4q^{-1} - 5q^{-3} + 6q^{-5} - 3q^{-7}$		$q^3 - 4q + 6q^{-1} - 6q^{-3} + 5q^{-5} - 3q^{-7} + q^{-9}$	$-q^9 + 4q^7 - 8q^5 + 12q^3 - 14q + 14q^{-1} - 12q^{-3} + 8q^{-5} - 4q^{-7} + q^{-9}$
10 ₃	$q^9 - 5q^7 + 5q^5 + q^3 - 4q + 6q^{-1} - 8q^{-3} + 10q^{-5} - 6q^{-7} + q^{-9}$		$q^9 - 3q^7 + 3q^5 - q^3 - 2q + 5q^{-1} - 5q^{-3} + 2q^{-5}$	$q^7 - 4q^5 + 9q^3 - 13q + 13q^{-1} - 9q^{-3} + 4q^{-5} - q^{-7}$
10 ₃₅	$q^9 - 6q^7 + 12q^5 - 15q^3 + 17q - 14q^{-1} + 7q^{-3} + 2q^{-5} - 4q^{-7} + q^{-9}$		$q^9 - 4q^7 + 8q^5 - 11q^3 + 12q - 9q^{-1} + 4q^{-3} - q^{-5}$	$q^9 - 5q^7 + 13q^5 - 24q^3 + 32q - 32q^{-1} + 24q^{-3} - 13q^{-5} + 5q^{-7} - q^{-9}$
10 ₅₈	$q^9 - 4q^7 + 4q^5 + 2q^3 - 7q + 10q^{-1} - 12q^{-3} + 14q^{-5} - 9q^{-7} + 2q^{-9}$		$q^7 - 2q^5 + 3q^3 - 6q + 10q^{-1} - 11q^{-3} + 9q^{-5} - 5q^{-7} + q^{-9}$	$-2q^9 + 8q^7 - 16q^5 + 22q^3 - 24q + 24q^{-1} - 22q^{-3} + 16q^{-5} - 8q^{-7} + 2q^{-9}$

Б.3. Пример разложения по характеристам для 7-рядного узла с 12 пересечениями

Оставшиеся коэффициенты получаются с помощью симметрии $q \rightarrow -1/q$, $Q \rightarrow Q^T$, диаграммы Юнга Q и Q^T отвечают дуальным разбиением, т.е., переходят друг в друга при отражении относительно главной диагонали, а именно: $[7] \mapsto [1111111]$, $[61] \mapsto [211111]$, $[52] \mapsto [22111]$, $[511] \mapsto [31111]$, $[43] \mapsto [2221]$, $[421] \mapsto [3211]$, $[331] \mapsto [322]$, а также $[4111] \mapsto [4111]$ и $[331] \mapsto [331]$.

Узел $12a_{0125}$	
$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2 a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, f_3)$ $(1, -1, -1, 0, 0, 0 1, 0, -1, -1, 1, -1 0, -1, 1, 2, 1, -1)$	
S_7^*	1
S_{61}^*	$q^6 - 5q^2 + 7 - 5q^{-2} + q^{-6}$
S_{52}^*	$q^{10} - 3q^8 + 16q^4 - 41q^2 + 54 - 41q^{-2} + 16q^{-4} - 3q^{-8} + q^{-10}$
S_{511}^*	$q^{10} - 2q^8 - 6q^6 + 23q^4 - 35q^2 + 39 - 35q^{-2} + 23q^{-4} - 6q^{-6} - 2q^{-8} + q^{-10}$
S_{43}^*	$-q^{10} + 7q^8 - 25q^6 + 56q^4 - 89q^2 + 104 - 89q^{-2} + 56q^{-4} - 25q^{-6} + 7q^{-8} - q^{-10}$
S_{421}^*	$q^{12} - 9q^{10} + 35q^8 - 82q^6 + 135q^4 - 174q^2 + 188 - 174q^{-2} + 135q^{-4} - 82q^{-6} + 35q^{-8} - 9q^{-10} + q^{-12}$
S_{4111}^*	$q^{12} - 9q^{10} + 29q^8 - 48q^6 + 56q^4 - 62q^2 + 65 - 62q^{-2} + 56q^{-4} - 48q^{-6} + 29q^{-8} - 9q^{-10} + q^{-12}$
S_{331}^*	$q^{12} - 8q^{10} + 29q^8 - 66q^6 + 112q^4 - 151q^2 + 166 - 151q^{-2} + 112q^{-4} - 66q^{-6} + 29q^{-8} - 8q^{-10} + q^{-12}$

В. (Поли)раскрашенные полиномы ХОМФЛИ, вычисленные методом каблирования

В.1. Полиномы ХОМФЛИ 4-прядных узлов в представлении [2]

Обозначения как в работе [138]: матрица коэффициентов задает полином от A^2 и q^2 как

$$q^{10}A^{16} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = q^{10}A^{16} + 2q^{12}A^{16} + 3q^{10}A^{18} + 4q^{12}A^{18}$$

Узел 6_1

$$H_{[2]} = \frac{1}{q^8 A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7_2

$$H_{[2]} = \frac{1}{q^{14} A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7₄

$$H_{[2]} = \frac{1}{q^6 A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & 6 & 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 & 6 & 4 & -5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 5 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7₆

$$H_{[2]} = \frac{1}{q^{16} A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 & 8 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 & -7 & -6 & 10 & -1 & -8 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 7 & -4 & -7 & 10 & 2 & -7 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -4 & 4 & 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7₇

$$H_{[2]} = \frac{1}{q^{10} A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -6 & -2 & 10 & -2 & -6 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 7 & -8 & -6 & 16 & -1 & -10 & 5 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & -7 & -8 & 11 & 1 & -10 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & -3 & 8 & 2 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В.2. Полиномы ХОМФЛИ 3-рядных узлов в представлении [21]

Обозначения как в приложении В.1.

Узел 3_1

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{10}A^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Узел 4_1

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{10}A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 5 & -4 & 5 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & 6 & -8 & 7 & -8 & 6 & -5 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 5 & -4 & 5 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 5_2

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{14}A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -5 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -7 & 9 & -11 & 13 & -11 & 9 & -7 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -6 & 9 & -12 & 13 & -14 & 13 & -12 & 9 & -6 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & -5 & 7 & -8 & 7 & -8 & 7 & -5 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 6₂

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{20}A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -5 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 5 & -6 & 4 & -6 & 5 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -6 & 12 & -14 & 17 & -16 & 21 & -18 & 18 & -18 & 21 & -16 & 17 & -14 & 12 & -6 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -8 & 12 & -22 & 24 & -33 & 35 & -42 & 39 & -44 & 39 & -42 & 35 & -33 & 24 & -22 & 12 & -8 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -7 & 13 & -14 & 24 & -22 & 29 & -26 & 32 & -26 & 29 & -22 & 24 & -14 & 13 & -7 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & -5 & 3 & -8 & 4 & -8 & 4 & -8 & 3 & -5 & 2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 6₃

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{20}A^6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 5 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -4 & 6 & -5 & 7 & -5 & 6 & -4 & 4 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 9 & -17 & 23 & -36 & 41 & -55 & 56 & -62 & 56 & -55 & 41 & -36 & 23 & -17 & 9 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 10 & -16 & 31 & -40 & 60 & -71 & 90 & -92 & 105 & -92 & 90 & -71 & 60 & -40 & 31 & -16 & 10 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -6 & 9 & -17 & 23 & -36 & 41 & -55 & 56 & -62 & 56 & -55 & 41 & -36 & 23 & -17 & 9 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -4 & 6 & -5 & 7 & -5 & 6 & -4 & 4 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 5 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7₂

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{24}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -6 & 10 & -11 & 12 & -15 & 16 & -15 & 15 & -15 & 16 & -15 & 12 & -11 & 10 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -11 & 17 & -23 & 31 & -35 & 38 & -41 & 42 & -40 & 42 & -41 & 38 & -35 & 31 & -23 & 17 & -11 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -9 & 16 & -22 & 28 & -33 & 40 & -41 & 39 & -41 & 44 & -41 & 39 & -41 & 40 & -33 & 28 & -22 & 16 & -9 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 5 & -9 & 10 & -14 & 13 & -14 & 11 & -10 & 7 & -6 & 7 & -10 & 11 & -14 & 13 & -14 & 10 & -9 & 5 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -8 & 9 & -13 & 13 & -18 & 13 & -13 & 9 & -8 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 5 & -3 & 8 & -4 & 8 & -4 & 8 & -3 & 5 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 7₅

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{24}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 5 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -6 & 9 & -11 & 12 & -14 & 16 & -14 & 12 & -11 & 9 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 9 & -12 & 17 & -24 & 27 & -26 & 27 & -24 & 17 & -12 & 9 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 10 & -17 & 24 & -32 & 41 & -47 & 51 & -55 & 58 & -56 & 58 & -55 & 51 & -47 & 41 & -32 & 24 & -17 & 10 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 8 & -18 & 30 & -48 & 69 & -92 & 111 & -133 & 146 & -156 & 158 & -156 & 146 & -133 & 111 & -92 & 69 & -48 & 30 & -18 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 9 & -19 & 33 & -49 & 69 & -90 & 107 & -121 & 130 & -134 & 130 & -121 & 107 & -90 & 69 & -49 & 33 & -19 & 9 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -9 & 15 & -20 & 27 & -32 & 38 & -40 & 42 & -40 & 38 & -32 & 27 & -20 & 15 & -9 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 8_2

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -6 & 10 & -11 & 12 & -15 & 16 & -15 & 15 & -15 & 16 & -15 & 12 & -11 & 10 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -5 & 9 & -13 & 20 & -28 & 29 & -31 & 33 & -35 & 33 & -31 & 29 & -28 & 20 & -13 & 9 & -5 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -7 & 14 & -17 & 22 & -22 & 26 & -20 & 19 & -12 & 12 & -7 & 8 & -4 & 8 & -7 & 12 & -12 & 19 & -20 & 26 & -22 & 22 & -17 & 14 & -7 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -8 & 13 & -25 & 30 & -45 & 50 & -62 & 58 & -69 & 64 & -71 & 62 & -71 & 65 & -71 & 62 & -71 & 64 & -69 & 58 & -62 & 50 & -45 & 30 & -25 & 13 & -8 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -7 & 15 & -18 & 32 & -32 & 46 & -43 & 57 & -48 & 61 & -52 & 64 & -52 & 64 & -52 & 61 & -48 & 57 & -43 & 46 & -32 & 32 & -18 & 15 & -7 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & -7 & 4 & -12 & 7 & -15 & 8 & -18 & 8 & -18 & 9 & -18 & 8 & -18 & 8 & -15 & 7 & -12 & 4 & -7 & 2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 & 5 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 8_5

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 8 & -4 & 13 & -6 & 16 & -8 & 20 & -8 & 16 & -6 & 13 & -4 & 8 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 & 3 & -14 & 10 & -29 & 18 & -46 & 27 & -62 & 31 & -70 & 36 & -70 & 31 & -62 & 27 & -46 & 18 & -29 & 10 & -14 & 3 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & -10 & 26 & -31 & 61 & -61 & 102 & -91 & 143 & -114 & 173 & -133 & 194 & -136 & 194 & -133 & 173 & -114 & 143 & -91 & 102 & -61 & 61 & -31 & 26 & -10 & 7 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -11 & 16 & -35 & 40 & -68 & 64 & -97 & 77 & -115 & 83 & -130 & 84 & -136 & 89 & -136 & 84 & -130 & 83 & -115 & 77 & -97 & 64 & -68 & 40 & -35 & 16 & -11 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 & -7 & 16 & -14 & 22 & -11 & 18 & 8 & 0 & 30 & -16 & 46 & -23 & 50 & -23 & 46 & -16 & 30 & 0 & 8 & 18 & -11 & 22 & -14 & 16 & -7 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -10 & 14 & -26 & 30 & -46 & 42 & -49 & 44 & -54 & 44 & -49 & 42 & -46 & 30 & -26 & 14 & -10 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -6 & 9 & -8 & 7 & -5 & 5 & -1 & 0 & -1 & 5 & -5 & 7 & -8 & 9 & -6 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 8_7

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 6 & -10 & 11 & -12 & 15 & -16 & 15 & -15 & 15 & -16 & 15 & -12 & 11 & -10 & 6 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 & 7 & -6 & 11 & -17 & 19 & -21 & 29 & -30 & 32 & -32 & 32 & -30 & 29 & -21 & 19 & -17 & 11 & -6 & 7 & -4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 11 & -23 & 34 & -55 & 75 & -104 & 124 & -155 & 171 & -190 & 198 & -210 & 204 & -210 & 198 & -190 & 171 & -155 & 124 & -104 & 75 & -55 & 34 & -23 & 11 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 11 & -20 & 40 & -57 & 91 & -118 & 159 & -181 & 220 & -233 & 260 & -255 & 273 & -264 & 273 & -255 & 260 & -233 & 220 & -181 & 159 & -118 & 91 & -57 & 40 & -20 & 11 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 11 & -22 & 31 & -49 & 55 & -76 & 78 & -90 & 77 & -85 & 66 & -72 & 56 & -72 & 66 & -85 & 77 & -90 & 78 & -76 & 55 & -49 & 31 & -22 & 11 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 3 & 2 & -5 & 18 & -25 & 45 & -56 & 75 & -78 & 88 & -78 & 75 & -56 & 45 & -25 & 18 & -5 & 2 & 3 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -5 & 9 & -15 & 20 & -27 & 32 & -38 & 40 & -42 & 40 & -38 & 32 & -27 & 20 & -15 & 9 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел δ_9

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -9 & 15 & -20 & 27 & -32 & 38 & -40 & 42 & -40 & 38 & -32 & 27 & -20 & 15 & -9 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 & -1 & -5 & 8 & -18 & 16 & -21 & 20 & -26 & 20 & -21 & 16 & -18 & 8 & -5 & -1 & 1 & -5 & 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & -12 & 25 & -36 & 58 & -74 & 103 & -121 & 155 & -175 & 208 & -224 & 247 & -242 & 247 & -224 & 208 & -175 & 155 & -121 & 103 & -74 & 58 & -36 & 25 & -12 & 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -12 & 22 & -44 & 64 & -103 & 136 & -186 & 225 & -286 & 332 & -389 & 414 & -454 & 459 & -454 & 414 & -389 & 332 & -286 & 225 & -186 & 136 & -103 & 64 & -44 & 22 & -12 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 & -12 & 25 & -36 & 58 & -74 & 103 & -121 & 155 & -175 & 208 & -224 & 247 & -242 & 247 & -224 & 208 & -175 & 155 & -121 & 103 & -74 & 58 & -36 & 25 & -12 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 3 & -5 & 1 & -1 & -5 & 8 & -18 & 16 & -21 & 20 & -26 & 20 & -21 & 16 & -18 & 8 & -5 & -1 & 1 & -5 & 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -9 & 15 & -20 & 27 & -32 & 38 & -40 & 42 & -40 & 38 & -32 & 27 & -20 & 15 & -9 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел δ_{10}

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -5 & 9 & -15 & 20 & -27 & 32 & -38 & 40 & -42 & 40 & -38 & 32 & -27 & 20 & -15 & 9 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -5 & 11 & -13 & 26 & -31 & 50 & -56 & 77 & -78 & 95 & -88 & 95 & -78 & 77 & -56 & 50 & -31 & 26 & -13 & 11 & -5 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -8 & 14 & -33 & 49 & -89 & 119 & -186 & 222 & -303 & 333 & -410 & 414 & -471 & 444 & -471 & 414 & -410 & 333 & -303 & 222 & -186 & 119 & -89 & 49 & -33 & 14 & -8 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 14 & -23 & 51 & -72 & 129 & -159 & 242 & -273 & 371 & -377 & 476 & -454 & 530 & -474 & 530 & -454 & 476 & -377 & 371 & -273 & 242 & -159 & 129 & -72 & 51 & -23 & 14 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -8 & 11 & -26 & 31 & -58 & 58 & -95 & 80 & -124 & 87 & -129 & 76 & -127 & 68 & -127 & 76 & -129 & 87 & -124 & 80 & -95 & 58 & -58 & 31 & -26 & 11 & -8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 4 & 6 & -5 & 30 & -34 & 70 & -72 & 119 & -106 & 132 & -106 & 119 & -72 & 70 & -34 & 30 & -5 & 6 & 4 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -6 & 9 & -16 & 20 & -30 & 32 & -39 & 39 & -47 & 39 & -39 & 32 & -30 & 20 & -16 & 9 & -6 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел δ_{16}

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{30}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -9 & 16 & -27 & 40 & -51 & 61 & -71 & 76 & -77 & 76 & -71 & 61 & -51 & 40 & -27 & 16 & -9 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -5 & 4 & 2 & -19 & 48 & -84 & 130 & -183 & 232 & -260 & 270 & -260 & 232 & -183 & 130 & -84 & 48 & -19 & 2 & 4 & -5 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -11 & 22 & -40 & 67 & -100 & 133 & -170 & 206 & -229 & 236 & -240 & 238 & -232 & 222 & -232 & 238 & -240 & 236 & -229 & 206 & -170 & 133 & -100 & 67 & -40 & 22 & -11 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & 21 & -46 & 91 & -160 & 254 & -375 & 518 & -674 & 827 & -971 & 1098 & -1187 & 1246 & -1264 & 1246 & -1187 & 1098 & -971 & 827 & -674 & 518 & -375 & 254 & -160 & 91 & -46 & 21 & -8 & 2 \\ -1 & 4 & -12 & 30 & -62 & 113 & -188 & 296 & -426 & 573 & -733 & 890 & -1023 & 1128 & -1198 & 1218 & -1198 & 1128 & -1023 & 890 & -733 & 573 & -426 & 296 & -188 & 113 & -62 & 30 & -12 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -13 & 23 & -38 & 62 & -97 & 133 & -173 & 217 & -250 & 272 & -280 & 272 & -250 & 217 & -173 & 133 & -97 & 62 & -38 & 23 & -13 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -9 & 19 & -33 & 46 & -61 & 78 & -90 & 96 & -98 & 96 & -90 & 78 & -61 & 46 & -33 & 19 & -9 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 8₂₀

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{22}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -7 & -5 & -11 & -5 & -14 & -6 & -14 & -5 & -11 & -5 & -7 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & 10 & -5 & 17 & -8 & 24 & -6 & 26 & -6 & 26 & -6 & 24 & -8 & 17 & -5 & 10 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 5 & -10 & 9 & -14 & 9 & -16 & 6 & -15 & 4 & -15 & 6 & -16 & 9 & -14 & 9 & -10 & 5 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 3 & -4 & 7 & -8 & 14 & -8 & 7 & -4 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 4 & -8 & 8 & -7 & 8 & -8 & 4 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Узел 8₂₁

$$H_{[2,1]} = \frac{1}{q^{22}A^6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -5 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 4 & -6 & 7 & -12 & 11 & -11 & 11 & -12 & 7 & -6 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 8 & -7 & 14 & -8 & 14 & -7 & 8 & 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & 12 & -25 & 30 & -51 & 58 & -83 & 85 & -106 & 93 & -106 & 85 & -83 & 58 & -51 & 30 & -25 & 12 & -8 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 10 & -13 & 29 & -36 & 59 & -65 & 98 & -93 & 121 & -108 & 121 & -93 & 98 & -65 & 59 & -36 & 29 & -13 & 10 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 2 & -14 & 9 & -25 & 20 & -38 & 23 & -38 & 20 & -25 & 9 & -14 & 2 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & -4 & 11 & -7 & 11 & -7 & 11 & -4 & 6 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В.3. Полиномы ХОМФЛИ для узла 4_1 и зацепления 5_1^2 в различных представлениях

Обозначения как в приложении В.1.

В.3.1. Раскрашенные полиномы для узла-восьмерки (4_1)

Ответы нормированы на специальные полиномы Шура (1.54) соответствующего представления.

Представление [2,2]

$$H_{22}^{4_1} = \frac{1}{q^{16}A^8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 6 & 2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -5 & -7 & 0 & 6 & 0 & -7 & -5 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 4 & -3 & -5 & 4 & 13 & 4 & -5 & -3 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -5 & -7 & 0 & 6 & 0 & -7 & -5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 6 & 2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Представление [3,1]

$$H_{31}^{4_1} = \frac{1}{q^{18}A^8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 5 & -1 & -2 & 4 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -5 & 3 & -2 & -6 & 9 & -5 & -6 & 7 & -8 & -1 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 & -7 & 12 & -1 & -8 & 15 & -8 & -1 & 12 & -7 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -5 & 5 & -1 & -8 & 7 & -6 & -5 & 9 & -6 & -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & 4 & -2 & -1 & 5 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В.3.2. Полираскрашенные полиномы для зацепления Уайтхеда (5_1^2)

Ответы нормированы на произведение двух специальных полиномов Шура (1.54) соответствующих представлений.

Представления [1] и [3,2,1]

$$H_{1 \otimes 321}^{5_1^2} = \frac{1}{q^{12} A^3 (A - A^{-1})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 6 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Представления [2] и [3]

$$H_{2 \otimes 3}^{5_1^2} = \frac{1}{q^{17} A^6 (A - A^{-1})(Aq - A^{-1}q^{-1})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 & -2 & 3 & 3 & -3 & -3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 3 & -3 & -6 & 2 & 9 & -1 & -7 & -1 & 4 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -5 & -3 & 5 & 5 & -3 & -5 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Представления [2] и [5]

$$H_{2 \otimes 5}^{5_1^2} = \frac{1}{q^{25} A^6 (A - A^{-1})(Aq - A^{-1}q^{-1})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 1 & -4 & 1 & 8 & -2 & -2 & 2 & -4 & -2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 4 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Г. Знаки и кратности собственных значений \mathcal{R} -матрицы

Г.1. Перечень нетривиальных кратностей

Ниже перечислены все неприводимые представления, входящие с нетривиальными кратностями в разложение тензорного произведения $T_1 \otimes T_2$ неприводимых представлений с числом клеток в диаграммах Юнга $|T_1| \leq 4$ и $|T_2| \leq 4$. В рассмотренных случаях все кратности не более 2. Такие же кратности имеют собственные значения двупрядных \mathcal{R} -матрицы по модулю знаков, которые в случае различных представлений не определены (см. разд. 4.7), а в случае одинаковых представлений в каждой паре *противоположны* — как указано в таблице в приложении Г.

$$[2, 1] \times [2, 1] \rightarrow [3, 2, 1],$$

$$[2, 1] \times [3, 1] \rightarrow [4, 2, 1], [2, 1] \times [2, 1, 1] \rightarrow [3, 2, 2, 1],$$

(Г.1)

$$\begin{aligned} [2, 1] \times [4, 1] &\rightarrow [5, 2, 1], & [2, 1] \times [3, 2] &\rightarrow [4, 3, 1], & [2, 1] \times [2, 2, 1] &\rightarrow [3, 2, 2, 1], \\ [2, 1] \times [2, 1, 1, 1] &\rightarrow [3, 2, 1, 1, 1], & [3, 1] \times [3, 1] &\rightarrow [5, 2, 1], & [3, 1] \times [3, 1] &\rightarrow [4, 3, 1], \\ [3, 1] \times [2, 1, 1] &\rightarrow [4, 2, 1, 1], & [2, 1, 1] \times [2, 1, 1] &\rightarrow [3, 2, 2, 1], & [2, 1, 1] \times [2, 1, 1] &\rightarrow [3, 2, 1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Г.2. Отступления от правила чередования знаков собственных значений \mathcal{R} -матриц при наличии кратных собственных значений

В таблице ниже перечислены собственные значения \mathcal{R} -матриц в представлениях $|T| \leq 4$ (не более чем с 4 клетками в диаграмме Юнга) *вместе со знаками*, вычисленные с помощью процедуры каблирования для двупрядных узлов. Для кратных представлений (Г.1) используется сокращенное обозначение для *пары* собственных значений: $(\lambda, -\lambda) \equiv \pm\lambda$.

		Q, κ_Q											
		[4]	[31]	[22]	[211]	[1 ⁴]							
T	κ_T	6	2	0	-2	-6							
[2]	1	q^4	-1	q^{-2}									
[11]	-1			q^2	-1	q^{-4}							
		[6]	[51]	[42]	[411]	[33]	[321]	[3111]	[222]	[2211]	[21 ⁴]	[1 ⁶]	
T	κ_T	15	9	5	3	3	0	-3	-3	-5	-9	-15	
[3]	3	q^9	$-q^3$	q^{-1}	$-q^{-3}$								
[21]	0			q^5	$-q^3$	$-q^3$	± 1	q^{-3}	q^{-3}	$-q^{-5}$			
[111]	-3								q^3	$-q$	q^{-3}	$-q^{-9}$	
		[8]	[71]	[62]	[611]	[53]	[521]	[5111]	[44]	[431]	[422]	[4211]	
T	κ_T	28	20	14	12	10	7	4	8	4	2	0	
[4]	6	q^{16}	$-q^8$	q^2	$-q^{-2}$		q^{-4}						
[31]	2			q^{10}	$-q^8$	$-q^6$	$\pm q^3$	1	q^4	± 1	q^{-2}	$-q^{-4}$	
[22]	0								q^8	$-q^4$	q^2		
[211]	-2										q^6	$-q^4$	
[1 ⁴]	-6												
		[41 ⁴]	[332]	[3311]	[3221]	[32111]	[31 ⁵]	[2222]	[22211]	[221 ⁴]	[21 ⁶]	[1 ⁸]	
T	κ_T	-4	0	-2	-4	-7	-12	-8	-10	-14	-20	-28	
[4]	6												
[31]	2	$-q^{-4}$		q^{-6}									
[22]	0			q^{-2}	$-q^{-4}$	q^{-8}							
[211]	-2	1	$-q^4$	q^2	± 1	$\pm q^{-3}$	$-q^{-8}$	q^{-4}	$-q^{-6}$	q^{-10}			
[1 ⁴]	-6								q^4	$-q^2$	q^{-2}	$-q^{-8}$	q^{-16}